# Derivabilidad de funciones de una variable

**Ejercicio 1.** Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{1+x^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 + \frac{\ln(x)}{x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Calcular su imagen.

**Ejercicio 2.** Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

**Ejercicio 3.** Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ \mathrm{e} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

**Ejercicio 4.** Probar que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ para cada $x \in [-1, 1]$.

**Ejercicio 5.** Demostrar que la desigualdad $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ se verifica para todo $x > 0$.

**Ejercicio 6.** Demostrar que $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leqslant |x - y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 7.** Calcula el número de soluciones de la ecuación $x^2 = x\,\mathrm{sen}(x) + \cos(x)$.

**Ejercicio 8.** Calcular el número de ceros y la imagen de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

**Ejercicio 9.** Calcular la imagen de la función $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan(x).$$

**Ejercicio 10.** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a) Encuentra las condiciones que deben verificar los parámetros para que $f$ alcance un máximo y un mínimo relativo.

b) Si se verifican las condiciones anteriores, demuestra que en el punto medio del segmento que une los puntos donde se alcanzan el máximo y el mínimo relativos hay un punto de inflexión.

**Ejercicio 11.** Un cultivador de naranjas estima que, si planta $60$ naranjos, obtendrá una cosecha de $400$ naranjas por árbol. Este número bajará $4$ unidades por cada árbol más que se plante en el mismo terreno. Calcular el número de árboles que hace máxima la cosecha.

**Ejercicio 12.** Calcular la imagen de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}(x^2 - 3)$.

**Ejercicio 13.** Calcular la imagen de $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

**Ejercicio 14.** Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Probar que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una única solución real.

**Ejercicio 15.** Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) + 3x - 1}{2x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2\cos(x)}{x\,\mathrm{sen}(2x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^a - a^x}{a^x - a^a}$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\arctan(\frac{x}{2})}{\mathrm{sen}^2(2x)\cos(\mathrm{sen}(x))}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\cos(x) + a\,\mathrm{sen}(bx))^{\frac{1}{x}}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos(x))\,\mathrm{sen}(4x)}{x^3\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x + \mathrm{sen}(x)}{x - \cos(x)}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left[\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(2 + 3\mathrm{e}^x)}{\sqrt{2 + 3x^2}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (a^x + x)^{\frac{1}{x}}$ donde $a > 0$.

l) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{1 - x}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^x - x}{1 - x - \ln(x)}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{3\,\mathrm{sen}(x) - 3x\cos(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{x}}$

**Ejercicio 16.** Calcular $\max\{\sqrt[n]{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

**Ejercicio 17.** Demostrar que la suma de un número positivo y su recíproco es al menos $2$.

**Ejercicio 18.** ¿Cuál es la longitud mínima de un segmento que tiene un extremo en el eje $x$ el otro sobre el eje $y$ y pasa por el punto $(8, 1)$?

**Ejercicio 19.** Calcula el perímetro máximo que puede tener un rectángulo que tiene dos vértices sobre el eje de abcisas y los otros dos sobre la gráfica de la función $f(x) = 4\,\mathrm{sen}(x)$ con $x \in [0, \pi]$.

**Ejercicio 20.** Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud $a$ se hace girar alrededor de uno de sus catetos. ¿Qué volumen máximo puede tener un cono engendrado de esta manera?

**Ejercicio 21.** Expresar el polinomio $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ en potencias de $(x - 2)$.

**Ejercicio 22.** Calcular un valor aproximado del número real $\alpha$ con un error menor que $10^{-2}$ en los siguientes casos:

a) $\alpha = \sqrt{\mathrm{e}}$

b) $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)$

**Ejercicio 23.** Demostrar que para $0 < a < b$ se verifica $1 - \frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a} - 1$.

**Ejercicio 24.** Una persona desea cortar un pedazo de alambre de longitud $L$ en dos trozos. Uno de ellos se va a doblar en forma de circunferencia, y el otro en forma de cuadrado. ¿Cómo se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas sea máxima? ¿Y para que sea mínima?

**Ejercicio 25.** Probar que para $0 < a < 1$ se verifica $(1+x)^a \leqslant 1 + ax$ para todo $x \geqslant 1$.

**Ejercicio 26.** Determinar el número de raíces de la ecuación $3x^5 + 5x^3 - 30x = m$ según los valores de $m$.

**Ejercicio 27.** Demostrar que para cada $p \geqslant 1$ se verifica $\frac{(1+x)^p}{1+x^p} \leqslant 2^{p-1}$ para todo $x \geqslant 0$.

**Ejercicio 28.** Sea $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ con $A > 0$. Calcular $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{f(x+1)} - \sqrt[3]{f(x)}$.

**Ejercicio 29.** Estudiar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{cases} x^2 \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

**Ejercicio 30.** Estudiar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cosh(x) + \cos(x)$.

**Ejercicio 31.** Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado con un semicírculo de diámetro igual al de la base del rectángulo. Pondremos cristal transparente en el rectángulo y cristal de color en la parte del semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz que el cristal transparente (por unidad de superficie), calcular las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se desea mantener un perímetro constante dado.

**Ejercicio 32.** Demostrar que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio $r$, el de área mínima es el equilátero de altura $3r$.

**Ejercicio 33.** ¿Cuál es la longitud de la escalera más larga que se puede hacer pasar por la esquina que forman, en ángulo recto, dos pasillos de anchuras respectivas $a$ y $b$?

**Ejercicio 34.** ¿Qué número es mayor $999999^{1000000}$ ó $1000000^{999999}$?