

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Convocatoria ordinaria de Variable Compleja I
Grado en Matemáticas y Grado en Física y Matemáticas

Ejercicio 1. (2.5 puntos) Sea Ω un abierto y sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ de modo que $\bar{f}g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que $g \equiv 0$ en Ω o f es constante en Ω .

Ejercicio 2. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ no constante, continua en $\bar{D}(0, 1)$ y verificando que $|f(z)| = 1$ para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$.

a) **(1.5 puntos)** Probar que f tiene un número finito (no nulo) de ceros en $D(0, 1)$.

b) **(1 punto)** Probar que $f(\bar{D}(0, 1)) = \bar{D}(0, 1)$.

Ejercicio 3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $a_n = \frac{1}{n}$ y consideramos la función $f_n : \mathbb{C} \setminus \{a_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f_n(z) = \frac{1}{z - a_n}$.

a) **(1.5 puntos)** Si $A = \overline{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}$, probar que la serie de funciones $\sum_{n \geq 1} \frac{f_n(z)}{n^n}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus A$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω .

b) **(1 punto)** Deducir que la función dada por $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(z)}{n^n}$ es holomorfa en Ω y estudiar sus singularidades aisladas.

c) **(Extra: 1 punto)** Probar que para cada $\delta > 0$ el conjunto $f(D(0, \delta) \setminus A)$ es denso en \mathbb{C} .

Ejercicio 4. (2.5 puntos) Sea f holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$. Supongamos que 1 y -1 son polos de f y que

$$\text{Res}(f, 1) = -\text{Res}(f, -1).$$

Probar que f admite primitiva en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Granada, 17 de enero de 2025