

Variable Compleja I
Tema 7: Teorema local de Cauchy

1 Preliminares

2 Teorema de Cauchy para el triángulo

3 Teorema local de Cauchy

4 Fórmula de Cauchy

Teoremas de Cauchy

Esquema común a todos los teoremas de Cauchy

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \gamma \text{ camino cerrado en } \Omega$$

Hipótesis adicional

\Downarrow

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Preliminares

Descomposición de un segmento

- $z_0, z_2 \in \mathbb{C}, \quad \alpha \in]0, 1[, \quad z_1 = (1 - \alpha)z_0 + \alpha z_2$
- $[z_0, z_1, z_2]^* = [z_0, z_2]^*$
- $\int_{[z_0, z_1]} f(z) dz + \int_{[z_1, z_2]} f(z) dz = \int_{[z_0, z_2]} f(z) dz \quad \forall f \in C([z_0, z_2]^*)$

Triángulos

- Triángulo** de vértices $a, b, c \in \mathbb{C}$: $\Delta(a, b, c) = \bigcup_{z \in [b, c]^*} [a, z]^*$
- $\Delta(a, b, c) = \{ \alpha a + \beta b + \rho c : \alpha, \beta, \rho \in [0, 1], \alpha + \beta + \rho = 1 \}$
- Mínimo conjunto **convexo** que contiene a a, b, c . También es **compacto**
- Diámetro** de un conjunto. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, A acotado:

$$\text{diam } A = \sup \{ |w - z| : z, w \in A \}$$

- Caso de un triángulo: $\text{diam } \Delta(a, b, c) = \max \{ |b - a|, |c - b|, |a - c| \}$

Teorema de Cauchy para el triángulo

Teorema de Cauchy-Goursat

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

$$a, b, c \in \mathbb{C}, \quad \Delta(a, b, c) \subset \Omega$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{[a, b, c, a]} f(z) dz = 0$$

Observación adicional

El teorema anterior sigue siendo cierto si se supone solamente que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ verifica:

$$\exists z_0 \in \Omega : f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\}) \quad \text{y} \quad f \text{ es continua en } z_0$$

Esta versión del teorema parece más general,
¡¡ pero no lo es !! como se verá más adelante

Teorema local de Cauchy

Dominios estrellados

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ es un **dominio estrellado** cuando:

$$\exists \alpha \in \Omega : [\alpha, z]^* \subset \Omega \quad \forall z \in \Omega$$

- Convexo \implies Estrellado
- $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ es un dominio estrellado, pero no es convexo

Teorema de Cauchy para dominios estrellados

Ω dominio estrellado, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Entonces f tiene una primitiva, es decir:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \text{ para todo camino cerrado } \gamma \text{ en } \Omega$$

Observación adicional

Nuevamente basta suponer que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ y f es continua en z_0

Fórmula integral de Cauchy

Lema

Para $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ y $z \in D(a, r)$ se tiene:

$$\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$$

Fórmula de Cauchy para una circunferencia

Sean $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Dados $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$, se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in D(a, r)$$