

# SIGNIFICADOS DE LA PROBABILIDAD EN LIBROS DE TEXTO PARA EDUCACIÓN PRIMARIA EN ANDALUCÍA

## Meanings of probability in primary school textbooks used in Andalucía

Gómez Torres, E.<sup>a</sup>, Contreras, J. M.<sup>b</sup> y Batanero, C.<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Universidad Nacional de Colombia, <sup>b</sup>Universidad de Granada

### Resumen

*Se sintetiza el contenido probabilístico de dos series de libros de texto para educación primaria, analizando el significado de la probabilidad latente y comparando los contenidos con las directrices curriculares. Usamos herramientas de análisis del enfoque onto-semiótico para identificar y describir cómo se introduce cada objeto matemático (situación problema, lenguaje, concepto, propiedad, procedimiento y argumento) en los libros seleccionados. Los resultados muestran la introducción de objetos matemáticos ligados a cuatro significados de la probabilidad: el intuitivo está presente en todos los ciclos, el clásico y el frecuencial en los dos últimos, mientras que el subjetivo solo se menciona de forma tangencial. La comparación de las dos series muestra coincidencia en la mayoría de objetos encontrados; se resalta el tratamiento diferenciado del enfoque frecuencial, pues una editorial sólo presenta el punto de vista estadístico y la otra también desarrolla el punto de vista probabilístico.*

**Palabras clave:** Significados de la probabilidad, análisis de libros de texto, alfabetización probabilística

### Abstract

*We summarize the results of analyzing the probabilistic content in two series of primary school textbooks and the latent meanings of probability they introduce in comparing them with the curricular guidelines. We use the onto-semiotic approach and describe the way the mathematical objects are introduced in the selected textbooks (problem situations, language, concepts, properties, procedures and arguments). Our results show the introduction of mathematical objects linked to four meanings of probability: the intuitive meaning is present in all the different levels, the classical and frequentist in the two upper levels, and the subjective approach is only tangential. There is coincidence in both series in the majority of objects included; we found different treatment of the frequentist approach, since one editorial only presents the statistical point of view, while the other also develops the probabilistic point of view.*

**Keywords:** Meanings of probability, analysis of textbooks, probabilistic literacy

### INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la probabilidad se ha introducido en la educación primaria en diversos países en las últimas décadas (Jones, Langrall y Mooney, 2007; Batanero, Burril y Reading, 2011) con la finalidad de formar el conocimiento y razonamiento probabilístico desde la infancia, para que el ciudadano pueda desenvolverse con éxito en las situaciones inciertas.

Los documentos oficiales (MEC, 2006; MECD, 2014) proponen que la enseñanza de la probabilidad sea más experimental, para proporcionar a los niños una experiencia estocástica desde su infancia, reforzando sus intuiciones probabilísticas, en línea con los estándares americanos (CCSSI, 2010, NCTM, 2000). Mediante un lenguaje elemental probabilístico, juegos, experimentos y observación de fenómenos naturales, se intenta que el niño aprenda a reconocer la aleatoriedad y

Gómez Torres, E., Contreras, J. M. y Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 73-87). Alicante: SEIEM.

al final de este ciclo educativo sea capaz de comparar y estimar algunas probabilidades sencillas. Una novedad en esta propuesta es un cambio desde un significado exclusivamente clásico de la probabilidad a un significado frecuencial, que conecta estadística y probabilidad (Batanero, 2005).

Una implicación de esta decisión es la necesidad de adaptar el contenido de los libros de texto, para que los conceptos que tratamos de introducir sean asequibles a los niños, pues con frecuencia, estos textos determinan el discurso matemático escolar y regulan la enseñanza y el aprendizaje (Cordero y Flores, 2007). Los libros son un producto de la transposición didáctica, descrita por Chevallard (1991), donde el conocimiento matemático formal se ha adaptado para convertirlo en conocimiento matemático para ser enseñado. El análisis de libros de texto es un componente del análisis curricular, dado que el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores es un paso entre el currículo pretendido y el implementado en el aula (Herbel-Eisenmann, 2007). Ortiz (2002) subraya la importancia del análisis de libros de texto por ser una fuente de contenidos y actividades para la enseñanza y aprendizaje de una disciplina. Además, menciona que el papel de los profesionales de la educación es vigilar epistémicamente los contenidos que figuran en los libros de texto, para identificar significados sesgados y evitar su transmisión a los estudiantes.

Este trabajo pretende contribuir en tal sentido, caracterizando los objetos matemáticos, considerados en el enfoque onto-semiótico (Godino, Batanero y Font, 2007 y 2012), para los significados de la probabilidad adecuados a la educación primaria, que se presentan en dos series de libros de texto de amplia difusión en la comunidad autónoma de Andalucía. A continuación se presenta el marco teórico y el método utilizado, así como una síntesis de los resultados, que se detallan más ampliamente en Gómez (2014). Resultados parciales del estudio se han publicado en Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013), Gómez, Ortiz y Gea (2014) y Gómez, Batanero y Contreras (2014).

## MARCO TEÓRICO

### Significados de la probabilidad

Aunque los juegos de azar han abundado en diferentes culturas, el inicio de la teoría matemática de la probabilidad ha sido tardío, sin que haya un acuerdo sobre las razones de este retraso (Bennet, 1999). Borovcnik y Kapadia (2014) sugieren que las creencias que ligaron el azar con las ceremonias religiosas o mágicas y la concepción determinista del mundo pueden haber sido una razón para no intentar matematizar estos fenómenos. Lo que es cierto es que la probabilidad, desde su emergencia, ha estado sujeta a diferentes interpretaciones y debates filosóficos que todavía continúan y se relacionan con la concepción y definición del azar en diferentes periodos históricos (Batanero, 2005 y 2015; Batanero y Díaz, 2007; Batanero, Henry y Parzys, 2005; Borovcnik y Kapadia, 2014).

Una vez iniciado el cálculo de probabilidades, se han diferenciado dos puntos de vista complementarios (Hacking, 1975): por un lado, la probabilidad trata de medir el grado de creencia personal en la verosimilitud de los sucesos inciertos (perspectiva epistémica); por otro, la probabilidad trata de medir objetivamente esta verosimilitud a partir de datos de experimentos y observaciones (perspectiva estadística). De estas dos corrientes principales se deducen diversos significados, entre los que tendremos en cuenta en nuestro estudio los intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo (Fine, 1971), puesto que los hemos identificado en nuestro análisis previo de los documentos curriculares del Ministerio y de la Comunidad Autónoma de Andalucía (Gómez y Contreras, 2014).

**Significado intuitivo.** Al igual que aparecieron en las culturas primitivas, las ideas intuitivas sobre el azar aparecen tanto en niños como en adultos que no han estudiado probabilidades, quienes usan frases y expresiones coloquiales como posible, previsible, presumible, para “cuantificar” sucesos inciertos y expresar su grado de creencia en ellos. En consecuencia, la aproximación intuitiva, donde se asignan cualitativamente probabilidades a los sucesos en base a las preferencias

individuales, es apropiada en la educación primaria (Godino, Batanero y Cañizares, 1987). En este enfoque se emplean diversas expresiones lingüísticas para referirse a estas comparaciones: "más probable", "muy probable". En algunos casos se ordenan por su mayor verosimilitud y se cuantifican sólo en casos sencillos, sin formalismo matemático.

**Significado clásico.** A partir del siglo XVII matemáticos tales como Cardano (1611/1663) resuelven algunos problemas relacionados con los juegos de azar, pero el concepto de probabilidad no se formaliza hasta comienzos del siglo XVIII. La preocupación por las ganancias esperadas en estos juegos, lleva a definir la esperanza matemática antes que la probabilidad (Heitele, 1975). La correspondencia entre Pascal y Fermat, se considera como el punto de partida de la teoría de la probabilidad; aunque ellos usan la probabilidad en forma implícita, sin llegar a definirla (Batanero y Díaz, 2007). De Moivre propone la primera definición formal de probabilidad, posteriormente refinada por Laplace (1795/1814).

Si constituimos una fracción cuyo denominador es el número de chances con la que el suceso podría ocurrir y el denominador el número de chances con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción será una definición propia de la probabilidad de ocurrencia (De Moivre, 1667/1718, p.1).

Laplace propone una forma de cálculo que implica reducir los acontecimientos aleatorios a un cierto número de casos igualmente posibles. Esto constituye una debilidad, pues esta definición no es aplicable cuando los experimentos tienen infinitas posibilidades (la variable es continua) o no se cumple la equiprobabilidad. Por tanto se encuentran pocos casos donde pueda aplicarse este significado, fuera de los juegos de azar (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). Sin embargo ha sido popular en la enseñanza; pues los niños se interesan por los juegos de azar. Más allá del cálculo de probabilidades sencillas requiere de razonamiento combinatorio, que es difícil para los niños, por lo que en la actualidad este enfoque ha perdido su primacía en la educación primaria.

**Significado frecuencial.** Bernoulli proporciona la primera demostración de la *ley de los grandes números* en su libro *Ars Conjectandi*. Esta demostración fue aceptada como prueba del carácter objetivo de la probabilidad (Batanero, 2005). Sin embargo, hasta 1928 no se dio una definición formal de la probabilidad desde el punto de vista frecuencial (von Mises, 1952/1928). La probabilidad se define como el valor hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa de un suceso al estabilizarse, asumiendo la repetibilidad del ensayo. Algunos problemas filosóficos de este enfoque (Godino et al., , 1987) son los siguientes: no se obtiene un valor exacto para la probabilidad, sino que siempre se dan aproximaciones; no se sabe con certeza el número idóneo de experimentos para aceptar la estimación; a veces es imposible contar con idénticas condiciones en la experimentación. Otra objeción es que no se podría aplicar en algunos campos del conocimiento, por ejemplo a fenómenos económicos o históricos que por su naturaleza son irrepetibles. Didácticamente tiene la ventaja de conectar estadística y probabilidad.

**Significado subjetivo.** La demostración por Bayes de su teorema indicó que la probabilidad (a priori) de un suceso puede revisarse a partir de nuevos datos para transformarse en una probabilidad a posteriori. Esta idea fue retomada más tarde por Ramsey (1931) y de Finetti (1974/1937), quienes definen las probabilidades como grados de creencia personal basados en el conocimiento y experiencia personal. La probabilidad pierde su carácter objetivo, pues está condicionada por un cierto sistema de conocimientos. No es necesaria la repetición en idénticas condiciones y se amplía el campo de aplicación de las probabilidades. La controversia sobre el estatuto científico de esta visión de la probabilidad surge ante la dificultad de hallar una regla para asignar valores numéricos que expresen los grados de creencia personal (Batanero, 2005). Didácticamente el interés de esta visión es que formaliza la idea intuitiva de aprender de la experiencia.

### Investigaciones previas

Los estudios de la presentación de la probabilidad en libros de texto de matemática son escasos, siendo los principales en España los de Azcárate y Serradó (2006), Barragués y Guisasola (2006) y Ortiz (2002). Todos ellos concluyen que predominan los aspectos procedimentales sobre la comprensión conceptual o el desarrollo de razonamiento probabilístico.

Ortiz (2002) analizó una muestra de 11 libros de texto españoles para alumnos de 14-15 años que fueron usados en el período 1975-1991. Los significados clásico y frecuencial se presentaban en todos los libros, casi siempre de manera formal; muy pocos presentaban el subjetivo. El autor se basó también en el enfoque onto-semiótico y realizó un análisis detallado de los principales objetos matemáticos presentes en dichos libros. Los conceptos de espacio muestral y frecuencia relativa se introducían en la mayoría de los libros estudiados, pero pocos mencionaban las propiedades de la aleatoriedad o la frecuencia relativa. El autor también realizó un estudio detallado de las variables que caracterizan los problemas de probabilidad.

Azcárate y Serradó (2006) analizaron la estructura de cuatro series de libros de texto de educación secundaria obligatoria. Una diferencia en la organización de los contenidos es que mientras dos editoriales los presentan de forma lineal (primero nociones teóricas y luego actividades de aplicación), en las otras dos la presentación es helicoidal (alternan nociones teóricas y actividades basadas en recursos manipulativos y trabajo cooperativo). Observan presencia mayoritaria del significado clásico en unas editoriales y del frecuencial en otras, y concluyen que las relaciones entre estos dos significados no se formalizan.

Barragués y Guisasola (2006) analizan 34 libros de texto universitarios, la mayoría de los cuáles omiten aspectos importantes del conocimiento disciplinar, como las diferentes interpretaciones de la probabilidad y sus relaciones o el desarrollo histórico de este concepto.

Para completar estos trabajos nos centramos en los textos de primaria, con especial interés en analizar el modo en que ahí se presentan los diferentes significados de la probabilidad.

### METODOLOGÍA

Las dos series de los libros de texto analizados se eligieron por su amplio uso en Andalucía durante el curso 2011-2012 (tras una consulta vía web a la Consejería de Educación). Cada una de estas editoriales, denominadas en lo que sigue como Serie 1 o 2, tenía uno o dos proyectos vigentes en este curso para cada ciclo. La muestra fue constituida por un texto de primer ciclo, dos de segundo ciclo y dos de tercer ciclo por cada editorial; en total diez libros de texto (ver Anexo).

Los temas dedicados a probabilidad o estadística de estos textos fueron analizados mediante un análisis de contenido (Krippendorff, 1997), adaptando la metodología de Cobo (2003), con los pasos siguientes:

- División del texto en unidades de análisis conformadas por párrafos independientes.
- Fijación a priori de las variables para el análisis, basándonos en los objetos matemáticos considerados en el enfoque onto-semiótico (Godino, Batanero y Font, 2007 y 2012): situaciones problema, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos de la probabilidad en cada uno de sus significados.
- Definición de las categorías, para cada variable de análisis. Estas categorías se determinan mediante sucesivas revisiones de los documentos curriculares, en modo cíclico e inductivo de acuerdo a trabajos previos (Ortiz, 2002; Batanero, 2005; Batanero y Díaz, 2007; Batanero, Henry y Parzys, 2005).

- Establecimiento de la presencia de cada una de las categorías en los libros de la muestra, a través de la comparación del contenido de estos textos con la lista de categorías elaborada en el paso anterior y añadiendo categorías en caso necesario.
- Selección de ejemplos en los textos y elaboración de tablas cuya lectura facilite la obtención de conclusiones sobre la presentación de cada uno de los tipos de objetos matemáticos primarios en estas dos series.

A continuación presentamos un resumen de los resultados del análisis, organizado según los objetos matemáticos considerados en nuestro estudio. También indicamos algunas investigaciones previas en que se ha desarrollado alguno de los apartados que sigue.

### SITUACIONES PROBLEMA

De acuerdo a nuestro marco teórico, las situaciones- problemas son el punto de partida de la actividad matemática. Los libros de texto estudiados proponen actividades enmarcadas en juegos de azar sencillos conocidos por el niño y experiencias de su vida cotidiana, que se clasifican en los siguientes tipos de situaciones problema:

- *SP1. Expresión de grados de creencia en la ocurrencia de sucesos.* En las series analizadas hay pocas actividades de reconocimiento del azar en el primer ciclo, y éstas se refieren básicamente a dispositivos usados en juegos de azar; los experimentos sencillos en contexto cotidiano son más frecuentes a partir del segundo ciclo. El grado de creencia se representa en una escala cualitativa; corresponde por tanto al *significado intuitivo*.
- *SP2. Valoración de probabilidad en juegos de azar.* Actividades referidas a juegos de azar se proponen en los tres ciclos, con diverso nivel de complejidad; es el contexto más habitual para ejemplos que siguen a la definición de un concepto probabilístico. La asignación numérica aparece en la Serie 1 al final del segundo ciclo y en la Serie 2 en el tercer ciclo, después de trabajar con la regla de Laplace. Sin embargo, este campo de problemas aparece con alta frecuencia en actividades didácticas de los dos últimos ciclos, pidiendo la valoración cualitativa de la ocurrencia de un suceso con calificativos como “muy, mas, igual, menos o poco” probable.
- *SP3. Previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados.* La recolección de datos por parte de los mismos niños aparece pocas veces en estos textos. Se proponen desde segundo ciclo en la Serie 1; sin embargo, la mayoría parten de datos recolectados previamente, presentados dentro del mismo texto en una tabla de datos.
- *SP4. Estudio de sucesos donde la probabilidad puede cambiar en función de la información disponible.* Los textos analizados presentan algunas situaciones ligadas a fenómenos naturales o a juegos de destreza, que dependen de la disponibilidad de información o conocimiento previo. Por su naturaleza corresponden al *significado subjetivo*; sin embargo, su tratamiento se hace a un nivel más sencillo, acorde con la edad del niño, se valora la verosimilitud de forma intuitiva; pero la experiencia personal del niño puede llevar a diferentes respuestas.

Un ejemplo de cada una de ellas se muestra en la Figura 1 y su presencia en los textos en la Tabla 1. Observamos que estos problemas de una forma sencilla introducen los cuatro significados de la probabilidad considerados. Todas estas situaciones problema favorecen un primer contacto con la capacidad de contextualizar el pensamiento probabilístico y el lenguaje, tanto en contextos públicos como privados; por tanto permiten desarrollar uno de los componentes de conocimiento en el modelo de alfabetización probabilística de Gal (2005). Las situaciones de tipo intuitivo se restringen a primer ciclo; la clásica y subjetiva en los otros dos; sólo una de las dos series propone problemas de probabilidad ligados al enfoque frecuencial, en contra de lo propuesto en las orientaciones curriculares.

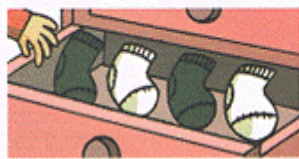

<p>Escribe seguro, posible o imposible.</p> <p>¿Cogeré los blancos?</p> 	<p>Indica si los sucesos son muy, igual o poco probables:</p> <p>-Sacar un 1</p> <p>-Sacar mayor que 1</p> 	<p>Raquel ha ido anotando el color de los coches que han pasado por su calle en media hora.</p> <table border="1"><thead><tr><th>ROJO</th><th>GRIS</th><th>AZUL</th><th>VERDE</th><th>OTROS</th></tr></thead><tbody><tr><td>    </td><td>    </td><td>   </td><td>   </td><td>    </td></tr><tr><td>    </td><td>    </td><td></td><td></td><td>  </td></tr></tbody></table> <p>a) Si tuvieras que apostar por el color del próximo coche, ¿a qué color apostarías?</p>	ROJO	GRIS	AZUL	VERDE	OTROS											<p>Clasifica como “seguro”, “probable” o “imposible” cada uno de estos sucesos en la experiencia LANZAR A CANASTA:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Que meta canasta</li><li>• Que el balón vuele por el aire</li><li>• Que el balón toque el aro</li><li>• Que la canasta valga cuatro puntos</li></ul>
ROJO	GRIS	AZUL	VERDE	OTROS														
SP1: ([T1] p. 186)	SP2 ([T8], p. 124)	SP3: ([T3], p. 213)	SP4: ([T5], p. 214).															

Figura 1. Tipos de situación problema en los textos

Tabla 1. Situaciones problema en los libros de texto

Situaciones problema	1º ciclo		2º ciclo		3º ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
SP1. Expresión de grados de creencia en la ocurrencia de sucesos	x	x	x	x	x	X
SP2. Valoración de probabilidades en juegos de azar			x	x	x	X
SP3. Previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados			x		x	
SP4. Estudio de sucesos cuya probabilidad cambia en función de la información disponible			x	x	x	X

## LENGUAJE PROBABILÍSTICO

Como componentes de este lenguaje se analizaron los términos y expresiones verbales, expresiones numéricas y simbólicas, así como representaciones tabulares y gráficas, observando una gran diversidad entre textos, que se describe con detalle en Gómez et al. (2013).

Identificamos 70 expresiones ligadas a la probabilidad en los textos analizados, que hacen alusión a algunos de los conceptos probabilísticos, a sus propiedades o a procedimientos asociados. Respecto a la aleatoriedad encontramos los siguientes: Acertar, Adivinar, Aleatoria, Asegurar resultado, Azar, No saber, Saber qué saldrá, Saber de antemano, Saber resultados posibles, Sin mirar y Suerte. La mayoría de los vocablos pertenecen a dos de las categorías que distinguen Shuard y Rothery (1984): palabras que aparecen en las matemáticas y en el lenguaje ordinario, aunque difiere el significado en los dos contextos, y palabras que en ambos contextos tienen significado idéntico o muy próximo. Pensamos que la diversidad de términos observada puede aumentar la dificultad del tema, sobre todo si se utilizan términos del lenguaje cotidiano con otra acepción; por ejemplo, en el lenguaje ordinario el término seguro a veces se emplea para referirse a un suceso de probabilidad cercana a uno, mientras que en matemáticas, siempre indica un suceso de probabilidad uno.

Se observó que el uso de expresiones cotidianas es más frecuente que el de expresiones formales y simbólicas en estas colecciones, acorde con la edad de los niños. Esta riqueza de lenguaje, en las series de texto, apoya el componente comunicativo en el modelo de alfabetización probabilística (Gal, 2005); que incluye el uso de lenguaje, en particular verbal y numérico, puesto que permite comunicar no solo la probabilidad de un suceso sino también otros constructos relevantes para un ciudadano de la era de la información.

Por otra parte, la mayoría de expresiones hacen alusión a los significados clásico e intuitivo; pocas están asociadas al significado frecuencial, de poco peso (o nulo) en las editoriales; y ninguna se al significado subjetivo, debido a que las pocas situaciones asociadas a este significado están formuladas de manera que el niño las relacione con el intuitivo o el frecuencial.

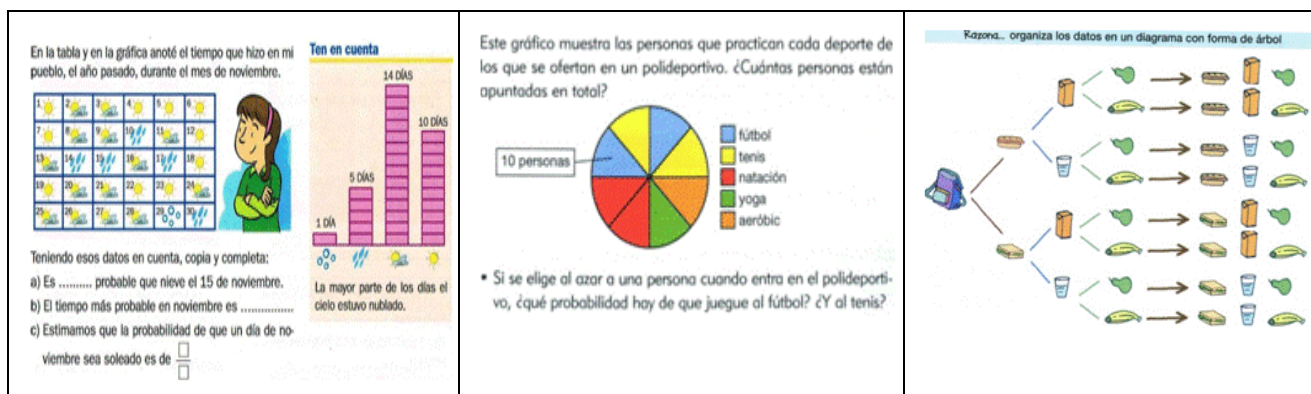
En cuanto al lenguaje numérico, se observó una gran variedad, en contraposición con el simbólico que apenas aparece. En ambas editoriales los números enteros se introducen desde primer ciclo con función nominal o numérica. Las fracciones se utilizan desde segundo ciclo, principalmente para representar la frecuencia o el valor de la probabilidad (en especial en la Serie 2). En la Serie 1, desde el tercer ciclo, se hace la equivalencia de estas fracciones con números decimales, en concordancia con el currículo, que sugiere retrasar hasta tercer ciclo la introducción de la representación con decimales. De otro lado, la mayor parte del lenguaje simbólico es común con otros bloques de contenido y se introduce en el ciclo en que el niño lo aprende o en el siguiente. Es de notar que la desigualdad se encontró solo en un texto, para expresar relaciones de orden en la comparación de probabilidades.

La complejidad del lenguaje tabular avanza con los cursos; paralela al incremento del número de objetos matemáticos y la complejidad de sus relaciones (Tabla 2). Su principal uso se asocia con presentación de datos; sólo al final de la educación primaria se relaciona explícitamente con la probabilidad, al presentar las frecuencias relativas como estimaciones de probabilidades, facilitando su articulación con la estadística y la introducción del significado frecuencial. Aunque, en general, los autores de los libros no hacen mención de la relación entre estadística y probabilidad, ni resaltan que la suma de las frecuencias relativas debe ser igual a uno. Observamos la variedad de tablas y su complejidad al incluir frecuencias relativas y en algún caso, incluso frecuencias agrupadas.

Tabla 2. Tipos de tablas presentadas en los textos

Tipo de tabla	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Listado de datos			x	x		
Tabla de recuento	X	x				
Tabla de frecuencias sin agrupar			x	x		
Tabla de frecuencias con datos agrupados					x	
Tabla de doble entrada			x			
Tabla de frecuencias relativas					x	x
Tabla de frecuencias y probabilidad					x	

En cuanto al lenguaje gráfico, se observó el uso de diagramas de barra, de sectores y pictogramas, relacionado con el tratamiento de datos, en ambas editoriales (ver ejemplos en la Figura 2). También se presenta en ambas editoriales el diagrama en árbol, que se emplea como recurso sistemático de enumeración, aunque no se hace una conexión explícita con el cálculo de probabilidades compuestas o condicionadas. Al igual que en el uso de lenguaje tabular, la Serie 1 desarrolla más el significado frecuencial, aquí con la presencia del histograma; representación que no se usa en la Serie 2. El pictograma, en cambio, se adelanta en la Serie 2 respecto a la Serie 1.



## FIGURA 2. EJEMPLOS DE LENGUAJE GRÁFICO ASOCIADO EN LOS TEXTOS A LA PROBABILIDAD CONCEPTOS

Aunque conocimiento conceptual y procedimental son dos partes de un continuo, el primero es flexible y más generalizable, ya que no está ligado a un tipo específico de problema (Rittle-Johnson, Siegler y Alibali, 2001). En la Tabla 3 presentamos los conceptos probabilísticos básicos identificados en el análisis, clasificados de acuerdo al significado de la probabilidad en que toman su sentido. Observamos que a nivel de educación primaria estos conceptos se introducen de manera informal, sin desarrollar todas sus propiedades y no se utiliza la terminología formal o definiciones de los mismos. Estos conceptos en su conjunto incluyen la mayoría de ideas estocásticas consideradas fundamentales por Heitele (1975), quien opina que dichas ideas deben constituir una guía del currículo de probabilidad desde la escuela primaria a la universidad. Asimismo, estos conceptos serían componentes de las tres ideas probabilísticas fundamentales en el modelo de Gal (2005): variación, aleatoriedad e independencia, así como sus contrapartes constancia, determinismo y asociación. Hacemos notar que conceptos como experimento compuesto, dependencia e independencia no se incluyen en las orientaciones curriculares.

Tabla 3. Conceptos en los libros de texto

Concepto según significado	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
<i>Significado Intuitivo</i>						
CI1. Azar y variabilidad	x	x	x	x	x	x
CI2. Suceso; seguro, posible e imposible	x	x	x	x	x	x
CI3. Posibilidad, grado de creencia	x	x	x	x	x	x
<i>Significado Clásico</i>						
CC1. Juego de azar	x	x	x	x	x	x
CC2. Casos favorables; casos posibles			x		x	x
CC3. Probabilidad			x		x	x
CC4. Juego equitativo					x	x
CC5. Experimento compuesto	x		x	x	x	x
<i>Significado Frecuencial</i>						
CF1. Colectivo (población); atributos	x	x	x	x	x	x
CF2. Ensayo; ensayos repetidos			x		x	
CF3. Frecuencia (absoluta, relativa)			x	x	x	x
CF4. Valor estimado de la probabilidad			x		x	
<i>Significado Subjetivo</i>						
CS1. Suceso incierto			x	x	x	x
CS2. Probabilidad como grado de creencia personal			x	x	x	x
CS3. Dependencia, independencia	x		x	x	x	x

Ambas editoriales desarrollan conceptos básicos de los cuatro significados de la probabilidad. Durante todos los ciclos se observan conceptos propios del significado intuitivo y en los dos últimos ciclos, los significados clásico, frecuencial y subjetivo. Algunos conceptos no se formalizan, como es de esperar a esta edad, solo se presentan en forma intuitiva, en especial los ligados al significado subjetivo. La Serie 2 presta mayor atención al significado clásico; mientras que la Serie 1 también desarrolla conceptos del significado frecuencial, respecto al cual había propuesto situaciones problema. Los resultados en detalle de este análisis se presentan en Gómez et al. (2014).

## PROPIEDADES

La presentación de propiedades en los textos analizados es informal pues hay pocos enunciados explícitos y ninguna demostración, como corresponde a esta edad. En la Tabla 4 presentamos



aquellas propiedades que se contemplan de modo implícito en las orientaciones curriculares. Un análisis más detallado se encuentra en Gómez et al. (2014).

Ambas editoriales incluyen propiedades de los cuatro significados de la probabilidad. Se observa la presencia durante todos los ciclos de propiedades del significado intuitivo, con respecto a la impredecibilidad y a la tipología de sucesos. Las propiedades fundamentales de los significados clásico y frecuencial se presentan gradualmente; con mayor presencia del primero, muy baja atención a la experimentación y sin mención a la simulación, a pesar de la importancia que dan las orientaciones curriculares al uso de tecnologías. Asimismo, dos propiedades fundamentales del significado subjetivo están mencionadas en los dos últimos ciclos.

Cabe resaltar que la Serie 1 desarrolla cuatro propiedades del significado frecuencial que facilitan la comprensión de su carácter aproximado y su relación con la estadística. Ambas editoriales, durante todos los ciclos, incluyen propiedades del significado intuitivo que vinculan con los significados frecuencial y subjetivo, como que la probabilidad se puede revisar en función de la experiencia; y en los dos últimos ciclos presentan la asignación clásica como cuantificación de una posibilidad, y dos propiedades del subjetivo referidas a la posible relación de causas y resultados.

Tabla 4. Propiedades presentes en los libros de texto y los documentos curriculares

Propiedad según significado	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
<i>Significado Intuitivo</i>						
PI1. Impredecibilidad del resultado	x	x	x	x	x	x
PI2. Posible: cualquier resultado	x	x	x	x	x	x
PI3. Imposible: nunca se verifica	x	x	x	x	x	x
PI4. Seguro: siempre ocurre	x	x	x	x	x	x
PI5. Calificable comparando				x		x
<i>Significado Clásico</i>						
PC1. Número de resultados finito y numerable	x	x	x	x	x	x
PC2. Equiprobabilidad de sucesos elementales	x	x	x	x	x	x
PC3, PC4. Casos favorable; posibles	x	x	x	x	x	x
PC5. Valor objetivo, calculable			x		x	x
PC6. Regla de Laplace			x		x	x
<i>Significado Frecuencial</i>						
PF1. Colectivo	x	x	x	x	x	x
PF2. Atributos equiprobables o no	x	x	x	x	x	x
PF3. Probabilidad: Valor objetivo estimable			x		x	
<i>Significado Subjetivo</i>						
PS1. Suceso incierto: impredecible			x	x	x	x
PS2. Probabilidad: condicionada			x	x	x	x

También hemos encontrado propiedades consideradas por las editoriales y que no se identificaron en el análisis de los documentos curriculares. En particular, la Serie 1 desarrolla propiedades del significado frecuencial que facilitan la comprensión de su carácter aproximado: Convergencia de la frecuencia a la probabilidad; carácter aproximado de la estimación y variabilidad de la estimación.

## PROCEDIMIENTOS

La exposición de los procedimientos en los textos analizados (Tabla 5) es informal y no se hace énfasis en la evaluación de la calidad de la información disponible. Ambas editoriales incluyen procedimientos de cada uno de los significados de la probabilidad, sin mención de la interpretación de resultados. La presencia de procedimientos asociados al significado intuitivo es notable en todos los ciclos, donde los procedimientos de reconocimiento aparecen desde primero y los de valoración desde segundo ciclo. El ciclo en que se introducen procedimientos del significado clásico varía de una editorial a otra. En el significado frecuencial, el foco de atención también varía de una editorial

a otra: solo la Serie 1 incluye procedimientos de naturaleza probabilística, ambas incluyen procedimientos de naturaleza estadística y ninguna incluye procedimientos de simulación. Los procedimientos del significado subjetivo están implícitos en otros y tienen baja presencia en estos textos, así como en las directrices curriculares.

Tabla 5. Procedimientos presentes en los libros de texto y documentos curriculares

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
<i>Significado Intuitivo</i>						
PRI1. Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas	x	x	x	X	x	x
PRI2. Reconocer la impredecibilidad de un resultado	x	x	x	X	x	x
PRI3. Reconocer tipos de sucesos	x	x	x	X	x	x
PRI4. Valorar cualitativamente posibilidades			x	X	x	x
PRI5. Comparar cualitativamente posibilidades			x	X	x	x
<i>Significado Clásico</i>						
PRC1. Analizar juegos de azar	x	x	x	X	x	x
PRC2. Enumerar casos favorables o posibles			x	X	x	x
PRC3. Diferenciar casos favorables						
PRC4. Distinguir sucesos equiprobables			x		x	x
PRC5. Comparar con razonamiento proporcional			x		x	x
PRC6. Aplicar la regla de Laplace			x		x	x
<i>Significado Frecuencial</i>						
PRF1. Enumerar o discriminar atributos	x	x	x	X	x	x
PRF2. Calcular frecuencias relativas					x	x
PRF3. Representar distribución de frecuencias	x	x	x	X	x	x
PRF4. Leer e interpretar tablas de doble entrada			x			
PRF5. Estimar la probabilidad a partir de ensayos			x		x	
PRF6. Reconocer el carácter aproximado			x		x	
<i>Significado Subjetivo</i>						
PRS1. Analizar experimentos donde la probabilidad depende de información personal			x	X	x	x

Respecto a procedimientos no contemplados en las directrices curriculares, es notable la inclusión en la Serie 1 de dos procedimientos, enmarcados en situaciones del significado clásico, que son transversales a los cuatro significados (calcular la probabilidad de la unión y del complemento), con respecto al desarrollo del significado axiomático. La Serie 2 incluye procedimientos que implican creatividad ya que en los dos últimos ciclos se pregunta al niño por su propia ejemplificación de conceptos. Otros procedimientos, no incluidos en las directrices y sí en los dos últimos ciclos de la Serie 1 son el cálculo de probabilidades en experimentos compuestos y la determinación de la equitatividad de un juego. Los resultados en detalle se encuentran en Gómez et al. (2014).

## ARGUMENTOS

Los textos analizados contienen cuatro tipos de argumento: uso de ejemplos y contraejemplos, generalización, apoyo gráfico y razonamiento inductivo; algunos de éstos se utilizan para varios significados de la probabilidad, en tanto otros son propios de uno, como se describe a continuación.

- *Uso de ejemplos y contraejemplos.* Es la forma de argumentación más frecuente en los libros de texto revisados, con todos los significados de la probabilidad; en particular se utiliza en los primeros cursos, donde los niños no tienen el desarrollo cognitivo requerido para la presentación formal de conceptos probabilísticos.

- *Generalización.* Para todos los significados de la probabilidad, la presentación de algunos contenidos, en segundo y tercer ciclo, incluye un ejemplo para relacionar el concepto con una situación conocida y una definición general para ampliar su validez. Señalamos la introducción de la regla de Laplace que se presenta después del análisis detallado de un ejemplo sin que el texto mencione las condiciones de aplicación; como las situaciones propuestas en esta colección asumen equiprobabilidad de sucesos elementales, se puede generar el sesgo de equiprobabilidad o un conflicto potencial en el momento de introducir las otras formas de asignación de la probabilidad.
- *Apoyo gráfico para comprobación de propiedades.* Los gráficos estadísticos son trabajados en esta muestra de textos en todos los cursos de la Educación Primaria. En particular, observamos que se utilizan diagramas de barras para facilitar la comprensión de algunas propiedades del significado frecuencial; suponemos que se debe al papel que juega la visualización en el aprendizaje, particularmente en edades tempranas.
- *Razonamiento inductivo a partir de datos.* La interpretación de tablas se trabaja en esta muestra de textos en todos los cursos de la Educación Primaria, con diferentes niveles de dificultad tanto en las tablas como en su lectura. Algunas de estas lecturas pueden facilitar la comprensión de algunas propiedades del significado frecuencial.

## CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado un resumen de nuestro análisis de la probabilidad en los libros de texto de primaria. Los resultados han mostrado la diversidad de lenguajes, situaciones problema, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos relacionados con la probabilidad introducidos en las series analizadas de libros de texto de educación primaria. Se observó cómo se motiva el desarrollo de la alfabetización probabilística mediante el tratamiento inicial de cuatro componentes de conocimiento, de los cinco descritos por Gal (2005): ideas probabilísticas fundamentales, asignación de probabilidades y evaluación de la calidad de la información disponible, terminología y capacidad de contextualizar.

Las dos colecciones analizadas desarrollan parcialmente los cuatro significados de la probabilidad sugeridos para estos ciclos en las directrices curriculares. La mayoría de conceptos se presentan en forma intuitiva, sin definiciones formales y no se mencionan algunas propiedades o los supuestos requeridos para el cumplimiento de propiedades; esto podría promover la generación de conflictos semióticos, sesgos o heurísticas si el profesor no lo clarifica en el aula.

Las dos editoriales difieren en forma notable en cuanto a las características de los procedimientos propuestos y a la orientación, reflejada en la inclusión de algunos contenidos así como en el ciclo en el cual se introducen los mismos. Llama la atención la ausencia, en ambas colecciones, de objetos matemáticos relacionados con simulación, a pesar de la importancia dada en los documentos curriculares al uso de tecnologías.

El significado intuitivo es el que recibe mayor nivel de atención en ambas colecciones. Está presente en los tres ciclos, en el primer ciclo se introduce y desarrolla este significado, en los otros ciclos se fortalece su desarrollo y se articula parcialmente con otros significados.

El significado clásico está muy presente en ambas colecciones en los tres ciclos; en el primero se dan a conocer propiedades de este significado, aunque se está desarrollando el intuitivo; en el segundo se introduce con cierta formalidad y se articula parcialmente con el significado intuitivo; en el tercer ciclo se fortalece su desarrollo, en particular su asignación numérica.

El significado frecuencial de la probabilidad no recibe suficiente importancia. En los textos de primer ciclo, hay algunas menciones a las propiedades del significado frecuencial, cuando se está desarrollando el intuitivo o cuando se presentan contenidos de tratamiento de datos. En los otros

dos ciclos, se omite en la Serie 2 y se introduce con poco nivel de detalle en la Serie 1: en el segundo ciclo, se introducen algunas propiedades con cierta formalidad y se articula parcialmente con el significado intuitivo, y en el tercero se fortalece su desarrollo.

La omisión del significado frecuencial en la Serie 2 puede favorecer la aparición del sesgo de equiprobabilidad en los niños. Es de suponer que extiendan la aplicación de la regla de Laplace a todas las situaciones probabilísticas que enfrentan ya que no conocen otras alternativas de asignar o aproximar numéricamente probabilidades. Por otra parte, el número de ensayos presentados o requeridos en la Serie 1 es menor que 30, con la desventaja que puede favorecer la heurística de representatividad o el sesgo de la ley de los pequeños números (Tversky y Kahneman, 1974).

El significado subjetivo de la probabilidad tiene muy baja presencia en ambas editoriales. Las propiedades asociadas al significado subjetivo se encuentran presentes en los textos de motivación de los capítulos de probabilidad, nunca en forma explícita. Básicamente referidas a los conceptos de suceso incierto y probabilidad como grado de creencia, sin utilizar estas denominaciones; no se llega a la distinción entre probabilidades a priori y a posteriori. De alguna manera se siguen las sugerencias de Godino, Batanero y Cañizares (1987) con respecto a usar en forma intuitiva este enfoque, en la educación primaria, con situaciones cotidianas del niño. Sería labor del profesor sugerir la asignación, por parte del niño, de valores numéricos a las probabilidades, que en los textos solo se preguntan con valoración cualitativa, así como proponer la revisión de estas probabilidades asignadas, después de nuevas experiencias.

Común a los cuatro significados, en las dos series de textos observamos la relevancia que tiene el lenguaje en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, así como su gran riqueza y diversidad. Este análisis sugiere que la presentación de la probabilidad en los textos lleva un uso diferenciado de diversas representaciones (tabular, verbal, gráfica y numérica), dependiendo de la editorial y el ciclo educativo. El lenguaje predominante en todos los ciclos es el verbal de uso cotidiano. Los lenguajes numérico y simbólico se introducen gradualmente, en concordancia con su aparición en otros bloques de contenido en el área de matemáticas, aunque no se relacionan de forma explícita. Los lenguajes tabular y gráfico, que utilizan desde primer ciclo en contexto de estadística, aparecen casi desligados de la probabilidad.

También es común, para los cuatro significados en las dos editoriales, el predominio de la argumentación basada en ejemplos y contraejemplos, y el aumento en la complejidad de la argumentación con el avance en los ciclos. En la preferencia por ese tipo de argumentación reconocemos un principio fundamental para el aprendizaje de los conceptos citado por Skemp (1980): Introducir un concepto mediante una adecuada colección de ejemplos y una adecuada secuenciación de actividades, en lugar de hacerlo mediante la definición. Cabe notar que la generalización no es cuidadosa en cuanto a las condiciones de validez, y esto es un generador de conflictos potenciales, sesgos o concepciones erróneas.

Los resultados de nuestro estudio muestran la amplitud y relativa profundidad del tema en las dos colecciones de libros de texto analizadas y plantean el interrogante de cómo preparar a los futuros maestros y maestras para enfrentarse con éxito a la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. Puesto que los contenidos de los textos a veces sobrepasan los reglados en las orientaciones curriculares, el maestro debe tener criterio, tanto para elegir el libro de texto como para hacer un uso adecuado del mismo.

Es importante que el maestro sea capaz de analizar las actividades propuestas en los libros de texto e identificar los objetos matemáticos que se requieren en el trabajo con las mismas y las posibles dificultades de comprensión por parte de los niños. Será necesario conocer los recursos didácticos que complementan el libro de texto para apoyar el aprendizaje. Es también importante que el maestro sea consciente de los diferentes significados de la probabilidad y cómo estos significados se privilegian, secuencian y tratan a lo largo del currículo. Es nuestra responsabilidad como

formadores ayudarles a conseguir un adecuado conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad durante su formación en nuestras facultades.

### Agradecimientos

Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

### Referencias

- Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.
- Barragués, J. I. y Guisasola, J. (2006). La introducción de los conceptos relativos al azar y la probabilidad en libros de texto universitarios. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(2), 241-256.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(3), 247-264.
- Batanero, C. (2015, febrero). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. Conferencia presentada en *CERME 9: 9th Congress of European Research in Mathematics Education*, Praga..
- Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study*. Nueva York: Springer.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J. P. van Bendegem y K. François (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education*. (pp. 107-127). Nueva York: Springer.
- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York: Springer.
- Bennett, D. J. (1999). *Randomness*. Harvard, MA: Harvard University Press.
- Borovenik, M. y Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. In E. J. Chernoff, y B. Sriraman, (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 7-34). Dordrecht, Holanda: Springer.
- Cardano, G. (1961). *The book on games of chances*. Nueva York: Holt, Rinehart & Winston. (Trabajo original *Liber de Ludo Aleae*; publicado en 1663).
- CCSSI (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington DC: National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socio epistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 7-38.
- Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 344-369.
- Fine, T. L. (1971). *Theories of probability. An examination of foundations*. Londres: Academic Press.
- Finetti, B. de (1974). *Theory of probability*. Londres: John Wiley (Trabajo original publicado en 1937).
- Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Nueva York: Springer.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2012). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento ea instrução matemática. *Acta Scientiae*, 10(2), 7-37.
- Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2014). Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Épsilon*, 31 (2), 25-42.
- Gómez, E. y Contreras, J. M. (2014). Meanings of probability in the Spanish curriculum for primary school. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics, Flagstaff, AR*: International Statistical Institute. Recuperado de [http://iase-web.org/Conference\\_Proceedings.php?p=ICOTS\\_9\\_2014](http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=ICOTS_9_2014).
- Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, 35, 75-91.
- Gómez, E., Ortiz, J. J. y Gea, M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en textos españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 5, 49-71.
- Hacking, I. (1975). *The emergence of probability* Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Jones, G., Langrall, C. y Mooney, E. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 909-955). Greenwich, CT: Information Age Publishing y NCTM.
- Krippendorff, K. (1997). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.
- Laplace, P. S. (1995). *Théorie analytique des probabilités*. París: Jacques Gabay. (Trabajo original publicado en 1814).
- MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación primaria*. Madrid: Autor.
- MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.
- Mises, R. von (1952). *Probability, statistics and truth*. Londres: William Hodge (Trabajo original publicado en 1928).
- Moivre, A. de (1967). *The Doctrine of Chances* (3a ed.). Nueva York: Chelsea (Trabajo original publicado en 1718).
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Ramsey, F. (1931). Truth and probability. En R. B. Braithwaite (Ed.), *The foundations of mathematics and other logical essays* (pp. 156-198). Londres: Kegan Paul.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. y Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 343-362.
- Shuard, H. y Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children reading mathematics*. Londres: Murray.
- Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, 185, 1124-1131.

**Anexo:** Muestra de libros de texto utilizada en el análisis*Serie 1:* Editorial Anaya

- [T1]. Pérez, E., Marsá, M., Díaz, C., Ferri, T. y Cid, O. (2011). *Matemáticas 2*. Proyecto Una a una.
- [T2]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (2008). *Matemáticas 3*. Proyecto Abre la puerta, reedición 2011.
- [T3]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (2008). *Matemáticas 4*. Proyecto Abre la puerta, reedición 2011.
- [T4]. Ferrero, L., Gaztelu, I. y Martín, P. (2009). *Matemáticas 5*. Proyecto Abre la puerta.
- [T5]. Ferrero, L., Gaztelu, I. y Martín, P. (2009). *Matemáticas 6*. Proyecto Abre la puerta.

*Serie 2:* Editorial S.M.

- [T6]. Labarta, P., Santaolalla, E., Ferrandiz, B. y Galve, R. (2011). *Matemáticas. 2º*. Primaria. Conecta con Pupi, reedición 2012.
- [T7]. Peña, M., Aranzubía, V. y Santaolalla, E. (2008). *Matemáticas 3º*. Proyecto Tirolina, reedición 2011.
- [T8]. Peña, M., Aranzubía, V. y Santaolalla, E. (2008). *Matemáticas 4º*. Proyecto Tirolina, reedición 2011.
- [T9]. Peña, M., Santaolalla, E., Aranzubía, V. y Sanz, B. (2009). *Matemáticas 6º*. Proyecto Timonel, reedición 2010.
- [T10]. Aranzubía, V., Santaolalla, E., Roldán, J. y Pérez, E. (2009). *Matemáticas 6º*. Nuevo proyecto Planeta Amigo.