

## RECURSOS PARA EXPLORACIÓN DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL EN INTERNET

Jose Miguel Contreras<sup>1</sup>, Carmen Díaz<sup>2</sup> y Carmen Batanero<sup>1</sup>

1 Universidad de Granada

2 Universidad de Huelva

### RESUMEN

En este trabajo analizamos la utilidad de algunos recursos relacionados con la enseñanza de la probabilidad condicional, tema en que se han descrito una variedad de posibles sesgos, y dificultades. Estos recursos nos ayudan a visualizar objetos matemáticos, propiedades o teoremas relacionados con dicho concepto, permitiendo al estudiante variar diferentes datos, tales como el número de sucesos o las probabilidades de los mismos y ver el efecto de dicho cambio sobre otros sucesos y probabilidades.

**Palabras o frases clave:** probabilidad simple, condicionada, independencia, errores, applet

### 1. INTRODUCCIÓN

La probabilidad simple y condicional son conceptos requeridos en la construcción de la probabilidad producto, la inferencia estadística, clásica y bayesiana, asociación entre variables, regresión, modelos lineales y toma de decisiones bajo incertidumbre. Sin embargo, en la investigación didáctica se han descrito numerosos sesgos de razonamiento, que continúan incluso después de la enseñanza (Díaz y de la Fuente, 2005). Los más importantes sesgos son los siguientes:

- *Independencia y mutua exclusividad:* Creer que dos sucesos son independientes si y sólo si son excluyentes, error muy extendido, y descrito anteriormente por Kelly y Zwiers (1986), quienes suponen que es debido a la imprecisión del lenguaje ordinario, en que “independiente” puede significar, a veces, separado. Esta creencia es errónea pues dos sucesos excluyentes son justamente dependientes pues uno no puede ocurrir a la vez que el otro.
- *Confusión entre condicionamiento y causación:* Mientras que la existencia de una relación causal implica la dependencia estadística entre las variables consideradas, lo contrario no es siempre cierto. Una relación condicional indica que una relación causal es posible, pero no segura. Sin embargo, la persona que evalúa una probabilidad condicional percibe en forma diferente las relaciones causales y diagnósticas, dando mayor peso a la causal e incluso considerando que todas las situaciones condicionales son causales (Tversky y Kahneman, 1982a). La relación de causalidad también se asocia, a menudo, con la secuencia temporal suponiendo que el suceso condicionante ha de suceder siempre antes que el condicionado (Falk, 1986; Gras y Totohasina, 1995).
- *Intercambio de sucesos en la probabilidad condicional* (Eddy, 1982; Falk, 1986). Son muchos los estudiantes que no diferencian  $P(A/B)$  y  $P(B/A)$ , por ejemplo, probabilidad de que una prueba médica sea positiva si se está enfermo y la de estar enfermo si la prueba es positiva.
- *Confusión de probabilidad condicional y conjunta* (Pollatsek, Well, Konold y Hardiman, 1987; Ojeda, 1995; Tversky y Kahneman, 1982b).
- *Situaciones sincrónicas y diacrónicas:* Si el problema se plantea como una serie de experimentos secuenciales (situaciones diacrónicas) o simultáneas (sincrónicas) (Falk, 1989; Ojeda, 1995). Formalmente las dos situaciones son equivalentes, aunque los sujetos no siempre las perciben de este modo (Sánchez y Hernández, 2003).

- *Razonamiento bayesiano:* Las limitaciones en la comprensión de los enunciados de los problemas relativos al Teorema de Bayes, son debidas, entre otras razones, a la forma verbal en que están expresados y a la cantidad de datos y condiciones involucradas en los mismos. Tversky y Kahneman, (1982b) indican que la comprensión del teorema de Bayes exige esfuerzo cognitivo y no es fácil para los estudiantes la interpretación exacta de lo que se les pide. Gras y Totohasina (1995) suponen que los alumnos pueden encontrarse con dificultades en función del tipo de representación elegida para resolver el problema, que les es dado en formato verbal.

En la actualidad existen muchos recursos para la enseñanza de la estadística en Internet, que permiten explorar y simular procesos aleatorios y que podrían contribuir a la mejora de la intuición del alumno y por tanto a la superación de algunos de los sesgos descritos. Sería necesario, sin embargo, realizar análisis didácticos de estos recursos, así como de la forma de trabajo con ellos para orientar al profesorado. En este trabajo llevamos a cabo un estudio sobre algunos recursos que permiten explorar y visualizar la probabilidad simple y condicional y temas relacionados con ella, con el fin de prever su utilidad en la enseñanza y las posibles dificultades que se pueden encontrar a la hora de utilizar estos contenidos en el aula con estudiantes.

## 2. EXPLORACIÓN DE OPERACIONES ENTRE SUCESOS

En primer lugar analizamos un recurso (cuya pantalla principal se muestra en la figura 1) que permite explorar las operaciones entre dos sucesos. El recurso muestra un diagrama de rectángulo con una partición del espacio muestral en un suceso  $A$  y su contrario no  $A$  y otro suceso  $B$  y su contrario. Las probabilidades de  $A$  y  $B$  y de sus contrarios están fijadas, mientras que las de las operaciones binarias con estos cuatro sucesos van a depender de su situación relativa en el espacio muestral. Pinchando con el ratón, se puede también colorear diferentes sucesos,  $A, B, \bar{A}, \bar{B}, A \cap B, A \cap \bar{B}, A \cup B$  y  $\bar{A} \cup \bar{B}$ . La posición relativa de los sucesos  $A$  y  $B$  se pueden modificar moviendo el cursor, visualizando las probabilidades  $P(A \cap B), P(\bar{A} \cap B), P(A \cup B)$  y  $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ . Este programa calcula automáticamente las probabilidades condicionales  $P(B/A)$  y  $P(A/B)$ , aunque no muestra cómo se hace el cálculo sino tan sólo el resultado.

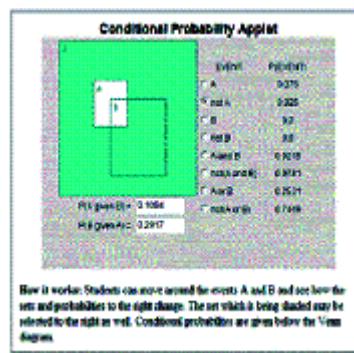


Figura 1: Pantalla del Conditional Probability Applet

En la tabla 1 se analizan los objetos matemáticos implícitos en el recurso, que es básicamente una visualización de las diferentes operaciones que se pueden formar con dos sucesos, y sus respectivas probabilidades. A partir de los sucesos  $A, B, \bar{A}$  y  $\bar{B}$  con  $P(A), P(B), P(\bar{A})$  y  $P(\bar{B})$  fijos. El Applet nos muestra directamente las siguientes propiedades:

- Descomposición de la probabilidad de la intersección:  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
- Descomposición de la probabilidad de la unión:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Probabilidad del complementario:  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Leyes de Morgan que permite calcular la probabilidad del contrario de la unión e intersección  $P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cup B)$  o  $P(\bar{A} \cup B) = P(A \cap \bar{B})$
- Cálculo de la probabilidad condicional a partir de la intersección

Un primer objetivo es que el alumno perciba el significado de la intersección, la unión y los complementarios y de cómo cambian las probabilidades según la posición relativa de los sucesos. También permite observar la diferencia entre  $P(A/B)$  y  $P(B/A)$ , ya que muchos estudiantes confunden estas dos probabilidades o las consideran iguales, error que Falk (1986) denomina falacia de la condicional transpuesta. Otra posible aplicación

sería comprobar que independencia no es lo mismo que mutua exclusividad. Moviendo los sucesos A y B hasta que no tengan intersección común (es decir sean mutuamente excluyentes) se observa claramente que tanto la probabilidad condicional  $P(A/B)$  como la de la intersección  $P(A \cap B)$  son nulas, aunque el producto de las probabilidades de los sucesos A y B no lo sea.. También se puede trabajar el error denominado falacia de la conjunción (Tversky y Kahneman, 1982b) o creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que la de uno de ellos por separado o la de su unión.

Tabla 2. Objetos matemáticos implícitos en el recurso

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación
Situaciones-problemas Lenguaje	Exploración de las operaciones entre sucesos y sus probabilidades	Experimentación del cambio de probabilidades al cambiar la posición relativa de dos sucesos
	Gráfico: Visualización mediante rectángulos	Partición de un espacio muestral (A, no A; B, no B)
	$A, B$	Intersección y unión de B con el suceso A
	$A \text{ and } B, \text{ not } A \text{ and } B$	El área de rectángulo total sería la probabilidad 1
	$\text{Not } A, \text{ not } B$	Sucesos
	$A \text{ or } B, \text{ Not } A \text{ or } B$	Intersección de sucesos e intersección de complementarios; Complementarios de los sucesos A y B
	$A \text{ given } B, B \text{ given } A$	Unión de los sucesos A y B
	$P(A), P(B), \dots P(\text{Event})$	condición; hay una incorrección pues lo que se condiciona es la probabilidad no los sucesos
	Verbal	Probabilidad de los sucesos
	Experimento aleatorio	Explicación de la situación
Conceptos	Sucesos	Experimento abstracto, o, no se concreta
	Espacio muestral	Cuatro partes en el espacio muestral, sucesos disjuntos dos a dos
	Complementarios	Conjunto de posibilidades
	Unión	El espacio muestral menos el suceso
	Intersección	Suceso formado por el conjunto de todos los elementos que forman parte de cada suceso por separado
	Partición	Suceso formado por el conjunto de todos los elementos comunes a los todos los sucesos
	Probabilidad	El área de cada rectángulo y su complementario es igual al del rectángulo mayor
Procedimientos	Probabilidad condicional $P(B/A)$	Medida relativa del área de cada parte respecto al total
	Cambio de posición relativa con el cursor	Medida relativa del área de $B \cap A$ respecto a cada parte A
	Cálculo de probabilidades condicionadas	Se modifica el área de algunas regiones y su medida relativa respecto al total
	Comparación de probabilidades	Se aplicaría la fórmula; automático
Propiedades	Representación gráfica	Representación de las distintas probabilidades simples y condicionadas; visualmente las puede comparar el alumno
	La probabilidad condicional $P(A/B)$ puede ser diferente de la probabilidad condicional $P(B/A)$	Diagrama
	Independencia	Medida relativa del área de $B \cap A$ respecto a cada parte A puede ser diferente a la medida relativa del área de $B \cap A$ respecto a B
	Incompatibilidad	Cuando dos sucesos son independientes la probabilidad de B condicionado a A es igual a la probabilidad de B
Argumentos	Visualizaciones	Cuando dos sucesos son incompatibles se muestra que la probabilidad condicional de B condicionado a A es igual a cero
		Definición visual de las distintos sucesos y su relación

### Dificultades posibles de los estudiantes

Una de las principales dificultades que pueden encontrar los estudiantes es la interpretación del lenguaje del Applet. En la columna de la izquierda aparecen diferentes operaciones con sucesos bajo la palabra “event” y las notaciones de las operaciones con sucesos, aunque intuitivas son correctas. Sin embargo, en la columna derecha sólo aparece mención a  $P(\text{event})$ , pero luego en cada fila no vuelve a aparecer la notación de probabilidad. Es por ello que los estudiantes podrían considerar todas las probabilidades listadas como probabilidades simples (en lugar de referirse a la probabilidad de la unión, intersección o contrario). La notación coloquial para los sucesos intersección y la probabilidad condicional puede también ocasionar el error pues Einhorn y Hogarth (1986) sugieren que los enunciados que usan la conjunción “y” pueden llevar a confundir la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional. Por otro lado, como no se puede cambiar el tamaño relativo de los sucesos A y B, se

puede interpretar que la probabilidad solo depende de la posición relativa de los sucesos, aunque en realidad también dependería del tamaño de los sucesos en relación al espacio muestral.

### EXPLORACIÓN DE OTROS CONCEPTOS

En la figura 2 mostramos un recurso que puede servir para explorar la idea de independencia. Los estudiantes deben imaginar una baraja de cartas que contienen tarjetas de color rojo y negro y hacer predicciones sobre la ocurrencia de diferentes sucesos. El porcentaje de tarjetas rojas puede ser modificado. Se trata de hacer concienciar a los estudiantes de que la probabilidad de cada suceso no varía en función de los resultados obtenidos. Se les debe alentar a jugar el juego de varias maneras. En primer lugar, hacemos un ejercicio en el que la carta adivinada es la roja. De esta manera se puede estimar la proporción de tarjetas rojas encubiertas. El mismo ejercicio puede ser realizado por adivinar el porcentaje de cartas de color negro. Al final del ejercicio, los estudiantes deben ser animados a reflexionar sobre la idea de independencia y sobre la existencia de sesgos tales como la falacia del jugador. También se puede hacer observar la estabilización de las frecuencias relativas a la larga, pero hacer notar las fluctuaciones en las series cortas de ensayos.

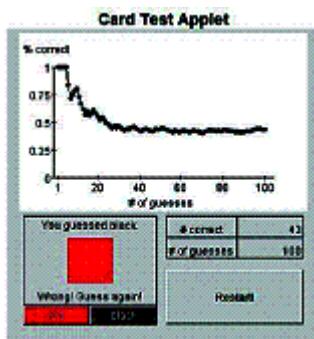


Figura 2: Card test Applet

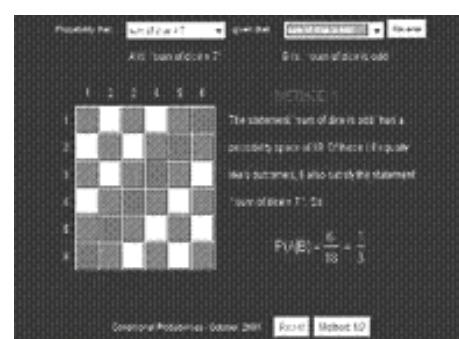


Figura 3: Conditional probability Applet

Tabla 2. Recursos para visualización de la probabilidad condicional y conceptos relacionados

Nombre	Dirección
Bayes Rule	<a href="http://www.bolderstats.com/gallery/prob/bayes.html">www.bolderstats.com/gallery/prob/bayes.html</a>
Birthday Demonstration	<a href="http://onlinestatbook.com/simulations/birthday/birthday.html">onlinestatbook.com/simulations/birthday/birthday.html</a>
Cabri Java Applet	<a href="http://www.planetqhe.com/beta/compound%20events%20two/CabriJava%20Files/CAB.HTM">www.planetqhe.com/beta/compound%20events%20two/CabriJava%20Files/CAB.HTM</a>
Card test Applet	<a href="http://www.stat.tamu.edu/~west/Applets/cardtest.html">http://www.stat.tamu.edu/~west/Applets/cardtest.html</a>
Condicional probability demo	<a href="http://onlinestatbook.com/chapter5/conditional_demo.html">onlinestatbook.com/chapter5/conditional_demo.html</a>
Conditional probability	<a href="http://www.rfbarrow.btinternet.co.uk/htmasa2/Prob2.htm">www.rfbarrow.btinternet.co.uk/htmasa2/Prob2.htm</a>
Conditional probability and independent events	<a href="http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Probability/ConditionalProbability.shtml">www.cut-the-knot.org/Curriculum/Probability/ConditionalProbability.shtml</a>
Conditional Probability and Multiplication Rule	<a href="http://www.spsu.edu/math/deng/m2260/stat/cond/cond.html">www.spsu.edu/math/deng/m2260/stat/cond/cond.html</a>
Conditional probability Applet	<a href="http://www.stat.tamu.edu/~west/Applets/Venn1.html">www.stat.tamu.edu/~west/Applets/Venn1.html</a>
Conditional Probability Demo	<a href="http://onlinestatbook.com/simulations/conditional_p/conditional_p.html">onlinestatbook.com/simulations/conditional_p/conditional_p.html</a>
Dice and conditional probability	<a href="http://www.math.fau.edu/Richman/Liberal/dice.htm">www.math.fau.edu/Richman/Liberal/dice.htm</a>
Dice Table	<a href="http://shodor.org/interactivate/activities/DiceTable/">shodor.org/interactivate/activities/DiceTable/</a>
Gamblers Fallacy Simulation	<a href="http://onlinestatbook.com/simulations/gambler_fallacy/gambler.html">onlinestatbook.com/simulations/gambler_fallacy/gambler.html</a>
Java Applets: TwoArm	<a href="http://www.dim.uchile.cl/~mkwi/ma34a/libro/chapter4/TwoArm/TwoArm.html">www.dim.uchile.cl/~mkwi/ma34a/libro/chapter4/TwoArm/TwoArm.html</a>
Marbles	<a href="http://www.shodor.org/interactivate/activities/marbles/">www.shodor.org/interactivate/activities/marbles/</a>
Probabilty by Surprise	<a href="http://www-stat.stanford.edu/~susan/surprise/">www-stat.stanford.edu/~susan/surprise/</a>
Racing Game with One Die	<a href="http://www.shodor.org/interactivate/activities/RacingGameWithOneDie/">www.shodor.org/interactivate/activities/RacingGameWithOneDie/</a>
Random Birthday Applet	<a href="http://www-stat.stanford.edu/~susan/surprise/Birthday.html">www-stat.stanford.edu/~susan/surprise/Birthday.html</a>
Two Events: Conditioning	<a href="http://www.stat.wvu.edu/SRS/Modules/ProbLaw/GivenProb.html">www.stat.wvu.edu/SRS/Modules/ProbLaw/GivenProb.html</a>
Venn Conditional	<a href="http://www.bolderstats.com/gallery/prob/conditional.html">www.bolderstats.com/gallery/prob/conditional.html</a>
Venn Diagram	<a href="http://www.bolderstats.com/gallery/prob/venn.html">www.bolderstats.com/gallery/prob/venn.html</a>
Venn Diagram Applet	<a href="http://www.teachers.ash.org.au/miKemath/VennDiagramApplet/VennGame.html">www.teachers.ash.org.au/miKemath/VennDiagramApplet/VennGame.html</a>
Venn Diagram Shape Sorter	<a href="http://www.shodor.org/interactivate/activities/ShapeSorter/">www.shodor.org/interactivate/activities/ShapeSorter/</a>
Venn Diagrams	<a href="http://www.shodor.org/interactivate/activities/VennDiagrams/">www.shodor.org/interactivate/activities/VennDiagrams/</a>
Venn Diagrams and Probability	<a href="http://www.stat.berkeley.edu/~stark/Java/Html/Venn3.htm">www.stat.berkeley.edu/~stark/Java/Html/Venn3.htm</a>

El recurso mostrado en la figura 3 consta de un cuadrado de seis por seis que representa las 36 posibilidades a la hora de tirar dos dados de seis caras y nos permite investigar cómo se comportan las probabilidades condicionales. Podemos hacer una elección entre dos listas que aparecen en la pantalla para visualizar los diferentes sucesos que se presentan en el Applet y decidir cual es el suceso condicionante. Cuando se haya elegido el suceso de cada lista, algunas de las celdas del cuadrado se colorearan de rojo o amarillo. Los cuadrados de color representan el número de combinaciones de los dados que satisfagan la condición  $B$  (la segunda condición de la derecha de la lista desplegable). De estas celdas de color, el rojo representa las combinaciones, que también cumplen la primera condición ( $A$ ). Existen dos métodos para calcular  $P(A/B)$ , uno de ellos implica contar los cuadrados de colores, el otro utiliza una fórmula. El Applet nos proporciona métodos para ver cómo se relacionan entre sí. Si pulsamos "Reverse", se intercambian las declaraciones  $A$  y  $B$ . Con lo que debemos detectar rápidamente que  $P(A/B)$  no es, en general, igual a  $P(B/A)$ . Finalmente, en la tabla 1. presentamos las direcciones de estos y otros recursos de exploración.

### 3. REFLEXIONES FINALES

Hemos incluido en este análisis recursos que pueden servir para visualizar algunos de los objetos matemáticos que se relacionan tanto con la probabilidad simple, como con la probabilidad condicional, o algunas de las propiedades o teoremas relacionados con los mismos. En el trabajo en el aula, se plantearía el problema, dejando un tiempo para que los estudiantes lleguen a una posible solución. Seguidamente se discutirían con los estudiantes las soluciones correctas e incorrectas encontradas por los mismos, hasta lograr que se acepte alguna de las correctas. El profesor ayudaría a analizar las causas de los errores y haría un resumen de lo aprendido. En caso de resistencia a la solución, se dejaría confrontar las soluciones con la evidencia empírica producida por el Applet para que los estudiantes comprendan las causas de sus intuiciones erróneas y las revisen. Pensamos que en este juego se dan las condiciones de idoneidad didáctica, que Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005) definen como la articulación de seis componentes:

- Idoneidad epistémica o matemática: Representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. El proceso descrito podría ser idóneo para el estudio de los conceptos de: probabilidad condicional, experimento compuesto, dependencia e independencia y experimentos dependientes e independientes, pero esta idoneidad depende del tipo de solución encontrada. En general las soluciones formales tienen mayor idoneidad en un curso universitario y de formación de profesores, pero en un curso de secundaria las soluciones intuitivas podrían ser suficientes. La solución empírica, tiene, en general, baja idoneidad matemática, a menos que se complemente con una solución intuitiva o formal.
- Idoneidad cognitiva: Grado en que los significados pretendidos/ implementados son asequibles a los alumnos, así como si los significados personales logrados por los alumnos son los pretendidos por el profesor. La situación planteada tiene suficiente idoneidad en cursos de formación de profesores de secundaria y los últimos cursos de secundaria, pues los razonamientos descritos están al alcance de los alumnos.
- Idoneidad interaccional: Grado en que la organización de la enseñanza permite identificar conflictos semióticos y resolverlos durante el proceso de instrucción. Este tipo de idoneidad dependerá de cómo organiza el profesor el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en grupos para que surja el conflicto y se explice. Será importante también organizar una discusión colectiva de las soluciones para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los puntos equivocados.
- Idoneidad mediacional: Disponibilidad y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. No se precisa de muchos recursos, pues incluso podría hacerse una simulación con objetos físicos o con un solo ordenador en el aula, donde los alumnos pueden jugar colectivamente.
- Idoneidad emocional: Interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio. Pensamos que esta es la más alta de todas, pues el juego interesa a todo el que trata de resolverlo.

En los cursos de formación de profesores, el análisis didáctico, similar al descrito, sirve para aumentar el conocimiento de los profesores sobre probabilidad, metodología de la enseñanza de la probabilidad y algunos razonamientos erróneos de los estudiantes. Se podría mejorar el proceso si se dispone de soluciones dadas por alumnos reales que los profesores puedan analizar para detectar los errores descritos.

Nota: Este trabajo forma parte del proyecto SEJ2007-60110 (MEC- FEDER) y beca FPI BES-2008-009562.

## REFERENCIAS

Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. En D. Kahneman, P. Slovic y Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.

Einhorn, H. J. y Hogart, R. M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin*, 99, 3 – 19.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, 59, 245-260.

Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Godino, J., Wilhelmi, M. y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 4(2), 1-26.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995) Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.

Kelly, I. W. y Zwiers, F. W. (1986). Mutually exclusive and independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory. *Teaching Statistics*, 8, 96 – 100.

Ojeda, A. M. (1995) Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, N° 5, 37-55.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255 – 269.

Sánchez, E. y Hernández, R. (2003). Variables de tarea en problemas asociados a la regla del producto en probabilidad. En E. Filloy (Coord.), *Matemática educativa, aspectos de la investigación actual* (pp. 295 – 313). México: Fondo de Cultura Económica.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982a). Causal schemas in judgment under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117 – 128). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982b). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69 – 83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.