LA RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD CONTEXTUALIZADA DESDE LA REALIDAD SOCIO-CULTURAL

GABRIELA VALVERDE, ENCARNACIÓN CASTRO
Universidad de Granada (España)

Una preocupación constante en el ámbito de la Educación Matemática es lograr despertar el interés y el gusto por el aprendizaje de la Matemática en los estudiantes de cualquier nivel, de modo que logren reconocer el valor social de las mismas y puedan así relacionar los conocimientos adquiridos en la institución educativa con situaciones del entorno. En este documento, reflexionamos acerca de la importancia de contextualizar las tareas-problemas que usamos en la enseñanza y analizamos el papel que juegan en el fomento de la competencia matemática; para ello utilizamos el tópico particular de la proporcionalidad. Aportamos un ejemplo, así como el análisis de las competencias matemáticas que se pueden estimular con el trabajo del mismo.

En la actualidad, la cuantificación numérica, la comprensión de información en tablas, gráficos estadísticos, curvas, interpretación de símbolos, lenguajes computacionales, y en general, la capacidad para analizar, razonar y comunicar eficazmente las ideas, al mismo tiempo que se plantean, formulan, resuelven e interpretan problemas en diferentes contextos, son capacidades básicas que se requieren para la participación activa en nuestro contexto social y cultural. Tales capacidades son aplicables en diferentes intercambios que van desde la interpretación o creación de la hoja de pago de un trabajador, predicciones electorales, información climática, hasta el uso o generación de software. Bajo esta realidad consideramos que la necesidad de entender y poder usar la Matemática en la vida cotidiana y en el lugar de trabajo es cada vez mayor. El NCTM (2000) plantea que aquellos que entienden y usan la Matemática, refuerzan oportunidades y opciones significativas para formar su futuro. En este mismo sentido el proyecto PISA (OCDE, 2004) señala que utilizar y hacer matemáticas en una variedad de situaciones es un aspecto fundamental de la alfabetización o competencia matemática:

> *La competencia matemática es la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.* (p. 28)

La competencia matemática, a la que estamos haciendo referencia, considera la capacidad de plantear, formular, resolver, e interpretar problemas, empleando las matemáticas dentro de una variedad de situaciones y contextos. Estos contextos van desde los puramente matemáticos a aquellos que no presentan ninguna estructura matemática aparente.

Por otra parte, el hecho de usar conceptos matemáticos en la puesta en juego de dicha capacidad, pone de manifiesto la comprensión de dichos conceptos lo cual conlleva, reconocer sus propiedades, representaciones y características así como relacionarlo con otros conceptos. Resumiendo, se dice que un estudiante ha comprendido un cierto contenido matemático cuando lo aplica eficazmente en la resolución de problemas, tal comprensión permite hablar de un uso competente del mismo. El desafío actual de la enseñanza de las matemáticas es contribuir al desarrollo integral de las personas en aquellas competencias que le permitan responder a las exigencias de un mundo globalizado, altamente simbólico, inestable y recargado de información. Por lo anterior, la necesidad de estimular la competencia matemática, tal y como ha sido concebida anteriormente, conlleva la búsqueda de opciones de enseñanza concretas que permitan abordar tal desafío, una de ellas es la inclusión en el currículo de tareas-problemas contextualizados que permitan acercar las matemáticas “del aula” y las matemáticas “del entorno”.

RELEVANCIA DE LA CONTEXTUALIZACIÓN EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La investigación sobre los problemas contextualizados en la educación matemática se ha realizado atendiendo a diferentes objetivos y metodologías (Cachafeiro, 2003; De Lange, 1996; Gravemeijer, Doorman, 1999, citado por Cachafeiro, 2003; Van Reeuwijk, 1997). Éstas muestran que hay una distancia importante entre las matemáticas que se explican en la escuela y las que las personas usan en su vida cotidiana. La existencia de esta brecha es uno de los motivos que explican las actitudes negativas que muchas personas desarrollan hacia las matemáticas (D`Amore y Fandiño, 2003).

Los investigadores ponen de manifiesto la relevancia de contextualizar la matemática que se estudia en las instituciones educativas

> *En nuestra opinión, los contextos y la vida cotidiana deberían desempeñar un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, es decir, no sólo en la fase de aplicación, sino también en la fase de exploración y en la de desarrollo, donde los alumnos descubren o aún mejor reinventan las matemáticas.* (Van Reeuwijk, 1997, p. 13)

Algunos investigadores señalan que los niveles de educación obligatoria son los más idóneos para ello, las razones dadas son que permitiría ver la utilidad de las matemáticas, facilitaría su aprendizaje y aumentaría su significado (Cecilia y Flores, 1997). De Lange (1996) también reconoce la relevancia de contextualizar en la educación matemática, este investigador plantea las siguientes razones de peso para integrar problemas contextualizados en el currículo: *a)* facilitan el aprendizaje de las matemáticas, *b)* desarrollan las competencias de los ciudadanos, *c)* desarrollan las competencias y actitudes asociadas a la resolución de problemas y *d)* permiten ver a los estudiantes la utilidad de las matemáticas para resolver situaciones de otras áreas como situaciones de la vida cotidiana de las personas.

En estrecha relación con la contextualización está la *modelización matemática*, proceso mediante el cual se construye y desarrolla un modelo matemático (Castro,

Castro, 1997), tales investigadores plantean que se matematiza la realidad a través de un modelo cuando determinados hechos y sus relaciones se expresan a través de términos y relaciones matemáticas abstractas; desde esta perspectiva un modelo matemático es una estructura matemática que aproxima o describe ciertas relaciones de un hecho o fenómeno, por lo tanto consideran que "modelizar una situación de la vida real significa matematizarla" (p. 110). Autores como De Lange (1987) y Swetz (1991)[1] proponen que en todo proceso de matematización ocurren cinco pasos:

- *Identificar un problema de la vida real, organizar la información, estructurarla y obtener diversos patrones o regularidades entre sus datos, a la vez que se identifican relaciones y otros aspectos matemáticos.*
- *Interpretar el problema matemáticamente; el modelo matemático más formal y abstracto se irá desarrollando por aproximaciones a la situación real, normalmente por medio de gráficas, ecuaciones y tablas de valores.*
- *Emplear teorías y herramientas matemáticas para abordar y obtener la solución del problema; este modelo es entonces aplicado a la situación problemática real para describirla y predecir nuevos fenómenos.*
- *Evaluar e interpretar la solución del problema; el modelador examina y evalúa el modelo a la luz de la situación real original.*
- *Refinar la solución técnica para obtener la mejor respuesta en los problemas que quedan bajo la consideración del modelo.*

(p. 110)

Los pasos anteriores expresan que la modelización matemática es, fundamentalmente, una forma de resolución de problemas de la vida real; pero no es una forma cualquiera, sino que conlleva la consideración del problema como un todo. De forma análoga el proyecto PISA (OCDE, 2004) describe que la matematización consta de cinco aspectos: se parte de un problema del mundo real, éste se formula en términos matemáticos, gradualmente se abstrae de la realidad a través de procesos tales como hacer supuestos sobre cuáles aspectos del problema son importantes, la generalización del problema y su formalización (estos permiten transformar el problema real en un problema matemático que representa la situación en forma fehaciente), luego se resuelve el problema matemático y después se hace consciencia en términos de la situación original.

[1] Citados en Castro y Castro (1997).

La modelización o matematización de situaciones permite al profesor considerar el entorno físico y social para abordar situaciones problema dentro de contextos vinculados a los alumnos; es decir, el profesor tendrá la posibilidad de relacionar los conceptos matemáticos con el mundo real, de tal manera que los alumnos puedan vislumbrar una mayor importancia a los temas de las matemáticas escolares. Por lo tanto la modelización matemática es un poderoso instrumento de aprendizaje significativo.

Los autores mencionados señalan tres contextos de aula en los que se puede realizar la modelización. El primero se refiere a resolver problemas en los cuales las operaciones matemáticas surgen como generalización de acciones reales. En el segundo caso, el estudiante toma un problema de la vida real, lo organiza, estructura, a continuación determina la matemática relevante necesaria y, finalmente, resuelve el problema; en otras palabras, el estudiante aplica a una situación real conceptos matemáticos de los que disponía previamente. En el tercer contexto, el punto de partida es un problema de la vida real para el que se introducen y desarrollan nuevos conceptos (Castro, Castro; 1997).

El Caso de la Proporcionalidad

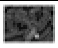
La proporcionalidad es un tema presente en el currículo escolar que está relacionado con muchos de los contenidos matemáticos y con contenidos de otras materias como Física, Biología, Química, entre otras (Fiol y Fortuny, 1990). En la enseñanza de las matemáticas, la Proporcionalidad es un núcleo a partir del cual se unifican las líneas básicas de nociones como: razón y proporción, fracción, número decimal, porcentajes, escalas, semejanza de figuras. En las Ciencias muchos conceptos de Física y Química son en realidad nombres dados a relaciones de proporcionalidad como: velocidad, aceleración, densidad, presión, concentraciones, dilataciones, Ley de Ohm. En las Ciencias Sociales conceptos como densidad de población, tasa de natalidad, lectura de mapas están también asociados con la proporcionalidad.

El razonamiento proporcional es un tipo de pensamiento que los estudiantes probablemente apliquen en su profesión y situaciones de la cotidianeidad. Por ejemplo se pueden encontrar proporciones en muchas situaciones: ampliando y reduciendo fotografías, fotocopias, modelos, mapas, comparación de precios, ofertas en las compras, tasas telefónicas, tasas de cambio de divisas, recetas, comparando probabilidades, inclinación de una colina, longitud de la sombra respecto al tamaño del objeto, gráficos y diagramas de información, consumo del coche, etc. (Feijs, Galen, Gravemeijer, Herpen, Keijzer, 2008). En resumen el razonamiento proporcional juega un importante papel en muchos escenarios del mundo real, razón por la cual podemos afirmar que este contenido matemático ofrece una riqueza especial para acercar las matemáticas "*del aula*" y las "*del entorno*".

EJEMPLO DE TAREA-PROBLEMA

A modo de ejemplo presentamos el análisis de una tarea que ha sido de elaboración propia en la Figura 1, se titula "Crecimiento de Bacterias". Con esta tarea se pretende que a partir de una situación científica del entorno socio-cultural los estudiantes describan verbalmente la relación de proporcionalidad directa que se da entre las dos magnitudes (tiempo, número de días), apliquen diferentes estrategias o técnicas, distintas de la "regla de tres", que permitan determinar un término desconocido de una cuarta proporcional directa, representen gráficamente y simbólicamente la relación de proporcionalidad directa, también pretende provocar una reflexión, por parte de los estudiantes, en torno a las comparaciones aditivas y multiplicativas entre cantidades. Siguiendo la tipología de situaciones incluidas en el marco del proyecto PISA (OCDE, 2004) la situación que proponemos es de tipo científica; también señalamos que de acuerdo con las tipologías tradicionales de los problemas de razón y proporcionalidad el ítem *b* de esta tarea es de valor faltante y el ítem *f* es de comparación de razones (Allain, 2000; Cramer y Post, 1993; Lamon, 1993a, 1993b[2]).

[2] Citada en Fernández (2001).

 Crecimiento de Bacterias

Unos científicos están investigando el comportamiento de una bacteria con el fin de controlar la proliferación de la misma. Se interesan especialmente por el día en que la población sea de 650, porque es cuando deben iniciar una nueva técnica de control de la población.

El crecimiento se puede medir siguiendo la evolución, a lo largo del tiempo, del número de bacterias por unidad de volumen, las primeras observaciones se recogen en la tabla:

Tiempo (días)	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Número de bacterias	52	78	104	130	156	182	208	234	260

a) Describe el tipo de relación que existe entre el número de bacterias y el número de días.

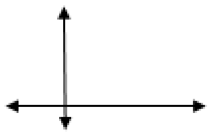
b) Aplica estrategias o técnicas diferentes a la "regla de tres" para averiguar:

- El número de días que han transcurrido hasta que el número de bacterias sea de 650.
- El número de bacterias después de 15 días.

Explica tu razonamiento en cada caso.

d) Escribe una fórmula para hallar el número de baterías después de "*n*" días

e) Representa en el eje de coordenadas la relación entre las dos magnitudes (tiempo y número de bacterias).



f) Hace cinco días se tomó la longitud de dos bacterias. La bacteria A tenía 0,05 mm de longitud y la bacteria B tenía 0,04 mm de longitud. Hoy de nuevo se midieron las bacterias y la bacteria A mide 0,11 mm y la bacteria B mide 0,1 mm.

En los últimos cinco días y en relación con la longitud inicial: ¿Alguna de las dos bacterias ha crecido más? Explica tu razonamiento.

Figura 1. Relación de proporcionalidad directa contextualizada

Esta tarea está concebida con la idea de que el estudiante participe en un proceso de matematización, éste proceso requiere la puesta en marcha de una serie de competencias matemáticas que, juntas, puedan ser consideradas como una competencia matemática comprensiva. Tales competencias matemáticas son: pensar y razonar (PR), argumentar (A), comunicar (C), construcción de modelos (M), formular y resolver problemas (RP), representar (R), empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico (LS). Otro criterio que considerado en el análisis de la tarea se refiere a la complejidad de los procesos necesarios para su resolución (OCDE, 2004), de modo que hemos considerado tres niveles de complejidad: las de primer nivel se caracterizan por la reproducción y procedimientos rutinarios (reproducción), las de segundo nivel se refieren a conexiones e integración de conceptos-procedimientos para resolver problemas estándar (conexión) y las de tercer nivel requieren de razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas no rutinarios (reflexión). A partir del trabajo desarrollado por Lupiáñez y Rico (2008, p. 39) hemos analizado la tarea “Crecimiento de bacterias” en términos de las capacidades que los estudiantes deben mostrar en la resolución de la misma. Tales investigadores plantean que las capacidades aluden a cómo un estudiante puede movilizar y usar su conocimiento sobre un contenido concreto, y se desarrollan por medio de las actuaciones de los sujetos cuando se enfrentan a la resolución de tareas, pero conforme se desarrollan las capacidades relativas a un tema, los estudiantes se hacen gradualmente más competentes en matemáticas. En la Tabla 1 mostramos las competencias matemáticas que se ven estimuladas mediante las capacidades que los sujetos posiblemente lleguen a activar en la resolución de esta tarea, así como el nivel de complejidad asociada a estas capacidades y competencias a las que contribuyen.

Tabla 1. *Capacidades y competencias*

Pre-descripción de las capacidades involucradas en la resolución de la tarea o del problema	Competencias Matemáticas							Proceso		
	PR	A	C	M	RP	R	LS	Rep.	Con.	Ref.
Explicar el tipo de relación que hay entre dos magnitudes.	X	X	X		X				X	
Usar distintas técnicas o estrategias para hallar un valor de una cuarta proporcional directa, conocidos los otros tres valores.		X	X		X				X	
Identificar la razón constante entre dos cantidades de magnitud en una situación de proporcionalidad directa.	X				X				X	
Escribir una expresión general para representar una relación de proporcionalidad directa a partir de una tabla de valores.	X			X		X	X		X	
Esbozar la gráfica de una relación de proporcionalidad directa.	X			X		X			X	

Tabla 1 (cont.). *Capacidades y competencias*

Pre-descripción de las capacidades involucradas en la resolución de la tarea o del problema	Competencias Matemáticas							Proceso		
	PR	A	C	M	RP	R	LS	Rep.	Con.	Ref.
Comparar relativamente dos medidas de cantidades respecto a una medición anterior de las mismas.	X					X				X
Expresar la diferencia entre una comparación “absoluta” y una comparación “relativa” de cantidades.	X	X	X							X

A partir de la tabla anterior podemos observar que con ésta tarea se podría estimular predominantemente tres competencias del nivel de “conexión”. En primer lugar la competencia de argumentación pues deben razonar matemáticamente de manera simple ofreciendo una cadena de evidencias matemáticas de diferentes tipos que les permita describir el tipo de relación que hay entre las magnitudes, además observamos que se favorece la competencia de comunicación pues deben saber expresarse oralmente y por escrito sobre las cuestiones matemáticas solicitadas, particularmente deben ser capaces de explicar el tipo de relaciones que hay entre las cantidades. También observamos que esta tarea promueve en el estudiante la competencia de resolución de problemas pues además del uso de procedimientos y aplicaciones estándar debe usar procedimientos de resolución de problemas más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas como la matemática y las ciencias, distintas formas de representación y de comunicación (tablas, gráficos y palabras).

CONCLUSIONES

Trabajar la proporcionalidad o cualquier otro tópico matemático de un modo significativo implica que hay que establecer relaciones reales y no arbitrarias entre aquello que hay que aprender y lo que ya se sabe. Mediante la atribución de significado al material que es objeto de aprendizaje la persona pueda llegar a ser capaz de usar este aprendizaje de una manera eficaz en una situación problemática particular. En otras palabras si ofrecemos a los estudiantes tareas-problemas que les posibilite establecer una relación entre el entorno y su conocimiento matemático estamos brindándoles una oportunidad de aumentar su competencia matemática. Destacamos que la contextualización y modelización constituyen valiosos recursos para conseguirlo. El análisis de las tareas en términos de las capacidades y competencias matemáticas, así como del nivel de complejidad de las mismas nos permite valorar la riqueza potencial de ésta para promover la competencia matemática. El estudio de un tema como la proporcionalidad debe atender la estimulación de distintas competencias, hemos mostrado un ejemplo de situación científica que apunta principalmente hacia la argumentación, comunicación y resolución de problemas, de modo que la promoción de otras competencias como la representación o construcción de modelos, así como la implicación de otro tipo de situaciones deben guiar la elección y elaboración de las otras tareas-problemas.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro del proyecto del plan nacional de i+D+I con referencia SEJ2006-09056, financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER.

REFERENCIAS

Allain, A. (2000). *Development of an instrument to measure proportional reasoning among fast-track middle school students*. Thesis for the degree of Master of Science. North Caroline State University. Versión digital recuperada el 26/02/2008 de http://www.lib.ncsu.edu/theses/available/etd-20010417-144134/unrestricted/etd.pdf

Cachafeiro, L. (2003). Matemáticas y experiencias de la vida cotidiana: contextos matemáticos-corporales. *UNO, 32*, pp. 38-54.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-104). Barcelona: Horsori.

Cecilia, L., Jurado, P. y Flores, P. (1997). Matemáticas y medio ambiente. *Actas VIII JAEM* (pp. 339-341). Sociedad Castellano-Leonesa de Profesorado de Matemáticas. Salamanca.

Cramer, K. y Post, T. (1993). Proportional reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

D`Amore, B. y Fandiño, M. (2003). Ejercicios anticipados y zona de desarrollo próximo: comportamiento estratégico y lenguaje comunicativo en actividad de resolución de problemas. *Epsilon, 57,* 357-378.

De Lange, J. (1996). Using and applying mathematics in education. En A. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 49-97). Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Feijs, E., Galen, F., Gravemeijer, K., Herpen, E. y Keijzer, R. (2008). *Fractions, Percentages, Decimals and Proportions. A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6*. TAL Project Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education. Utrecht University. Sense Publishers: Rotterdam, The Netherlands.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional un estudio con alumnos de primaria.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. España.

Fiol, M. y Fortuny, J. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Editorial Síntesis.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA, 3*(1), 35-48.

OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003: la medida de los conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y resolución de problemas*. En Ministerio de Educación y Ciencia (Ed.). Madrid: Autor.

Van Reeuwijk, M. V. (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *UNO, 12*, 9-16.