Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria extraordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(\mathrm{e}^z - t)}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R+i\pi, -R+i\pi, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\, dx.$$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando que

$$|f(z)| \leqslant |f(z^2)| \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Probar que f es constante.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sea a una singularidad aislada de una función f. Probar que la función $\operatorname{Re} f$ no puede estar acotada en un entorno reducido de a .

Granada, 18 de julio de 2023