
J. F. Vera	Editorial	211
P. R. Bouzas N. Ruiz-Fuentes	A Review on Functional Data Analysis for Cox processes	215
J. C. Varela-Peña A. Meca	Litigate or Mediate? Game Theory cooperates with Law	231
I. Arbués	Seasonal and calendar adjustment at statistical offices	264
J. A. Carrillo Ruiz	Los Servicios de Estadística e Investigación Operativa del Ministerio de Defensa	283
C. Batanero G. R. Cañadas J. M. Contreras M. M. Gea	Understanding of contingency tables: a synthesis of educational research	299
J. Almagro	The Strategy of Intelligence	316

BEIO (Boletín de Estadística e Investigación Operativa) es una revista que publica cuatrimestralmente artículos de divulgación científica de Estadística y de Investigación Operativa. Los artículos pretenden abordar tópicos relevantes para una gran mayoría de profesionales de la Estadística y de la Investigación Operativa, primando la intención divulgativa sin olvidar el rigor científico en el tratamiento de la materia en cuestión. Las secciones que incluye la revista son: Estadística, Investigación Operativa, Estadística Oficial, Historia y Enseñanza y Opiniones sobre la Profesión.

BEIO nació en 1985 como Boletín Informativo de la SEIO (Sociedad de Estadística e Investigación Operativa). A lo largo de los años ha experimentado una continua evolución. En 1994, aparece publicado el primer artículo científico y desde entonces el número de artículos científicos publicados ha ido creciendo hasta que en 2008 se segregan del Boletín los contenidos relacionados con la parte informativa y comienza a perfilarse como revista de divulgación de la Estadística y de la Investigación Operativa.

Los artículos publicados en BEIO están indexados en Scopus, MathScinet, Biblioteca Digital Española de Matemáticas, Dialnet (Documat), Current Index to Statistics, The Electronic Library of Mathematics (ELibM), COMPLUDOC y Catálogo Cisne Complutense.

La Revista está disponible online en www.seio.es/BEIO.

Editor

Ana María Aguilera del Pino, Universidad de Granada
aaguiler@ugr.es

Editores Asociados*Estadística*

Mathieu Kessler
Universidad Politécnica de Cartagena
Mathieu.Kessler@upct.es

Investigación Operativa

Javier Toledo Melero
Universidad Miguel Hernández de Elche
javier.toledo@umh.es

Estadística Oficial

Pedro Revilla Novella
Instituto Nacional de Estadística
pedro.revilla.novella@ine.es

Historia y Enseñanza

Mª Carmen Escribano Ródenas
Universidad CEU San Pablo de Madrid
escrod@ceu.es

Editores Técnicos

María del Carmen Aguilera Morillo, Universidad Carlos III de Madrid
maguiler@est-econ.uc3m.es

Celeste Pizarro Romero, Universidad Rey Juan Carlos
celeste.pizarro@urjc.es

Normas para el envío de artículos

Los artículos se enviarán por correo electrónico al editor asociado correspondiente o al editor de la Revista. Se escribirán en estilo artículo de Latex. Cada artículo ha de contener el título, el resumen y las palabras clave en inglés sin traducción al castellano. Desde la página web de la revista se pueden descargar las plantillas tanto en español como en inglés, que los autores deben utilizar para la elaboración de sus artículos.

Copyright © 2015 SEIO

Ninguna parte de la revista puede ser reproducida, almacenada ó trasmisida en cualquier forma ó por medios, electrónico, mecánico ó cualquier otro sin el permiso previo de la SEIO. Los artículos publicados representan las opiniones del autor y la revista BEIO no tiene por qué estar necesariamente de acuerdo con las opiniones expresadas en los artículos publicados. El hecho de enviar un artículo para la publicación en BEIO implica la transferencia del copyright de éste a la SEIO. Por tanto, el autor(es) firmará(n) la aceptación de las condiciones del copyright una vez que el artículo sea aceptado para su publicación en la revista.

Índice

- Editorial** **211**
José Fernando Vera

ESTADÍSTICA

- A Review on Functional Data Analysis for Cox processes** **215**
Paula R. Bouzas and Nuria Ruiz-Fuentes

INVESTIGACIÓN OPERATIVA

- Litigate or Mediate? Game Theory cooperates with Law** **231**
J. Carlos Varela-Peña and Ana Meca

ESTADÍSTICA OFICIAL

- Seasonal and calendar adjustment at statistical offices** **264**
Ignacio Arbués

HISTORIA Y ENSEÑANZA

- Los Servicios de Estadística e Investigación Operativa del Ministerio de Defensa** **283**
José Antonio Carrillo Ruiz

- Understanding of contingency tables: a synthesis of educational research** **299**
Carmen Batanero, José M. Contreras, Gustavo R. Cañadas and María M. Gea

OPINIONES SOBRE LA PROFESIÓN

- The Strategy of Intelligence** **316**
José Almagro

Historia y Enseñanza

Understanding of contingency tables: a synthesis of educational research

**Carmen Batanero, Gustavo R. Cañadas, José M. Contreras and
María M. Gea**

Departamento de Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Granada

✉ batanero@ugr.es, ✉ grcanadas@ugr.es, ✉ jmcontreras@ugr.es, ✉ mmgea@ugr.es

Abstract

In this paper we present a summary of psychological and didactic research focused on the interpretation of two-way tables. We first analyze the pioneer study by Piaget and Inhelder who described stages in the cognitive development of the idea of association. Then, we summarize the wide research dealing with strategies in judging association in two-way tables and describing the variables who affect people's performance in the estimation of association in these tables. In the last two sections we describe research dealing with computation of probabilities from two-way tables and with the evaluation of teaching experiences. All this information can be used by the teachers when organizing the teaching of this topic.

Keywords: Two-way tables, association judgment, strategies, misconceptions.

AMS Subject classifications: 97K10, 97K40, 97K50.

1. Introducción

Uno de los objetivos de la investigación en didáctica de la matemática es caracterizar las dificultades de los estudiantes en temas específicos, la forma en que conciben los conceptos matemáticos (concepciones) y sus estrategias intuitivas en la resolución de problemas.

El objetivo de este trabajo es resumir la investigación centrada específicamente en la comprensión de las tablas de contingencia, tema que ha recibido una gran atención, tanto en didáctica de la matemática, como el campo de la psicología. Ello es debido a la gran utilidad de estas tablas en la representación y análisis de la información sobre variables cualitativas. Dichas tablas aparecen con frecuencia en la prensa o Internet con información estadística por lo que

Arteaga et al. (2011) indican que su correcta interpretación es parte de la cultura estadística que todo ciudadano ha de tener para manejarse con éxito en la sociedad de la información. Estas tablas son un recurso habitual para comunicar información estadística y como instrumento de análisis de datos (Cazorla, 2002). Tienen un papel esencial en la organización, descripción y análisis de datos. Ayudan en el proceso de transnumeración, que es una forma básica de razonamiento estadístico que consiste en obtener nueva información, al pasar de unos datos desorganizados a una representación eficiente de los mismos (Wild y Pfannkuch, 1999). Por otro lado, el estudio de la interpretación de tablas de contingencia es de gran interés en psicología, donde se relaciona con la toma de decisiones en ambiente de incertidumbre (Scholz, 1987) porque en muchas de estas decisiones se necesita un juicio sobre la asociación de las variables de una de estas tablas. Debido a estas razones, debiera potenciarse su aprendizaje en los cursos de estadística en la universidad y en la educación secundaria (Zieffler, 2006), ya que la asociación estadística extiende la idea de dependencia funcional a situaciones en que se presenta incertidumbre y más aún, a variables cualitativas. Es por ello difícil imaginar una actividad cognitiva más importante que el razonamiento sobre datos bivariados (McKenzie y Mikkelsen, 2007), ya que la habilidad para evaluar adecuadamente la asociación permite a las personas explicar los acontecimientos del pasado, controlar variables en experimentos e investigaciones y predecir la tendencia en sucesos que ocurrirán en el futuro (Crocker, 1981).

Para realizar este estudio partimos de otros trabajos de síntesis sobre temas relacionados, concretamente el de Pérez Echeverría (1990) sobre la psicología del razonamiento probabilístico, el de Estepa (2004) sobre la asociación estadística y el de Engel y Sedlmeier (2011) sobre la correlación y regresión. También hemos revisado los siguientes trabajos que sintetizan la investigación sobre educación estadística: Batanero, et al. (1994), Shaughnessy, et al. (1996) y Shaughnessy (2007). Finalmente, se ha realizado una búsqueda sistemática en bases de datos bibliográficas y en las principales revistas de Didáctica de la Estadística y Didáctica de la Matemática.

A partir de la lectura de los trabajos recopilados se han sintetizado sus conclusiones clasificándolas desde varios puntos de vista:

1. Trabajos que describen las estrategias intuitivas de estudiantes o utilizadas en contextos no escolares para realizar una valoración de la asociación entre las variables representadas en una tabla de contingencia.
2. Estudios sobre percepción de la intensidad de la asociación en tablas de contingencia, la cuantificación de dicha intensidad y las variables que influyen en esta tarea.
3. Investigaciones que se centran en la forma en que los estudiantes calculan varios tipos de probabilidades cuando los datos del problema vienen dados

en una tabla de contingencia.

4. Experimentos de enseñanza que evalúan la mejora de estrategias y comprensión de los estudiantes.

Seguidamente se sintetizan cada uno de estos tipos de investigación con la finalidad de dar a conocer sus resultados a los profesores de estadística en Bachillerato o primeros cursos universitarios, de modo que puedan utilizarlos para la mejora de su práctica docente.

2. Juicios intuitivos de asociación entre las variables de una tabla de contingencia

Una gran parte de la investigación sobre tablas de contingencia se ha centrado en describir las estrategias intuitivas de las personas para dar un juicio de la posible asociación entre las variables presentadas en las filas y columnas de la tabla. La mayor parte de estos estudios sólo investigan las tablas 2x2 (dos filas y dos columnas).

2.1. Estrategias intuitivas de adolescentes

Los primeros autores que investigaron estas estrategias fueron Inhelder y Piaget (1955), que consideraron la comprensión de la asociación como el último paso en la comprensión de la probabilidad. Estos autores sugieren que para entender lo que es la asociación es necesario comprender la proporción, combinatoria y probabilidad.

Los autores realizaron un estudio con chicos a partir de 12-13 años, usando como material unas cuarenta tarjetas, con dibujos coloreados, donde aparecían caras en las que se veían el color de ojos y color de pelo. Clasificaron en dos las posibilidades de color de pelo (rubio o moreno) y de color de ojos (azules o negros). Hicieron pruebas con los chicos, dándoles unas pocas tarjetas bien sin clasificar o ya clasificadas y les pidieron que estudiaran si había alguna relación entre las variables, explicando cómo llegaban a esta conclusión.

Para describir sus resultados los autores utilizan una tabla de contingencia (Tabla 1). En este esquema, los valores a , b , c y d , son las frecuencias absolutas. Indican que para estudiar la asociación, hay que tener en cuenta los casos que apoyan la asociación directa, $(a+d)$, los que sugieren asociación inversa, $(b+c)$ y los casos posibles, $(a+d)+(b+c)$. En lo que sigue utilizaremos el problema presentado en la Tabla 1, para describir mejor las estrategias intuitivas de adolescentes descritas por Piaget e Inhelder.

Según estos autores, los chicos de entre 11-12 años, solamente utilizan una celda de la tabla para deducir la asociación; sólo se fijan en los casos en que se dan conjuntamente las dos condiciones. Por tanto, deducen la asociación analizando únicamente la frecuencia a y comparándola con el total de datos. En el problema

Tabla 1: Esquema de una tabla de contingencia 2×2

	B	\bar{B}	Total
A	a	b	$a + b$
\bar{A}	c	d	$c + d$
Total	$a + c$	$b + d$	$a + b + c + d$

propuesto en la Tabla 2 dirían que no hay relación, pues 58 son solamente el 14,5 % de 400 personas con dieta pobre y osteoporosis a la vez. Estos chicos no llegan a comprender que el caso d (ausencia de las dos condiciones) también apoya la asociación (en nuestro ejemplo son una gran mayoría de la muestra).

Problema. En un estudio se analiza la relación entre la dieta pobre en calcio y el desarrollo de osteoporosis en 400 personas. Se obtienen los siguientes resultados

Tabla 2: Enunciado de un problema de asociación

Dieta	Desarrolla osteoporosis	
	Si	No
Pobre en calcio	58	62
Normal	22	258

¿Hay asociación entre el tipo de dieta (rica o pobre en calcio) y el desarrollo de osteoporosis?

Un segundo nivel de razonamiento es cuando los adolescentes utilizan las frecuencias de dos celdas y comparaban a con b , ó a con c , nuevamente sin mirar el caso d . En el problema planteado pueden comparar los datos de la primera fila e indicar que hay más personas sin osteoporosis que con ella, aunque sigan una dieta pobre en calcio y por tanto podrían pensar que la asociación es inversa. También podrían comparar los datos en la primera columna, y al encontrar que hay más personas con osteoporosis que siguen la dieta pobre en calcio que las que siguen la dieta normal, darían un juicio correcto de asociación, pero con una estrategia incorrecta.

En la tercera etapa, cuando comprenden cuales son los casos favorables a la asociación directa (a y d) y casos favorables a la asociación inversa(b y c), no los comparan. Finalmente, hacia los 14-15 años se comienza a establecer relaciones entre la suma de frecuencias en las diagonales, comparándolas entre si o con el total ($a+b+c+d$). En el problema sobre la dieta compararían 58+258 con 62+22 o con el total. Como hay 316 personas de las 400 que o bien tienen osteoporosis y dieta pobre en calcio o no tienen osteoporosis y siguen la dieta normal, llegarían a un juicio correcto de asociación.

Inhelder y Piaget pensaron que para llegar a la comprensión completa de la asociación se debía utilizar la siguiente fórmula que proporciona una evaluación de la asociación entre distintas variables:

$$R = \frac{(a + d) - (b + c)}{(a + d) + (b + c)} = \frac{316 - 84}{400} = 0,58. \quad (2.1)$$

Observamos que R tomaría el valor 0 si el número total de elementos en las dos diagonales es el mismo y 1 si todos los elementos están en la diagonal principal, siendo mayor su valor cuanto mayor sea la diferencia $(a + d) - (b + c)$.

Los autores sólo consideraron la asociación positiva en su trabajo, es decir, no tuvieron en cuenta el signo de la asociación. Shaklee y Tucker (1980) indican que tomar en cuenta exclusivamente el valor R anterior para juzgar la asociación puede producir conclusiones erróneas.

Esta estrategia identificará correctamente la mayoría de las contingencias, pero puede producir errores, cuando las frecuencias de los estados alternativos del Factor A (y/o el Factor B) son muy diferentes (Shaklee y Tucker, 1980, p. 460).

2.2. Estrategias utilizadas por sujetos adultos

Muchos investigadores en psicología, replicaron las investigaciones de Inhelder y Piaget con sujetos adultos. Entre ellos podemos citar a Smedlund (1963) y Shaklee y Mins (1982), quienes observaron que algunos sujetos adultos, sólo consideran la celda a o la comparan con una de las celdas b o c para deducir la asociación. Es decir, no utilizan todos los datos relevantes en el problema, por lo que, el concepto de asociación no se alcanzaría espontáneamente en los sujetos al llegar a la edad adulta, a menos que se siga una enseñanza específica sobre este tema.

Jenkins y Ward (1965) explicaron estos errores por la dificultad que conlleva emitir un juicio de asociación. Los autores observan que, incluso el cálculo de R , dado por la expresión (2.1) y propuesto por Inhelder y Piaget sólo lleva a un juicio de asociación correcto cuando las frecuencias marginales sean iguales para la variable en filas. En otros casos puede dar lugar a un juicio incorrecto. Aunque esto ocurra, esta estrategia es utilizada por adultos en todo tipos de tablas (Allan y Jenkins, 1983; Shaklee y Tucker, 1980).

Jenkins y Ward proponen como estrategia correcta general comparar la diferencia entre las probabilidades $P(B|A)$ y $P(B|\bar{A})$ de que se dé una condición en presencia o ausencia de la otra. Dicha comparación podría hacerse mediante la diferencia de estas dos probabilidades (2.2).

$$P = \frac{a}{a + b} - \frac{c}{c + d} = \frac{57}{120} - \frac{22}{258} = 0,475 - 0,085 = 0,39. \quad (2.2)$$

En la investigación posterior, que analiza las estrategias utilizadas por los

adultos en los juicios de asociación en tablas de contingencia 2×2 , se observan una variedad de estrategias, la mayoría incorrectas. Pérez Echeverría (1990) las clasificó en cinco niveles de complejidad, basándose en el número de celdas utilizadas en la Tabla 1. A continuación se describen estos niveles, con los porcentajes de uso por los estudiantes de psicología que participaron en el estudio de Pérez Echeverría y utilizando como ejemplo, el problema planteado en la Tabla 2:

- *Nivel 1.* Es la estrategia más elemental y consiste en utilizar sólo una celda, generalmente la celda a (3,7 % de estudiantes). Un estudiante que utilizase esta estrategia en el problema planteado razonaría en la forma siguiente: “*no hay asociación, pues hay pocas personas que sigan una dieta pobre en calcio y además desarrollen la osteoporosis*”.
- *Nivel 2.* Comparar la celda a con b o c , es decir usar la frecuencia de dos celdas (30,56 %): “*No hay asociación pues si consideramos todos los que siguen la dieta pobre en calcio, hay menos con osteoporosis que sin ella*”.
- *Nivel 3.* Comparar la celda a con b y c , es decir usar tres datos (15,74 %). Además del razonamiento anterior el estudiante compararía con la frecuencia en la celda c y posiblemente no llegaría a una conclusión.
- *Nivel 4.* Usar todos los datos de la tabla, pero sólo realizando comparaciones aditivas entre ellas (37,96 %). En lugar de comparar probabilidades el estudiante estudiaría las diferencias de frecuencia en las celdas dos a dos: “*En los que siguen la dieta pobre en calcio la diferencia entre no desarrollar osteoporosis y desarrollarla es de 4 casos sólo y entre los que siguen la dieta normal la diferencia es 236 casos; parece que si influye*”.
- *Nivel 5.* Utilizar todas las celdas de la tabla, comparándolas con relaciones multiplicativas (12,04 %). Serían los estudiantes que utilizasen la expresión (2.2) para calcular la diferencia de probabilidades condicionadas. Razonarían que la probabilidad de desarrollar osteoporosis sí se sigue la dieta pobre en calcio es de 0,475, mientras que la de desarrollarla con la dieta normal es sólo 0,085, de lo que se deduce la asociación.

Un análisis más completo de estas estrategias teniendo en cuenta la actividad matemática en cada una de ellas y su corrección, es realizada por Estepa (1994) y Estepa y Batanero (1995), quienes desarrollan una investigación con 213 estudiantes del Curso de Orientación Universitaria utilizando tablas de contingencia 2×2 , 2×3 y 3×3 . Dichos autores analizan los “teoremas en acto” (Vergnaud, 1990) o propiedades que los estudiantes utilizan explícita o implícitamente en sus estrategias, e identifican los siguientes tipos de estrategias:

- *Estrategias correctas matemáticamente*, que pueden ser: a) comparar todas las distribuciones de frecuencias relativas condicionales de una variable

para los distintos valores de la otra variable; b) comparar una distribución de frecuencias relativas condicionadas de una variable con la distribución marginal y, c) comparar de posibilidades de casos a favor y en contra de B en cada valor de A .

- *Estrategias parcialmente correctas:* Son estrategias que permiten resolver el problema en alguna tabla particular, pero no en el caso general y contienen errores matemáticos. Las estrategias d) y e) repetirían las a) y b), pero el estudiante usaría frecuencias absolutas y no relativas; también añadiríamos la estrategia f) consistente en comparar la suma de frecuencias en las diagonales en las tablas 2×2 , ya descrita anteriormente.
- *Estrategias incorrectas:* Estas estrategias usan sólo una parte de la información en la tabla y por tanto difícilmente llevarán a resolver el problema; incluirían las consistentes en utilizar sólo una o dos celdas.

Las estrategias anteriores aparecen de nuevo en la investigación de Cañadas, et al. (2011) con 62 estudiantes de primero de psicología. Los autores encuentran además las siguientes estrategias no descritas por Estepa: a) utilizar una representación gráfica de las frecuencias relativas condicionales para llegar a la solución (estrategia correcta), y b) calcular las frecuencias esperadas en las tablas, argumentando que debe haber equiprobabilidad en todas las celdas para que haya independencia (parcialmente correcta).

En resumen, esta variedad de estrategias indica la complejidad del juicio de asociación, y los numerosos conceptos que el estudiante debe relacionar entre sí.

3. Percepción de la intensidad de la asociación

Un segundo tipo de investigación es la que trata de evaluar la precisión que tienen las personas para estimar la intensidad de la asociación entre dos variables cuyos datos están presentados en una tabla de contingencia. La mayor parte de estos estudios sólo investigan las tablas 2×2 . Piden a los sujetos que indiquen en una escala entre 0 y 1 la intensidad de la relación que perciben en los datos, donde 0 indicaría ausencia de relación y 1 asociación perfecta. Realizan un análisis estadístico de la distribución de valores obtenidos en la muestra de sujetos y comparan su valor medio con el coeficiente de asociación en la tabla.

El estudio de la precisión en el juicio de asociación ha sido llevado a cabo, entre otros, por Crocker (1981), quien indica que la estimación de la intensidad de asociación es más precisa si las frecuencias son bajas, los sucesos que covarian ocurren simultáneamente, los datos no son ambiguos y se elimina la necesidad de recordar casos o estimar frecuencias.

Allan y Jenkins (1983) describen dos factores que intervienen en esta estimación. En primer lugar, la precisión de la estimación es mayor cuanto mayor es la diferencia entre casos confirmatorios (celda a en la Tabla 1) y no confirmatorios

(celda 2 en la Tabla 1). Además la estimación mejora si la relación entre las variables es de tipo causal.

Erlick y Mills (1967), por su parte, indica que la asociación inversa se estima como muy próxima a cero. Además Arkes y Harkness (1983) describen tres factores adicionales que influyen en la estimación de la asociación que son: (1) el valor de la frecuencia en la celda *a* parece tener mayor impacto que el resto, (2) la descripción clara de las categorías de las variables en filas y columnas puede influenciar drásticamente la estimación, y (3) la presencia de frecuencias pequeñas en las celdas de la tabla puede influir en una sobreestimación.

Otros autores han estudiado la influencia que tienen las creencias previas en la exactitud de la estimación de la asociación (Jennings, et al. 1982; Wrigth y Murphy, 1984; Alloy y Tabacnick, 1984). La estimación de la intensidad de la asociación es más precisa si las personas no tienen ninguna teoría respecto al tipo de asociación sobre los datos. Si los datos empíricos confirman las teorías previas, los sujetos tienden a sobreestimar el valor del coeficiente de asociación. Pero cuando los datos no reflejan los resultados esperados por estas teorías, aparece en los sujetos un conflicto cognitivo y se suelen guiar por sus teorías, más que por los datos. El resultado puede producir una estimación menor o mayor del coeficiente de asociación, dependiendo de la teoría y de los datos.

Cañadas, et al. (2013c) en una investigación con estudiantes de primero de psicología, observan que muchos estudiantes dan una estimación positiva de la intensidad de la asociación, incluso en el caso de independencia (el valor medio estimado para el coeficiente de asociación fue 0,47 en un ítem cuyo coeficiente real era igual a 0). Observan también que la mayor precisión de la estimación corresponde a la dependencia directa y a valores altos del coeficiente de asociación. Los estudiantes de la muestra dieron estimaciones razonables tanto en el caso de asociación directa como de asociación inversa en las tablas 2x2.

Hubo una gran diferencia entre la estimación y el valor verdadero del coeficiente en una tabla 2 × 3, donde el contexto del problema les llevó a sobre valorar la asociación.

4. Concepciones incorrectas sobre los conceptos de asociación e independencia

Otro punto de interés en la investigación es analizar las creencias o concepciones incorrectas de los sujetos sobre los conceptos de asociación e independencia. Uno de los sesgos de razonamiento más estudiados en psicología ha sido el denominado correlación ilusoria. Chapman y Chapman (1967, 1969) lo describen del siguiente modo:

“Correlación ilusoria es un error sistemático en el juicio de tales relaciones. La definimos como el juicio dado por un observador de una correlación entre dos clases de eventos que en realidad (a) no están correlacionados, o (b) están

correlacionados en menor medida que lo manifestado, o (c) están correlacionados en sentido contrario del que se manifiesta.” (Chapman y Chapman, 1967, p. 194).

Los sujetos que presentan este sesgo se guían preferentemente por sus teorías previas sobre la relación entre las variables, sin considerar lo que indica los datos. Por ejemplo, en el problema planteado en el problema, la mayoría de la gente, por la información que conocen de su experiencia, prensa, amigos, etc. esperaría una asociación entre las variables. Por ello, si se pide estimar la intensidad de la asociación, posiblemente la sobrevaloren. Si se les da una tabla donde los datos muestren independencia entre las variables, seguirían pensando que hay asociación en los datos, debido a su creencia previa. Los autores que han estudiado la influencia de las teorías previas en los juicios de asociación (Jennings, et al. 1982; Wright y Murphy, 1984; Alloy y Tabacnick, 1984) sugieren que, cuando los datos no reflejan los resultados esperados por estas teorías, aparece en los sujetos un conflicto cognitivo que les lleva a una valoración incorrecta de la asociación.

Además de la correlación ilusoria se han identificado otras concepciones incorrectas (es decir, propiedades incorrectas atribuidas a la asociación). Así, Estepa (1994) describe las siguientes:

- *Concepción causal:* Algunos estudiantes sólo consideran la existencia de asociación si esta puede explicarse por la presencia de una relación causal entre las mismas. Sin embargo, la asociación entre variables puede tener otras explicaciones conocida por Barbancho (1973). En primer lugar puede ser debida a interdependencia (cada variable afecta a la otra, como en el caso de longitud del antebrazo y longitud total del brazo). Podemos también encontrar una dependencia indirecta (una tercera variable afecta a otras dos), como es conocido por la paradoja de Simpson (1951). La paradoja muestra que en determinados casos se produce un cambio en la asociación o relación entre un par de variables, ya sean cualitativas o cuantitativas, cuando se controla el efecto de una tercera variable (ver Contreras et al. 2012).
- *Concepción determinista de la asociación:* Cuando sólo se tiene en cuenta la dependencia de tipo funcional. Estos estudiantes esperan un único valor de la variable independiente a cada uno de los valores considerados de la variable dependiente y consideran que en caso de asociación moderada las variables son independientes.
- *Concepción local de la asociación:* Se piensa que se puede confirmar la asociación según un subconjunto de los datos, obviando la tendencia global de los datos. Serían los estudiantes que basan el juicio de asociación sólo en alguna celda de la tabla.
- *Concepción unidireccional:* Considerar la dependencia inversa como independencia, sin admitir la asociación inversa.

Además, Castro-Sotos, et al. (2009) definen la concepción transitiva: La asociación no cumple la propiedad transitiva. Esto quiere decir que si las variables *A* y *B* están relacionadas; puede ocurrir que *A* esté relacionada con una tercera variable *C*, pero que *B* no esté relacionada con esta tercera variable. Sin embargo muchos estudiantes asignan a la asociación la propiedad transitiva.

5. Cambios de concepciones y estrategias como consecuencia de la enseñanza

La enseñanza, en general, mejora las estrategias de los estudiantes y les ayuda a superar algunas de las concepciones erróneas descritas, como se ha puesto de relieve en varias investigaciones.

Batanero, et al. (1998) realizaron un experimento de enseñanza centrado en la asociación estadística y apoyado en el uso de ordenadores en el que participan 22 futuros profesores de educación primaria. Los autores refuerzan el estudio de la asociación entre variables, respecto a la enseñanza tradicional en su experimento. Evalúan el aprendizaje con un cuestionario sobre tablas de contingencia (tablas 2×2 , 2×3 y 3×3). Los autores observan una gran mejora en las estrategias de los estudiantes (se duplica el número de estrategias correctas) y en la realización de un juicio de asociación correcto, aunque todavía hay fallos de razonamiento proporcional y aparece en ocasiones la correlación ilusoria.

En Batanero, et al. (1997) los autores analizan la evolución de las concepciones de los estudiantes tras la enseñanza. La mayor parte de los estudiantes de la muestra superaron la concepción determinista de la asociación, y la concepción local también se eliminó, al comprender la importancia de tener en cuenta los datos completos. Aparece alguna mejora en la concepción unidireccional, aunque todavía algunos estudiantes seguían considerando la independencia en la asociación inversa. En general, no hubo mejora respecto a la concepción causal de la relación, ya que los estudiantes no se dieron cuenta que una asociación fuerte no es suficiente para llegar a una conclusión sobre la causa y el efecto.

En varios trabajos, Cañadas y sus colaboradores evalúan una enseñanza de la asociación que incluye el estudio de las medidas de asociación en una muestra de 93 estudiantes de psicología, dentro de una asignatura reglada. Para ello preparan un material que incluye programas de cálculo en Excel (Cañadas, 2011-2015). Se incluye el estudio de los diferentes tipos de frecuencias en una tabla de contingencia y las medidas de asociación en tablas 2×2 y tablas $r \times c$. El aprendizaje se evalúa mediante un cuestionario de opciones múltiples que evalúa sistemáticamente el aprendizaje de conceptos y algunos problemas abiertos.

Los resultados del cuestionario (Cañadas, et al. 2013a) indican que, a pesar de una enseñanza planificada con cuidado, una proporción importante de estudiantes en la muestra tuvieron dificultad en comprender que aunque exista asociación, en alguna celda aislada la frecuencia esperada puede coincidir con la

observada. También hubo dificultad para recordar el cálculo de las frecuencias relativas condicionales y para comprender que la independencia implica relación de igualdad entre las frecuencias condicionales y las frecuencias marginales, o que la suma de las frecuencias relativas marginales por filas son iguales a la suma de las frecuencias absolutas marginales dividida por el total de la muestra. El resto de propiedades de la asociación y la independencia fueron bien comprendidas y los estudiantes diferencian los distintos tipos de frecuencia en la tabla.

Los resultados de un problema abierto donde se pide un juicio de asociación (Cañadas, et al. 2013b), indican una gran mejora en los juicios de asociación y las estrategias utilizadas. Estas estrategias en su mayoría son de nivel 5 en la clasificación de Pérez Echeverría (1990). Además se superan las concepciones causal y local, descritas por Estepa (1994).

En un problema abierto se pide realizar un contraste Chi-cuadrado de homogeneidad de muestras donde los datos se dan en una tabla de contingencia (Cañadas, et al. 2012). Observan que cerca del 80 % de los estudiantes plantean correctamente o casi correctamente las hipótesis; 64,1 % determinan correctamente el valor del estadístico Chi-cuadrado y el valor p . La interpretación es más difícil pues sólo el 52 % toman la decisión correcta y el 43 % son capaces de interpretar los resultados en el contexto del problema.

En resumen la evaluación de experimentos de enseñanza indica una mejora en los conocimientos y estrategias de los estudiantes en relación a las tablas de contingencia.

6. Cálculo de probabilidades a partir de tablas de contingencia

El último tipo de investigaciones que comentaremos es el relacionado con cálculo de probabilidades a partir de datos en una tabla de contingencia. Estos trabajos plantean a los estudiantes problemas de cálculo de la probabilidad simple, compuesta y condicional, presentando los datos en una tabla de contingencia. Por ejemplo, a partir del problema presentado, se puede pedir el cálculo de las siguientes probabilidades:

1. Probabilidad simple: Calcular la probabilidad de desarrollar la osteoporosis.
2. Probabilidad condicional: Calcular la probabilidad de desarrollar la osteoporosis, si la dieta es pobre en calcio.
3. Probabilidad compuesta: Calcular la probabilidad de que al mismo tiempo se tenga osteoporosis y una dieta pobre en calcio.

Mientras el cálculo de la probabilidad simple a partir de la tabla es sencillo, son muchos los estudiantes que confunden la probabilidad condicional con

la compuesta. Ello se debe a que interpreta incorrectamente la conjunción 'y', interpretándola como unión (Einhorn y Hogarth, 1986), o interpretar la intersección como condicionamiento (Ojeda, 1995). Otros estudiantes intercambian condición y condicionado en la probabilidad condicional; cayendo en lo que se conoce como falacia de la condicional transpuesta, que consiste en no distinguir entre las dos direcciones de la probabilidad condicionada (Falk, 1986). Estos errores se confirman en los trabajos de Maury (1985), Eddy (1982), Gotzsche y Olsen (2000) o Díaz (2007).

Estos errores han sido identificados por varios autores al proponer problema de cálculo de probabilidades a partir de tablas de contingencia. Por ejemplo, en el estudio de Díaz y de la Fuente (2005) con 154 estudiantes de psicología el porcentaje de respuestas correctas superó el 75 % en el cálculo de la probabilidad simple y apenas alcanza el 50 % en el cálculo de la probabilidad condicional y probabilidad compuesta compuesta. Además de los errores ya mencionados, las autoras encuentran estudiantes que confunden un suceso y su complementario o probabilidad con casos favorables. Resultados similares se muestran en el estudio de Estrada y Díaz (2006) y el de Contreras, et al. (2010), con futuros profesores de educación primaria (unos 70 en cada muestra).

7. Conclusiones

Los trabajos reseñados indican, en primer lugar, que la tabla de contingencia es un objeto matemáticamente complejo, aunque aparentemente esto se olvida en la enseñanza, sobre todo en la educación secundaria, donde apenas se toca el tema.

Los estudios sobre juicios de asociación muestran que las estrategias intuitivas son generalmente incorrectas. Por tanto, si el tema no se enseña, no se dota al sujeto de instrumentos adecuados, aumentando la probabilidad de que realice juicios de asociación incorrectos cuando se vea enfrentado a tales problemas. Las concepciones incorrectas sobre la asociación, si no se corrigen, empeoran aún más la situación, pues el sujeto se ve influenciado por sus teorías previas, no considera a veces la asociación (solo la dependencia funcional) o la asociación inversa y confunde asociación y causalidad.

El cálculo de probabilidades a partir de estas tablas es también difícil para algunos estudiantes. Un motivo de preocupación especial son los resultados obtenidos con futuros profesores de educación primaria, pues las tablas de doble entrada y su interpretación aparecen como contenido a enseñar este nivel educativo. El futuro educador debe dominar el tema para transmitirlo en la enseñanza, por tanto en estas investigaciones se ve la necesidad de mejorar la educación estadística que los futuros profesores reciben durante su formación en las facultades de educación.

Esperamos que esta exposición haya motivado a los profesores para poner

atención en la enseñanza de las tablas de contingencia; las estrategias y concepciones incorrectas descritas le pueden informar sobre dificultades a esperar en el aprendizaje de sus estudiantes y le ayudará en la tarea de evaluación.

Agradecimientos: Proyecto EDU2013-41141-P (Ministerio de Economía y Competitividad) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

- [1] Allan, L. G. y Jenkins H. M. (1983). The effect of representations of binary variables on judgment of influence. *Learning and Motivation*, **14**, 381-405.
- [2] Alloy, L. B. y Tabachnik, N. (1984). Assessment of covariation by humans and animals: The joint influence of prior expectations and current situational information. *Psychological Review*, **91**, 112-149.
- [3] Arkes, H. R. y Harkness, A. R. (1983). Estimates of contingency between two dichotomous variables. *Journal of Experimental Psychology: General*, **112(1)**, 117-135.
- [4] Arteaga, P., Batanero, C., Cañas, G. y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales, *Números*, **76**, 55-67
- [5] Barbancho, A. G. (1973). *Estadística elemental moderna*. Ariel. Cuarta edición Barcelona (España).
- [6] Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1997). Evolution of students' ders-tanding of statistical association in a computer based teaching environment. En: *Research on the role of technology in teaching and learning statistics*, MN: International Statistical Institute, Minnesota (EE.UU).
- [7] Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1998). Building the meaning of statistical association trough data analysis activities. *Research Forum*. En: *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. University of Stellenbosch, El Cabo (Sudáfrica).
- [8] Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes, P. y Vallecillos, A. (1994). Errors and dificulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, **25(4)**, 527-547.
- [9] Cañas, G.R. (2011-2015). Análisis de Tablas de Contingencia. Recuperado de: <http://www.ugr.es/~analisisdedatos/webcurso/presentacion.html>.

- [10] Cañadas, G.R., Batanero, C., Contreras, J.M. y Arteaga, P. (2011). Estrategias en el estudio de la asociación en tablas de contingencia por estudiantes de psicología, *Educación Matemática*, **23**(2), 5-32.
- [11] Cañadas, G. R., Batanero, C., Díaz, C., y Roa, R. (2012). Psychology students' understanding of the Chi-squared test. *Statistique et Enseignement*, **3**(1), 3-18.
- [12] Cañadas, G. R., Batanero, C., Gea, M. M. y Contreras, J. M. (2013a). Comprensión de frecuencias asociadas a las tablas de contingencia por estudiantes de psicología, *Uni-pluri/versidad*, **13**(3), 97-108.
- [13] Cañadas, G. R., Batanero, C., Gea, M. M. y Contreras, J. M. (2013b). Comprensión de asociación en tablas de contingencia por estudiantes de psicología, *Revista de Investigación y Divulgación en Psicología y Logopedia*, **3**(1), 19-24.
- [14] Cañadas, G. R., Díaz, C., Batanero, C. y Estepa, A. (2013). Precisión de los Estudiantes de Psicología en la Estimación de la Asociación, *Bolema*, **27**(47), 759-778.
- [15] Castro-Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van Den Noortgate, W. y Onghena, P. (2009). The transitivity misconception of Pearson's correlation coefficient. *Statistics Education Research Journal*, **8**(2), 33-55. Disponible en: <http://iase-web.org/Publications.php>.
- [16] Cazorla, I. (2002). *A relação entre a habilidades viso-pictóricas e o dominio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Tesis Doctoral. Universidad de Campinas.
- [17] Chapman, L. J. y Chapman, J. P. (1967). Genesis of popular but erroneous psychodiagnostic observations. *Journal of Abnormal Psychology*, **72**, 193-204.
- [18] Chapman, L. J. y Chapman, J. P. (1969). Illusory correlation as an obstacle to the use of valid psychodiagnostic signs, *Journal of Abnormal Psychology*, **74**, 271-280.
- [19] Contreras, J.M., Batanero, C., Cañadas, G. y Gea, M.M. (2012). La paradoja de Simpson. *SUMA*, **71**, 27-34.
- [20] Contreras, J. M., Estrada, A., Díaz, C. y Batanero, C. (2010). *Dificultades de futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada*. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIV* (p. 271-280). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

- [21] Crocker, J. (1981). Judgment of covariation by social perceivers. *Psychological Bulletin*, **90**(2), 272-292.
- [22] Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, Granada (España).
- [23] Díaz, C. y de la Fuente, E. I. (2005). Conflictos semióticos en el cálculo de probabilidades a partir de tablas de doble entrada. *Biaix*, **24**, 85-91.
- [24] Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. En: *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press, New York (EE.UU)
- [25] Einhorn, H. J. y Hogart, R. M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin*, **99**, 3-19.
- [26] Engel, J. y Sedlmeier, P. (2011). Correlation and regression in the training of teachers. En: *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE study*, Springer, New York (EE.UU).
- [27] Erlick, D. E. y Mills, R. G. (1967). Perceptual quantification of condicional dependency, *Journal of Experimental Psychology*, **73**(1), 9-14.
- [28] Estepa, A. (1994). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada (España).
- [29] Estepa, A. (2004). Investigación en Educación Estadística. La asociación estadística. En: *Líneas de investigación en Educación Matemática, Universidad de Extremadura*. Badajoz (España).
- [30] Estepa, A. y Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias*, **13**(2), 155-170.
- [31] Estrada, A. y Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two way tables. An exploratory study with future teachers. En: *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics, International Association for Statistical Education*. CD ROM, Salvador (Bahia).
- [32] Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En: *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics. International Statistical Institute*, Victoria (Canada).
- [33] Gotzsche, P. y Olsen, O. (2000). Is screening for breast cancer with mammography justifiable?, *Lancet*, **355**, 129-34.

- [34] Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. Presses Universitaires de France, Francia (París).
- [35] Jenkins, H. M. y Ward, W. C. (1965). Judgment of the contingency between responses and outcomes, *Psychological Monographs*, **79**, 1-17.
- [36] Jennings, D. L., Amabile, T. M. y Ross, L. (1982). Informal covariation assessment: Data-based versus theory-based judgments. En: *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press, Nueva York (EE.UU).
- [37] Maury, S. (1985). Influence de la question dans una épreuve relative á la notion d'independencia. *Educational Studies in Mathematics*, **16**, 283-301.
- [38] McKenzie, C. y Mikkelsen, L. (2007). A bayesian view of covariation assessment. *Cognitive Psychology*, **54**, 33-61.
- [39] Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumno respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, **5**, 37-55.
- [40] Pérez Echeverría, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico*. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid (España).
- [41] Scholz, R. (1987). *Decision making under uncertainty*. North Holland, Amsterdam (Holanda).
- [42] Shaklee, H. y Mins, M. (1982). Sources of error in judging event covariations: Effects of memory demands, *Journal of Experimental Psychology Learning, Memory and Cognition*, **8(3)**, 208-224.
- [43] Shaklee, H. y Tucker, D. (1980). A rule analysis judgments of covariation between events. *Memory and Cognition*, **8**, 459-467.
- [44] Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En: *Second handbook of research on mathematics teaching and learning. CT: Information Age Publishing y NCTM*, Greenwich (Reino Unido).
- [45] Shaughnessy, J. M., Garfield, J., y Greer, B. (1996). Data handling. En: *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer (Países Bajos).
- [46] Simpson, E. H. (1951). The interpretation of interaction in contingency tables. *Journal of the Royal Statistical Society*, **13**, 238-241.
- [47] Smedlund, J. (1963). The concept of correlation in adults. *Scandinavian Journal of Psychology*, **4**, 165-174.

- [48] Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **10(2-3)**, 133-170.
- [49] Wright, J. C. y Murphy, G. L. (1984). The utility of theories in intuitive statistics: the robustness of theory-based judgments, *Journal of Experimental Psychology General*, **113(2)**, 301-322.
- [50] Wild, C., y Pfankuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (con discusión). *International Statistical Review*, **67(3)**, 223-265.
- [51] Zieffler, A. S. (2006). *A longitudinal investigation of the development of college students' reasoning about bivariate data during an introductory statistics course*. Tesis doctoral. Universidad de Minnesota, Minnesota (EE.UU).

Acerca de los autores

Carmen Batanero es Catedrática en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, siendo Licenciada en Matemáticas por la Universidad Complutense y Doctora en Estadística por la Universidad de Granada. Su investigación se centra en la Educación Estadística. Ha sido Presidente de la International Association for Statistical Education y miembro del comité ejecutivo de la International Comission on Mathematical Instruction.

Gustavo R. Cañadas es Profesor Ayudante Doctor de la Universidad de Granada. Licenciado en Ciencias y Técnicas Estadísticas (Universidad de Granada), Máster en Metodología (UNED), Máster y Doctorado en Didáctica de la Matemática (Universidad de Granada). Fue becado en el Plan de Formación del Profesorado Universitario (2009). Ha publicado trabajos relacionados con las tablas de contingencia.

José M. Contreras García es Profesor Contratado Doctor de la Universidad de Granada. Licenciado en ciencias matemáticas, Licenciado en Ciencias y Técnicas Estadísticas, Diploma de Estudios Avanzados en Estadística e I.O., Máster en didáctica de la matemática, Máster en estadística aplicada, Doctor en didáctica de la matemática y Doctor en matemáticas y estadística; todo por la Universidad de Granada. Ha publicado trabajos en Didáctica de la Estadística y probabilidad y en estimaciones en áreas pequeñas.

María Magdalena Gea es Profesora Ayudante Doctor de la Universidad de Granada. Licenciada en Matemáticas, Licenciada en Ciencias y Técnicas Estadísticas, Máster en Estadística Aplicada, Diploma de estudios avanzados y Doctora en Didáctica de la Matemática. Su investigación se desarrolla en torno a la enseñanza y aprendizaje de la asociación estadística (correlación y regresión) en el marco del Plan de Formación de Personal Investigador.