

RECONSTRUCCIÓN DE UN SIGNIFICADO DE REFERENCIA DEL NÚMERO π A PARTIR DE SU EVOLUCIÓN HISTÓRICA

PATRICIA M. KONIC

Universidad de Río Cuarto (Argentina)

JUAN D. GODINO

Universidad de Granada (España)

Este trabajo es parte de una investigación en la que realizamos una reconstrucción histórica-epistemológica del número π , para obtener información sobre los tipos de situaciones-problemas y sistemas de prácticas en que se pone en juego este objeto a lo largo de su desarrollo histórico. Dicha reconstrucción nos permitió evidenciar la multiplicidad y complejidad de elementos que se hallan a la base de su construcción como así también aquellos que emergen de las relaciones entre ellos.

Desde la escolaridad primaria, niños entre 11 y 12 años deben hacer uso, en la resolución de situaciones problemáticas, de números irracionales los cuales presentan una gran complejidad epistemológica, cognitiva y por ende instruccional, como es el caso particular del número π .

Una indagación rápida basada en textos de circulación actual y procesos instructivos llevados a cabo por docentes que se desempeñan en la escolaridad primaria y secundaria de Argentina, nos permitió vislumbrar que el número π comienza a tener

presencia escolarizada con el cálculo de la longitud de una circunferencia; lo que se produce generalmente hacia el final del segundo ciclo de la Educación General Básica (4to., 5to. y 6to. curso, esto es, niños de 9 a 11 años). Pero, además, se percibió que el tema se hallaba ausente, o al menos, sin continuidad clara en los períodos siguientes, ello hasta el final del tercer ciclo (12 a 14 años) de la mencionada escolaridad, momento en que la prescripción curricular hace visible a este objeto ante la aparición de los números reales. No obstante, tampoco se observa, en ese contexto, un tratamiento efectivo de este número.

En el segundo ciclo, generalmente, se detectó el uso de la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro como aplicación mecánica de una fórmula; sin un trabajo consciente de parte del alumno, por un lado, del origen de esa relación y por otro, de los atributos que tiene la constante resultante de la misma. Al final del tercer ciclo, ante la aparición de los números reales, π parece ganar posición ante la particularidad de ser un número “muy conocido” pero que paradójicamente resulta casi improbable que el alumno en el futuro le atribuya su verdadero carácter numérico: el de ser concebido como un número irracional.

Ante esta situación y atendiendo a la complejidad epistémica que los números irracionales presentan, nos propusimos realizar, en primera instancia, un estudio de carácter epistemológico sobre el número π . Las cuestiones generales que nos planteamos en nuestra investigación son las siguientes: ¿Cuál es el papel que desempeña actualmente el número π en la educación matemática de los niveles pre-universitarios? ¿Qué aspectos de π se estudian en dichos niveles? ¿Con qué otros objetos matemáticos se relaciona? ¿Qué cambios se podrían hacer en los diseños curriculares de la enseñanza primaria y secundaria para aprovechar las posibilidades educativas de π ? En síntesis, definimos nuestro problema como el estudio de los elementos epistémicos constituyentes para la caracterización del número π como objeto de enseñanza.

Este trabajo se materializó en un estudio documental, con carácter descriptivo. En él se pretendió plasmar una reconstrucción histórico-epistemológica del “significado global de π ”, para lo cual hemos utilizado algunas nociones teóricas del enfoque “ontosemiótico” sobre los conocimientos matemáticos desarrollado por Godino, Batanero y Font (2007).

Una mirada de la evolución histórica nos permitió detectar los problemas o situaciones, que nos llevaron a identificar las principales “configuraciones epistémicas”, en que se puede estructurar un significado global de π . Dicho significado construido sobre la base de los vínculos establecidos entre las configuraciones epistémicas asociadas a cada problema detectado y seleccionado en la historia, nos dio fundamentos para analizar el diseño curricular del Sistema Educativo de Argentina. Con dicho análisis se pretendió determinar la presencia o ausencia de elementos, que den cuenta de las posibles trayectorias epistémicas, asociadas a este número.

En este trabajo nos abocamos a describir la primera etapa de esta investigación, es decir, al estudio exploratorio realizado sobre el desarrollo histórico de la evolución de π y a explicar el tipo de análisis (análisis epistémico) realizado a través de diferentes configuraciones de π , “armadas” en torno a problemas esenciales que marcaron “cambios” en el desarrollo o en el tratamiento del número en cuestión en la historia.

DESARROLLO HISTÓRICO DE LA EVOLUCIÓN DE π : ESTUDIO EXPLORATORIO

El estudio de π puede abordarse tomando en consideración los diferentes enfoques que la comunidad científica fue proyectando a lo largo de la historia. Consideramos que conocer las etapas que marcaron distinciones en los enfoques de su tratamiento, resulta relevante a los fines de iniciar un estudio epistémico de la noción.

Para el desarrollo de este trabajo, en principio, hemos tomado la clasificación de las fuentes con la estructura que se plantea en Berggren, Borwein y Borwein (1997). La interpretación del proceso y la descripción de trabajos relevantes que involucran a π , han sido complementados además con aportaciones a la historia realizadas por Chabert, (1993), Boyer (1986), además de estudios presentados por Temprano (1991). Las fuentes más relevantes en cada período las podemos sintetizar en las siguientes:

El Periodo Pre-Newtoniano

Las fuentes documentales corresponden a Egipto, Grecia, China y a la tradición árabe medieval. a) Papiro de Rhind; b) π en los tiempos de la Biblia; c) Arquímedes.

De Newton a Hilbert

Este período incluye los trabajos más significativos sobre π . Por un lado aparece un enfoque analítico del tema. Mientras los métodos de cálculos aproximados son perfeccionados, con el desarrollo del análisis infinitesimal se produce una verdadera revolución del enfoque por el empleo de sumas y productos infinitos, la utilización de funciones trigonométricas y hasta la de fracciones continuas. Por otra parte se prueba la irracionalidad de π y luego la trascendencia. Los trabajos rescatados en cuanto representantes de diferentes contextos son los de: Viete (1593), Wallis (1650), Leibniz (1673), Euler (1779) y Buffón (1760).

El Siglo XX

Este siglo se caracteriza por desarrollos analíticos de mayor sofisticación y la era del cálculo computacional. Esto contribuye sustancialmente a la búsqueda de cada vez mayor cantidad de decimales de π . Ramanuján (1913) es el más destacado representante de la época porque realiza numerosas y muy buenas aproximaciones de π a través de valores singulares de integrales elípticas.

Interpretación del Desarrollo

Nuestra interpretación del desarrollo de π a lo largo de la historia nos ha permitido definir etapas específicas, que ponen en evidencia sistemas de prácticas diferentes. Las que encuadramos del siguiente modo:

- Etapa I. Evaluaciones de relaciones de longitudes o de áreas, con un fuerte apoyo geométrico;
- Etapa II. Formalización de las “evidencias” ante la aparición del análisis infinitesimal;
- Etapa III. Pruebas acerca de la naturaleza de π , desde un punto de vista esencialmente teórico, aunado a los numerosos esfuerzos para obtener cada vez más decimales, a través de técnicas, algoritmos y tecnología cada vez mas sofisticados.

ANÁLISIS EPISTÉMICO DE π

La referencia a situaciones-problemas y la relatividad institucional de los sistemas de prácticas puestos en juego en cada situación lleva al enfoque teórico que hemos

planteado a recuperar y valorar la historia de una forma particular. Nosotros le damos una interpretación desde un punto de vista epistemológico, y más concretamente onto-semiótico.

Si bien nuestro punto de partida es la detección de problemas que hacen emerger algún significado del número π , nos interesa estudiar las técnicas, los lenguajes, las entidades conceptuales, proposicionales y argumentativas puestas en juego en cada momento y circunstancia. Los “sistemas de prácticas”, así constituidos e identificados por ese conjunto de objetos, nos permite también estudiar la relación entre ellos y de ese modo construir configuraciones epistémicas puntuales que, al ser articuladas con otras, posibilita una reconstrucción del “significado global” del objeto matemático π , así como exhibir los “significados parciales” que lo componen (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007).

Teniendo en cuenta el estudio histórico realizado hemos llegado a la conclusión que los tipos de problemas en los cuales ha emergido el número π se pueden resumir en los siguientes:

- La medida directa de la longitud de la circunferencia por los hebreos del tiempo de la Biblia.
- La cuadratura del círculo realizada en el antiguo Egipto, como se describe en el Papiro de Rhind.
- La acotación del perímetro del círculo por inscripción y circunscripción de polígonos, proceso desarrollado por Arquímedes.
- Cómo interpretar una longitud medida a lo largo de una circunferencia o de alguna otra curva
- Cómo interpretar el argumento de $\text{sen}(x)$.
- El número de decimales de π .
- La naturaleza de los decimales de π .

También han generado un tipo de problemas los siguientes interrogantes:

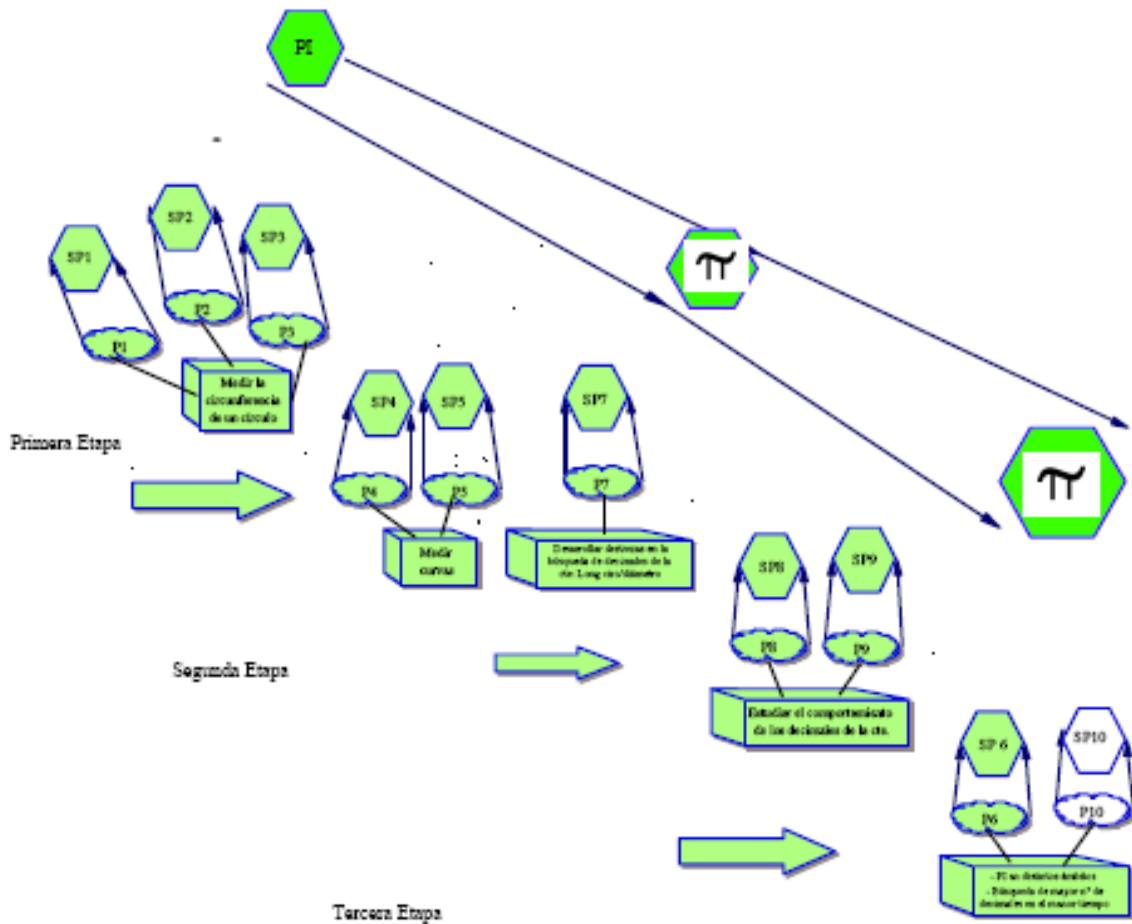
- ¿Es π algebraico?
- ¿Con quién se relaciona π ?

Hemos seleccionado una serie de problemas que consideramos representativos de los tipos descritos precedentemente. Pensamos que el estudio de los problemas que hemos seleccionado en esta investigación, constituyen un espectro de π donde se transita, a lo

largo de la historia, por distintas etapas en las que se ponen de manifiesto proyectos diferentes y donde π asume un estatus diferente. En este sentido, hemos distinguido tres etapas básicas donde a cada una de ellas hemos asociado una serie de problemas que intentan representarlas.

Para ilustrar el tipo de trabajo realizado, solo describimos los tres problemas seleccionados para abordar el estudio de la primera etapa. No obstante, a continuación presentamos un esquema que muestra una visión global del proceso de estudio según la evolución histórica de π .

Mas aún, la Figura 1 permite visualizar el enriquecimiento del significado de π a través del desarrollo que la evolución histórica va marcando. En este sentido queda explícita por un lado cada una de las etapas de evolución y por otro, las diferentes situaciones que han permitido la búsqueda de problemas que las representan. Estos problemas a través del sistema de prácticas que desarrollan permiten detectar claramente elementos de significado tales como conceptos, argumentos, procedimientos, propiedades, lenguajes que conforman los significados locales del objeto matemático π .



Figural. Etapas de desarrollo de π

PROBLEMAS SELECCIONADOS PARA EL ESTUDIO DE LA PRIMERA ETAPA

La Medida Directa de la Longitud de la Circunferencia por los Hebreos del Tiempo de la Biblia

En el Antiguo Testamento, II Crónicas 4:2 y en I Reyes 7:28 (Eves, 1969) encontramos la siguiente descripción en la que se relaciona la longitud de la circunferencia y el diámetro: “Luego él hizo el Mar en forma de fuente, que tenía primero diez codos, perfectamente circular; tenía una altura de cinco codos y un cordel de treinta codos medía el contorno”.

La Cuadratura del Círculo en el Antiguo Egipto

El problema 50 que encontramos en el Papiro de Rhind se enuncia del siguiente modo (Berggren, Borwein y Borwein, 1997, p.1): “Problema 50: Ejemplo de un campo redondo de diámetro 9 khet. ¿Cuál es su área?”

La Acotación del Perímetro del Círculo por Inscripción y Circunscripción de Polígonos (Arquímedes)

La proposición III de el texto de Arquímedes la hemos rescatado del Fac-símil de un extracto de “De la Medida al Círculo en las Obras Completas de Arquímedes” (Traducción realizada por Paul Ver Eecke, 1921; reed. Blanchard, París, 1961, pp. 130-134): “Proposición III: El perímetro de todo círculo vale el triple del diámetro aumentado de menos de la séptima parte, pero de mas de 71 partes del diámetro”.

CONCLUSIONES

La historia nos ha permitido considerar una *primera etapa*, donde nos propusimos rescatar aquellos problemas plasmados en documentos originales o en sus primeras reconstrucciones, puesto que aportan indicios sobre situaciones, contextos y modos en que se manifiesta la presencia de π . En esta etapa, los problemas originales son los que permiten iniciar el estudio, ya que de ellos se puede obtener información sobre los orígenes de este objeto matemático. Concretamente, la búsqueda de situaciones reales, con resolución en un contexto particular (contexto geométrico) y con justificaciones basadas fundamentalmente en la evidencia.

En una *segunda etapa* abordamos aquellos problemas que orientan su camino hacia la búsqueda de la “caracterización” de este elemento como objeto matemático, donde ahora es el contexto el que permite un avance en dicho propósito. Esto se da concretamente por la fuerte evolución del cálculo, lo que brinda herramientas de estudio que permitirán abordar la problemática desde diferentes enfoques (geométrico, trigonométrico, analítico) en un proceso dialéctico que a la vez produce enriquecimientos y nuevos resultados en esa rama de la matemática.

Por último, y en una *tercera etapa*, ante la identificación de este elemento como objeto matemático, estudiamos aquellos problemas relacionados con las propiedades y los vínculos que π como objeto formal adquiere dentro de una estructura matemática y su inserción modelizada en diferentes ámbitos matemáticos.

A través de la reconstrucción del significado global de π se pone en evidencia la complejidad epistémica que este objeto encierra. Del análisis de los sistemas de prácticas emergentes de los problemas seleccionados, se observa por un lado la multiplicidad de elementos de significados que se hallan tanto a la base de su construcción como así también aquellos que emergen de las relaciones entre ellos. Por otro lado la complejidad epistémica que encierran algunos de ellos, obliga a estudiar con profundidad esos elementos a los fines de favorecer la implementación de instrucciones que favorezcan el paso hacia una verdadera concepción del elemento. Algunos de los ejemplos a los que hacemos referencia son los siguientes:

La consideración del diámetro de una circunferencia como unidad de medida, la relación entre el diámetro y el perímetro del círculo, la emergencia de π como una constante, la precisión de la medida, la aproximación de la superficie del círculo a través de otras superficies, la acotación de una medida. La distinción entre una expresión decimal y un número decimal. Estos elementos de significado indiscutiblemente generan desafíos matemáticos de gran interés formativo especialmente para la educación obligatoria.

REFERENCIAS

- Berggren, L., Borwein, J. y Borwein, P. (Eds) (1997). *PI: A source book*. New York: Springer.
- Boyer, C. (1987). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos.
- Chabert, J. (1994). *Histoire D'Algorithmes*. París: Éditions Belín.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. Disponible en <http://www.ugr.es/local/jgodino>
- Temprano, J. (1991). El Sorprendente número π . *SUMA*, 7, 69-74.
- Wilhelmi, M., Godino, J. y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27 (1), 77 - 120. Disponible en <http://www.ugr.es/local/jgodino>