Derivadas Parciales

Ejercicio 1. Calcular las derivadas parciales de:

a) $f(x,y,z) = x^{y+z}$, $x > 0$, $y, z \in \mathbb{R}$.

b) $f(x,y,z) = (x+y)^z$, $x > 0, y > 0$, $z \in \mathbb{R}$.

c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}(y))$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Determinar los gradientes en un punto cualquiera de $\mathbb{R}^3$ de las siguientes funciones:

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

b) $f(x,y,z) = xyz$.

Ejercicio 3. Encontrar la derivada direccional de f en a según la dirección de h en los siguientes casos:

a) $f(x,y,z) = xy^2$, $a = (2,1)$ y $h = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

b) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$, $a = (1,1,0)$ y $h = (0,0,1)$.

Ejercicio 4. Calcular el plano tangente a la función $f(x,y) = x^2y - xy^2 + y^5 - 3$ en el punto $(-1,1)$.

Ejercicio 5. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en los puntos $(0,0)$ y $(1,2)$.

Ejercicio 6. Calcular el plano tangente a la función $f(x,y) = x^2 + 3xy + 8y^2$ en el punto $(0,1)$.

Ejercicio 7. Determinar la dirección respecto de la cual la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = xy^2 + yz + z^2x^2$ en el punto $(1,2,-1)$ tenga un valor máximo.

Ejercicio 8. Dada la función $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ hallar en el punto $(2,3)$ la derivada definida según la dirección definida por $y = \frac{2}{3}x$ y el valor máximo de la derivada direccional.

Ejercicio 9. Consideramos las funciones $f(x,y,z) = \left(\mathrm{e}^x + y^2, k\mathrm{e}^z + y\right)$ (donde k es un parámetro) y $g(u,v) = v^2 + \log(u)$ si $u > 0$. ¿Qué valor debe tomar k para que la derivada direccional máxima de $g \circ f$ en $(0,0,0)$ valga 1?

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. Si $z = f(x^2y)$ probar que $x\frac{\partial z}{\partial x} = 2y\frac{\partial z}{\partial y}$.

Ejercicio 11. Sean $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ y $z(x,y) = x^2yf(u) + xy^2g(v)$ donde $u = \frac{x}{y}$ y $v = \frac{y}{x}$. Calcular $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$.

Ejercicio 12. Sea $u = f\left(x^2 + 2yz, y^2 + 2xz\right)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Probar que

$$\left(y^2 - xz\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(x^2 - yz\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(z^2 - xy\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Ejercicio 13. Sea f una función de clase C^2. Calcular las derivadas parciales de F en los siguientes casos:

a) $F(x,y) = f(ax+by)$

b) $F(x,y) = f(ax+by, cx+dy)$

c) $F(x,y) = xf(y,y) + yf(x,x)$

d) $F(x,y) = f(x, xy, x+y)$

Ejercicio 14. Sean f, g las funciones reales dadas por:

- $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $g(x,y) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) + \cos(x+y)$, $0 < x < 2\pi$, $0 < y < 2\pi$.

Se pide:

a) Calcular la matriz jacobiana en el dominio de definición.

b) Calcular la matriz hessiana en los puntos críticos.

c) Estudia la existencia de extremos relativos y de puntos de silla.

Ejercicio 15. Obtener los extremos relativos de las siguientes funciones. Estudia si son absolutos.

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3xy^2$.

c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4$.

d) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$.

Ejercicio 16. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$. Estudia la existencia de extremos relativos de f en función de los parámetros a y b.

Ejercicio 17. Calcular los máximos y los mínimos absolutos de las siguientes funciones en los dominios dados:

a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ en la placa triangular cerrada acotada por las rectas $x = 0$, $y = 4$ e $y = x$.

b) $g(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 3$ en el disco $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$.

c) $h(x,y) = x^2 - y^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 18. Calcular el valor máximo de z en el conjunto $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

Ejercicio 19. Una placa circular plana tiene la forma del disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$. La placa se calienta de manera que la temperatura en un punto (x,y) es

$$T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x.$$

Determinar los puntos con mayor y menor temperatura de la placa, así como la temperatura en cada uno de ellos.

Ejercicio 20. Estudia los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = 3xy - xy^2 - yx^2.$$

¿Son absolutos?

Ejercicio 21. Hallar dos números cuya suma de cuadrados es 18 y la suma de sus cubos sea máxima.

Ejercicio 22. Se trata de montar un radiotelescopio en un planeta recién descubierto. Para minimizar la interferencia se desea emplazarlo donde el campo magnético del planeta sea más débil (aunque, por supuesto, en la superficie). El planeta es esférico con un radio de 6 unidades. La fuerza del campo magnético viene dada por

$$M(x, y, z) = 6x - y^2 + xz + 60$$

basado en un sistema coordenado cuyo origen está en el centro del planeta. ¿Dónde habrá de ser ubicado el radiotelescopio?

Ejercicio 23. Obtener los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2xz - xy$. Estudia si son absolutos o no.

Ejercicio 24. Obtener los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = xy + xz + yz$. Estudia si son absolutos o no.

Ejercicio 25. Encontrar los puntos donde la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ alcanza sus extremos absolutos siendo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 3\}$.

Ejercicio 26. Encontrar los puntos donde la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ alcanza sus extremos absolutos siendo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leqslant 2x, y \geqslant 0\}$.

Ejercicio 27. Estudia los extremos relativos de la función $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^4 + 2x^2y - x^2 + 3y^2$.

Ejercicio 28. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2 [= (x^2 - y)(3x^2 - y)]$.

a) Pruébese que, sobre toda recta de la forma $y = \lambda x$ la función f alcanza un mínimo relativo en $(0, 0)$.

b) Descríbanse los conjuntos de $\mathbb{R}^2$ donde f toma valores positivos y valores negativos. Dedúzcase que f no alcanza en $(0, 0)$ un mínimo relativo.

Ejercicio 29. Estudia los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = xye^{x+2y}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) $f(x, y) = (1 + e^y)\cos(x) - ye^y$, $\forall (x, y) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3pxy$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, según los valores de $p \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 30. Se considera $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + yz$.

a) Calcular y clasificar los puntos críticos de f en $B(0, 1)$.

b) Calcular los extremos absolutos en $\overline{B}(0, 1)$.