

SENTIDO NUMÉRICO Y GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

NUMBER SENSE AND STATISTICAL GRAPHS IN TEACHER EDUCATION

Pedro Arteaga
Carmen Batanero
Juan Jesús Ortiz
José Miguel Contreras
Dpto. Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Recibido: 25/06/2010/ Aceptado: 05/02/2011

RESUMEN

En este trabajo analizamos la importancia de la adquisición de competencias de elaboración de gráficos estadísticos para los futuros profesores de Educación Primaria. Resumimos los resultados de nuestra investigación donde se muestran ejemplos de errores en gráficos producidos por futuros profesores y se sugiere que son originados por un insuficiente sentido numérico. Como consecuencia, sugerimos la conveniencia de conectar en la formación de profesores los temas de Tratamiento de la Información y Sentido Numérico a los cuales se da atención preferente en los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria.

Palabras clave: Sentido numérico, gráficos estadísticos, formación de profesores

ABSTRACT

In this paper we analyze the relevance of acquiring competence in building statistical graphs for pre-service primary school teachers. We summarize results from our own research that show examples of errors in graphs produced by pre-service teachers and suggest that these errors are consequence of scarce numerical sense in these teachers. Consequently, we suggest the interest of connecting the topics of Dealing with Data and

Number Sense in the training of teachers, since these topics receive much attention in the curricular guidelines for Primary Education.

Key words: Number sense, statistical graphs, training teachers

1. INTRODUCCIÓN

La construcción e interpretación de gráficos estadísticos es parte importante de la cultura estadística que Gal define como la unión de dos competencias relacionadas:

a) Interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante. (Gal, 2002, pp. 2-3).

Además, el lenguaje gráfico es esencial en la organización y análisis de datos, al ser un instrumento de transnumeración, una forma básica de razonamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999) que produce nueva información, al cambiar de un sistema de representación a otro. Por ejemplo, al pasar de una lista de datos desordenada a un histograma, se visualiza la moda y se percibe la simetría o asimetría de la distribución.

La lectura correcta de gráficos ha sido muy investigada en educación estadística, definiéndose diversos niveles de comprensión de los gráficos. Curcio (1987, 1989) describe tres niveles de lectura que denomina “leer los datos” (lectura literal del gráfico sin interpretar la información contenida en el mismo), “leer dentro de los datos” (interpretación e integración de los datos en el gráfico) y “leer más allá de los datos” (predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico). Friel, Curcio y Bright (2001) amplían la clasificación definiendo un nuevo nivel “leer detrás de los datos” consistente en valorar críticamente el método de recogida de datos su validez y fiabilidad, así como las posibilidades de extensión de las conclusiones.

La competencia gráfica es especialmente importante en el caso de futuros profesores de Educación Primaria. En el Real Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006) se incluyen los siguientes contenidos, dentro del Bloque 4, sobre tratamiento de la información, azar y probabilidad:

- *Primer ciclo:* Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos.
- *Segundo ciclo:* Iniciación al uso de estrategias eficaces de recuento de datos; Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara.

- *Tercer Ciclo:* Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos. Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos. Obtención y utilización de información para la realización de gráficos.

Para que estas propuestas curriculares sean posibles, será necesario asegurar las competencias de los futuros profesores de Educación Primaria en la realización e interpretación de gráficos estadísticos.

El objetivo de este trabajo es presentar resultados de nuestra investigación sobre competencias gráficas de futuros profesores (Arteaga, 2008, Batanero, Arteaga y Ruiz, 2010) y mostrar que muchas dificultades de los futuros profesores en este tema son originadas por carencia de sentido numérico. Como consecuencia, sugerimos el trabajo con gráficos estadísticos como un vehículo para desarrollar simultáneamente la competencia en tratamiento de la información y el sentido numérico de los futuros profesores.

En lo que sigue incluimos un breve análisis de lo que entendemos por sentido numérico, presentamos una síntesis de la investigación previa y describimos el método, resultados y conclusiones del trabajo.

2. COMPONENTES DEL SENTIDO NUMÉRICO

Desde que Greeno (1991) describió el sentido numérico como un conjunto flexible de capacidades cognitivas, incluyendo el cálculo mental, estimación numérica y elaboración de juicios cuantitativos, diversas directrices curriculares han apostado por el desarrollo de dicho sentido numérico en la Educación Primaria. Concibiendo metafóricamente un dominio conceptual como un ambiente en que el sujeto interacciona y en el que aprende a resolver los problemas que se le presentan, utilizando los recursos proporcionados en el ambiente, Greeno concibió el sentido numérico como la competencia en el dominio conceptual numérico. Pérez Echevarría y Scheuer (2005) indican que el número puede tener muchos sentidos y significados diferentes, que están anclados biológicamente y que se restringen, amplían y cambian de significado en el curso de la interacción cotidiana con los sistemas de prácticas culturales y con la participación en contextos de instrucción formal.

El sentido numérico es mencionado en el Real Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria (MEC, 2006), dentro del bloque 1 de Matemáticas: Números y operaciones. Se indica que este bloque pretende esencialmente el desarrollo del sentido numérico, entendido como el dominio reflexivo de las relaciones numéricas. También se sugiere que los números deberían ser presentados a los estudiantes en diferentes contextos, al considerar prioritario la comprensión del significado de los resultados frente a la destreza de cálculo.

Entre los contenidos de dicho bloque se mencionan para los números naturales, fracciones y decimales el recuento, medida, ordenación y expresión de cantidades en situaciones de la vida cotidiana; su comparación en contextos familiares mediante

ordenación y representación gráfica. Asimismo como criterio de evaluación se sugiere utilizar los números decimales, fraccionarios y los porcentajes sencillos para interpretar e intercambiar información en contextos de la vida cotidiana.

Por su parte, la Consejería de Educación (2007), en relación al Bloque 4 de Matemáticas para la Educación Primaria, *Desarrollo del sentido numérico. Medida de magnitudes*, define el sentido numérico como el dominio reflexivo de las relaciones numéricas que se pueden expresar en capacidades como la habilidad para descomponer números de forma natural, comprender y utilizar la estructura del sistema de numeración decimal, utilizar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar cálculos mentales y razonados. También se recuerda la interacción de este bloque con el 6. *Tratamiento de la información, azar y probabilidad*, que se incluye desde el primer ciclo.

Estas directrices muestran la importancia de desarrollar un sentido numérico adecuado en los futuros profesores de Educación Primaria, quienes a su vez lo han de promover entre sus alumnos. También es conveniente mostrarles las interrelaciones entre los diferentes Bloques de Contenido en este ciclo educativo, siguiendo las directrices curriculares. El trabajo con gráficos estadísticos permite simultáneamente desarrollar el sentido numérico y la capacidad de tratamiento de información, poniendo en relación estos dos bloques temáticos.

3. INVESTIGACIÓN PREVIA SOBRE COMPETENCIA GRÁFICA DE FUTUROS PROFESORES

A pesar de la importancia de los gráficos estadísticos, la investigación en didáctica de la matemática nos alerta que la competencia relacionada con el lenguaje de las gráficas estadísticas no se alcanza en la preparación de los futuros profesores de Educación Primaria. La investigación previa incluye en esta competencia varios componentes: (a) Interpretar y evaluar críticamente la información estadística, que aparecen en los gráficos tanto en contexto educativo, como los que se encuentran en los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y (b) ser capaz de construir correctamente un gráfico que represente la informaciones estadísticas en forma relevante (Gal, 2002).

3.1 Gráficas estadísticas en contexto educativo

Respecto a la construcción de gráficas, dentro de experiencias formativas, Bruno y Espinel (2005) estudian la forma en que futuros profesores construyen un histograma de frecuencias a partir de una lista de datos. Aproximadamente la mitad de los participantes en su investigación tuvieron errores al representar los intervalos de variación de la variable en el eje X , omitir intervalos de frecuencia nula, o usar rectángulos no adosados, a pesar de que la variable fuese continua. En cuanto al polígono de frecuencias, los errores

más frecuentes en la investigación citada fueron no unir por las marcas de clase, omitir el intervalo de frecuencia nula en el polígono y confundir la frecuencia y valor de la variable.

Continuando la investigación, Bruno y Espinel tratan de comparar los errores de los futuros profesores en la construcción del histograma y el polígono de frecuencias, con su evaluación de histogramas producidos por posibles estudiantes. Prácticamente todos los estudiantes cometen algún error al construir los gráficos, pero lo más preocupante fue la falta de coherencia entre la forma que los futuros profesores construyeron un gráfico y la forma en que evaluaron como correctos o no los gráficos construidos por alumnos ficticios. Además, en caso de coherencia, se trató de futuros profesores que cometieron errores en la interpretación de los gráficos, y también consideraron correctos los gráficos incorrectos de sus posibles estudiantes.

Preocupadas por estos resultados las autoras continuaron la investigación utilizando un cuestionario sobre cultura y razonamiento estadístico en relación a los gráficos y comparando sus resultados con los de otros estudiantes universitarios americanos (Espinel, 2007; Espinel Bruno y Plasencia, 2008). Para ello dieron a 190 estudiantes de Magisterio un conjunto de ítems de opciones múltiples en los que se evaluaba su competencia gráfica y que habían sido tomados del proyecto ARTIST (del Mas, Garfield y Ooms, 2005), donde se pasó a 350 estudiantes de primer curso de universidad. Aunque en ambos colectivos las tareas fueron difíciles, la dificultad fue mayor para los futuros profesores españoles, en particular al tratar de predecir la forma de un gráfico a partir de la descripción verbal de variables conocidas por los estudiantes o en la lectura de histogramas.

3.2 Interpretación de gráficos tomados de medios de comunicación

Monteiro y Ainley (2006, 2007) indican que la lectura de los gráficos usuales dentro del contexto escolar es una tarea más limitada que la posible interpretación de dichos gráficos fuera de dicho contexto, porque, mientras en la escuela sólo pedimos a los estudiantes una respuesta correcta desde el punto de vista matemático, fuera de la escuela interviene también el conocimiento del contexto en el que se sitúa el tema del gráfico.

Al estudiar la competencia de futuros profesores en la lectura de gráficos tomados de la prensa diaria, encontraron que muchos de ellos no tenían conocimientos matemáticos suficientes para llevar a cabo dicha lectura. La mayoría no tuvo formación específica en la lectura de gráficos estadísticos durante sus estudios en la universidad y reconoció la necesidad que tenían de formación al respecto. También se observó como la interpretación de los gráficos moviliza conocimientos y sentimientos que inciden en su comprensión. Por ejemplo, los resultados al interpretar un gráfico sobre incidencia de cáncer en las mujeres fueron mejores que los obtenidos al interpretar otro matemáticamente equivalente sobre tiempo de gestación de diferentes especies animales.

3.3 Conclusiones

Las investigaciones reseñadas muestran la dificultad de futuros profesores en la elaboración e interpretación de gráficos estadísticos, aunque no indican las posibles causas de dichas dificultades. Además dichos trabajos se han basado en tareas cerradas en las que los futuros profesores reciben unas instrucciones específicas sobre el tipo de gráfico a construir. En lo que sigue presentamos algunos datos de nuestra investigación sobre competencias gráficas de futuros profesores (Arteaga, 2008, Batanero, Arteaga y Ruiz, 2010) en la que se analizan los gráficos producidos por futuros profesores en una tarea abierta.

Analizamos los errores producidos en los gráficos, mostrando que muchas de dichas dificultades son originadas por carencia de sentido numérico. Como consecuencia, sugerimos el trabajo con gráficos estadísticos como un vehículo para desarrollar simultáneamente la competencia en tratamiento de la información y el sentido numérico de los futuros profesores.

4. UN ESTUDIO DE DIFICULTADES EN LA LECTURA Y CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS Y SENTIDO NUMÉRICO

4.1 Muestra y contexto educativo

La muestra participante estuvo formada por futuros profesores ($n=207$), tres grupos de clases prácticas de los seis que cursaban el segundo año del plan de estudio de la Diplomatura de Magisterio, en la especialidad de Educación Primaria (se eligió al azar un grupo de cada uno de los tres profesores de dicha asignatura). Habían cursado una asignatura de “Matemáticas y su Didáctica” en el primer curso de la Diplomatura de Magisterio y en ella habían estudiado los gráficos, tablas y resúmenes estadísticos básicos (10 horas lectivas), trabajando también con un proyecto sencillo de análisis de datos, aunque en aquél caso, los datos fueron dados por el profesor, en lugar de ser recogidos por los alumnos. La mayoría de los participantes procedían de bachillerato de letras o ciencias sociales. Durante la Enseñanza Primaria y Secundaria Obligatoria todos los estudiantes habrían estudiado los gráficos estadísticos elementales.

4.2 Tarea planteada

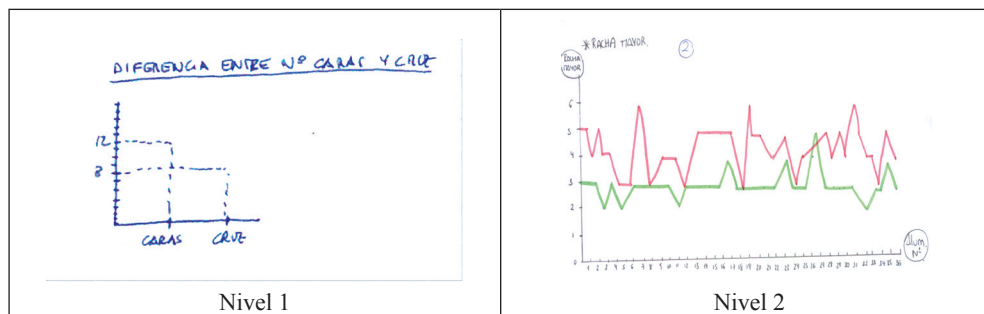
Los datos se tomaron dentro de una tarea abierta en un curso de Currículo Matemático en la Facultad de Educación, Universidad de Granada, en la que se propuso la realización de un proyecto de análisis de datos por parte de los futuros profesores. La pregunta de investigación planteada en el proyecto (tomado de Batanero, 2001) fue evaluar las intuiciones del conjunto de estudiantes de cada grupo sobre los experimentos

aleatorios. Para ello se realizó en la clase y en cada uno de los grupos, uno de los experimentos utilizados en la investigación sobre percepción de la aleatoriedad (ver, por ejemplo, Serrano, 1996). En el experimento se pidió a cada estudiante inventar una secuencia de 20 lanzamientos de una moneda equilibrada (sin lanzarla realmente). Los futuros profesores realizaron individualmente el experimento, inventando una secuencia de 20 lanzamientos (secuencia simulada) y anotaron los resultados en una hoja de registro, escribiendo C para cara y + para cruz. A continuación, cada estudiante obtuvo otra secuencia de 20 lanzamientos de una moneda, lanzando esta vez realmente la moneda y anotando asimismo los resultados en la hoja de registro (secuencia real).

Se pidió a los estudiantes que contasen el número total de caras en cada una de las dos secuencias y al finalizar la clase el profesor proporcionó a los estudiantes una hoja de datos que contenía para cada alumno el número de caras de las secuencias real y simulada. Se pidió a los futuros profesores analizar individualmente los datos recogidos en clase en el experimento y producir un informe escrito, en el que debían comparar las distribuciones del número de caras en las secuencias real y simulada y justificar, en base al análisis de los datos, si la clase en su conjunto tenía o no buenas intuiciones sobre el azar. Los estudiantes tuvieron libertad para elegir los gráficos o resúmenes estadísticos que considerasen convenientes e incluso para usar ordenadores.

5. RESULTADOS GLOBALES

Una vez recogido el informe de análisis de datos del proyecto que entregó cada estudiante, se analizaron los gráficos producidos por los estudiantes. Del total de 207 alumnos 181 (87,4%) producen algún tipo de gráfico para analizar sus datos, incluso cuando las instrucciones de la tarea no los requerían. Este alto porcentaje indica la necesidad sentida de los estudiantes de producir un gráfico y llegar, mediante un proceso de transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999) a un conocimiento no disponible en los datos brutos. Los estudiantes representaron diagramas de barras horizontales y verticales; gráficos de barras adosados o apilados, gráficos de líneas de una o las dos variables, histogramas o gráficos de puntos. Otros estudiantes producen gráficos claramente inapropiados, que ni siquiera permiten visualizar la variabilidad de los datos, entre ellos, diagramas de sectores.



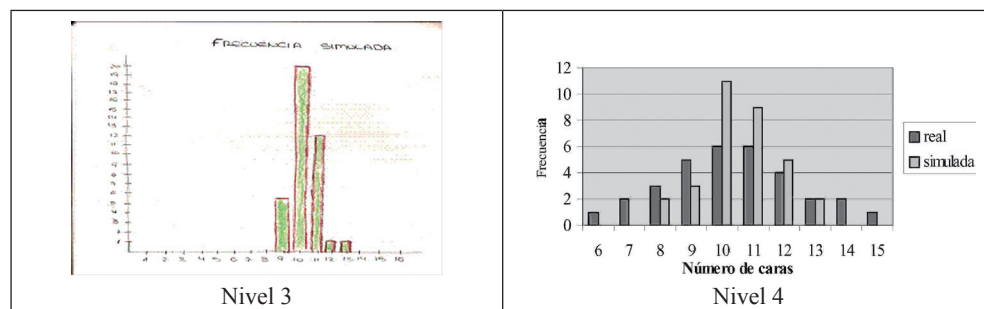


Figura 1. Ejemplos de gráficos en cada nivel de complejidad

En primer lugar se clasificaron los gráficos en función de su complejidad en cuatro niveles; 1) representa sólo sus datos individuales; 2) representa los datos de toda la clase, pero no llega a formar la distribución de frecuencias; 3) forma la distribución y representa cada una de las dos variables por separado; 4) representa conjuntamente en un solo gráfico las dos variables (ver Figura 1). Destacamos que los futuros profesores que producen gráficos en nivel 1 y 2, no muestran comprensión de la idea de distribución, la cual entraña conjugar a la vez las ideas de promedio y dispersión (Bakker y Gravemeijer, 2004), ya que los estudiantes en estos niveles no han sabido todavía relacionar en sus gráficos dichas ideas.

En segundo lugar se clasificaron los gráficos en correctos, parcialmente correctos e incorrectos. Los gráficos se consideraron parcialmente correctos cuando son formalmente correctos pero no centran el intervalo en los histogramas, no hay coincidencia de los valores representados con la escala utilizada o no incluyen etiquetas en los ejes. Los gráficos se consideran incorrectos cuando al representar en un mismo gráfico variables no comparables, representan los productos de valores por frecuencia o bien intercambian frecuencias y valores de las variables en los ejes, considerando las frecuencias como variable independiente y los valores de la variable como dependiente, error ya detectado en Ruiz (2006) en relación al concepto de variable aleatoria. Algunos errores de los gráficos reproducen los descritos por Espinel (2007) en su investigación y otros no han sido descritos en la literatura.

En la tabla 1 se clasifican los datos según nivel de complejidad del gráfico y corrección del mismo. Observamos que 47% de los gráficos producidos son correctos, 19,3% parcialmente correctos y 33,7% incorrectos. La mayoría de los futuros profesores que elaboran gráficos (50,3%), producen gráficos de nivel 3, es decir, representan la distribución de cada una de las dos variables por separado. Generalmente son correctos o parcialmente correctos. Veintiséis sujetos en este nivel elaboran gráficos incorrectos. El 24,3% de los estudiantes para profesor trabajan al nivel 4 y producen un solo gráfico de las dos variables, aunque tres de estos gráficos son parcialmente correctos y doce incorrectos por alguna de las razones señaladas anteriormente.

Nivel de complejidad del gráfico	Corrección del Gráfico			Total en el nivel
	Correcto	Parcialmente correcto	Incorrecto	
N1. Representa sólo sus datos	2		4	6
N2. Representa los datos uno a uno sin formar la distribución	20	1	19	40
N3. Forma la distribución y representa un gráfico separado para cada una de las dos variables	34	31	26	91
N4. Forma la distribución y representa un gráfico conjunto para las dos variables	29	3	12	44
Total	85	35	61	181

Tabla 1. Clasificación de estudiantes, según complejidad y corrección de los gráficos

Son pocos los futuros profesores que analizan sólo sus propios datos (nivel 1) y un 22,1% estudian los valores obtenidos por cada uno de ellos caso a caso sin llegar a formar la distribución (nivel 2), por lo que el concepto de distribución parece ser adquirido y utilizado por los participantes para resolver la tarea propuesta.

Si tenemos en cuenta el porcentaje de gráficos correctos y parcialmente correctos dentro de cada nivel, el mayor porcentaje se da en el nivel 4 (72,7% de los gráficos al menos parcialmente correctos), seguido del nivel de complejidad 3 (71,4%). En consecuencia la proporción de gráficos básicamente correctos o parcialmente correctos, en los que el estudiante, puede extraer algún tipo de información del gráfico realizado y que le sea de utilidad en la realización de la tarea propuesta crece con el nivel de complejidad semiótica.

5.1 Análisis detallado de errores típicos

En lo que sigue analizamos los errores más frecuentes en nuestra muestra, estudiando la relación de estos errores con la falta de sentido numérico. La finalidad es proporcionar una explicación plausible a la persistencia de estos errores para poder implementar acciones educativas dirigidas a mejorar la competencia gráfica de los futuros profesores. Para cada uno de los errores presentaremos y analizaremos un ejemplo.

5.2 Fallos en la formación de la distribución de frecuencias a partir de una lista de datos

Los futuros profesores que en la tabla 1 trabajan a nivel 1 o 2 (25,4% de los gráficos) no fueron capaces de formar una distribución de frecuencias a partir de una lista de datos.

En consecuencia, no llegaron a agrupar los valores iguales (o similares) de cada una de las variables en estudio ni a calcular la frecuencia con la que aparecía dicho valor. En caso de representar únicamente sus datos (y no los del conjunto de la clase) tratan de resolver el problema planteado con un único elemento de la muestra y no con la muestra completa, es decir, no utilizan la idea de variable estadística.

En caso de realizar un gráfico de nivel 2 (40 futuros profesores, 22,3% de los que producen gráfico), en lugar de representar en el eje X los valores de la variable y en el eje Y los de la frecuencia de aparición, utilizan el eje Y para representar los valores de la variable (ver ejemplo en Figura 2). En el eje X representan mediante números naturales, las unidades estadísticas, asignándoles el número de orden en que los datos han sido obtenidos, sin tener en cuenta que es un orden artificial. Los estudiantes no llegan a la idea de variable estadística, ni tampoco a la de frecuencia asociada a cada valor o de distribución de frecuencias de la variable. Muestran, por tanto, *dificultades en la clasificación* de los valores obtenidos de la variable y su *recuento*, utilizan una *ordenación* arbitraria y no son capaces de llegar a una *representación gráfica* adecuada de los datos. También confunden variable y unidad estadística, no siendo capaces de *dar sentido* a los datos recogidos en el contexto presentado.

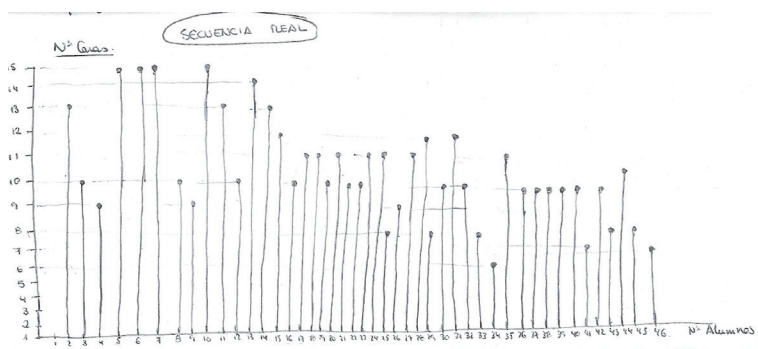


Figura 2. Fallo en la formación de la distribución de frecuencias

5.3 Errores en las escalas o divisiones de los ejes

Respecto a las escalas de los gráficos hemos encontrado errores en el 10,5% de los gráficos construidos por los estudiantes, incluyendo los siguientes errores descritos por Li y Shen (1992): (a) elegir una escala inadecuada para el objetivo pretendido que o bien no cubre todo el campo de variación de la variable representada o bien es excesivamente amplia; (b) omitir las escalas en alguno de los ejes horizontal o vertical, o en ambos y (c) no especificar el origen de coordenadas.

Además, como se muestra en la figura 3 algunos estudiantes emplean escalas no homogéneas, mostrando fallo de razonamiento *proporcional*, pues el estudiante repre-

senta con un segmento de longitud muy similar la distancia entre 1 y 5; 5 y 14 y entre 14 y 19. Gal (2002) a este respecto señala que muchos estudiantes tienen dificultad de comprensión de conceptos básicos de razonamiento proporcional y en su aplicación a contextos estadísticos. También observamos en el eje X los números desigualmente espaciados. Por otro lado, aunque la variable sólo toma valores enteros en este ejemplo, las barras del diagrama no están centradas en valores enteros, error también encontrado por Espinel (2005). En definitiva, además de fallo en razonamiento proporcional hay errores al representar cantidades numéricas en la recta real, que es otra competencia requerida en el sentido numérico.

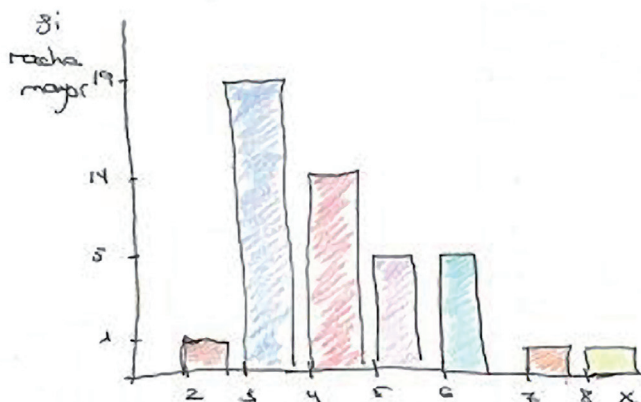


Figura 3. Errores en escalas y extremos de intervalos (escaneado)

5.4 Elección de un gráfico inadecuado

Algunos futuros profesores (3,9% de los gráficos) eligen un gráfico que no representa adecuadamente la tendencia o la variabilidad de los datos. En el ejemplo de la figura 4 se representan los datos en un diagrama de sectores, incluyendo en el gráfico la representación del total, además de la frecuencia. Ello distorsiona el gráfico, y el alumno no conecta la amplitud del sector a la frecuencia y muestra un *fallo en razonamiento proporcional*. Se observan otros fallos (como denominar repeticiones a la frecuencia e incluir un valor que no tiene etiqueta). Además el gráfico no permite observar con claridad la variabilidad de los datos. En este y otros gráficos realizados con la hoja Excel, se observa que el futuro profesor no comprende bien las opciones que ofrece el software. Según Ben-Zvi y Friedlander (1997) se realiza un *Uso Acrítico* del software, ya que se construye el gráfico aceptando las opciones por defecto de la hoja Excel sin valorar si la representación es adecuada o no.

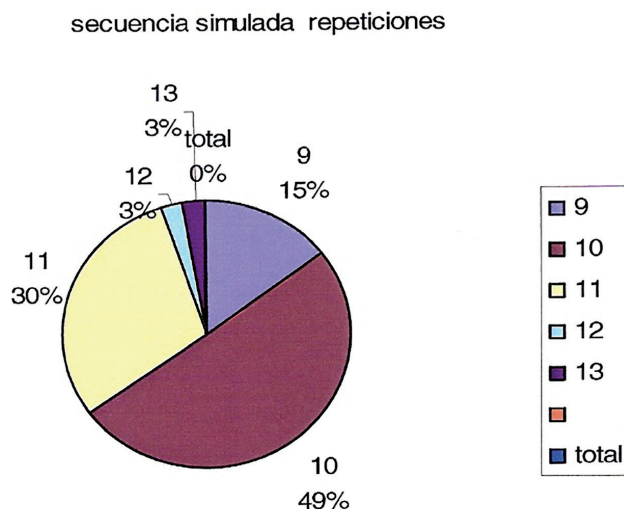


Figura 4. Elección de un gráfico inadecuado

5.5 Confusión entre variable dependiente e independiente en un gráfico

Dos futuros profesores (1,1% de los gráficos) no hacen la distinción entre valor de la variable estadística y frecuencia. Bien intercambian los ejes para representarlas o bien las representan conjuntamente en un diagrama de barras adosadas. Estos estudiantes no relacionan las distintas formas de representación numérica con sus aplicaciones, ya que no discriminan las magnitudes que intervienen en el problema.

En el ejemplo mostrado en la figura 5, cada barra del gráfico representa la frecuencia asociada a cada valor de la variable estadística y el alumno utiliza la idea de proporcionalidad. El problema es que se trata de un gráfico de barras inusual e incorrecto, ya que han sido intercambiadas las variables independientes (número de caras) y dependientes (frecuencias absolutas asociadas al número de caras) de la distribución de frecuencias en los ejes. Este conflicto ya fue detectado por Ruiz (2006) en un estudio de comprensión de la variable aleatoria y lleva consigo una mayor dificultad en la lectura e interpretación del gráfico. En el ejemplo mostrado no se perciben todos los valores diferentes de la variable, pues si hay dos valores con la misma frecuencia, se representan sobre la misma barra. Además, la moda en este caso es más complicada de detectar visualmente. Esto conlleva una mayor dificultad en la comparación de los gráficos de la secuencia simulada y la secuencia real y por lo tanto en la interpretación y extracción de conclusiones para dar respuesta a la pregunta planteada en el proyecto. A pesar de estos problemas el alumno es capaz de agrupar los datos brutos y llegar al concepto de variable estadística y frecuencias y utilizar la idea de proporcionalidad en la construcción del gráfico.

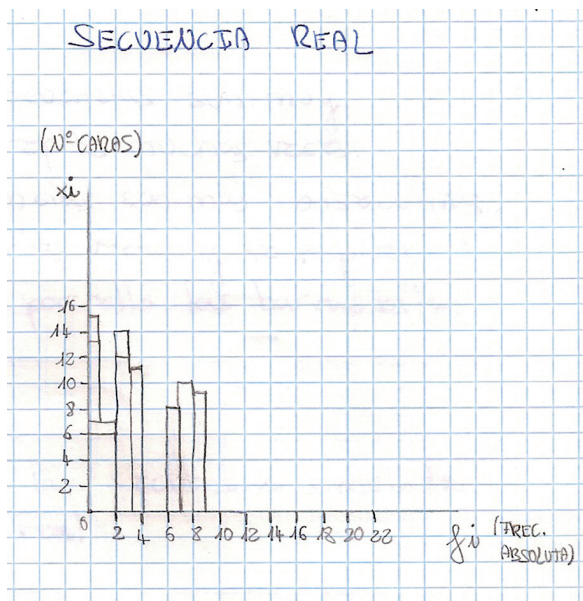


Figura 5. Confusión entre variable dependiente e independiente

5.6 Representación incorrecta de intervalos en la recta numérica

Aunque los datos obtenidos para realizar los gráficos sólo tomaban valores enteros, algunos estudiantes representan las frecuencias en un histograma, que es un gráfico adecuado sólo para variables continuas o variables agrupadas en intervalos. En este caso, los alumnos al representar los intervalos en la recta numérica encuentran dificultades representando intervalos con extremo común como si fuesen intervalos disjuntos (4,4%).

En el ejemplo mostrado en la figura 6, subyace una confusión entre histograma y diagrama de barras, pues no comprenden sus diferencias, ni los tipos de datos en que pueden aplicarse uno y otro. Hay también *falta de comprensión del significado de un intervalo de valores en la recta numérica* y del *propósito del área en un histograma* que es representar las frecuencias en el intervalo base del mismo, de manera que cada barra del histograma es proporcional a la frecuencia de los valores representados. Además hay confusión entre el significado de los valores extremos de un intervalo en la recta numérica y de la marca de clase del intervalo. Finalmente se produce de nuevo un uso acrítico del software.

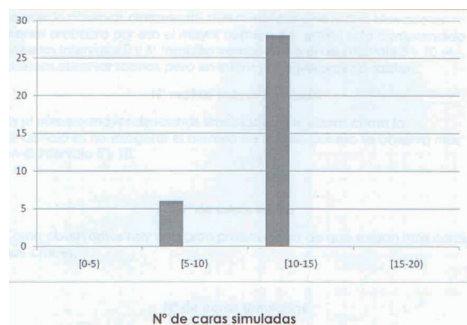


Figura 6. Representación de intervalos en un histograma

5.7 Comparaciones numéricas sin sentido

Algunos futuros profesores (8,8%) mezclan en el mismo gráfico valores de variables diferentes, que incluso no son comparables. Otros comparan en el mismo gráfico estadísticos cuya comparación no tiene sentido. En el ejemplo mostrado en la figura 7 se compara el número de caras (que toma valores medios en torno a 10) con el número de rachas (cuyo máximo valor fue 3-4). Además se comparan estadísticos de posición central con estadísticos de dispersión.

Por un lado, el estudiante no comprende el propósito del gráfico (que es representar la distribución), ni el concepto de distribución (que se aplica a una sola variable). Por otro, no discrimina las situaciones en las que tiene sentido comparar dos variables o sus estadísticos. Observamos además, los errores en escala, pues repite en el eje X la misma escala dos veces, en vez de representar los gráficos superpuestos sobre la misma escala.

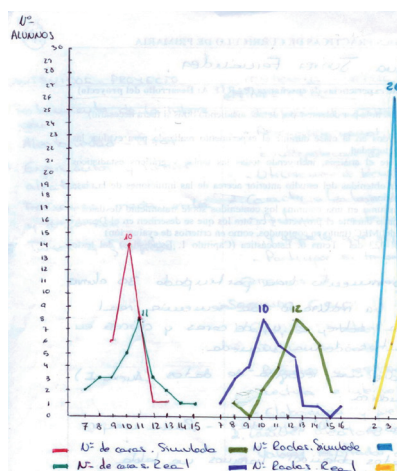


Figura 7. Comparaciones numéricas sin sentido

5.8 Cálculo de resúmenes estadísticos a partir de gráficas

Hemos comprobado también la poca iniciativa de los alumnos a trabajar directamente a partir de la interpretación de una gráfica. El alumno es más propenso a utilizar formulas matemáticas cuando tiene que determinar un resumen estadístico en vez utilizar las gráficas directamente y basarse en las propiedades geométricas de los mismos. Por ejemplo, a la hora de calcular la moda o los percentiles a partir de una gráfica, la mayoría de los alumnos optaban por aplicar las formulas, en la mayoría de los casos de dificultad de memorización, en vez de utilizar un desarrollo geométrico basado en la semejanza de triángulos, donde también hay que aplicar la proporcionalidad, concepto difícil para los estudiantes.

5.9 Interpretación de información numérica de los gráficos

Un último problema es que los futuros profesores no alcanzan los niveles superiores de interpretación de gráficos en la jerarquía descrita por Curcio (1987, 1989) y posteriormente ampliada por Friel, Curcio y Bright (2001). Es decir, aunque hacen una lectura literal, no llegan a visualizar las tendencias o patrones numéricos en los datos. En el trabajo de Arteaga (2008), aunque las dos terceras de los participantes llegaron a construir un gráfico que visualizaba la distribución de los datos, un 28% los presentaban sin ninguna interpretación. Sólo una tercera parte de los estudiantes fue capaz de visualizar la posición central y dispersión a partir del gráfico y de ellos sólo un 13% estudiantes dieron una conclusión correcta, sobre la pregunta planteada en el problema.

6. IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

El resumen de la investigación previa y los ejemplos analizados de nuestra propia investigación indican que la construcción de gráficos estadísticos no es sencilla para los futuros profesores. Por ello es predecible que tengan dificultades cuando enseñen estos gráficos a sus alumnos, tal como se recomienda en los Reales Decretos de Enseñanza Mínimas. Muchas dificultades no se producen por falta de conocimiento estadístico, sino de componentes del sentido numérico tales como fallo en recuento y ordenación de cantidades numéricas, razonamiento proporcional y representación incorrecta de números en la recta numérica y no contextualización de la información.

Friel, Curcio y Bright (2001) indican que la comprensión gráfica incluye componentes aritméticos y no aritméticos y que puede requerir el desarrollo del conocimiento numérico, especialmente la comprensión de las operaciones de recuento, medida y clasificación. El conocimiento de los conceptos numéricos, operaciones y relaciones entre ellos contenidas en un gráfico son esenciales para su interpretación. Creemos por tanto prioritario el desarrollo del sentido numérico y estadístico y su puesta en relación en la

formación de los futuros profesores. Con ello se reforzará simultáneamente su formación para enseñar este Bloque temático, así como el relacionado con Tratamiento de la Información.

Agradecimientos: Este trabajo forma parte de los proyectos SEJ2007-60110 (MEC- Feder), EDU2010-14947 (MCIN), beca FPU AP2007-03222 y beca FPI BES-2008-009562.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arteaga, P. (2008). *Análisis de gráficos estadísticos elaborados en un proyecto de análisis de datos*. Trabajo fin de Master. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Bakker, A. y Gravemeijer, K. P. E. (2004). Learning to reason about distribution. En J. Garfield & D. Ben Zvi (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp 147-168). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada. Grupo de Educación Estadística.
- Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 141-154.
- Ben-Zvi, D. y Friedlander, A. (1997). Statistical thinking in a technological environment. En J. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics* (pp. 54-64). Voorburgo: International Statistical Institute.
- Bruno, A. y Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemáticas VII*, 57-85.
- Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2007). ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía* nº 171. Sevilla: B.O.J.A.
- Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education* 18 (5), 382-393.
- Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.
- delMas, R., Garfield, J. y Ooms, A. (2005). Using assessment items to study students' difficulty with reading and interpreting graphical representations of distributions. Trabajo presentado en el *Fourth Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy (SRTL-4)*, July 6, 2005. Auckland, New Zealand
- Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education* 32(2), 124-158.
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review* 70 (1), 1-25.

- Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Investigación en Educación Matemática 11*, 99-119.
- Espinel, C., Bruno, A. y Plasencia, I. (2008). Statistical graphs in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE. CD-ROM.
- Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 170-218.
- Li, D. Y. y Shen, S. M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics* 14 (1), 2-8.
- MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado* nº 293. Madrid: B.O.E.
- Monteiro, C. y Ainley, J. (2006). Student teachers interpreting media graphs. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador de Bahia: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase.
- Monteiro, C. y Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education* 2 (3), 188-207. On line: <http://www.iejme/>.
- Pérez-Echeverría, M. P. y Scheuer, N. (2005). *Infancia y Aprendizaje*, 28(4), 393-407(15)
- Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria*. Tesis de Maestría. CICATA. México.
- Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de conceptos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (con discusión). *International Statistical Review* 67 (3), 223-265.