RELATIVIDAD SOCIO-CULTURAL DE LOS SIGNIFICADOS DEL ÁLGEBRA Y LOS PROCESOS DE TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA EN EL MARCO DEL ÁLGEBRA ESCOLAR

WALTER F. CASTRO
Universidad de Antioquia (Colombia)
JUAN D. GODINO.
Universidad de Granada (España)
MAURO RIVAS
Universidad de los Andes (Venezuela)

Tradicionalmente el inicio del estudio álgebra escolar se ha realizado en educación secundaria, aunque algunas propuestas curriculares e investigaciones didácticas proponen este inicio desde los niveles de primaria. Esto supone cambios profundos en el significado del álgebra. En este trabajo analizamos estos cambios de significado desde una perspectiva histórica y aplicando algunas nociones teóricas del "enfoque ontosemiótico" de la cognición e instrucción matemática.

El álgebra es una rama de las matemáticas que se caracteriza por su abstracción y generalidad, que aporta herramientas conceptuales y procedimentales para la geometría, el análisis, o la teoría de números, entre otros campos de matemáticas. Su razón de ser refiere, por tanto, a problemas de naturaleza básicamente intramatemáticos, que no están al alcance de los escolares de educación básica. Sin embargo, las directrices curriculares de algunos países (Corea, Estados Unidos, Singapur) incluyen el estudio de nociones algebraicas no sólo en educación secundaria sino también en educación primaria.

No obstante, no se trata de impartir un "curso de álgebra" a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el pensamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el bachillerato (Godino y Font, 2003). La inclusión del razonamiento algebraico en la escuela elemental podría verse como un desplazamiento del foco de atención desde cierto conjunto de significados hasta otros. Consideramos que este desplazamiento puede estudiarse en términos de las entidades primarias y secundarias provistas por el Enfoque Onto-Semiótico de la cognición y la instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007).

En este trabajo estudiamos cómo el cambio en la atención prestada a ciertos objetos y significados ha marcado algunos aspectos de la evolución cultural del álgebra, y cómo la propuesta de la inclusión del razonamiento algebraico elemental en la escuela primaria puede ser vista en términos de un desplazamiento semántico desde un conjunto de significados hasta otros. No se pretende revivir un modelo didáctico para sustentar acciones de enseñanza, o para la organización didáctica del contenido algebraico por medio de un paralelismo de la filogénesis y la ontogénesis (Branford, 1924; citado por Fauve, 1991). Se trata de incrementar la comprensión en torno a las diversas formas en que el conocimiento algebraico puede manifestarse cuando se cambia el foco de atención.

En tal sentido, este trabajo ilustra la relatividad socio-cultural de los significados de los objetos matemáticos, perspectiva epistemológica asumida por el EOS que puede servir de guía y fundamento teórico para orientar y explicar procesos de transposición didáctica en el marco del álgebra escolar.

LAS HERRAMIENTAS TEÓRICAS DEL EOS

El EOS ofrece elementos teóricos de análisis que permiten profundizar la relación entre un objeto matemático y sus significados. Desde la perspectiva del EOS, se han identificado elementos teóricos primarios y secundarios que se manifiestan en la práctica matemático-didáctica. En la Figura 1 se muestran los elementos primarios que se ponen en juego en la práctica, que en el caso de este documento se aplica al análisis de las transformaciones del contenido algebraico para su inserción en los currícula escolares.

Figura 1. Entidades primarias

Desde el EOS la dialéctica entre objeto matemático y su significado puede ser expresada en términos de seis entidades primarias: situaciones problema, elementos lingüísticos (lenguaje), conceptuales, procedimentales, propiedades (proposiciones) y argumentos. Así mismo, la inclusión del razonamiento algebraico en el currículo de la escuela primaria puede estudiarse desde algunas de las entidades secundarias o dualidades: unitario-sistémico, contenido-expresión, institucional-personal, intensivo-extensivo, no ostensivo-ostensivo, sistémico-unitario. En la Figura 2 se muestra una representación de estas dualidades dialécticas en torno a las prácticas operativas y discursivas de la instrucción. Una discusión ampliada puede encontrarse en Godino, Batanero y Font (2007).

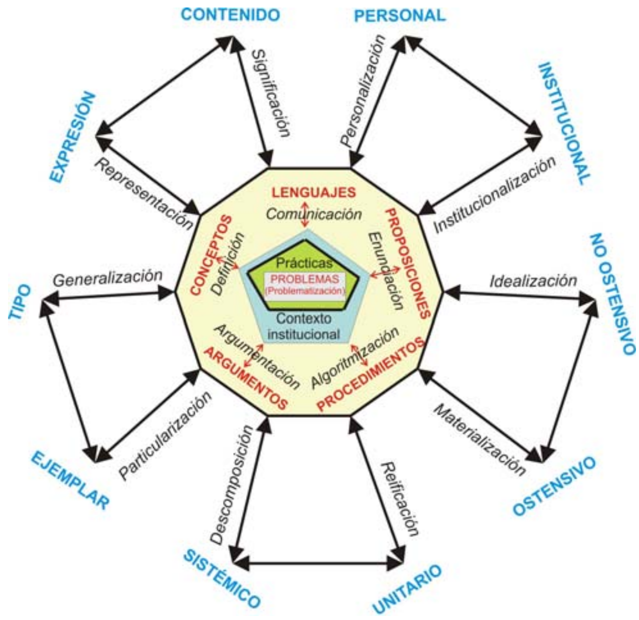


Figura 2. Entidades secundarias: dualidades epistémicas-dialécticas

La Evolución del Álgebra desde la Perspectiva de las Entidades Primarias y Secundarias del EOS

El álgebra ha recorrido un largo camino desde que fue usada para resolver problemas de herencias y reparticiones (Puig, 2003) hasta alcanzar los niveles de especialización en el siglo XX. Los problemas que resuelve y los usos propuestos para el álgebra han evolucionado hasta alcanzar niveles de especialización donde se puede distinguir muy poco de sus orígenes. Diversos factores han impulsado esta especialización y no siempre han sido de carácter intramatemático, sino que también han respondido a exigencias de carácter cultural. Sin embargo, su poder representacional ha permanecido tal vez por su capacidad para expresar diversos significados de los objetos matemáticos. Con el paso del tiempo esta característica del álgebra se ha mantenido y se ha especializado.

Una perspectiva de evolución histórica del álgebra considera tres estadios de evolución de su lenguaje: el retórico; el sincopado y el simbólico. El foco de la evolución es "la representación formal de las ecuaciones y operaciones algebraicas" (Neseelmann, 1842; citado por Puig, 2003)

La evolución histórica da testimonio de las dificultades encontradas en el paso de la resolución de problemas en un ambiente "oral" (álgebra retórica, Diofanto de

Alejandría, 250 D.C.) a un ambiente sincopado (mezcla de símbolos y palabras). Esta evolución puede verse en términos de las dualidades: expresión-contenido y ostensivo-no ostensivo. La dualidad expresión-contenido se da, en el primer caso, en términos de la explicitación del significado en términos exclusivamente orales, mientras que en el caso del álgebra sincopada, la segunda dualidad ostensivo-no-ostensivo toma preponderancia, en tanto que se introducen algunas abreviaciones para denotar las incógnitas y las relaciones; sin embargo los procedimientos de cálculo siguen siendo orales. En el álgebra de al-Khwârizmî, todos los problemas y su resolución se expresan solamente mediante el uso de palabras; es decir se recurre básicamente a una de las entidades básicas propuestas por el EOS, el lenguaje, para registrar tanto los procedimientos como las argumentaciones de carácter matemático que los validan.

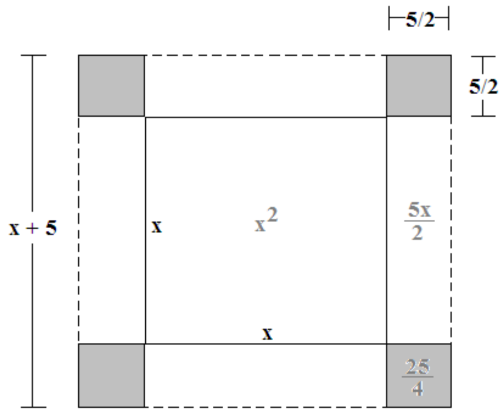
En el álgebra sincopada, si bien se recurre también a la exposición verbal, "utiliza, para conceptos y operaciones que aparecen a menudo, siempre las mismas abreviaturas en lugar de las palabras completas" (Nesselmann, 1842, p. 302; Citado Puig, 2003); es decir el lenguaje natural sigue siendo fuertemente usado pero se da paso al uso de símbolos que tienen significados precisos; la dualidad ostensiva-no-ostensiva surge para apoyar al *macroproceso de significación*.

El tercer estadio es el que Nesselmann denomina "álgebra simbólica" en la que todos los objetos matemáticos involucrados, las relaciones entre ellos y las operaciones se representan mediante expresiones simbólicas. Este tercer estadio puede caracterizarse por la presencia de dos dualidades: expresión-contenido y unitario-sistémico. Este estadio se constituyó en un logro de la matemática, en tanto que "lo fundamental desde esta primera caracterización del álgebra simbólica por parte de Nesselmann no es pues el mero hecho de la existencia de letras para representar las cantidades o de signos ajenos a la lengua vernácula para representar las operaciones, sino el que se pueda operar con ese sistema de signos sin tener que recurrir a su traducción a la lengua vernácula."(Puig, 2003, p. 8)

El enorme logro que constituyó el álgebra simbólica y su poder intrínseco de representar, de preservar y de comunicar el significado vino a constituirse en el tema central de atención en los programas de formación del álgebra en la escuela.

A modo de ejemplo, en la Figura 3, presentamos un uso de representaciones geométricas, empleadas por al-Khwârizmî, para resolver un problema. El método empleado es la completación de cuadrados, se incluye en la figura la solución algebraica respectiva.

Problema: Un cuadrado y diez raíces es igual a treinta y nueve unidades



Solución: Un cuadrado de lado x representa a x^2, se agregan cuatro rectángulos de dimensiones $x \times 5/2$ para representar $10x$. Se completa el cuadrado agregando en cada esquina un cuadrado de lado $5/2$ (sombreado gris). Cada cuadrado tiene una área de $25/4$, por tanto el área total de ellos es 25. A partir de esta información es fácil ver como $x^2 + 10x = 39$ se transforma en $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$. De modo que $(x+5)^2 = 64$. De lo cual resulta $x = 3$.

Figura 3. Ejemplo de uso de representaciones geométricas

ALGUNOS ASPECTOS DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL

En este apartado mostraremos cómo algunos aspectos de la evolución histórica del álgebra, así como de la inclusión del razonamiento algebraico en el currículo de la escuela primaria, pueden verse en términos de conceptos propuestos por el EOS, tales como las entidades primarias: elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos, además de las dualidades antes referidas.

Las dificultades de los estudiantes de escuela secundaria cuando trabajan con el álgebra y que han sido reportadas por diversos autores (Kieran 1989, 1992) podrían ser motivo para desalentar cualquier intento de inclusión del razonamiento algebraico en el currículo de la escuela primaria.

Sin embargo, la literatura reporta diversos casos de inclusión del razonamiento algebraico en la escuela elemental (Carraher, Martínez y Schliemann, 2008). Tal inclusión se justifica por el cambio en el foco de atención hacia los objetos y significados matemáticos, lo que desplaza la atención de los aspectos simbólicos y procedimentales a aspectos centrales del razonamiento algebraico. En este caso se presta más atención a los procesos de significación que soportan la construcción y la comprensión de las entidades primarias (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) que están en la base del conocimiento matemático. En términos del desarrollo histórico del álgebra, se evidencia un regreso desde lo simbólico a situaciones concretas que requieren el uso del álgebra en su dimensión representacional fuertemente vinculadas al contexto sociocultural (D´amore, Radford y Bagni, 2006).

Se concede importancia, considerando el desarrollo cognitivo de los niños, al uso de la entidad primaria "lenguaje" como vehículo para describir, argumentar, "reconstruir" objetos, discutir significados y resolver problemas, y en donde se permite y promueve el uso de notación "sincopada" para representar objetos y relaciones, y del lenguaje para explicar los procedimientos usados. Britt e Irwin (2008) informan que los niños de su estudio exhibieron "estrategias mentales avanzadas para tratar con operaciones aditivas, multiplicativas y proporcionales, en donde los estudiantes eran capaces de hacer un uso completo de símbolos alfa numéricos[1]" (p. 1).

Un tema que ha concentrado muchos esfuerzos investigativos sobre las competencias de los niños en tareas propias del álgebra elemental es la generalización. Mason (1996) afirma que la "expresión de la generalidad" es una de las raíces del álgebra y una ruta hacia la misma. Cañadas, Castro y Castro (2008) reportan que la generalización verbal cobra importancia sobre otras formas de expresión de la generalización. De acuerdo con sus resultados la generalización verbal es una forma más accesible, al grupo particular de niños, que la generalización algebraica. En este caso la atención no está dirigida a la dualidad expresión-contenido con énfasis en la representación simbólica, sino en una representación verbal. Vale decir que las dualidades intensivo-extensivo (generalización-particularización) y sistémico-unitario (descomposición-reificación) siguen actuando y encauzando la discusión de los significados. El lenguaje algebraico suele oscurecer un poco al lenguaje natural, pero favorece efectuar razonamientos más profundos; esta tensión se logra evidenciar mediante la dialéctica entre los componentes de las dualidades expresión-contenido y ostensivo-no-ostensivo. Desde una perspectiva didáctica, esto se interpreta en términos de analizar situaciones y representarlas en diversos sistemas.

[1] El subrayado es nuestro

La práctica de la resolución de problemas algebraicos surgió de la tradición árabe, en el contexto social de resolución de problemas comerciales y de repartición de herencias; en la escuela la resolución de problemas algebraico suele tener un fin intramatemático. No obstante, las tendencias curriculares actuales, sustentadas en diferentes planteamientos teóricos: etnomatemáticas o interculturalidad de la matemática (D'Ambrosio, 1985), la cognición situada (Lave, 1988), matemática realista (Freudenthal, 1968), demandan esa vinculación de la enseñanza del álgebra con la resolución de problemas del contexto social y cultural del alumno. En este sentido, Anghileri (1995) sugiere que la relación cercana entre los contextos reales y los procedimientos usados para resolver problemas caracterizan los estados iniciales del aprendizaje de las matemáticas.

Ahora bien, consideramos que tal vinculación debe hacerse prestando atención a cómo se han manifestado diversos aspectos de índole epistémica: entidades primarias y secundarias referidas. En efecto, como ejemplo podemos observar que las soluciones de los problemas dadas por los árabes solían enunciarse mediante un procedimiento oral de carácter no ostensivo, cuya transcripción ostensiva en notación moderna resulta en una ecuación lineal o cuadrática. Si bien el procedimiento correspondía a la solución de un caso particular, se llegó a reducir los diversos casos a formas canónicas, es decir, se llegó desde lo "extensivo" hasta lo "intensivo", se produjo un proceso de generalización que se concretó en la obtención de las formas canónicas.

Así, tiene sentido que este logro forme parte de los currículos oficiales de la escuela secundaria. Sin embargo, su versión curricular se ha concretado en una mirada parcial sobre la componente procedimental y sobre la representación más que en la significación. El entramado de relaciones entre lenguaje, conceptos y procedimientos, propiedades y argumentos se vio relegado por un énfasis en los procedimientos de cálculo, y en una preferencia de la expresión sobre el contenido. Desde la perspectiva del EOS la atención que suele ser puesta en la identificación de una forma canónica para resolver un problema y el subsecuente desarrollo procedimental, se desplaza hacia la atención del lenguaje usado en la enunciación del problema, hacia la identificación de los diversos significados que pueden ser concedidos a los términos lingüísticos usados, hacia los conceptos que son evocados, hacia los procedimientos asociados, las propiedades y argumentos que justifican esos procedimientos. Es de esta manera como entendemos que los procesos de transposición didáctica podrían verse enriquecidos mediante la consideración de las entidades primarias y secundarias propuestas.

CONCLUSIONES

Las prácticas discursivas y operativas puestas en juego en la enseñanza y aprendizaje del álgebra podrían enriquecerse por el conocimiento de cómo ha evolucionado históricamente el álgebra y de cómo tal evolución puede expresarse en términos de algunas de las dualidades propuestas por el Enfoque Onto-Semiotico de la cognición y de la instrucción de las matemáticas.

Para Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnets (2006) “la idea no es simplemente atribuir significado algebraico a las actividades matemáticas de la escuela primaria. Los contenidos matemáticos deben ser transformados sutilmente para resaltar su carácter algebraico”, (p. 88). Como hemos visto, tal transformación puede verse enriquecida considerando las entidades primarias y secundarias propuestas por el EOS.

Cierto énfasis debería ponerse para favorecer que los maestros puedan desempacar (Ball, Thames y Phelps, 2008) el conocimiento algebraico inmerso en el contenido matemático, en tanto que aún los maestros en activo, “tienen poca experiencia con las diversas conexiones y ricos aspectos del razonamiento algebraico elemental” (Blanton y Kaput, 2005, p.414). Consideramos que la perspectiva que ofrece la comprensión de las entidades primarias y secundarias referidas, permite una visión más completa y detallada de las diversas conexiones y aspectos del razonamiento algebraico elemental.

Tal comprensión, que conocemos como “comprensión de la relatividad social-cultural de los significados”, explicitada por las entidades primarias y las dualidades epistémico-dialécticas, abre la posibilidad de diseñar actividades instruccionales, encaminadas a potenciar el uso pertinente de aspectos históricos y del contexto sociocultural, en la formación de futuros maestros.

Finalmente, consideramos que el uso de las dualidades epistémico-dialécticas permite hacer más explícita la relación de las manifestaciones del conocimiento algebraico en su dimensión histórico-institucional y personal.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER

REFERENCIAS

Anghileri, J. (1995). Language, arithmetic, and the negotiation of meaning. *For the Learning of Mathematics, 13*(3), 10-14.

Ball, D., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Branford, B. (1924). *A study of mathematical education*. Oxford: University press.

Britt, M. S. e Irwin, K. C. (2008). Algebraic thinking with and without algebraic representations: a three-year longitudinal study. *ZDM, 40*(1), 39-53.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM, 40*(1), 3-22.

Carraher, D. W., Schliemann, A., Brizuela, B. y Earnets, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *5*(1), 44-48.

D'Amore, B., Radford, L. y Bagni, G. (2006). Ostacoli epistemologici e prospetivva socio-culturale. *L´insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 19B*(1), 11-40.

Fauve, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 3-6.

Freudenthal, H. (1968). Why to Teach Mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics, 1*, 3-8.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM The international Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D. y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico para maestros. En J. D. Godino (Ed.), *Matemáticas para maestros*. Granada: Los autores. Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/welcome.html

Kieran, C. (1989). The early learning and teaching of school algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33-56). Hillsdale New York: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En C. K. Nadime Bednarz y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Puig. L. (2003). *Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa.* (versión oral) Conferencia invitada al séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Granada: Universidad de Granada, 10-13 de septiembre 2003. Disponible en http://www.uv.es/puigl/granada%2003%20oral.pdf, descargado el 15 de octubre del 2009.