Continuidad y límites de funciones de una variable

Ejercicio 1. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ \sqrt[5]{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f y g y la existencia de límites en $+\infty$ y $-\infty$.

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^{\frac{1}{\ln(x)-1}}$, para todo $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\mathrm{e}\}$. Estudiar el comportamiento de f en 0, e y $+\infty$.

Ejercicio 3. Sea $f :]0, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)}$. Calcular el límite de f en 0 y $\frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 4. Sea $f :]0, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (1 + \operatorname{sen}(x))^{\operatorname{cotan}(x)}$. Estudiar el comportamiento de f en 0 y $\frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 5.

a) Da un ejemplo de una función continua cuya imagen no sea un intervalo.

b) Da un ejemplo de una función definida en un intervalo cuya imagen sea un intervalo y que no sea continua.

c) Da un ejemplo de una función continua en todo $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un conjunto acotado.

d) Da un ejemplo de una función continua en $[0, 1[$ tal que $f([0, 1[)$ no sea acotado.

e) Da un ejemplo de una función continua definida en un intervalo abierto acotado y cuya imagen sea un intervalo cerrado y acotado.

Ejercicio 6. Probar que existe un número real positivo x tal que $\ln(x) + \sqrt{x} = 0$.

Ejercicio 7. Probar que la ecuación $\tan(x) = x$ tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 8. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ una función continua. Pruébese que existe $x \in [0, 1]$ de modo que $f(x) = x$.

Ejercicio 9. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua a lo largo de ecuador, pruébese que, en cualquier instante existen dos puntos antípodas sobre el ecuador que están a la misma temperatura.

Ejercicio 10. Un corredor recorre 6 kilómetros en 30 minutos. Probar que existe un intervalo de 5 minutos seguidos en los que recorre exactamente 1 kilómetro.

Ejercicio 11. Un escalador comienza, desde su campamento base, a subir una montaña el sábado a las 7 horas, alcanzando la cima a las 8 horas de la tarde. A las 7 horas del domingo inicia el descenso hacia el campamento base tardando el mismo tiempo que le costó la subida. Demostrar que existe una determinada hora a lo largo del domingo en la que el escalador se encuentra exactamente a la misma altura que a esa misma hora del sábado.

Ejercicio 12. Probar que la ecuación $x + \mathrm{e}^x + \arctan(x) = 0$ tiene una raíz real.

Ejercicio 13. Probar que todo polinomio real de grado impar tiene al menos una raíz real.

Ejercicio 14. Sean $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{x}{1+|x|}\,.$$

Comprobar que f y g son continuas y acotadas pero no tienen ni máximo ni mínimo.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Estudiar el comportamiento de f en el punto 1, en $+\infty$ y en $-\infty$.

Ejercicio 16. Dado un número real positivo a, pruébese que existe $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $x^2 = a$.

Ejercicio 17. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ verificando $b < 0 < a$. Estudiar el comportamiento en cero de las funciones $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \arctan\left(\frac{a}{x}\right) - \arctan\left(\frac{b}{x}\right) \qquad \text{y} \qquad g(x) = xf(x).$$

Ejercicio 18. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f y la existencia de límites en $+\infty$ y $-\infty$.

Ejercicio 19. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x > 0$ y $f(0) = 0$. Estudiar la continuidad de f según los valores de α.