UTILIZACIÓN DE SEGMENTOS EN LOS ELEMENTOS DE EUCLÍDES

Mª VICTORIA MARTÍNEZ, FRANCISCO FERNÁNDEZ, PABLO FLORES
Universidad de Granada (España)

El análisis de una obra fundamental en el desarrollo de la matemática puede abordarse desde varios puntos de vista. En esta comunicación hacemos una aproximación a Los Elementos de Euclides, prestando especial atención al uso que se hace de segmentos, como un registro de representación gráfico, para representar conceptos matemáticos. Esto se complementa con una reflexión de cómo abordar ésta temática en el aula.

La utilización de diversos registros de representación para facilitar el aprendizaje de la matemática es un tema que venimos trabajando desde hace un tiempo, específicamente el desarrollo de un modelo de representación gráfico basado en el uso de segmentos que permita facilitar el paso de la aritmética al álgebra a través de la resolución de problemas (Martínez, Fernández y Flores, 2007, 2008)

En la siguiente comunicación hemos querido explorar como a lo largo de la historia se han utilizado este tipo de herramientas, para representar conceptos matemáticos, revisando la obra de Euclides, Los Elementos. Por lo que hemos centrado el trabajo en describir que tipo de conceptos se representan y la potencia de la herramienta para facilitar una demostración.

Los Elementos de Euclides

Los elementos de Euclides datan de aproximadamente 300 años A.C. y están compuestos por 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes o axiomas y 465 proposiciones (problemas a resolver y teoremas a demostrar).

Según describe Vega (1991) en la introducción de la traducción al castellano de Los Elementos, Euclides tenía un doble propósito al escribirlos: (a) por una parte como objeto de investigación y (b) en segundo lugar, con un valor instructivo. En cuanto a esto último el autor señala “que el antiguo profesor alejandrino no sólo enseña una ciencia, sino que, en cierto modo, parece empeñado en enseñar a aprenderla y construirla” (p. 27).

En cuanto al contenido expuesto en la obra de Euclides cabe resaltar que se trabajan más campos además de la geometría, aún cuando se asocia comúnmente a ésta. Del libro I al IV se desarrolla la teoría de la geometría plana, del libro XI al XIII la geometría del espacio, en los libros V y VI se desarrolla la teoría generalizada de la proporción, desde el libro VII al IX la teoría aritmética y en el libro X la inconmesurabilidad y una clasificación de rectas irracionales.

A la variedad de contenidos matemáticos trabajados, se suma la de métodos utilizados para resolver problemas y demostrar teoremas, entre ellos encontramos procedimientos elementales de construcción por regla y compás, aplicación de áreas, el procedimiento demostrativo basado en el principio de continuidad y el lema de bisección.

Finalmente, Vega (1991) destaca la excelencia del trabajo de Euclides en Los Elementos tanto por la virtud expositiva e instructiva como la sistematización deductiva de las teorías y cuerpos de conocimiento que contiene. En cuanto a dicha sistematización es importante resaltar la oportuna elección de problemas y teoremas, la riqueza de los métodos deductivos y la sistematización deductiva.

Utilización de Segmentos

La utilización de segmentos en la obra de Euclides está presente en 6 de los 13 libros, tanto en la resolución de problemas como en la demostración de teoremas. Dicha utilización de segmentos la podemos clasificar según lo que representan en tres grupos:

- Representan *magnitudes*, en los libros V y VI, relacionados con la teoría generalizada de la proporción
- Representan *números*, en los libros VII, VIII y IX, en relación con la teoría aritmética.
- Representan *cantidades incomensurables*, en el libro X, en relación a la incomensurabilidad y las rectas irracionales.

A continuación revisaremos algunos ejemplos con el fin de diferenciar cada uno los tres grupos antes mencionados y valorar su utilidad como modelo visual de representación en matemática, en relación a distintos conceptos. Cabe destacar que tanto las proposiciones y demostraciones han sido extraídas textualmente de la traducción de Los Elementos al español de Puertas (1994; 1996).

Segmentos para Representar Magnitudes

En el libro V, como base para la demostración de las 25 proposiciones que lo componen, se exponen 18 definiciones referidas a lo que es un múltiplo y submúltiplo de una magnitud determinada, lo que es una razón y lo que es una proporción. A continuación expondremos dos ejemplos del libro V en que se utilizan segmentos para representar magnitudes: la proposición 1 y la 2.

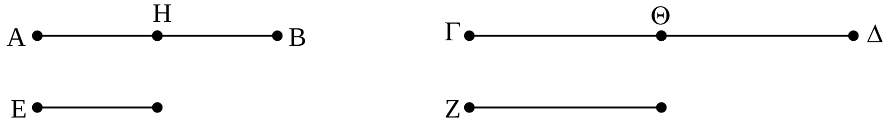
Ejemplo 1

Proposición 1/libro V:

Si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán todas de todas.

Demostración:

Sean un número cualquiera de magnitudes AB, ΓΔ respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes E, Z iguales en número.



Digo que, cuantas veces AB sea múltiplo de E, tantas veces lo serán también AB, ΓΔ de E, Z.

Pues dado que AB es equimúltiplo de E y ΓΔ de Z, entonces, cuantas magnitudes iguales de E hay en AB, tantas hay también en ΓΔ iguales a Z. Divídase AB en las magnitudes AH, HB iguales a E y ΓΔ en las (magnitudes) ΓΘ, ΘΔ iguales a Z; entonces el número de las (magnitudes) AH, HB será igual al número de las (magnitudes) ΓΘ, ΘΔ. Ahora bien, como AH es igual a E y ΓΘ a Z, entonces AH es igual a E y AH, ΓΘ a E, Z. Por lo mismo, HB es igual a E y HB, ΘΔ a E, Z; por tanto, cuantas (magnitudes) hay en AB iguales a E, tantas hay también en AB, ΓΔ iguales a E, Z; luego cuantas veces sea AB múltiplo de E, tantas veces lo serán también AB, ΓΔ de E, Z.

Por consiguiente, si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán también todas de todas. Q. E. D.

Comentario:

En la demostración anterior, podemos observar que los segmentos se utilizan para representar magnitudes cualesquiera. Ahora bien, aún cuando dichas magnitudes son desconocidas, es posible representar, a través de los segmentos, que AB es el doble de E y que ΓΔ es el doble de Z. Luego, a través del uso de segmentos, se ha representado gráficamente un magnitud cualquiera, que una magnitud es múltiplo de otra (en este caso el doble) y dada una magnitud cualquiera se ha operado sobre ella, es el caso de que dado AB y ΓΔ se dividen de manera tal que se obtengan dos submagnitudes iguales en cada segmento respectivamente.

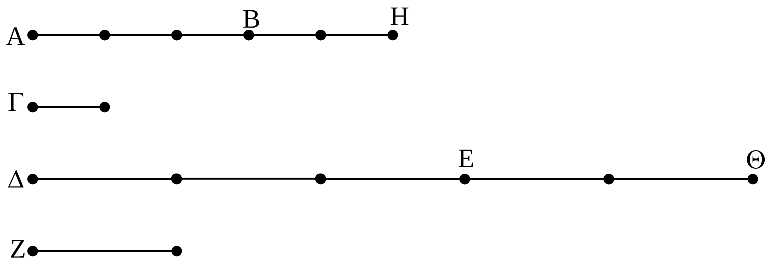
Ejemplo 2

Proposición 2/libro V:

Si una primera (magnitud) es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera de una cuarta, y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta.

Demostración:

Pues sea la primera (magnitud) AB, el mismo múltiplo de la segunda, Γ, que la tercera, ΔE, de la cuarta, Z, y sea la quinta, BH, el mismo múltiplo de la segunda, Γ, que la sexta, EΘ, de la cuarta, Z.



Digo que la suma de la primera y la quinta, AH, es el mismo múltiplo de la segunda, Γ, que la (suma de) la tercera y la sexta, ΔΘ, de la cuarta, Z.

Pues, dado que AB, es el mismo múltiplo de Γ, que ΔE de Z, entonces cuantas (magnitudes) hay en AB iguales a Γ, tantas hay también en ΔE iguales a Z. Y, por lo mismo, cuantas (magnitudes) hay en BH igual a Γ, tantas hay también en EΘ iguales a Z; así pues, cuantas (magnitudes) hay en la (magnitud) entera AH iguales a Γ, tantas hay también en la (magnitud) entera ΔΘ iguales a Z; por tanto, cuantas veces AH es múltiplo de Γ, tantas veces lo será ΔΘ de Z. Luego la suma de la primera y la quinta, AH, será también el mismo múltiplo de la segunda, Γ, que la (suma de) la tercera y la sexta, ΔΘ, de la cuarta, Z.

Por consiguiente, si una primera (magnitud) es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera de una cuarta, y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta. Q. E. D.

Comentario:

Al igual que en la proposición anterior, en este caso se utilizan los segmentos para representar magnitudes cualesquiera y el hecho de que una sea un determinado múltiplo de otra. Hay que subrayar como una de las riquezas de la representación, el hecho de que pares de segmentos distintos representan la misma razón. Además al momento de operar sobre los segmentos, en este caso, se representa la adición de magnitudes, ampliando así el espectro de relaciones representables con segmentos.

Segmentos para Representar Números

En este caso nos encontramos que los segmentos son utilizados para representar números. Para resaltar algunas particularidades de este caso utilizaremos la proposición 1 del libro VII.

Ejemplo 3

Proposición 1/libro VII:

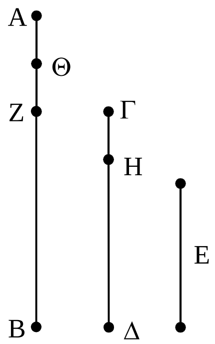
Dados dos números desiguales y restándose sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre sí.

Demostración:

Pues sean AB, y ΓΔ dos números [desiguales] tales que, restándose sucesivamente el menos del mayor, el que quede no mida nunca al anterior hasta que quede una unidad.

Digo que AB, ΓΔ son primos entre sí, es decir que la sola unidad mide a AB, ΓΔ.

Pues, si AB, ΓΔ no son primos entre sí, algún número los medirá. Mídalos (un número) y sea E; y ΓΔ, al medir BZ, deje ZA menor que él mismo, y AZ, al medir a ΔH, deje HΓ menor que él mismo, y HΓ, al medir a ZΘ, deje una unidad ΘA.



Así pues, como E mide a ΓΔ, y ΓΔ mide también a BZ, entonces E mide también a BZ; pero mide también al total BA; por tanto medirá también al resto AZ. Ahora bien, AZ mide a ΔH; entonces E mide también a ΔH; pero mide así mismo al total ΔΓ; por tanto medirá también al resto ΓH. Pero ΓH mide a ZΘ; y mide así mismo al total ZA; luego medirá también a la unidad restante AΘ, aun siendo un número; lo cual es imposible. Por tanto, ningún número medirá a los números AB, ΓΔ.

Por consiguiente, AB, ΓΔ son primos relativos entre sí [VII, Def. 13] Q. E. D.

Comentario:

En este caso nos gustaría resaltar un aspecto diferenciador al momento de utilizar los segmentos en comparación con el caso anterior (representación de magnitudes). Si bien en este caso se representan números, inicialmente números cualesquiera, en el enunciado de la proposición se considera la unidad y la utilización de los segmentos permite representar dicha situación. Luego existe una diferencia fundamental en lo representado, en este caso convive la representación de números cualesquiera con la representación de una unidad determinada.

Segmentos para Representar Cantidades Inconmensurables

Para poder comprender las proposiciones a demostrar dentro del libro X es necesario al menos enunciar la primera de las 4 definiciones que encabezan este apartado (extraído de la traducción al español de Los Elementos de Euclídes. Puertas, 1996): “Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida, e inconmensurables aquellas de las que no es posible que haya una medida común”(p. 9).

Ejemplo 4

Proposición 5/libro X:

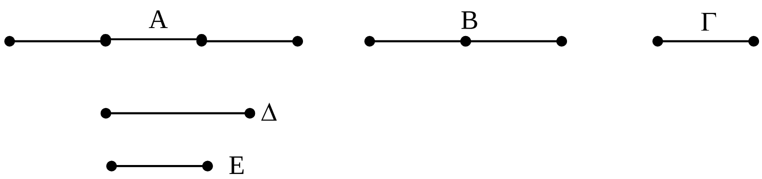
Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con *un número.*

Demostración:

Sean A, B magnitudes conmensurables.

Digo que A guarda con B la misma razón que un número con un número.

Pues, como A, B son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Mídalas una magnitud y sea Γ. Y cuantas veces Γ mida a A, tantas unidades haya en Δ, y cuantas veces Γ mida a B, tantas unidades haya en E.



Así pues, dado que Γ mide a A según las unidades de Δ y la unidad mide a Δ según sus unidades, entonces la unidad mide al número Δ el mismo número de veces que la magnitud Γ a la (magnitud) A; luego, como Γ es a A, así la unidad es a Δ [VII Def. 20]; entonces, por inversión, como A es a Γ, así Δ a la unidad [V 7 Por.]. Como Γ mide a su vez a B según las unidades de E, mientras que la unidad mide también a E según sus unidades, entonces la unidad mide a E el mismo número de veces que Γ a B. Luego, como Γ es a B, así la unidad es al (número) E. Pero se ha demostrado que también como

A es a Γ, Δ es a la unidad. Luego, por igualdad, como A es a B, así el número Δ es al (número) E [V 22].

Por consiguiente, las magnitudes conmensurables A, B guardan entre sí la misma razón que el número Δ con el número E. Q. E. D.

Comentario:
En este caso la riqueza de representación es una aplicación de los casos anteriores. Ya que por una parte A, B y Γ representan magnitudes cualesquiera, pero a partir de éstas se representa un número, dada una unidad, en Δ y E. Luego, se están utilizando los segmentos para representar cosas distintas en la misma demostración. Por otra parte, hay que subrayar como la representación gráfica facilita la representación de la "inversión" de la razón, paso fundamental dentro de la demostración de ésta proposición.

Utilización de Applets en el Aula

Trabajar en el aula con la obra de autores clásicos, como es el caso de Los Elementos de Euclides, puede constituirse en una fuente de riqueza didáctica y metodológica, favoreciendo el desarrollo de diversos aspectos en el aprendizaje de contenidos matemáticos.

El trabajo utilizando diversos sistemas de representación es uno de los aspectos a resaltar en este caso. En los ejemplos anteriores podemos observar que se hace uso permanente de lenguaje verbal y simbólico, en complemento con un lenguaje gráfico, lo que sin duda demanda un trabajo de abstracción, favoreciendo el desarrollo de la competencia de representación (Martínez, Fernández y Flores, 2008).

Por otra parte, el trabajo de fundamentación matemática, tendiente a demostrar que una proposición es verdadera, abre una línea de discusión respecto del trabajo en el aula. Al respecto, en Martínez (2006) hemos expuesto que en el aula ocurren dos fenómenos que empobrecen el aprendizaje matemático de los alumnos: (a) presentar un ejemplo y generalizar autoritariamente y (b) utilizar generalizaciones, sin cuestionar su veracidad.

De ahí la importancia considerar las actividades de fundamentación y argumentación en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, aún cuando el trabajo se parezca más a la actividad de "mostrar" que de "demostrar" en el sentido matemático más estricto.

Una herramienta que permite trabajar la observación de varios casos particulares, y a partir de ello determinar la veracidad proposición, es la que nos otorgan las herramientas computacionales. En el caso de Los Elementos, se puede realizar un trabajo de análisis a partir de las representaciones dinámicas de la demostración de cada proposición, utilizando applets que encontramos en www.euclides.org .

Si consideramos la proposición 1 del libro V, que hemos expuesto en el Ejemplo 1, nos encontraremos con la representación de la Figura 1.

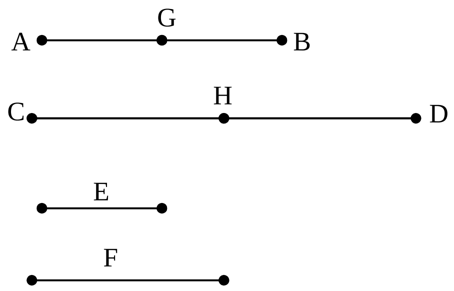


Figura 1. Representación del ejemplo 1

En la representación de la Figura 1 es posible mover el extremo derecho del segmento E y del segmento F, variando al mismo tiempo el tamaño del los segmentos AB y CD respectivamente. Luego, a partir de una situación como ésta, es posible trabajar al menos dos aspectos que desde una representación estática no es trivial:

- Por una parte dentro del planteamiento de Euclides encontramos que cuando demuestra una proposición realiza una especie de “doble conclusión”, es decir, tras haber demostrado que algo es verdadero en la figura dada, infiere que eso es verdadero en general, pasando de lo particular a lo general. Vega (1991) plantea que “este proceder está justificado habida cuenta de que en la demostración sólo aducen el objeto representado en el diagrama no como tal caso particular, sino como un caso similar a cualquier otro de la misma clase” (p. 38). El variar el tamaño de los segmentos permite justamente considerar que hemos trabajado sobre un “segmento cualquiera”, que podría haberse representado utilizando una longitud determinada o cualquier otra, el valor de la demostración está por sobre ese aspecto en concreto.
- En segundo lugar, existen relaciones de dependencia entre los objetos representados. En el caso de la proposición de la figura1, se desea demostrar la relación que existe cuando un número de magnitudes son equimúltiplo de otras

tantas, por lo tanto en la representación gráfica el segmento AB depende de E y viceversa, al igual que dependen mutuamente los segmentos CD y F. Luego, utilizando los applets se puede trabajar dichas relaciones de dependencia, ya que al mover, por ejemplo, el extremo derecho del segmento E, sólo va a variar el segmento AB y no CD y F. Ahora bien, existen otras relaciones de dependencia en la figura de manera tal que se represente correctamente la proposición, ya que es necesario representar que E está contenido tantas veces en AB, como F en CD, independiente del tamaño de los segmentos.

De esta forma quisiéramos ejemplificar algunos, de los variados aspectos, que se pueden trabajar combinando la utilización de una herramienta computacional y una obra clásica en el desarrollo de la matemática, con el fin de privilegiar actividades que tengan como centro la reflexión y análisis en el aula.

REFLEXIÓN FINAL

La utilización de diversos sistemas de representación en la actividad matemática ha sido una realidad desde los inicios del área de conocimientos, debido a la naturaleza abstracta de los conceptos con los que se trabaja. De ahí la importancia de hacer énfasis en la utilización de diversos tipos de representación en el aula, ya que al revisar la historia constatamos que es un elemento siempre presente, que permite acceder a distintas dimensiones del contenido matemático.

Por la misma razón destacamos la importancia de revisar obras clásicas, que además de mostrar la riqueza de representaciones, nos permiten visualizar su potencia como herramienta, y las situaciones en las que han sido utilizadas, permitiendo caracterizarlas con mayor completitud.

De ahí el desafío permanente de considerar la historia de la matemática como un elemento esencial dentro de la planificación de la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos, sin reducir su aporte a meros datos anecdóticos, sino que como un aporte epistemológico a la enseñanza.

REFERENCIAS

Euclides (1991). *Los Elementos. (Libros I – IV).* Traducción al español, María Luisa Puertas Castaños. España: Editorial Gredos S. A.

Euclides (1994). *Los Elementos. (Libros V – IX).* Traducción al español, María Luisa Puertas Castaños. España: Editorial Gredos S. A.

Euclides (1996). *Los Elementos. (Libros X – XIII).* Traducción al español, María Luisa Puertas Castaños. España: Editorial Gredos S. A.

Martínez, M. (2006). Demostraciones y uso de modelos geométricos en la enseñanza del algebra. En J. L. Lupiáñez, J. M. Cardeñoso y M. García (Eds.), *Investigación en al aula de matemáticas. Geometría* (pp. 183-192). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Martínez, M., Fernández, F. y Flores, P. (2007). Modelo geométrico – lineal, una herramienta la resolución de problemas de álgebra elemental en secundaria. En M. Berenguer y otros (Eds.), *Actas XIII Jornadas JAEM* (s/p) Granada: FESPM y SAEM Thales.

Martínez, M., Fernández, F. y Flores, P. (2008). Desarrollo de competencias y resolución gráfica de problemas de algebra elemental. En M. Molina, P. Pérez-Tyteca y M. Fresno (Eds.), *Investigación en al aula de matemáticas. Competencias Matemáticas* (pp. 97-106). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Vega, L. (1991) Introducción general. En Euclides, *Los Elementos* (pp. 7-184). Madrid: Editorial Gredos.