Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Prueba intermedia de Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Ejercicio 1. (**3 puntos**) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos convergente a $w \in \mathbb{C}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a_n\})$ por $f_n(z) = \dfrac{1}{z - a_n}$. Dado el conjunto compacto $K = \{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{w\}$, probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{f_n(z)}{n^2}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω.

Ejercicio 2. (**3 puntos**) Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = \operatorname{sen}(\overline{z}) \qquad g(z) = z(z-1)f(z) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Ejercicio 3. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto verificando $\overline{D}(0,1) \subset \Omega$ y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

a) (**1 punto**) Justificar que para cada $z_0 \in D(0,1)$ se tiene

$$|f(z_0)| \leqslant \text{máx}\{|f(z)| : z \in C(0,1)^*\}.$$

b) (**1.5 puntos**) Demostrar que

$$\text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{D}(0,1)\} = \text{máx}\{|f(z)| : z \in C(0,1)^*\}.$$

c) (**1.5 puntos**) Supongamos que existe $z_0 \in D(0,1)$ tal que $|f(z_0)| = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{D}(0,1)\}$. Dado $r > 0$ con $\overline{D}(z_0, r) \subset D(0,1)$, probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de modo que $f_{|\overline{D}(z_0,r)} \equiv \lambda$. (**Extra: 1 punto**) Probar que, de hecho, $f_{|\overline{D}(0,1)} \equiv \lambda$.

Granada, 10 de mayo de 2021