LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD EN ANDALUCÍA

JOSÉ MIGUEL CONTRERAS
Universidad de Granada (España)
jmcontreras@ugr.es

CARMEN BATANERO
Universidad de Granada (España)
batanero@ugr.es

M. DEL MAR LÓPEZ-MARTÍN
Universidad de Granada (España)
mariadelmarlopez@ugr.es

MAGDALENA CARRETERO
IES Miguel de Cervantes, Granada (España)
magdasof72@hotmail.com

Fecha de recepción: 04 mayo 2015
Fecha de aceptación: 19 junio 2015

RESUMEN

El objetivo de este estudio fue, analizar los problemas de probabilidad propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía para los alumnos de Bachillerato de Ciencias Sociales. Para ello se realizó un análisis de contenido de los problemas propuestos en estas pruebas desde 2003 a 2014. Las variables consideradas fueron: el tipo de probabilidad pedida, los teoremas y propiedades requeridos en su solución, el tipo de expacio muestral, la consideración de dependencia entre experimentos y números de experimentos, el formato de presentación de la información y los contextos utilizados en el problema. Un estudio descriptivo de la frecuencia de estas variables permite obtener conclusiones sobre la presencia de los mismos y la dificultad de los problemas. Estos resultados pueden servir para la elaboración de pruebas futuras y preparar a los estudiantes que tienen que enfrentarse a las mismas.

PALABRAS CLAVE: Probabilidad; Pruebas de acceso a la Universidad; Análisis de problemas,

ABSTRACT

The aim of this study was to analyze the content of the probability problems proposed for the university entrance tests in Andalucía (Spain) in the specialty of Social Sciences. We analysed the tests proposed from 2003 to 2014. We considered the following variables: type of probability requested, the theorems and properties required in its solution, the existence of dependence between experiments, number of experiments, the format to give the information and the contexts used in the problem. An elementary statistical study of the frequency of each object served to conclude about the presence of the same and the difficulty of the problems. These results can be used to improve these tests and prepare the students to deal with them.

KEYWORDS: Probability; university entrance tests in Andalucía; analysis of problems, evaluation.

Contreras, J.M., Batanero, C., López-Martín, M. del M. y Carretero M. (2015). Los Problemas de Probabilidad Propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía. ***Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela***. 1 (1), 39 – 60.

1. INTRODUCCIÓN

La probabilidad es un tema fundamental en la formación de los alumnos en todos los niveles educativos, pues les capacita para enfrentarse con la incertidumbre y tomar decisiones adecuadas en su vida diaria y profesional. Su importancia se reconoce en el marco de evaluación de las pruebas PISA (OCDE, 2009), donde se señala la necesidad de que los estudiantes desarrollen las capacidades necesarias para enfrentarse, en su vida diaria y profesional, a la toma de decisiones, desde una perspectiva matemática y científica, en situaciones en las que no se cuenta con suficiente información.

Esta necesidad de formación en probabilidad ha sido recogida en las orientaciones curriculares españolas, que la incluyen en Educación Primaria (6-12 años), Educación Secundaria Obligatoria (13-16) y Bachillerato (17-18) (Batanero, Arteaga y Gea, 2011; Batanero, Gea, Arteaga y Contreras, 2014).

Una parte importante de la enseñanza la constituye las pruebas de evaluación. Godino (1996) indica que la comprensión personal de un determinado objeto matemático por parte de los alumnos no puede observarse directamente, pues la comprensión es un constructo psicológico inobservable. Sin embargo, la comprensión puede evaluarse indirectamente por medio de las respuestas de los estudiantes a los ítems, tareas o pruebas de evaluación. Las respuestas que dan los alumnos en estas pruebas, sus estrategias, argumentos, símbolos usados, etc. permiten evaluar su aprendizaje. De ello se deduce la importancia de que las pruebas de evaluación sean válidas, es decir, que haya una correspondencia entre el significado institucional pretendido para un cierto contenido matemático y el evaluado en las pruebas de evaluación. Esta correspondencia es la que tratamos de analizar en nuestro trabajo en relación con el contenido de probabilidad.

Entre las pruebas de evaluación cabe destacar el papel importante que juegan las Pruebas de Acceso a la Universidad (en adelante PAU), que son obligatorias para el estudiante y cuya puntuación determina que el estudiante pueda cursar los estudios universitarios deseados. Cada alumno pasa pruebas de diferentes materias, dependiendo de la especialidad cursada en Bachillerato. En este trabajo nos centramos en la prueba de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, que realizan los estudiantes que han seguido el Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales.

El interés de nuestro trabajo radica en analizar las variables que se han considerado relevantes para la formación del estudiante en los problemas de probabilidad incluidos en estas pruebas en la Comunidad Autónoma de Andalucía desde 2003 hasta 2014. Puesto que el contenido de las pruebas en ocasiones determina la formación previa que se dará al estudiante, indirectamente analizamos las variables que se consideran relevantes para su formación en la resolución de estos problemas. Ya que en el nuevo currículo propuesto en el marco de la LOMCE (MECD, 2015) se incluyen criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables ligados específicamente a la probabilidad, que serán referentes en la planificación de la concreción curricular y en la programación didáctica, nuestros resultados pueden servir también para planificar la enseñanza según la nueva normativa.

2. LA PROBABILIDAD EN EL CURRÍCULO DE BACHILLERATO

En España, el Bachillerato es la etapa educativa que sigue a la Educación Secundaria Obligatoria y consta de dos años de estudio. El estudio de la probabilidad cobra una gran importancia en esta etapa. Tanto en el currículo que cursan los actuales alumnos como en anteriores currículos presentes en los años analizados, la probabilidad era obligatoria ya que es un bloque específico de la asignatura *Matemática I* (para el Bachillerato en Ciencias y Tecnología) y de las asignaturas *Matemática aplicadas a las ciencias sociales I y II* (Bachillerato de Ciencias Sociales y Humanidades), donde se fijaron los siguientes contenidos (MEC, 2007):

- *Matemáticas I:* Estudio de la probabilidad compuesta, condicionada, total y a posteriori. Distribuciones binomial y normal como herramienta para asignar probabilidades a sucesos.
- *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I:* Asignación de probabilidades a sucesos. Distribuciones de probabilidad binomial y normal.
- *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II:* Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes. Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números. Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad.

Tal y como se observa los contenidos probabilísticos descritos en el primer curso de la modalidad de Ciencias y Tecnología son más amplios que en primero de la especialidad de Ciencias Sociales, ya que además de repasar la probabilidad simple, la probabilidad compuesta y condicional introducen el Teorema de Bayes. Sin embargo, el estudio de probabilidad es más completo en la modalidad de Ciencias Sociales debido a que el Bloque de Estadística y Probabilidad, dentro de la modalidad de Ciencias y Tecnología, solamente está contenido en primer curso de Bachillerato.

En las nuevas orientaciones curriculares publicadas este mismo año (MECD, 2015) y que se pondrán en práctica en el curso 2015-106, se establecen únicamente tres modalidades de bachillerato (Artes; Ciencias; y Humanidades y Ciencias Sociales). En dichas directrices se trasladan a segundo curso los contenidos de probabilidad en la rama de Ciencias; también se amplían en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales tal y como queda reflejado a continuación:

- *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I:* Sucesos. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov. Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades. Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos (MECD, 2015, p. 385).
- *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II:* Profundización en la Teoría de la Probabilidad. Axiomática de Kolmogorov. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso (MECD, 2015, p. 389).

- *Matemáticas II:* Sucesos. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov. Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades. Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.

3. LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)

Las actuales pruebas de acceso a la universidad están regidas por el Real Decreto 1892/2008, de 14 de noviembre, por el que se regula las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas (MP, 2008). A su vez este decreto se basa en la Ley Orgánica de Educación, que exige, en su artículo 38 la superación de una prueba de madurez que permita valorar los conocimientos y la capacidad de los estudiantes para iniciar sus estudios universitarios.

La prueba de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II ha constado hasta la fecha de dos opciones (opción A y opción B) donde el estudiante, bajo su parecer, tenía posibilidad de elegir únicamente una de las opciones, sin poder entremezclar los ejercicios que componen cada opción. Tanto la opción A, como la opción B, están divididas en tres tipologías de ejercicios. El primer ejercicio pertenece al Bloque de contenidos de Álgebra y el segundo al Bloque de contenidos de Análisis. Finalmente, los ejercicios tercero y cuarto corresponden al Bloque de Probabilidad y Estadística, más concretamente, uno de los problemas es de probabilidad y el otro de inferencia estadística. Los cuatro ejercicios reciben la misma puntuación, lo que quiere decir que la recibida en el problema de probabilidad supone un 25% de la puntuación total.

4. ANTECEDENTES

Nuestro trabajo tiene dos tipos de antecedentes: Las investigaciones que han analizado los problemas de otras pruebas de evaluación y las que se han centrado en las dificultades que pueden tener los estudiantes a la hora de resolver los problemas propuestos.

4.1. Estudios de otras pruebas de evaluación

Son varios los trabajos que han analizado los problemas de las pruebas de evaluación. Por ejemplo, Caraballo (2010) analiza la competencia matemática de 173 ítems incluidos en las pruebas de diagnóstico correspondientes al segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria de cinco comunidades autónomas en España durante el curso académico 2008-2009. Su objetivo fue estimar la correspondencia entre los instrumentos utilizados por las comunidades autónomas para confeccionar estas pruebas y el modelo PISA (OECD, 2009). Las variables analizadas en su trabajo fueron: el contenido matemático (cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones e incertidumbre); el contexto o situación (personal, público, educativo y profesional y científico); el nivel de complejidad y los procesos que se deben utilizar para realizar una tarea matemática. La autora analizó también la forma de dar la información a los estudiantes. Sus resultados indican un desequilibrio en la distribución de los ítems respecto al contexto y al contenido; también observa que la representación gráfica o simbólica es la forma más frecuente de presentar la información a los estudiantes.

Castellanos (2013) estudió las tablas y gráficos estadísticos en las pruebas SABER de Colombia para estudiantes de último grado del ciclo de educación básica primaria en los años 2003, 2006 y 2009. Las variables analizadas son: tipo de gráfico o tabla utilizado (como por ejemplo el diagrama de sectores o el pictograma); competencia evaluada (razonamiento, resolución o comunicación); nivel de lectura de gráficos (tipo de dato que debe obtener del gráfico); actividad solicitada (interpretar una representación, organizar y representar datos) y los niveles de complejidad semiótica del gráfico (entre los descritos por Arteaga, 2011). Del estudio realizado concluye que el gráfico más frecuentemente usado es el diagrama de barra; los ítems destacan la competencia en comunicación, el nivel de lectura entre los datos (que requiere comparaciones y cálculos). Usualmente estos gráficos y tablas representan una distribución de datos, es decir, sería un nivel avanzado de complejidad semiótica según Arteaga (2011).

Recientemente, Mingorance (2014) analizó los gráficos y tablas estadísticas de las pruebas de diagnóstico andaluzas, que son pruebas obligatorias que pasan los niños de 10 años. La autora observó una alta frecuencia de los gráficos de barras frente a la escasez de todos los recomendados en el currículo. Según la actividad que se solicita al estudiante (organizar, comprender e interpretar la información) concluye que el nivel de competencia requerido para resolver los problemas es bajo; los contextos preferentes son personales y sociales. Generalmente las actividades están más centradas en la lectura, traducción o finalización del gráfico que en su interpretación o construcción completa.

4.2. Dificultades de los estudiantes con problemas de probabilidad

El primer examen de los problemas nos llevó a la conclusión de que se centran sobre todo en la probabilidad condicionada y conjunta; tema en el que existen muchos sesgos de razonamiento; por ejemplo, la confusión entre probabilidad condicionada y conjunta (Contreras, 2011; Díaz y de la Fuente, 2005; Ojeda, 1995 Totohasina, 1992; Pollatsek, Well, Konold y Hardiman, 1987. Algunos alumnos no llegan a hacer una restricción adecuada del espacio muestral en el cálculo de la probabilidad condicionada (Maury, 1986; Totohasina, 1992) o cometen errores al resolver problemas sobre el teorema de Bayes (Contreras, 2011; Díaz y de la Fuente, 2007; Totohasina, 1992). El tipo de probabilidad que se da en el enunciado (por ejemplo, si se da como dato la simple, o la condicional, también afecta la dificultad de la tarea (Huerta, 2014; Huerta, Cerdán, Lonjedo y Edo, 2011).

Díaz (2007) en un estudio con 414 estudiantes del primer curso de la licenciatura de Psicología solicitó a estos estudiantes que definieran los conceptos de probabilidad simple y probabilidad condicionada, poniendo un ejemplo de cada uno de estos conceptos. La mayor parte de los estudiantes definieron correctamente estos conceptos o al menos uno de ellos; sin embargo aproximadamente un tercio no dio respuesta alguna o tuvo errores en una o las dos definiciones o en los ejemplos propuestos. En otro estudio relacionado (Díaz y de la Fuente, 2007) las autoras describen las siguientes dificultades:

- Dificultad en visualizar una probabilidad condicional cuando se invierte el orden temporal en que ocurren los sucesos condición y condicionado. Algunos estudiantes comprenden bien el problema si la condición ocurre antes que el suceso condicionado, pero no a la inversa; Falk (1986) llamó a este error la *falacia de la condicional transpuesta.*

- Condicionamiento y causalidad: Algunos estudiantes resuelven bien problemas de probabilidad condicional en contextos causales; pero si el contexto no es causal, por ejemplo, en un diagnóstico médico, cometen errores.
- *Falacia de la conjunción,* que consiste en atribuir mayor probabilidad a la intersección de dos sucesos que a cada uno de ellos por separado o que a su unión (Tversky y Kahneman, 1982).

Estos mismos sesgos son observados en el estudio de Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012) en futuros profesores de educación secundaria. Los autores, además, comprueban que los sesgos son independientes de la competencia de los participantes en la resolución de problemas de probabilidad condicional.

Díaz y de la Fuente (2007) profundizan en las causas de los errores en los problemas relacionados con el Teorema de Bayes. Clasifican los errores según el punto del proceso de resolución: identificación de los datos; identificación de la probabilidad que hay que calcular; aplicación del teorema de la probabilidad total y aplicación del teorema de Bayes. Concluyen que la mayoría de los fallos se comenten por incorrecta identificación de los datos, realización de una inadecuada partición del espacio muestral, diagramas en árbol mal confeccionados, confusión entre probabilidad simple y conjunta, confusión en la fórmula de Bayes y en el cálculo de la probabilidad total.

En resumen, los antecedentes de nuestro trabajo indican que la probabilidad condicional y compuesta es difícil y que las variables de estos problemas no han sido analizadas en las pruebas de evaluación. Por tanto en este estudio queremos completar la investigación previa realizando dicho análisis.

5. METODOLOGÍA

La metodología de esta investigación es básicamente cualitativa ya que se basa en el análisis de contenido. Esta técnica supone que un texto puede dividirse en unidades (en nuestro caso los problema a analizar) que pueden clasificarse en un número reducido de categorías en función de variables subyacentes, que permiten realizar inferencias sobre su contenido (Krippendorff, 1997). Estas categorías se desarrollan en forma inductiva y cíclica basada en el análisis de los documentos (Cook y Reichardt, 2000).

Según Bisquerra (1989), el proceso de investigación que se ha desarrollado es inductivo, pues se parte de casos particulares (ejemplo de pruebas PAU) con el fin de obtener generalizaciones a partir de estas observaciones. La investigación realizada es aplicada, descriptiva y exploratoria ya que está encaminada a obtener criterios de mejora para la evaluación de los estudiantes sin la realización de manipulaciones sobre las variables y sin considerar hipótesis de partida.

5.1. Muestra de problemas analizados

La muestra utilizada está formada por todos los problemas propuestos en las pruebas planteadas en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales en Andalucía durante los años

2003 a 2014, en total 12 años. En cada uno de estos años se revisaron las seis pruebas disponibles en cada una de las convocatorias de Junio y Septiembre, en cada una de las cuales se propuso un problema de probabilidad. Por tanto, la muestra se compone de un total de 144 problemas.

Se trata de una muestra intencional, lo que es propio de la metodología cualitativa. Por tanto, no se pretende extrapolar los resultados a otras pruebas diferentes a las analizadas. No obstante, pensamos que las conclusiones pueden servir para conjeturar hipótesis provisionales sobre el contenido de probabilidad de las pruebas realizadas otros años o en otras comunidades, que sería necesario analizar para contrastar dichas hipótesis.

5.2. Variables consideradas

Para realizar la codificación de los datos, en primer lugar se ha analizado el contenido matemático del ítem, determinado a partir del análisis del enunciado del ítem, y de una posible solución de cada apartado determinada por los investigadores. De este primer paso en el análisis se han deducido las siguientes variables, que se han analizado en todos los problemas de la muestra.

- *V1. Probabilidad pedida al estudiante*. El análisis de los problemas mostró que se pueden solicitar probabilidades simples, compuestas o condicionales, cada una de las cuáles tiene diferente dificultad y son confundidas por los estudiantes, como se muestra, por ejemplo en Díaz (2007) y Contreras (2011).
- *V2. Teoremas y propiedades requeridas en la solución:* Se estudian los casos en que el alumno ha de utilizar los teoremas de la probabilidad total o de Bayes, la probabilidad de la unión de sucesos compatibles o la descomposición de la probabilidad condicional. En estos casos los alumnos han de aplicar fórmulas específicas e identificar las probabilidades a introducir en dichas fórmulas.
- *V3. Tipo de espacio muestral considerado.* Se analizan los tipos de espacio muestral en el enunciado. La clasificación del espacio muestral que aparece en los enunciados de los ítems analizados la obtenemos de la que realiza Ortiz (2002). Así podemos encontrar espacios muestrales finitos con dos o más elementos equiprobables, espacios muestrales con sucesos no equiprobables, espacios muestrales infinitos y espacios muestrales imprecisos. Cada uno de ellos tiene diferente dificultad.
- *V4. Dependencia/independencia:* Se diferencia cuando en un experimento compuesto los experimentos simples que lo componen son o no independientes, pues la aplicación de la regla del producto, necesaria en el cálculo de probabilidades en experimentos compuesto es diferente en ambos casos. El concepto de independencia es sencillo de entender teóricamente, pero para los estudiantes es muy difícil de reconocer la dependencia o independencia de sucesos en algunos problemas (Sánchez, 1996). Por ello, la dificultad del problema es diferente si se trata de sucesos dependientes o independientes.
- *V5. Número total de experimentos en el enunciado.* Como hemos dicho, algunos problemas se plantean para experimentos compuestos. En este caso tendremos en cuenta si en el enunciado aparecen uno, dos, tres, etc. experimentos, pues claramente la dificultad aumenta con el número de ellos.
- *V6. Presentación de la información del problema.* Los datos que nos proporciona el enunciado del problema pueden venir dados en términos de porcentajes, en términos

frecuencia absoluta y en términos de probabilidad, cuya dificultad no es equivalente, de acuerdo a Gigerenzer (1994). Haremos un análisis de estos tipos de formato, mostrando el que más se da en cada convocatoria.

- V7. *Contexto del problema.* Tenemos en cuenta los contextos considerados en las pruebas PISA de evaluación organizadas por la OECD (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), donde se trata de evaluar no sólo la forma en que el estudiante aplica las matemáticas, sino también su uso en situaciones nuevas de diverso tipo (Ministerio de Educación, 2009; MCD, 2013). En dichas pruebas participan estudiantes de 15 años de 65 países, incluida España; por lo tanto, sería deseable que los contextos sugeridos en PISA también se tengan en cuenta en las pruebas de acceso.

6. RESULTADOS

Una vez se eligieron las variables a analizar se identificaron las posibles categorías para cada una de estas variables y para cada problema, codificando los datos para su posterior tratamiento estadístico con Excel. En lo que sigue presentamos los resultados. Para cada variable se describen en primer lugar las categorías con un ejemplo que las clarifique y a continuación se presenta la distribución de categorías en la muestra de problemas, globalmente y por año. En EL Anexo presentamos los ejemplos utilizados en el análisis, junto con un código que indica la prueba y año en que se propuso. Por ejemplo P3A(2008) indica que el problema se propuso el año 2008 en la prueba 3, opción A.

6.1. Probabilidad solicitada al estudiante

Como hemos indicado, se puede solicitar al estudiante el cálculo de distintos tipos de probabilidades; respecto a esta variable hemos considerado como categorías que se pida calcular la probabilidad simple, condicionada o compuesta, cada una de las cuáles tiene diferente dificultad. Hay que tener en cuenta que en un mismo problema pueden aparecer varias de estas probabilidades.

Un ejemplo en el que observamos la inclusión de estas tres probabilidades lo tenemos en el apartado a) del Ejemplo 2 reproducido en el Anexo. El segundo apartado pide el cálculo de la probabilidad condicionada. Además, analizando el ítem se observa que tanto la probabilidad simple como la probabilidad condicionada aparecen en el enunciado del ejercicio y en los apartados de resolución. En el Ejemplo 3 se pide la probabilidad conjunta en los dos primeros apartados y la condicional en el segundo.

Al analizar el total de los problemas, respecto a la probabilidad que se solicita en los ítems, encontramos que se suele pedir más de una probabilidad. Destaca por su frecuencia los problemas de probabilidad condicionada (78% de todos los propuestos). Cabe destacar la importancia que tiene el dominar dicho concepto para el desarrollo y comprensión de muchos otros elementos de estadística (por ejemplo, correlación, regresión, nivel de significación de un contraste de hipótesis, etc., véase Falk, 1986). Además, se ha de señalar que la probabilidad condicionada puede ser empleada en la toma de decisiones de la vida cotidiana y profesional, donde se evalúan las consecuencias de dichas decisiones bajo diversos supuestos. Esta importancia puede incidir en el hecho de la frecuencia con que se pide calcularla en estos problemas ya que los que solicitan la probabilidad simple son el 66% del total y los que piden la compuesta el 53%.

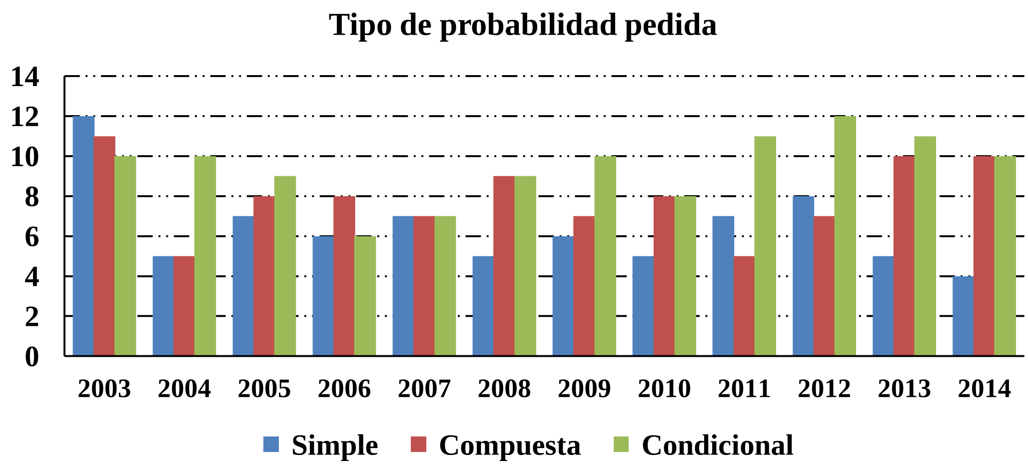

Figura 1. Clasificación de los ítems según periodo seleccionado y probabilidad que se pide

Al estudiar la distribución de esta variable por año se observa que en muchos de ellos aparecen de forma conjunta las tres probabilidades, en el enunciado y/o en los apartados que deben ser resueltos, (véase Figura 1). De los 12 problemas propuestos cada año, lo más frecuente es que se pida la probabilidad condicional o compuesta, excepto en 2003 donde la probabilidad simple aparece en todos los problemas; el resto de los años se propone sólo en 4-5 problemas. La probabilidad compuesta llega el mismo año a 11 problemas, y entre 6 y 10 el resto de años.

Del estudio realizado, se puede concluir que existe una alta tendencia a utilizar un único problema con el fin de evaluar la comprensión de dos o tres tipos de probabilidades y su discriminación por parte de los estudiantes, discriminación que es compleja, según se ha indicado en investigaciones previas, (Díaz, 2007; Contreras, 2011).

6.2. Teoremas y propiedades requeridos en la solución

En muchos de los problemas propuestos los estudiantes deben aplicar alguna fórmula para calcular la probabilidad pedida. Lo más usual es que tengan que utilizar la probabilidad de la unión de sucesos compatibles o la descomposición de la probabilidad condicional como cociente entre la probabilidad conjunta y simple. En estos problemas en vez de calcular directamente la probabilidad se debe deducir una fórmula, generalmente mediante la regla de la suma o el producto de probabilidades. Un ejemplo de descomposición de la probabilidad de la unión de sucesos compatibles aparece en el Ejemplo 1 (Anexo).

En el apartado a) de este problema, que no presenta contexto, se pide calcular la probabilidad condicional de *A* respecto de *B*, que se calcula de la expresión: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Pero el enunciado no da la probabilidad de la intersección; por lo tanto hay que deducirla de la fórmula de la probabilidad de la unión de los sucesos A y B; puesto que el problema no indica que sean excluyentes, habrá que utilizar la fórmula siguiente:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Contreras, J.M., Batanero, C., López-Martín, M. del M. y Carretero M. (2015). Los Problemas de Probabilidad Propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía. ***Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela***. 1 (1), 39 – 60.

Despejando de esta igualdad se obteniéndose el valor de la probabilidad de A intersección B sin más que sustituir los valores numéricos.

Otro caso en que el alumno ha de utilizar la descomposición de la probabilidad condicional, se muestra en el Ejemplo 2. Para resolver la primera cuestión que se plantea tenemos que descomponer la probabilidad condicional. Si llamamos A, B y C a los sucesos "usar transporte público", "usar vehículo propio", "ir andando" y H al suceso "ser hombre", respectivamente, tenemos que:

$$P(H) = P(A \cap H) + P(B \cap H) + P(C \cap H)$$

Donde cada uno de los sumandos del segundo miembro debe calcularse utilizando la descomposición de la probabilidad condicional. Sírvanos de ejemplo la descomposición de la probabilidad de la intersección de los sucesos "usar transporte público" y "ser hombre", que a continuación expresamos:

$$P(A \cap H) = P\ (A).P(H|A)$$

Por otro lado, es frecuente la aplicación de los teoremas de la probabilidad total o de Bayes; este último implica la aplicación de la probabilidad total. En nuestro estudio hemos separado los problemas que específicamente piden resolver un apartado utilizando el teorema de Bayes y los que requieren la aplicación de la probabilidad total (sin contabilizar otra vez este teorema en los problemas de Bayes). Así en el apartado a) del Ejemplo 2 se ha contabilizado el uso del teorema de la probabilidad y en el apartado b) solamente el del teorema de Bayes.

Todos los problemas piden descomponer alguna probabilidad; siendo lo más frecuente la descomposición de la probabilidad condicional, que se requiere en el 69% de los problemas propuestos. El resto de propiedades y teoremas aparece alrededor del 40% del total de ejercicios; teniendo en cuenta que el 40% de problemas que usan el teorema de Bayes requiere también la probabilidad total, vemos que los estudiantes han de manejar varios teoremas y propiedades en sus soluciones. Como en las variables anteriores este hecho aumenta la dificultad de los problemas.

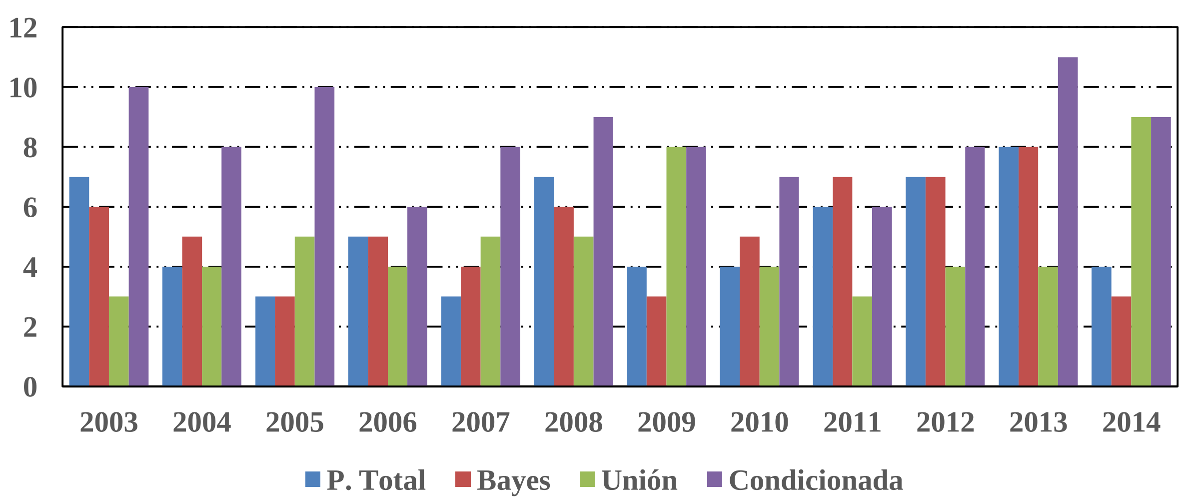

Figura 2. Descomposiciones de probabilidades requeridas para resolver los problemas

La Figura 2 muestra la frecuencia con la cual se necesitan aplicar las propiedades y teoremas descritos anteriormente en los diferentes cursos. La tendencia a que la descomposición de la probabilidad condicional sea la propiedad más requerida se mantiene todos los años, aunque la diferencia de porcentaje de uso con los otros teoremas varía.

6.3. Número total de experimentos en el enunciado

Un factor que puede determinar la dificultad del problema es el número total de experimentos aleatorios considerados, que podría ser sólo uno, pero otras veces es mayor. Cuando se trabaja con experimentos compuestos, en particular en muchos de los problemas en que hay que analizar el teorema de la probabilidad total o de Bayes se usan al menos dos experimentos. Se ha analizado este punto, que fue considerado por Ortiz (2002) en su estudio de los problemas de probabilidad en los libros de texto.

Encontramos pocos ítems con un solo experimento. Uno de ellos es el Ejemplo 3. Como podemos observar, en el enunciado sólo se nos plantea que suceda A o que suceda B, por lo que es un único experimento. Se trata de un ítem descontextualizado.

Los ítems con dos experimentos son los más numerosos en los ítems que hemos analizado. El Ejemplo 2 sería un problema donde se consideran dos experimentos aleatorios. El primero de ellos sería obtener al elegir la persona un hombre o una mujer (que podríamos denominar como sucesos H y M. El segundo experimento sería el resultado de la pregunta sobre tipo de transporte que se usa, con dos posibles sucesos T y T^C, *"usar transporte público"* y su complementario. Es importante en estos casos que el alumno visualice el experimento compuesto y su espacio muestral formado por cuatro resultados posibles: $\{HT, HT^C, MT, M\,T^C\}$.

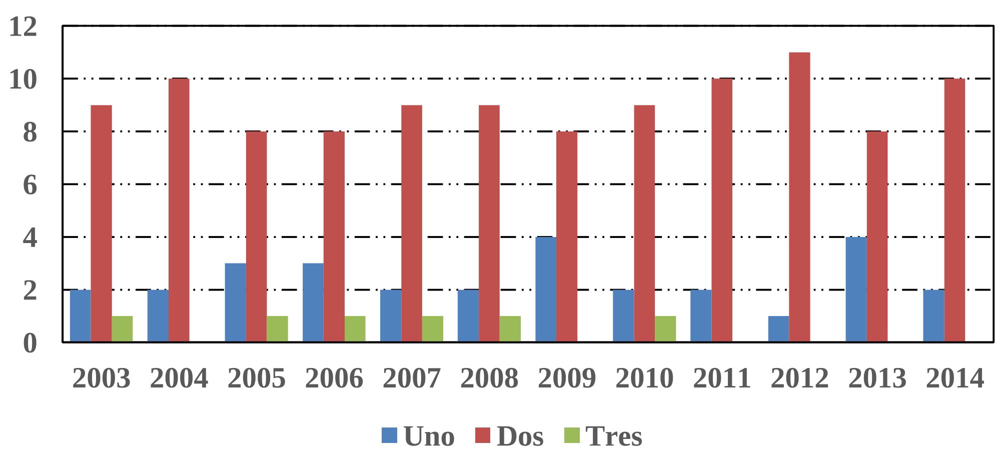

Figura 3. Número de experimentos considerados en el enunciado

El Ejemplo 5 propone un problema sobre un experimento compuesto de tres experimentos simples, que en realidad se trata en realidad del mismo experimento repetido tres veces sucesivas. El Ejemplo 4 plantea un experimento compuesto de cuatro experimentos idénticos. En estas situaciones el problema tiene mayor dificultad pues el alumno puede realizar errores en la enumeración del espacio muestral.

Contreras, J.M., Batanero, C., López-Martín, M. del M. y Carretero M. (2015). Los Problemas de Probabilidad Propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía. ***Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela***. 1 (1), 39 – 60.

Los resultados de esta variable están recogidos en la Figura 3. Observamos el uso generalizado de dos experimentos (suponen el 76% de los problemas), debido a que se utilizan para aplicar, como se ha visto los teoremas de la probabilidad total y Bayes. Un 20% presentan un único experimento y un 4% tres o cuatro experimentos. Tampoco en esta variable se observa diferencias por años.

6.4. Tipo de espacio muestral considerado

Se ha considerado esta variable que también analizó Ortiz (1999) en su estudio de libros de textos. El autor diferencia entre a) espacio muestral finito, con dos elementos equiprobables; b) finito, con dos elementos no equiprobables; c) espacio muestral finito, con más de dos sucesos equiprobables, d) espacio muestral finito, con más de dos sucesos no equiprobables; e) espacio muestral infinito (si la variable considerada es numérica continua), y f) espacio muestral impreciso, cuando no se puede decir el tipo de espacio muestral pues es abstracto el enunciado.

Considera que este es el orden de dificultad, siendo más sencillos los de tipo a) y más difíciles los de tipo e) y f). Para codificar esta variable en nuestro estudio, en el caso de experimentos compuestos hemos considerado directamente el espacio muestral del experimento compuesto.

En el Ejemplo 5, aunque el espacio muestral del experimento simple está compuesto de dos sucesos equiprobables "salir cara" o "salir cruz"., hemos considerado el espacio muestral del experimento compuesto que está formado por ocho posibles elementos equiprobables: {CCC, +CC, C+C, CC+, C++, +C+, +CC, +++ }. Sería un espacio muestral con más de dos sucesos que son equiprobables.

Un ejemplo de espacio muestral formado por más de dos elementos que no son equiprobables es el Ejemplo 6, pues al tratarse de un experimento compuesto obtenemos un total de seis sucesos, combinando la *"edad de los accionistas"* , que se ha discretizado en tres sucesos "tener menos de 40 años", "tener entre 40 y 60 años" y "tener más de 60 años", que por el enunciado vemos que no tienen la misma probabilidad con aceptar o no la propuesta.

Por últimos hay algunos Ítems con espacio muestral impreciso, cuando el problema se presenta en forma abstracta sin un contexto concreto. Así, en el Ejemplo 10 el espacio muestral no se especifica.

En la Figura 4 resumimos los tipos de espacios muestral que hemos encontrado en los ítems, en donde no hemos incluido el espacio muestral infinito porque, como hemos mencionado antes, en el ejemplo encontrado se ha discretizado, de modo que el espacio muestral es siempre finito o se puede asimilar como tal.

Sólo en dos ítems del año 2003 se trabaja con un espacio muestra de dos sucesos equiprobables (1% de los problemas) y son pocos los que constan de sucesos equiprobables, aunque sean más de dos (10%). La mayoría de los problemas presenta espacios muestrales con más de dos sucesos no equiprobables (54%). El profesor ha de tener en cuenta que la creencia intuitiva que tienen muchos estudiantes de pensar que todos los sucesos son equiprobables (Batanero, Serrano y Garfield, 1996) y ayudar a sus alumnos a evitar una confusión debida a dicha creencia. Los ítems con dos sucesos no equiprobables son el 16% y aquellos cuyo espacio muestral es impreciso el 19%. Por tanto, respecto al espacio muestral, los ítems pueden considerarse de dificultad moderada o alta, de acuerdo a Ortiz (1999).

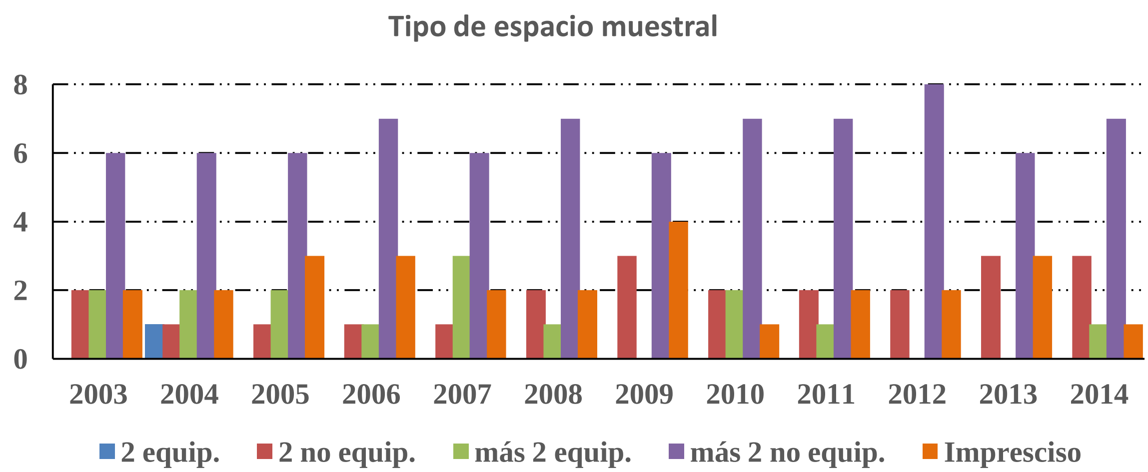

Figura 4. Tipo de espacios muestral considerado en el enunciado

6.5. Dependencia e independencia de experimentos

En los problemas planteados se puede dar la dependencia e independencia, bien en los sucesos de un mismo experimento o en diferentes experimentos. Como se ha visto, en la mayoría de los problemas propuestos los experimentos considerados (o al menos una parte de los mismos) son compuestos. Se ha diferenciado en estos casos si los experimentos simples que componen el experimento compuesto son o no independientes unos de otros.

Generalmente, el enunciado no explicita esta característica, sino que el estudiante debe deducirlo, bien porque conozca el contexto del problema y sepa de antemano que los experimentos son dependientes o independientes o bien aplicando la propiedad que asegura la independencia. Esta discriminación la ha de hacer a partir de su conocimiento del contexto, sabiendo si uno de los experimentos afecta o no a la probabilidad de los sucesos en el otro. Además, para el cálculo de la probabilidad conjunta deberá usar una fórmula diferente. Se ha encontrado los casos siguientes:

El primer caso es que todos los experimentos sean independientes, como ocurre en el Ejemplo 4, en que el hecho de que cada bombilla de la caja esté o no defectuosa no depende de las otras bombillas, pues se trata de un proceso continuo de producción. En general, cuando se repite el mismo experimento (lanzar dos monedas, dos dados, etc.) se tratará de experimentos simples independientes.

Respecto a la dependencia de experimentos, generalmente el estudiante ha de deducirla por los datos que da el enunciado. Así ocurre en el Ejemplo 2, en que el medio de transporte utilizado por el estudiante varía dependiendo si se trata de un chico o una chica.

En la Figura 5 representamos la distribución de problemas en cada año, según los experimentos propuestos sean independientes o dependientes. De 144 problemas analizados 138 contienen algún experimento compuesto. En la tabla hemos representado el porcentaje de experimentos simples y compuestos respecto a estos 138 problemas. Observamos una tendencia a proponer situaciones de dependencia. El número de ítems cuyos experimentos son independientes es minoría y prácticamente el mismo cada año. Este resultado de nuevo sugiere que se quiere proponer problemas difíciles, puesto que la situación de dependencia lo es más que la de independencia.

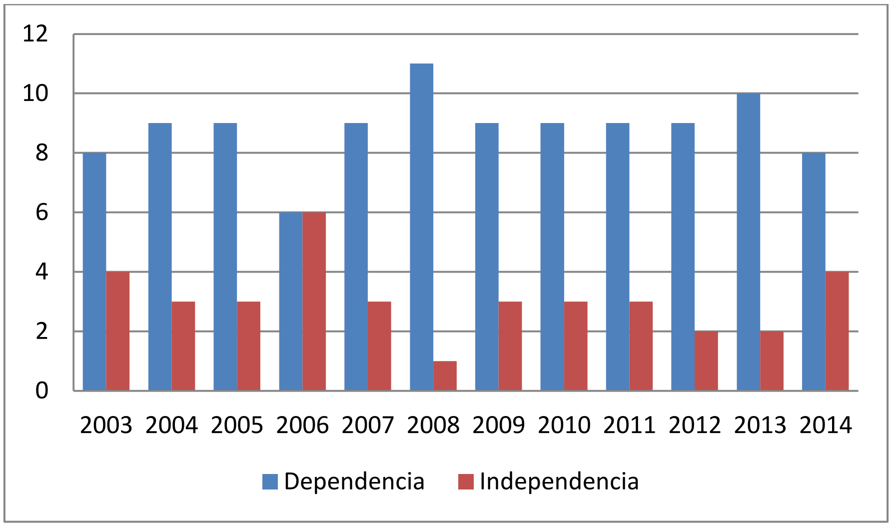

Figura 5. Dependencia o independencia de experimentos simples en un experimento compuesto

6.6. Presentación de la información en el problema

Hemos analizado la forma en que se dan los datos en el enunciado del problema, que puede ser, en forma de porcentaje, en forma de frecuencia absoluta, o como probabilidad (en números decimales). También encontramos dos ítems en el año 2003 en que, al ser el contexto abstracto, sólo se dan datos teóricos sobre los sucesos implicados en el problema, pero no aparece ningún dato numérico.

La importancia de este punto es que algunos autores, como Gigerenzer (1994) o Díaz y de la Fuente (2005) sugieren que la dificultad de los problemas de probabilidad y en particular los de probabilidad condicional es mucho menor si los datos se dan en frecuencias absolutas que si se presentan como probabilidades o proporciones. La razón que dan estos autores es que nuestra mente está mejor equipada para resolver problemas condicionales si la información y las preguntas se dan en términos de frecuencias porque se asemeja más a la forma en que recogemos información de las frecuencias de sucesos aleatorios en una situación de muestreo natural a lo largo de nuestra experiencia. Sugieren que los alumnos pueden utilizar razonamientos aritméticos en vez de proporcionales si las frecuencias que se dan en el problema son absolutas. También consideran algo más sencillo el caso de dar los datos en porcentajes pues los alumnos razonan como partes sobre cien (con razones) en vez de con proporciones, como es el caso de la probabilidad.

El formato en términos de porcentaje es el que más aparece. Uno de estos problemas sería el dado en el Ejemplo 2; al igual que en este ejemplo, aunque todos los datos se dan en porcentaje, las preguntas se plantean en términos de probabilidad, por lo que el estudiante ha de transformar los porcentajes en probabilidades, bien al comienzo de sus cálculos o una vez obtenida la solución final..

Un ejemplo de enunciado en los que los datos se dan en forma de frecuencia absoluta es el problema propuesto en el Ejemplo 4. En este enunciado se dan los casos favorables y posibles (para que una bombilla esté defectuosa) y el alumno ha de deducir la probabilidad de este suceso mediante la regla de Laplace para continuar resolviendo el problema

Como último formato en el que muestran los enunciados, está el formato en probabilidad, es decir, cuando la probabilidad de un suceso es expresada como un número decimal, como ocurre en el Ejemplo 1. En este caso, el alumno no debe realizar ninguna transformación inicial de los datos para comenzar la resolución del problema; sin embargo, de acuerdo a Gigerenzer (1994) el razonamiento con proporciones tiene dificultad para los estudiantes.

En algunos casos se mezcla más de un formato para dar los datos del problema. En el Ejemplo 7, además del porcentaje de cada pieza defectuosa en cada máquina, nos dan el número total de piezas que produce la fábrica A y la B, con lo que el formato es, además, en términos de frecuencias. En otros problemas se mezclan datos dados en porcentaje y probabilidad o en frecuencia absoluta y probabilidad.

En la Figura 6 mostramos un resumen de lo comentado anteriormente. Según podemos ver, en el año 2008 hay dos ítems más cuyo formato es en frecuencia respecto el 2003 y en éste año dos más que en 2013. Además, en términos de porcentaje, en los años 2003 y 2008 se diferencian en un ítem a favor del año 2003 los ítems así dados y en 2013 aparecen dos más que en 2003, lo que hace pensar que la tendencia actual es la de dar los enunciados en porcentajes en vez de en frecuencias, seguramente porque así les resulta más fácil a los alumnos. Observamos que el tipo de formato en que se da los datos es variado, y aún más si se tiene en cuenta, como hemos visto que a veces se dan los datos en un formato (por ejemplo frecuencias) pero la pregunta se plantea en forma diferente (probabilidad).

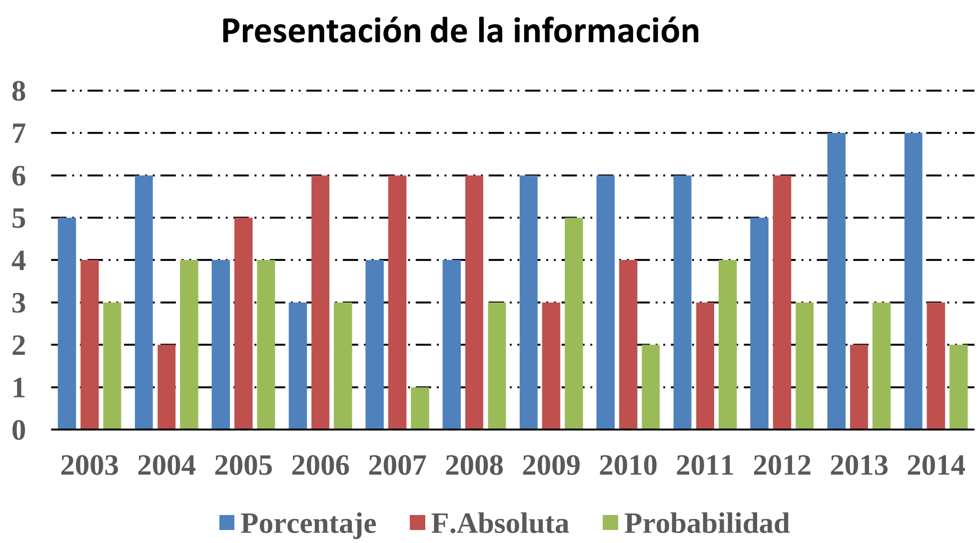

Figura 6. Presentación de la información en el enunciado

6.7. Contexto del problema

En este último punto, se va analizar el contexto en el que son formulados los problemas propuestos. El principal objetivo del contexto en el que se desarrolla un problema es mostrar la unión existente entre los conceptos y las situaciones reales con el fin de darle sentido a su aprendizaje y conseguir de esta forma motivar su interés por el aprendizaje de las matemáticas, haciéndoles ver su utilidad en diferentes contextos.

Para tal fin, nos basaremos en los contextos recogidos en las pruebas de evaluación PISA orientadas a evaluar la competencia matemática, más concretamente, evalúan "*la capacidad de formular, emplear e interpretar cuestiones matemáticas en diferente tipo de contextos"* (MCD, 2013, p. 11) mediante la resolución de tareas relacionadas con la vida real (ME, 2009, MCD, 2013):

- *Situación personal:* Son las que están relacionadas con las actividades del día a día del alumno y tienen relevancia personal directa e inmediata para el estudiante. Incluyen referencias a actividades del alumno, su familia o amigos o el contexto escolar. Algunos ejemplos citados en el informe son las compras, juegos, salud o transporte personal, deportes, viajes. Por tanto el Ejemplo 2 se ha incluido en esta categoría.
- *Situación profesional:* Son problemas que se centran en el mundo laboral que sean adecuada para los alumnos. Algunos ejemplos podrían ser problemas sobre medida o coste de un proceso de producción o una construcción, sobre diseño en carpintería, arquitectura o jardinería; coste o salario de mano de obra, etc. Este contexto es muy frecuente en la aplicación del teorema de Bayes; el Ejemplo 6 se ha incluido en esta categoría.
- *Situación Social*: Serían problemas que el estudiante podría encontrar en su comunidad (comunidad de vecinos, ayuntamiento o ciudad, su país, etc.). Por ejemplo, se pueden incluir acá problemas relacionados con elecciones, transporte, demografía o publicidad. Incluimos aquí el Ejemplo 8 que se refiere al centro de salud de un municipio.
- *Situación Científica:* Los problemas clasificados en la categoría científico hacen referencia a la aplicación de las matemáticas en ciencia y tecnología. Algunos ejemplos serían problemas relacionados con la meteorología, ecología, medicina, genética, o física. Esta situación es más abstracta que el resto, ya que implica la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema matemático. Un ejemplo es el 8 donde se describe un congreso científico.
- *Sin contexto:* Son situaciones matemáticas abstractas en que no se incluye ninguna aplicación a la vida real, lo que contradice todas las recomendaciones sobre la enseñanza de la estadística. En esta categoría se incluye el Ejemplo 1.

El contexto social ha sido el más aplicado, alcanzado un porcentaje del 38% de todos los problemas propuestos. Esta frecuencia es debida a que se ha incluido como parte de este contexto los juegos de azar. Sigue por su frecuencia el profesional (21%), y personal (17%). Es de señalar la escasa presencia del contexto científico (sólo el 3%) y en realidad no hemos encontrado problemas con contextos propiamente científicos entre los analizados; aunque algunos problemas se refieren a enfermedades y tratamientos, los hemos clasificado como contexto social porque se refiere al contexto social próximo del alumno (por ejemplo, un Centro de Salud), pero no presenta conceptos científicos que el estudiante haya de interpretar para resolver el problema.

Es también muy alto el porcentaje de problemas que carecen de contexto, lo que contradice todas las recomendaciones sobre la enseñanza de la estadística. En estos casos el estudiante no puede comprender el interés de aplicación de las matemáticas, pues no se especifica el objetivo del cálculo de las probabilidades pedidas. La finalidad que se persigue con este tipo de problemas es simplemente que el alumno aplique de reglas matemáticas de cálculo sin objetivo concreto y comprobar el reconocimiento de la simbología utilizada dentro del ámbito de la probabilidad. Sin embargo, cabe señalar que el 20% de los ítems propuestos en las pruebas PAU tienen este carácter abstracto, (véase Figura 6)

Al analizar los contextos por año (Figura 7), observamos gran variabilidad; aunque el contexto social (incluidos juegos de azar) es predominante. En algunos años la mayor frecuencia es de contextos profesionales, donde el alumno podrá apreciar mejor la aplicación de la probabilidad en otras materias y actividades.

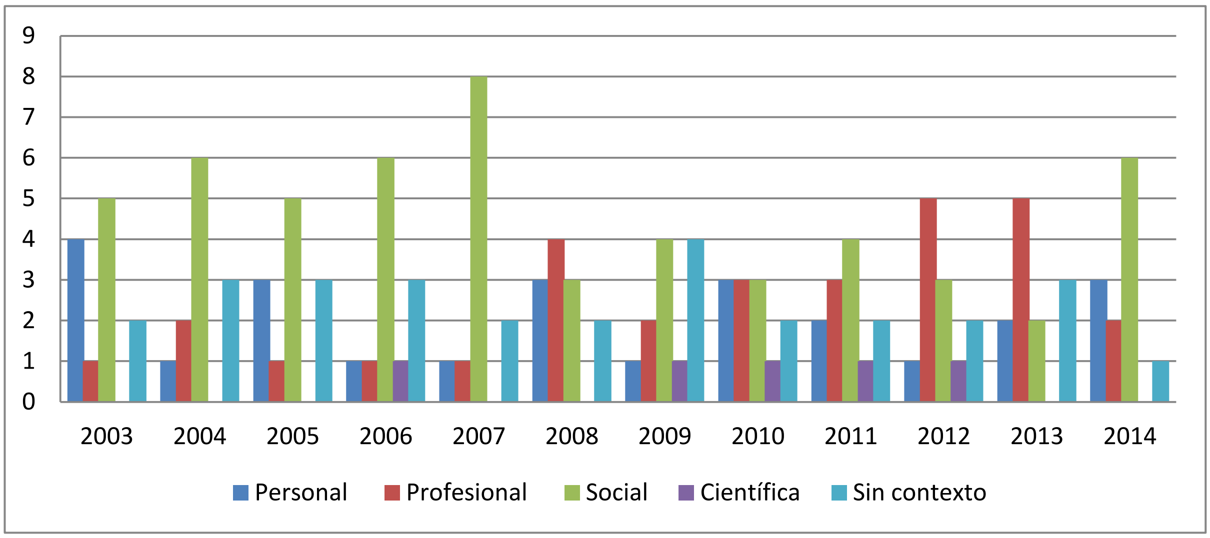

Figura 7. Contextos de los ítems por cada año

7. CONCLUSIONES

Todas las pruebas de los catorce años analizados incluye un problema de probabilidad; más concretamente de cálculo de probabilidades, aunque el contenido del currículo, incluye otros muchos temas, como el Teorema Central del límite, aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números. Es cierto que un segundo problema recoge los contenidos de inferencia, pero objetivamente se ve que las pruebas dan mucha mayor importancia al cálculo de la probabilidad condicional y conjunta al que dedican siempre un problema. Es paradójico el hecho de que la probabilidad con frecuencia se deja en los cursos anteriores como último tema y a veces se omite; el estudiante que se prepara para selectividad tendrá que hacer un esfuerzo notable para adquirir suficiente competencia y comprensión para resolver los problemas propuestos en las PAU.

Analizando los objetos matemáticos implicados en la solución, hemos visto que los problemas propuestos son bastante complejos, pues son pocos los ejemplos en que solo se pide calcular la probabilidad simple y en este caso se trata de demostración de propiedades abstractas.

Otro indicio de que se quiere aumentar la dificultad es la proporción de ejercicios descontextualizados y el hecho de que, en la mayoría se requiera trabajar con experimentos dependientes, así como utilizar alguna descomposición de probabilidades.

En resumen, nuestro análisis indica una alta dificultad de los problemas propuestos de probabilidad en las pruebas de acceso, que debería ser tenida en cuenta por los diseñadores de las mismas en las sucesivas ediciones o en pruebas de evaluación alternativas que se propongan en el futuro.

Nuestro análisis ha puesto en evidencia las principales variables tenidas en cuenta en los problemas planteados, que son, entonces consideradas importantes por los diseñadores de las pruebas y deberían tenerse en cuenta en la enseñanza. Por tanto pueden utilizarse para mejorar los libros de texto y la enseñanza en el aula, así como en la formación de profesores responsables de esta enseñanza.

AGRADECIMIENTOS

Proyecto EDU2013-41141-P (MEC), y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Batanero, C., Arteaga, P., & Gea, M. (2011). El currículo de estadística: Reflexiones desde una perspectiva internacional. *UNO, 59*, 9-17

Batanero, C., Gea, M., Arteaga, P., & Contreras, J.M. (2014). La estadística en la educación obligatoria: Análisis del currículo español. *Revista digital Matemática, Educación e Internet 14* (2). Disponible en: http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/.

Caraballo, R. (2010). *Análisis de los ítems de las pruebas de evaluación de diagnóstico en competencia matemática para el segundo curso de la educación secundaria obligatoria en España, 2008-2009: un estudio exploratorio.* Trabajo fin de Máster. Universidad de Granada.

Castellanos, M. T. (2013). *Tablas y gráficos estadísticos en las pruebas Saber Colombia*. Trabajo fin de Máster. Universidad de Granada.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2008). *ORDEN de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía*. Sevilla: Autor.

Cook, T. D. y Reichardt, C. S. (2000). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa.* Paideia Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Díaz, C., Contreras, J. M. Batanero, C., & Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de educación secundaria. *Bolema 26* (22), 1207-1226.

Díaz, C., & de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, *59,* 245-260.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson , &J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En L. Puig, & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (v.2, 417-424). Universidad de Valencia.

Godino, J. D. Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 27-135.

Huerta, M. P. (2014). Researching conditional probability problem solving. En E. J. Chernoff, y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking. Presenting multiple perspectives.* (pp. 613-639) New York: Springer.

Huerta, M. P., Cerdán, F., Lonjedo, Mª. A., & Edo, P. (2011). Assessing difficulties of conditional probability problems. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 807-817). University of Rzeszów. Poland.

Mingorance, C. (2014). *La estadística en las pruebas de diagnostico andaluzas.* Trabajo fin de Grado. Universidad de Granada.

Maury, S. (1986). *Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problémes.* Tesis doctoral. Universidad de Montpéllier II.

MCD, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2013b). *PISA 2012. Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe español. Vol.1. Resultados y contexto*. Madrid: Autor.

ME, Ministerio de Educación (2009). *PISA 2009. Programa para la evaluación internacional de alumnos de la OCDE. Informe español*. Madrid: Autor.

MEC, Ministerio de Educación y Ciencia (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.* Madrid: Autor.

MECD, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

MP, Ministerio de la Presidencia (2008). *Real Decreto 1892/2008, de 14 de noviembre, por el que se regula las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de* *grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas.* Madrid: Autor.

OCDE (2009). *PISA 2009 assessment framework - key competencies in reading, mathematics and science.* Paris: OCDE

Ortiz, J. J. (2002). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle.* Tesis Doctoral. Universidad Rennes I.

José Miguel Contreras. Profesor Contratado Doctor del Dpto. de Didáctica de la Matemática en la Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Licenciado en Ciencias Matemáticas (Esp. en Estadística e Investigación Operativa) y Licenciado en Ciencias y Técnicas Estadísticas, ha realizado el Máster en Didáctica de la Matemática y el Máster en Estadística Aplicada, el DEA en Estadística e Investigación Operativa. Doctor en Didáctica de la Matemática y Doctor en Matemáticas y Estadística por la Universidad de Granada.

Carmen Batanero. Catedrática de Didáctica de la Matemática en la Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Licenciada en Matemáticas (Universidad Complutense de Madrid). Doctora en Matemáticas (Universidad de Granada). Fue miembro del Comité Ejecutivo de ICMI (International Comisión on Mathematical Instruction) y Presidenta de IASE (International Association for Statistical Education).

María del Mar López Martín. Profesora sustituta interina en la Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Licenciada en Matemáticas (Universidad de Almería). Doctora en Matemáticas (Universidad de Granada).

Magdalena Carretero Rivas. Profesora de Secundaria y Bachillerato en el Instituto Cervantes. Licenciada en Matemáticas y Máster en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada.

ANEXO. EJEMPLOS DE PROBLEMAS PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE ACCESO

Ejemplo 1. P3A (2008):

a. Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que P(A)=0,5, que P(B)=0,4 y que $P(A \cup B) = 0{,}8$, determine $P(A/B)$).
b. Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que P(C)= 0,3, que P(D) = 0’8 y que son independientes, determine $P(C \cup D)$.

Ejemplo 2. P6A (2013). El 55% de los alumnos de un centro docente utilizan el transporte público, el 30% usa el vehículo propio y el resto va andando. El 65% de los que usan el transporte público son mujeres, el 70% de los que usan vehículo propio son hombres y el 52% de los que van andando son mujeres.

a. Elegido al azar un alumno de ese centro, calcule la probabilidad de que sea hombre.
b. Elegido al, azar un hombre, alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya andando?

Ejemplo 3. P1A (2013). En un experimento aleatorio, la probabilidad de que ocurra un suceso A es 0.68, la de que ocurra un suceso B es 0.2, y la de que no ocurra ninguno de los dos es 0.27. Halle la probabilidad de que:

a. Ocurran los dos a la vez.
b. Ocurra B pero no ocurra A.
c. Ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A.

Ejemplo 4. P4B (2008). Una caja contiene 12 bombillas, de las cuales 4 están fundidas. Se eligen, al azar y sin reemplazamiento, tres bombillas de esa caja.

a. Calcule la probabilidad de que ninguna de las tres bombillas esté fundida.
b. Calcule la probabilidad de que las tres bombillas estén fundidas.

Ejemplo 5. P4B (2003). Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar 3 veces una moneda y observar el resultado.

a. Escriba el espacio muestral asociado y las probabilidades de los sucesos elementales.
b. Sean los sucesos A: “obtener al menos una cara”, B: “obtener cara en solo uno de los tres lanzamientos”. Calcule $P(A)$ y $P(B)$. ¿Son independientes A y B ?

Ejemplo 6. P5A (2013).En la Junta General de Accionistas de una empresa asisten 105 accionistas de los cuales 45 tienen menos de 40 años y 18 más de 60 años. Sometida a votación una propuesta, es rechazada por la tercera parte de los que están entre 40 y 60 años y por 4 personas mayores de 60 años; los demás la aceptan.

a. Calcule la probabilidad de que, elegida una persona al azar, tenga menos de 40 años y haya aceptado la propuesta.
b. La prensa afirmó que la propuesta había sido aceptada por el 80% de los asistentes, ¿es correcta la afirmación?
c. Si una persona elegida al azar ha rechazado la propuesta, ¿ qué probabilidad hay de que tenga más de 60 años?

Ejemplo 7. P3A (2008). Una máquina A fabrica 100 piezas al día, de las cuales un 6 % son defectuosas. Otra máquina B fabrica 50 piezas al día, con un porcentaje de defectuosas del 2 %. Mezclamos las piezas fabricadas por ambas máquinas en un día y extraemos una al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la pieza extraída sea defectuosa?
b. Sabiendo que la pieza extraída es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la haya fabricado la máquina B ?

*Ejemplo 8. Problema P4A (2013)***.** En un Centro de Salud se ponen dos terapias, A y B, para dejar de fumar. De las personas que acuden al Centro para dejar de fumar, el 45% elige la terapia A, y el resto la B. Después de un año el 70% de los que siguieron la terapia A y el 80%de los que siguieron la B no han vuelto a fumar. Se elige al azar un usuario del Centro que siguió una de las dos terapias.

a. Calcule la probabilidad de que un año después no haya vuelto a fumar.
b. Si transcurrido un año esa persona sigue sin fumar, calcule la probabilidad de que hubiera seguido la terapia A.
c. Si transcurridos una año esa persona ha vuelto a fumar, calcule la probabilidad de que hubiera seguido la terapia A.

Ejemplo 9. Problema P1A (2012). En un congreso de 200 jóvenes profesionales se pasa una encuesta para conocer los hábitos en cuanto a contratar los viajes por internet. Se observa que 120 son hombres y que, de estos, 84 contratan los viajes por internet, mientras que 24 de las mujeres no emplean esa vía.

a. Elegido un congresista al azar, calcule la probabilidad de que:
b. No contrate sus viajes por internet.
c. Use internet para contratar los viajes, si la persona elegida es una mujer.
d. Sea hombre, sabiendo que contrata sus viajes por internet.

Ejemplo 10. Problema 3B (2005). Sean A y B dos sucesos del mismo experimento aleatorio tales que $P(A) = \frac{1}{6}\, P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$

a. ¿Son A y B incompatibles? ¿Son independientes?
b. Calcule $P(A \mid (A \cup B)]$

Ejemplo 11. Problema 3B (2005). Sean A y B dos sucesos del mismo experimento aleatorio tales que $P(A) = \frac{1}{6}\, P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$

c. ¿Son A y B incompatibles? ¿Son independientes?
d. Calcule $P(A \mid (A \cup B)]$