

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria ordinaria

Ejercicio 1. (2.5 puntos) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_1^2 \frac{\log(nz + t^2)}{n^2 + t^2} dt.$$

- a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$.
- b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y que su suma es una función holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Ejercicio 2. (2.5 puntos) Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{2a^3} (1 + at) e^{-at}.$$

Ejercicio 3. (2.5 puntos) Probar que una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ que diverge en cero y en infinito tiene al menos un cero. Probar además que el número de ceros de f es finito y mayor o igual que 2 (contando multiplicidad).

Ejercicio 4. (2.5) Probar el **Lema de Schwarz**: Sea $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ verificando $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para cada $z \in D(0, 1)$. Probar que $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$ para cada $z \in D(0, 1)$. Además, si ocurre $|f'(0)| = 1$ o $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in D(0, 1) \setminus \{0\}$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de modo que $f(z) = \alpha z$ para cada $z \in D(0, 1)$.

Pista: Para cada $0 < r < 1$ estimar convenientemente el valor $\max\{|g(z)| : z \in \overline{D}(0, r)\}$ donde la función $g : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ viene dada por $g(0) = f'(0)$ y $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ para cada $z \in D(0, 1)$.

Granada, 10 de junio de 2024