

# RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN EDUCACIÓN PRIMARIA: EL DESAFÍO DE LA FORMACIÓN DE PROFESORES

WALTER F. CASTRO

Universidad de Antioquia (Colombia)

JUAN D. GODINO

Universidad de Granada (España)

*En este trabajo informamos acerca de las creencias sobre el razonamiento algebraico elemental manifestadas por un maestro en formación mientras valora una tarea algebraica resuelta por dos niños de escuela elemental. Damos implicaciones para la formación inicial de maestros de escuela elemental y vinculamos los hallazgos con propuestas para ofrecer una formación matemática equitativa e inclusiva.*

El álgebra ha sido considerada como un “guardián” que impide el acceso de los estudiantes a niveles superiores de estudio y reflexión en matemáticas. Kaput (2000) hizo una propuesta denominada “algebra for all”, en la que sugiere tomar acción para promover al álgebra como facilitadora de una mejor comprensión de las matemáticas en lugar de ser inhibidora. Para Schoenfeld (2002) es urgente investigar las prácticas en el aula de clase para mejorar la formación matemática de los estudiantes, en tanto que “la falta de competencia matemática y de credenciales constituye una barrera para la

participación completa en el sistema económico. Por tanto, tasas de éxito y participación diferencial en matemáticas constituyen un tema de justicia social” (p. 3).

Para lograr que la formación en álgebra alcance a una población mayor, algunos autores han propuesto incluir el razonamiento algebraico desde los niveles inferiores de la educación primaria (Davis, 1985; Vergnaud, 1988); esta inclusión ha sido denominada “la algebrización” del currículo (Kaput, 2000). En tanto que el álgebra está relacionada con una mejor comprensión de la aritmética, con la geometría, el análisis y otros temas matemáticos, parece que no hay duda que una buena experiencia temprana con el álgebra podría servir para mejorar la formación matemática de los niños.

Los resultados de diversas investigaciones longitudinales sobre la inclusión del razonamiento algebraico desde la escuela elemental (Derry, Wilsman y Hackbarth, 2007) alientan a iniciar la enseñanza del álgebra en la escuela primaria para preparar mejor a los niños para asumir el álgebra de la escuela secundaria.

Diversas investigaciones reportan tanto los logros de niños de escuela primaria cuando trabajan con tareas propias del razonamiento algebraico elemental (Amit y Neria, 2008; Becker y Rivera, 2008) como la inclusión del razonamiento algebraico elemental en el currículo de la escuela primaria (Fong, 2004; Watanabe, 2008). Es por tanto pertinente ofrecer a los maestros experiencias de formación que incluyan algunos aspectos del razonamiento algebraico elemental para iniciarlos en el reconocimiento y promoción de este cuando sea manifestado por los niños.

## **EL ÁLGEBRA EN LA ESCUELA ELEMENTAL**

Schoenfeld (2002) afirma que el problema de ofrecer una formación matemática diversa es complejo y considera diversos factores contextuales, curriculares y sociales que confluyen en la problemática. Si bien es cierto que el problema es complejo reconoce que una mejor formación matemática de los niños pasa por una mejor formación de los maestros.

Para ofrecer oportunidades de formación a los futuros maestros, para que puedan reconocer y promover el razonamiento algebraico de los niños, es necesario, entre algunos factores, adaptar el razonamiento algebraico elemental a las creencias de los maestros, a las condiciones de desarrollo cognitivo de los niños, a sus experiencias

matemáticas previas, así como a los objetivos curriculares de los programas oficiales emanados de la Junta de Andalucía y del Ministerio de Educación y Ciencia.

En este trabajo mostramos las creencias de un maestro en formación acerca de los conocimientos algebraicos manifestados por niños de sexto grado de escuela elemental en la solución de una tarea algebraica, y damos algunas conclusiones en relación con la formación matemática de los maestros de escuela elemental.

## LA EXPERIENCIA DE FORMACIÓN DE MAESTROS

La investigación se realizó en el marco del curso “Currículo de matemáticas en Educación Primaria” impartido en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, el cual, tiene una componente práctica y una teórica. Cabe mencionar que ni el conocimiento del contenido del álgebra ni su didáctica fue motivo de estudio en el curso. El estudio en cuestión se realizó durante el primer cuatrimestre del curso 2008- 2009. El estudiante sobre el cual se informa en este documento, tiene 20 años, manifiesta gusto hacia la matemática, no tiene experiencia docente, sin embargo suele dar asesorías a niños de escuela primaria. Durante las reuniones de trabajo mostró un pensamiento crítico e independiente.

### Procedimiento

En el marco de la elaboración de una unidad didáctica sobre el razonamiento algebraico elemental se ofreció a los estudiantes una asesoría orientada por el primer autor. Las dos sesiones iniciales de la asesoría se dedicaron a la discusión tanto del carácter algebraico de algunos ejercicios adaptados de Booth (1984) como de nuestra aproximación al razonamiento algebraico elemental<sup>1</sup>. Los estudiantes recibieron un material de apoyo que contenía ejemplos de algunas de las dificultades más frecuentes relacionadas con las letras y con el signo igual que los escolares encuentran en su aprendizaje del álgebra.

Con el ánimo tanto de indagar sobre las creencias manifestadas por los maestros como de valorar la alineación de nuestra propuesta de razonamiento algebraico elemental con sus creencias, se consideró pertinente que el maestro discutiera y valorara

---

<sup>1</sup> Consideraremos como “razonamiento algebraico elemental” (RAE) al sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la educación primaria en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelación, etc.).

ejercicios resueltos por los niños de sexto grado, de una escuela en Granada. El ejercicio que se discute en este trabajo se tomó del texto Positive Algebra (Kindt, 2004) y fue aplicado en el cuarto mes desde el inicio del curso. No se permitió el uso de calculadora ni se respondieron preguntas durante el examen y los niños consignaron todas las operaciones y cálculos en los folios provistos para ello. Comentaremos los análisis realizados por el maestro sobre las soluciones de dos niños.

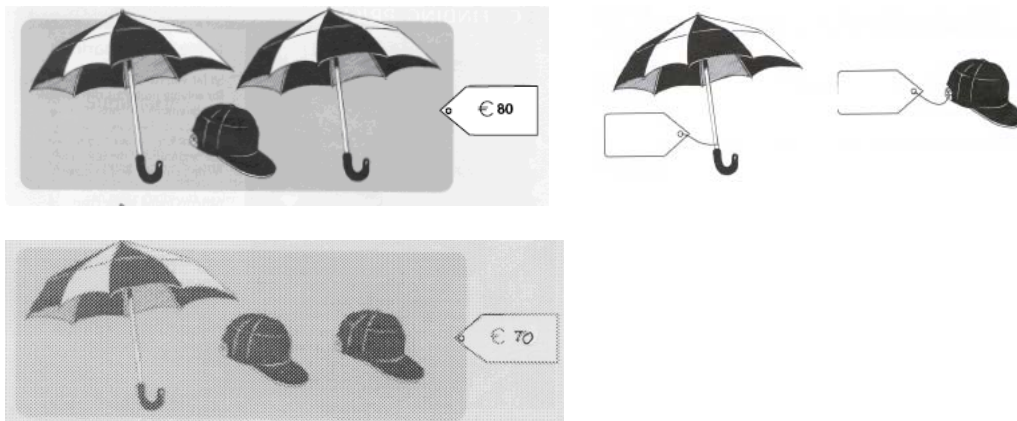
## RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

Para obtener comprensión del proceso experimentado por el estudiante se efectuó un proceso de triangulación y se usaron varias fuentes de datos: conversaciones informales, solución escrita de ejercicios, identificación escrita de elementos algebraicos y audio de las discusiones.

## LA DISCUSIÓN DEL PROBLEMA

El enunciado del primer problema discutido se muestra en la Figura 1.

*¿Cuánto vale una sombrilla y una gorra?*



*Figura 1. Problema de gorras y sombrillas*

Se presenta la solución del niño en la Figura 2.

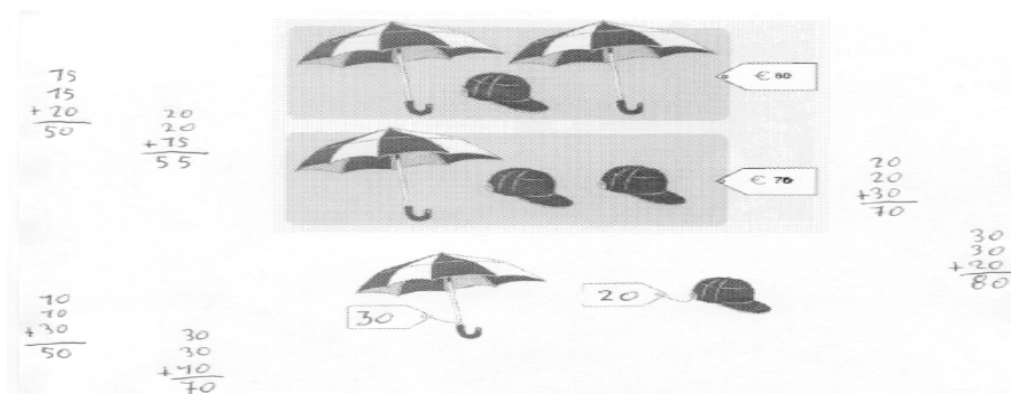


Figura 2. Solución numérica

El estudiante verifica que el ejercicio ha sido correctamente resuelto.

Investigador (I): ¿Cómo resolverías el ejercicio?

La explicación del estudiante se muestra en la Figura 3.

$$\begin{array}{l}
 2x + y = 80 \\
 x + 2y = 70
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x \rightarrow \text{sombrilla} \\
 y \rightarrow \text{gorra}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x = 20 - 2y \\
 190 - 4y + y = 80 \\
 190 - 3y = 80
 \end{array}$$

Figura 3. Solución dada por el maestro

I: ¿Las respuestas que el niño dio son correctas?

Estudiante (E): Si

I: ¿Cómo crees que el estudiante resolvió el ejercicio si no ha escrito nada en el folio?

E: Pues... cuadra los precios

I: ¿Qué significa “cuadra los precios”?

E: Pues que si tu le pones a la sombrilla 30€ y sumas esto con esto [señala a sombrillas y gorras en la primera viñeta] y a cada gorra le das 20€ y sumas, te da lo que aquí [señala los resultados, 80 y 70]. El niño lo hizo probando valores.

El estudiante identifica que la estrategia de solución usada por el niño fue la de ensayo y error. Nótese que el estudiante utilizó una estrategia algebraica para resolver el

ejercicio, si bien no la concluyó. Parece que el estudiante se siente cómodo cuando ha escrito las ecuaciones y ha verificado que la respuesta dada por el niño es correcta.

A continuación se interroga al estudiante sobre la validez de la respuesta dada por el niño.

*I:* ¿Consideras que la estrategia de solución del problema es válida?

*E:* Si, es válida.

*I:* Pero usaste una estrategia algebraica, escribiste las ecuaciones para comprobar.

*E:* Si, pues el problema se resuelve más fácil usando ecuaciones, pero si no se pueden usar, entonces usaría ensayar valores hasta que cumpla las condiciones...

El estudiante valora la estrategia algebraica para asegurar la validez de la respuesta del niño, sin embargo acepta que ante la imposibilidad de usar ecuaciones, recurriría a la estrategia de ensayo y error. Al parecer considera dos niveles de validación de la solución: una formal, mediante el uso de un sistema de ecuaciones, método en el cual confía, y otra informal, mediante el ensayo de valores numéricos.

Interrogado sobre la naturaleza algebraica de la solución dada por el niño, el estudiante afirma:

*E:* hmm... no lo sé... el problema es de álgebra, pues son dos ecuaciones y dos incógnitas, pero el chaval lo resolvió ensayando valores. El estudiante no uso el álgebra, usó números...supongo que está bien resolverlo así...

El estudiante considera que el problema es de álgebra, sin embargo valora la solución como numérica dado que no se usaron ni ecuaciones, ni incógnitas. El estudiante no percibe que para resolver el problema el niño ha tenido que identificar objetos matemáticos y asignar significados que son propios del álgebra.

Con el ánimo de confrontar al estudiante, se le mostró una solución en donde un niño utilizó ecuaciones. La solución mostrada al estudiante se ilustra en la Figura 4.

$$\begin{array}{l}
 2s = 80 - g \quad g = 7 \quad 2s = 79 \quad s = 39,5 \quad g = 20 \quad 2s = 60 \quad s = 30 \\
 s = 70 - 2g \quad g = 20 \quad s = 50
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 30 \\
 30 \\
 + 20 \\
 \hline
 80
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 30 \\
 20 \\
 + 20 \\
 \hline
 70
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2s = 80 - g \quad g = 1 \quad 2s = 79 \quad s = 39,5 \quad g = 20 \quad 2s = 60 \quad s = 30 \\
 s = 10 - 2g \quad g = 10 \quad s = 50 \quad 30 + 30 + 30 = 60 \quad 30 + 20 + 20 = 70
 \end{array}$$

Figura 4. Solución algebraica y numérica

E: ¿y de que grado es este estudiante?

I: De sexto grado.

E: Sorprendente que escriba ecuaciones...

I: Sin embargo, observa que escribió ecuaciones pero utilizó la misma estrategia de solución que el caso anterior. ¿Consideras que este niño utilizó álgebra para resolver el problema?

E: hmmm... yo diría que sí, pues usó ecuaciones, un sistema de ecuaciones, ¿sabes? Pero como no sabe resolverlas ensayó valores... el chaval es muy bueno... ¡que niño!

El estudiante considera que tanto el uso de ecuaciones como de incógnitas caracterizan al razonamiento algebraico elemental. No considera, por ejemplo, que para asignar números a sombrillas y gorras, el niño ha tenido que conceder el significado de incógnita a las viñetas que representan sombrillas y gorras; ha representado tales objetos gráficos en términos de valores desconocidos, además ha interpretado el conjunto de viñetas y precio, como una ecuación que debía ser resuelta por dos valores numéricos.

Esto se ratifica, cuando en la segunda solución, Figura 4, afirma que el estudiante utilizó álgebra para resolverlo, por el uso de ecuaciones en la representación del problema. Hallazgos análogos han sido reportados por Espinosa (2004).

## CONCLUSIONES PARA LA FORMACIÓN DE MAESTROS

El caso presentado ofrece evidencia de las creencias de un maestro en formación manifestada mediante la valoración de un ejercicio de razonamiento algebraico resuelto

por dos niños de grado sexto de escuela elemental. La concepción manifestada por el maestro en relación con lo que es “álgebra” evidencia una tendencia a considerar el razonamiento algebraico elemental como “un debilitamiento” del razonamiento algebraico del currículo de la secundaria, en el que se resuelven ejercicios más sencillos pero usando igualmente incógnitas, ecuaciones y procedimientos de despeje de la incógnita. Resultados parecidos han sido reportados por (Asquith, Stephens, Knuth y Alibali, 2007; Mac Goven y Davis, 2001; Stump y Bishop, 2002). La pregunta formulada por Carraher y Schlieman (2007, p. 675): “¿Pueden los maestros de primaria enseñar álgebra?”, tiene en este caso una respuesta intermedia: el maestro en formación podría enseñar álgebra en la escuela elemental, sin embargo requiere ampliar su concepción acerca de lo que es el razonamiento algebraico en la escuela primaria. Parece que no existe correspondencia entre las competencias algebraicas exhibidas por los dos niños y la competencia del futuro maestro para reconocer y promover el razonamiento algebraico manifestado ellos. Llama la atención que el estudiante parece desconocer la aproximación al razonamiento algebraico elemental que se le dio al inicio de la experiencia y que fue motivo de discusión en dos sesiones de asesoría. Dado que cambiar las creencias de los maestros es una tarea difícil que demanda un esfuerzo continuado (Wubbels, Korthagen y Broekman, 1997) consideramos que se requiere incrementar las investigaciones en el aula sobre la formación de maestros, y vincular las prácticas de análisis didáctico realizadas por maestros en formación con las prácticas matemáticas realizadas por niños de escuela elemental. De esta manera se podrían ofrecer oportunidades a los maestros de aprender a reconocer y a promover el razonamiento algebraico manifestado por los niños, lo que podría tanto favorecer el acceso de los niños a niveles superiores de formación matemática, como disminuir la discriminación basada en conocimientos y credenciales académicas.

### **Agradecimientos**

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER.



## REFERENCIAS

- Amit, M. y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education*, 40(1), 111-129.
- Asquith, P., Stephens, A., Knuth, E. y Alibali, M. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 249-272.
- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Becker, J. R. y Rivera, F. D. (2008). Generalization in algebra: The foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades *ZDM Mathematics Education* 40(1), 1.
- Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor, Berkshire: Nfer-Nelson.
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. (2006). Early algebra and algebraic reasoning. En Frank y K. Lester (Eds.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 669-705). Reston: NCTM.
- Davis, R. B. (1985). ICME-5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behavior*, 4(2), 195-208.
- Davis, R. B. (1989). Theoretical considerations: Research studies in how humans think about algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp. 266-274). Reston, VA: NCTM y Laurence Erlbaum Associates.
- Derry, S. J., Wilsman, M. J. y Hackbarth, A. J. (2007). Using contrasting case activities to deepen teacher understanding of algebraic thinking and teaching. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 305-329.
- Espinosa, M. E. (2004). *Tipología de resolutores de problemas de algebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial*. Tesis Doctoral. Granada.
- Fong, N. S. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: A case study of the Singapore Primary Mathematics Curriculum. *The Mathematics Educator*, 8(1), 39-59.

- Kaput, J. (1998, May 27-28). *Transforming Algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by algebrafying the K-12 curriculum*. Trabajo presentado en el The nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum: Proceedings of a National Symposium, Washington DC.
- Kindt, M. (2004). *Positive algebra: A collection of productive exercises*. Utrecht: Freudenthal Institute.
- McGowen, M. A. y Davis, G. (2001). Changin pre-service elementary teachers' attitudes to algebra. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of Algebra* (Vol. 2, pp. 438-446). University of Melbourne, Australia.
- Schoenfeld, A. H. (2002). *Looking for leverage: Issues of classroom research on "Algebra for All"*. Trabajo presentado en el International Conference on the Teaching of Mathematics Hersonissos, Crete.
- Stump, S. y Bishop, J. (2002). Preservice elementary and middle school teachers' conceptions of algebra revealed through the use of exemplary curriculum materials. En D. S. Mewborn, P. Sztajn, D. Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volumes 1-4. pp. 1903-1914). Athens, GA: International Groups for the Psychology of Mathematics Education.
- Vergnaud, G. (1988). *Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre*. Artículo presentado en las Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique (pp.189-199), Paris: La Pensée Sauvage.
- Watanabe, T. (2008). Algebra in elementary school: A japanese perspective. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Wubbels, T., Korthagen, F., y Broekman, H. (1997). Preparing teachers for realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 32(1), 1-28.