PARADOJAS EN LA HISTORIA DE LA PROBABILIDAD COMO RECURSO DIDÁCTICO

CARMEN BATANERO, JOSÉ MIGUEL CONTRERAS
Universidad de Granada (España)
CARMEN DÍAZ
Universidad de Huelva (España)
PEDRO ARTEAGA
Universidad de Granada (España)

El objetivo de este taller es analizar algunas paradojas clásicas asociadas al desarrollo histórico de la probabilidad y su utilidad para diseñar situaciones didácticas. Una primera situación didáctica basada en la paradoja de la caja de Bertrand servirá para contextualizar las ideas estocásticas fundamentales y la teoría de situaciones didácticas. El taller se complementa con el análisis de otras paradojas relacionadas con diferentes conceptos probabilísticos.

Aunque la enseñanza de la probabilidad en secundaria tiene ya una gran tradición, los nuevos Decretos de Educación Secundaria (MEC, 2006) sugieren un cambio en la metodología, recomendando la presentación, tanto del enfoque clásico, como del frecuencial de la probabilidad, este último basado en simulaciones o experimentos.

Algunos profesores pudieran no estar familiarizados con la metodología propuesta o no ser conscientes de algunas de las dificultades y sesgos probabilísticos de sus alumnos (Stohl, 2005). Si su formación inicial se centró en las competencias matemáticas, pueden sentirse inseguros con enfoques más informales. Es importante apoyarlos y proporcionarles actividades que les sirvan para conectar los aspectos conceptuales y didácticos (Ball, 2000). Puesto que queremos que los estudiantes construyan su conocimiento en forma activa, resolviendo problemas e interactuando con sus compañeros en la clase, las actividades presentadas a los profesores también deben basarse en el enfoque constructivista y social del aprendizaje (Jaworski, 2001).

En este taller tratamos de analizar con los profesores la dificultad que encuentra un alumno al resolver algunas tareas en el campo de la probabilidad. Puesto que el profesor tiene unos conocimientos sólidos de probabilidad elemental, hemos de buscar problemas, que, siendo aparentemente sencillos, puedan tener soluciones contra intuitivas o sorprendentes. No es difícil encontrar este tipo de situaciones, ya que la historia de la probabilidad y estadística está repleta de episodios y problemas que resultaron en su tiempo desafiantes y que muestran que la intuición estocástica, con frecuencia nos engaña. Estos problemas, así como las soluciones, tanto correctas como erróneas que algunos participantes puedan defender vehementemente en el taller, servirán para analizar cuáles son los conceptos involucrados en las soluciones, algunos de los cuales surgieron precisamente para dar solución a uno de estos problemas paradójicos.

La construcción de la teoría de la probabilidad no ha sido sencilla, y es sólo el esfuerzo y el aprendizaje a partir del análisis de los propios errores, lo que llevó al progreso de la misma (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). Una mirada a la historia permite tomar conciencia de que los objetos probabilísticos no son inmutables, sino fruto del ingenio y la construcción humana para dar respuesta a situaciones problemáticas. Un proceso similar se desarrolla en el aprendizaje de los alumnos que deben construir su conocimiento mediante un proceso gradual, a partir de sus errores y esfuerzo.

OBJETIVOS

Los objetivos planteados en el taller son los siguientes:

- Experimentar un proceso de aprendizaje de ideas estocásticas fundamentales (Heitele, 1975), a partir de una situación didáctica que puede ser adecuada en la Educación Secundaria Obligatoria o Bachillerato.

- Contextualizar la reflexión epistemológica sobre las ideas estocásticas fundamentales e identificar cuáles de ellas intervienen en la situación didáctica.
- Analizar las posibles dificultades y razonamientos incorrectos de los estudiantes.
- Iniciar el análisis de otras paradojas que permitan diseñar tareas para enseñanza de la probabilidad.

DESARROLLO DEL TALLER

La primera actividad está basadas en una de las paradoja de Planteada por Joseph Bertrand (1822-1900), matemático francés cuyas principales áreas de trabajo fueron la Teoría de Números, la Geometría Diferencial y la Teoría de las Probabilidades. En 1889 publicó el libro *"Calcul des probabilités"*, el cual, contiene numerosos ejemplos de problemas de probabilidades en los cuales el resultado es contrario a la intuición, entre ellos, el siguiente problema:

> *Tenemos tres cajas: una caja que contiene dos monedas de oro, una caja con dos monedas de plata, y una caja con una de cada tipo. Después de elegir una caja al azar se toma una moneda al azar, por ejemplo una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra también sea de oro?*

Tomando como base este problema, se propondrá a los asistentes un juego de apuestas, animándoles a que descubran la mejor estrategia para ganar el juego. Debido al carácter contraintuitivo, surgirá más de una solución (algunas incorrectas). Se permitirá variar la estrategia inicial haciendo algunos ensayos hasta que la mayoría se decante por una de las soluciones. Si no hay acuerdo final, los participantes serán animados a realizar una demostración matemática de su estrategia y se organiza un debate que permitirá revelar los razonamientos erróneos. La actividad se complementa con el análisis didáctico de las ideas fundamentales que se utilizaron para hallar la solución, los errores potenciales de los estudiantes y las fases didácticas del juego.

Finalizada esta parte del taller, en la segunda sesión se analizarán algunas de las siguientes paradojas, siguiendo la misma metodología:

Paradoja de la división de las apuestas. Dos jugadores compiten por un premio que se asigna después de que uno de ellos haya ganado "n" partidas en un juego. En un determinado momento, se tiene que parar el juego, y un jugador lleva mayor número de partidas ganadas que el otro. ¿Cómo debe dividirse la apuesta entre los dos jugadores?

Fue propuesta por primera vez por Fra Luca Pacioli (1445-1514) en su obra "*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalitá*", donde sugirió una solución de reparto proporcional a la cantidad de puntos obtenido por cada jugador al momento de interrumpir el juego. Otras soluciones incorrectas fueron publicadas por Tartablia (1499-1557) en "*Trattato generale di numeri et misure*" y Cardano (1501-1576) en "*Practica arithmeticae generalis*". La solución fue dada por Pascal y Fermat, quienes en su correspondencia fijan las bases de la teoría de la probabilidad. Consideran por primera vez el conjunto de todas las posibilidades (que posteriormente llamaríamos espacio muestral) y resolvieron el problema para una partida de dos jugadores, pero no desarrollan una solución completa. Dicha solución sería obtenida por Christiaan Huygens (1629-1695) en "*Van rekinigh in Spelen van Geluck*", mediante la introducción de un nuevo concepto que denomina "expectatio" y que posteriormente formalizado daría lugar a lo que hoy conocemos como esperanza matemática o "cantidad que se espera ganar en un juego equitativo".

Paradoja de Simpson. Supongamos dos hospitales A y B que realizan una cierta operación. El hospital B tiene mayor tasa de supervivencia. Sin embargo, si tenemos en cuenta los hombres y mujeres por separados, el hospital A tiene menor tasa de mortalidad en cada grupo. ¿Cómo es esto posible?

Esta paradoja fue inicialmente descrita por George Udny Yule en su artículo "On the association of attributes in statistics...", publicado en 1990, que es uno de los artículos pioneros en el análisis de las tablas de contingencia. En 1951 Edward. H. Simpson retoma la paradoja en su trabajo "The interpretation of interaction in contingence tables". Es a partir de este último, cuando se hace más conocida y pasa a llamarse paradoja de Simpson, o efecto de Yule-Simpson, Este fenómeno muestra que en determinados casos se produce un cambio en la asociación o relación entre un par de variables, ya sean cualitativas o cuantitativas, cuando se controla el efecto de una tercera variable.

Paradoja de Condorcet. La paradoja advierte que la transitividad de las preferencias individuales no tiene por qué dar lugar a transitividad en las preferencias colectivas. En consecuencia un procedimiento democrático de determinación de las preferencias colectivas puede llevar a una situación no concluyente, aunque la elección sea racional.

Esta paradoja analiza las situaciones de votación cuando hay mas de dos candidatos. El análisis de los métodos de votación pretenden conseguir una forma de elección lo más cercana posible al sentir de la mayoría del cuerpo electoral. El problema, se puso de manifiesto por Antoine de Caritat Condorcet, en 1780, en uno de sus principales trabajos: el '*Ensayo sobre la aplicación del análisis a la probabilidad de las decisiones sometidas a la pluralidad de voces"*. En este trabajo, realizado con motivo de la búsqueda del número óptimo de jurados en los Tribunales Populares de Justicia, instaurados por al Revolución Francesa, Condorcet demostró que los sistemas de votación que aplican la regla de la mayoría podrían no llegar a una situación concluyente.

Paradoja de San Petesburgo. Se propone un juego de azar en el que pagas una apuesta inicial fija. Se lanza una moneda repetidamente hasta que aparece la primera cara. Una vez que aparece, se gana una moneda si la cara aparece en el primer lanzamiento, dos monedas si aparece en el segundo, doblando el premio en cada lanzamiento adicional. ¿Cuál sería la cantidad equitativa que debe pagar el jugador para apostar en este juego?

La paradoja fue enunciada por Daniel Bernoulli en 1738 y se conoce con este nombre porque San Petersburgo fue la ciudad donde el autor y su hermano discutieron sobre este problema. La variable aleatoria que aparece en este juego tiene un valor esperado infinito y por ello la teoría de decisión parece recomendar una acción que ninguna persona racional seguiría. El juego y su solución sirvió para introducir el concepto de *utilidad*, que puso de manifiesto que la opción aparentemente más razonable no siempre es la más correcta desde el punto de vista matemático.

Otras muchas paradojas en la historia de la estadística se describen en el libro de Székely (1986). En el taller dejaremos a los participantes que encuentren sus soluciones (correctas e incorrectas) y organizaremos finalmente un debate, para que ellos mismos lleguen a la solución correcta y perciban los puntos en que cometieron un error. Todo ello les llevará a una mayor sensibilidad hacia las dificultades de sus alumnos y el papel del error en el proceso de aprendizaje.

Se completa el taller describiendo los supuestos que subyacen en la lista de Ideas Estocásticas Fundamentales descritas por Heitele (1975), quien indica que, además de la ideas básicas de aleatoriedad, hay una serie de conceptos sobre los cuáles se apoya todo el cálculo de probabilidades, que son los que debemos enseñar en los niveles no universitarios. Para elaborar una lista de ideas estocásticas fundamentales, Heitele (1975), quien sostiene las tesis siguientes:

- El principio decisivo de instrucción en un tema es la transmisión de las ideas fundamentales.
- Cualquier tema puede ser enseñado efectivamente en alguna forma correcta a cualquier niño en cualquier estado de desarrollo, lo que implica que las ideas fundamentales son una guía necesaria desde la escuela primaria a la universidad para garantizar una cierta continuidad.
- La ideas fundamentales son aquellas que se usarán en diferentes niveles cognitivos y lingüísticos en una "espiral curricular".
- La transición a un nivel cognitivo superior se facilita si el tema subyacente ha sido preparado en una representación conveniente en etapas cognitivas anteriores.

Las ideas fundamentales proporcionan al niño modelos explicativos eficientes en cada etapa de su desarrollo, que difieren en los distintos niveles cognitivos, no de una forma estructural, sino sólo de una forma lingüística y en su nivel de profundización. Por ejemplo, si un niño, al lanzar dos dados concede más probabilidad al siete, porque hay más sumas con éste valor, tiene un modelo apropiado, que puede evolucionar al más complejo de aplicación de la regla de Laplace, e incluso al de variable aleatoria y moda de su distribución de probabilidad. Por el contrario, si un niño al lanzar dos monedas explica la mayor proporción de casos "mixtos" argumentando que tras "cara" es más probable "cruz", usa un modelo de explicación que le satisface, pero no permite continuación a un estadio más elaborado. Se trata de una "intuición errónea". En el campo de la probabilidad la intuición juega un papel muy importante. Los modelos intuitivos explicatorios tienen dos funciones: En una edad temprana ayudan al niño a entender su entorno por sus propios medios, mucho antes de que sea capaz de comprender la complejidad del modelo matemático subyacente. Por otro lado, preparan el conocimiento analítico posterior.

El gran número de paradojas estocásticas puede confundir incluso a los expertos. Por ello, es más importante construir intuiciones correctas en este campo que en ningún otro. Por ello parece necesario ofrecer a los alumnos actividades estocásticas, en forma de juegos y experimentos. Sin embargo, las actividades a desarrollar no deben escogerse al azar. Es preciso un principio de organización, en la forma de la espiral curricular, escalonada por las ideas fundamentales.

CONCLUSIONES

El cambio metodológico en la enseñanza de la probabilidad y en general de las matemáticas sigue a las posiciones constructivistas sobre el aprendizaje y sobre la construcción del conocimiento. Estas concepciones consideran que, además de la formación científica, el profesor requiere lo que se denomina "conocimiento profesional, en el cual Ball, Thames y Phelps (2005) incluyen cuatro componentes: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del contenido y los estudiantes. Es también importante también buscar actividades adecuadas para llevar a cabo esta formación, En particular, estas situaciones deberían permitir la reflexión epistemológica sobre la estadística, el estudio de las investigaciones didácticas sobre errores y dificultades de aprendizaje, y el análisis y experimentación de métodos y recursos de enseñanza.

Las tareas presentadas en el taller, junto con las actividades de análisis didáctico pueden contribuir a la adquisición de los diferentes componentes del conocimiento profesional, en el caso de la probabilidad. Asimismo ayuda a mejorar la formación del profesor para llevar a cabo estos tipos de análisis, que puede aplicar al diseño de secuencias de enseñanza y el análisis reflexivo sobre la propia práctica docente, con la finalidad de favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

Agradecimientos

Este trabajo forma parte del proyecto SEJ2007-60110 (MEC- FEDER), beca FPU AP2007-03222 y beca FPI BES-2008-003573.

Referencias

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*, 241-247.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2005). *Articulating domains of mathematical knowledge for teaching.* Disponible en www-personal.umich.edu/~dball/.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Bernoulli, D. (1738). Exposition of a new theory on the measurement of risk. *Econometrica, 22*, 23-36.

Bertrand, J. (2005). *Calcul de probabilités.* AMS Chelsea (Libro original publicado en 1889).

Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Condorcet, Marquis de. (1785). *Essai sur l'application de l'analyse à la pluralité des décisions rendues á la pluralité des voix.* París.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. y Flores, P. (1999). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores. En *Homenaje al profesor Oscar Sáenz Barrio* (pp. 165-185). Granada: Departamento de Didáctica y Organización Escolar de la Universidad de Granada.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones, 38*, 25-48.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6*, 187-205.

Jaworski, B. (2001). Developing mathematics teaching: teachers, teacher educators and researchers as co-learners. En L. Lin y T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 295-320). Dordrecht: Kluwer.

MEC (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.*

Simpson, E. H. (1951), The interpretation of interaction in contingency tables. *Journal of the Royal Statistical Society, Serie B, 13*, 238-241

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (345-366). New York: Springer.

Yule, G. U. (1900). On the association of attributes in statistics: with illustrations from the material of the childhood society. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, *194*, 257-319.

Székely, G. J. (1986). *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics*. Dordrecht: Reidel.