Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Sistema de Información Científica

Díaz, Carmen; Contreras, J. Miguel; Batanero, Carmen; Roa, Rafael

Evaluación de Sesgos en el Razonamiento sobre Probabilidad Condicional en Futuros Profesores de Educación Secundaria

Boletim de Educação Matemática, vol. 26, núm. 44, diciembre, 2012, pp. 1207-1225
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Rio Claro, Brasil

Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291226280007

Boletim de Educação Matemática,
ISSN (Versión impresa): 0103-636X
bolema@rc.unesp.br
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Brasil

¿Cómo citar? | Número completo | Más información del artículo | Página de la revista

www.redalyc.org
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

ISSN 0103-636X

CC BY NC ND

Evaluación de Sesgos en el Razonamiento sobre Probabilidad Condicional en Futuros Profesores de Educación Secundaria

Assessing Prospective Secondary School Teachers' Biases in Conditional Probability Reasoning

Carmen Díaz[*]
J. Miguel Contreras[**]
Carmen Batanero[***]
Rafael Roa[****]

Resumen

En este trabajo presentamos un estudio dirigido a evaluar los sesgos presentes en el razonamiento probabilístico condicional en futuros profesores de educación secundaria y bachillerato. Se analizan las respuestas a 7 ítems tomados del cuestionario RPC (razonamiento sobre probabilidad condicional) de 196 alumnos de matemáticas de último curso y alumnos del Máster de Secundaria en España, encontrando una alta incidencia en ambos grupos de la falacia del eje temporal, la condicional transpuesta, confusión entre probabilidad condicional y conjunta, falacia de las tasas base y concepciones

[*] Doctora en Metodología de las Ciencias del Comportamiento por la Universidad de Huelva, (UHU). Departamento de Psicología, Facultad de Educación y Psicología, Campus El Carmen, Huelva, España. Dirección postal: Avda. Fuerzas Armadas, 21071 H21071, Huelva, España. *E-mail*: carmen.diaz@dpsi.uhu.es

[**] Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada (UGR). Departamento Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Granada, España. Dirección postal: Facultad de Ciencias de la Educación, Campus de Cartuja, 18071, Granada, España. *E-mail*: jmcontreras@ugr.es

[***] Doctora en Matemáticas, Universidad de Granada (UGR). Departamento Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Granada, España. Dirección postal: Facultad de Ciencias de la Educación, Campus de Cartuja, 18071, Granada, España. *E-mail*: batanero@ugr.es

[****] Doctor en Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada(UGR). Departamento Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Granada, España. Dirección postal: Facultad de Ciencias de la Educación, Campus de Cartuja, 18071, Granada, España. *E-mail*: rroa@ugr.es

incorrectas sobre la independencia. Se concluye la necesidad de una mejor formación de los futuros profesores, que evite que estos sesgos puedan transmitirse a sus estudiantes.

Palabras clave: Sesgos. Probabilidad Condicional. Futuros Profesores de Secundaria. Evaluación.

Abstract

In this paper we present a study aimed at assessing biases in conditional probability reasoning in prospective secondary school and high school mathematics teachers. We analyze responses to 7 items taken from the CPR (conditional probability reasoning) in a sample of 196 last year mathematics students and Máster students, finding a high incidence in both groups of the time axis fallacy, transposed conditional, confusion between conditional and compound probability, base rates fallacy, and incorrect conceptions of independence. We conclude that there is a need to prepare prospective teachers better to prevent them from transmitting these biases to their students.

Keywords: Biases. Conditional Probability. Prospective Secondary Teachers. Assessment.

1 Introducción

Aunque la enseñanza de la probabilidad ha estado presente en los currículos españoles en los últimos 20 años, los últimos currículos proponen renovarla, haciéndola más experimental, de forma que se pueda proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica más directa desde su infancia, reforzando sus intuiciones probabilísticas (MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE ESPAÑA-MEC, 2006a, 2006b).

El éxito de estas propuestas dependerá de asegurar el conocimiento adecuado por parte de los profesores, pues aunque muchos profesores de Educación Secundaria son licenciados en ciencias o matemáticas, pocos recibieron una formación específica en cómo enseñar probabilidad. Por este motivo, podrían desconocer los resultados de las investigaciones sobre las dificultades en el razonamiento probabilístico y no llegar a detectarlas en sus alumnos o incluso compartirlas ellos mismos. Es por ello importante apoyar a los profesores y ayudarles a enfrentarse con algunas de sus intuiciones erróneas, de modo que puedan posteriormente evaluarlas en sus estudiantes y ayudarles a superarlas (STOHL, 2005).

En este trabajo llevamos a cabo un estudio de evaluación en una muestra

de 196 futuros profesores de Educación Secundaria españoles, para analizar la posible existencia de sesgos descritos en la literatura previa. Nos centramos en la probabilidad condicional, que interviene en la comprensión de ideas clave como la correlación y regresión, intervalos de confianza y contraste de hipótesis (DÍAZ; BATANERO; CONTRERAS, 2010). El razonamiento sobre probabilidad condicional es también crítico en la cultura estadística, ya que permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que incorporamos nueva información, y ayuda a realizar decisiones más precisas en la vida cotidiana (SEDLMEIER, 1999).

A pesar de esta importancia, la investigación previa con estudiantes (DIAZ; BATANERO; CONTRERAS, 2010) sugiere la existencia de numerosos errores en la aplicación de este concepto. También se han descrito dificultades de comprensión de la probabilidad en estudios con futuros profesores de educación primaria (CARDEÑOSO; PORLAND; AZCÁRATE, 1998; WATSON, 2001; BATANERO; CAÑIZARES; GODINO, 2005; ORTIZ et al., 2006) y otros relacionados con la idea de independencia en estudios con futuros profesores de educación secundaria (SÁNCHEZ, 1996; CONTRERAS et al., 2010).

La información presentada en este trabajo permitirá, por tanto, completar la investigación previa y organizar actividades formativas en caso necesario. Comenzamos con la exposición del marco teórico, seguido por la descripción del método y finalizamos exponiendo y discutiendo nuestros resultados.

2 Marco teórico

Nuestro trabajo se apoya tanto en el modelo de Hill, Ball y Schilling (2008) sobre los componentes del conocimiento del profesor, como en la investigación sobre sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional. Ambos componentes del marco teórico se resumen a continuación.

2.1 Conocimiento del profesor para enseñar probabilidad

Entre la amplia investigación sobre formación de profesores, en nuestro trabajo tendremos en cuenta el modelo de Hill, Ball, y Schilling (2008, p. 374), quienes describen el *conocimiento matemático para la enseñanza* como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno". Aunque, para la enseñanza de la

probabilidad en niveles no universitarios, los profesores no necesitan un conocimiento probabilístico abstracto (por ejemplo, la teoría de la medida), si requieren una comprensión profunda de la probabilidad básica, de las interconexiones y relaciones entre los diferentes conceptos probabilísticos y sus aplicaciones, y otros conocimientos no estrictamente matemáticos necesarios para organizar la enseñanza y llevarla a la práctica (MA, 1999).

Dentro del conocimiento del contenido matemático, Hill, Ball y Schilling (2008) diferencian el *conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido,* y *conocimiento en el horizonte matemático*. Mientras el conocimiento común del contenido es el puesto en juego para resolver problemas matemáticos por cualquier persona, el conocimiento especializado del contenido incluye aspectos que, no necesariamente, tiene una persona ordinaria, por ejemplo, identificar las ideas matemáticas trabajadas en un problema. El conocimiento en el horizonte matemático incluye, por ejemplo, conocimiento de la relación con otras materias, la historia de las matemáticas.

Para el conocimiento pedagógico del contenido Hill, Ball y Schilling (2008, p. 375) proponen tener en cuenta tres componentes: (a) El *conocimiento del contenido y los estudiantes* o "conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular"; (b) el conocimiento del contenido y la enseñanza, que resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido; y (c) el conocimiento del contenido y el currículo o conocimiento de las orientaciones curriculares relacionadas con dicho contenido.

El modelo descrito sugiere que los conocimientos matemáticos no son suficientes para que los docentes puedan enseñar probabilidad de una manera efectiva y desarrollar en sus estudiantes un adecuado razonamiento probabilístico. En concreto, el conocimiento de los sesgos en el razonamiento probabilísticos forma parte tanto del conocimiento del contenido y los estudiantes como del conocimiento especializado del contenido requerido por el profesor. Para asegurar este conocimiento, nuestro trabajo se dirige a evaluar la existencia de posibles sesgos relacionados con la probabilidad condicional en futuros profesores. Dicha información no es disponible, pues a pesar de la cantidad de investigaciones previas relacionadas con el razonamiento probabilístico condicional, que se describen en el siguiente apartado son casi inexistentes evaluaciones realizadas con futuros profesores de Secundaria.

2.2 Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional

La probabilidad condicional puede definirse con diversos grados de formalización. Intuitivamente, podemos decir que la probabilidad condicional $P(A/B)$ de un suceso A dado otro suceso B es simplemente la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B se ha verificado. Un concepto relacionado con la probabilidad condicional es el de independencia, ya que dos sucesos son independientes si la probabilidad de uno de ellos no cambia al condicionarlo por el otro. La independencia también se define a partir de la regla del producto, ya que A y B son independientes si y sólo si $P(A \cap B)=P(A) \times P(B)$.

Aunque estas definiciones no presentan problemas de comprensión desde el punto de vista matemático, pues no requieren cálculos complejos, desde un punto de vista psicológico y didáctico, se han descrito numerosos sesgos de razonamiento cuando se aplican en la resolución de problemas (SEDLMEIER, 1999; TARR; LANNING, 2005). A continuación se describen los que tratamos de evaluar en nuestro estudio:

Falacia de las tasas base. Tversky y Kahneman (1982a) denominaron *falacia de las tasas base* al hecho de ignorar la probabilidad a priori de un suceso en problemas que involucran el cálculo de la probabilidad a posteriori, calculándola como si fuese una probabilidad simple. Generalmente, este sesgo ocurre debido a una percepción incorrecta de la dependencia entre los sucesos implicados y sobre todo aparece en problemas que se resuelven mediante aplicación del teorema de Bayes. Una consecuencia es la estimación incorrecta de los riesgos asociados a la toma de decisiones; por ejemplo, esta conducta ha sido descrita en estudios médicos (EDDY, 1982). Se ha observado, asimismo, este sesgo en estudiantes después de seguir un curso donde han estudiado la probabilidad condicional (TOTOHASINA, 1992; DÍAZ; DE LA FUENTE, 2007b).

Confusión entre sucesos independientes y mutuamente incluyentes. Creer que dos sucesos son independientes si y sólo si son excluyentes es un error extendido, incluso entre futuros profesores de Secundaria (SÁNCHEZ, 1996). Kelly y Zwiers (1986) indican que este error puede ser debido a la imprecisión del lenguaje ordinario, en que *independiente* puede significar, a veces, separado. También puede suceder cuando no se identifica con claridad la intersección de los sucesos en el espacio muestral producto (TRURAN; TRURAN, 1997).

Confundir probabilidades conjuntas y condicionales. Pollatsek et

al. (1987) y Ojeda (1995) sugieren que los enunciados que usan la conjunción *y* pueden llevar a muchos estudiantes a confundir una probabilidad conjunta con una probabilidad condicional. Esta confusión también apareció en nuestro estudio previo con futuros profesores de Educación Primaria (CONTRERAS et al., 2010).

Falacia de la conjunción. Con este nombre se denomina a la creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que cada uno de ellos por separado (TVERSKY; KAHNEMAN, 1982b). Díaz (2005) indica que este sesgo aparece únicamente cuando uno de los sucesos tiene una probabilidad muy alta en comparación con el otro. En dicho caso, la intersección de los dos sucesos se ve más probable que el suceso de mayor probabilidad, por lo que el error se produce como resultado de considerar la conjunción como más representativa que cada suceso por separado.

Falacia de la condicional transpuesta. Consiste en la confusión entre una probabilidad *P(A/B)* y la que se obtiene al cambiar la condición y el condicionado, *P(B/A)* (FALK, 1986). Este error aparece con frecuencia en contextos médicos, donde se confunde la probabilidad de que una prueba médica de un resultado positivo cuando se tiene una enfermedad, con la probabilidad de tener la enfermedad, si el resultado de la prueba es positivo (EDDY, 1982). También aparece al interpretar el significado del nivel de significación en un contraste de hipótesis (VALERA; SÁNCHEZ; MARÍN, 2000).

Falacia del eje de tiempo. Es la creencia de que un suceso no puede condicionar a otro que ocurra anteriormente. Gras y Totohasina (1995) indican que los estudiantes asocian el condicionamiento con el orden temporal de los sucesos y no encuentran natural que se condicione un suceso por otro que ocurre con posterioridad. Denominan a esta forma de razonar *concepción cronológica de la probabilidad condicional* e indican que aparece por una confusión entre condicionamiento y causación. Este sesgo se ha detectado también en las investigaciones de Falk (1986) y Díaz y de la Fuente (2007b).

3 Método

En España el acceso a profesor de matemáticas de secundaria se realiza mediante un concurso, para el que se exige un título específico de Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de matemáticas (en lo sucesivo Máster de Secundaria). Aproximadamente el

50% de los que acceden a dicho Máster son Licenciados de Matemáticas y el resto tienen diversas titulaciones científicas o técnicas. Por otro lado, dentro de la Licenciatura de Matemáticas, el 90% de los egresados realizan el concurso para profesor de matemáticas de secundaria, al finalizar su formación.

En consecuencia, los profesores de matemática en España provienen en la misma proporción de dos tipos de estudios: (a) o bien son licenciados en Matemáticas (el 90% de dichos titulados) o bien son egresados del Máster de Secundaria. Para conseguir una muestra representativa de futuros profesores de secundaria españoles se decidió tomar estos dos tipos de alumnos, eligiendo varias universidades para lograr un tamaño de muestra adecuado y mejorar la representatividad, puesto que el número de alumnos, tanto en la licenciatura de matemáticas, como en el Máster es pequeño en cada universidad. Con estos criterios, los sujetos participantes en nuestro estudio fueron 196 futuros profesores de Educación Secundaria (95 alumnos de último curso de la licenciatura de Matemáticas de las Universidades de Granada, La Laguna y Salamanca y 101 alumnos del Máster de Secundaria, de las Universidades de Alicante, Barcelona, Cádiz, Extremadura, Granada, Salamanca, Santiago de Compostela, Pública de Navarra y Valladolid). En cada una de las universidades y grupos participaron en el estudio prácticamente la totalidad de los estudiantes de cada grupo.

La recogida de datos se realizó durante el segundo cuatrimestre del curso académico 2009-2010, siendo las instrucciones y tiempo disponible iguales en todos los grupos de estudiantes. Para la recogida de datos se contactó con algunos profesores del último curso de la Licenciatura de Matemáticas y en la especialidad de matemáticas del Máster de Secundaria, a quienes agradecemos su colaboración en este trabajo. El cuestionario se pasó como una actividad de formación en didáctica de la probabilidad, dando una hora aproximadamente para su administración. Al día siguiente de la administración del cuestionario se discutieron las soluciones con los participantes y se les describieron los sesgos evaluados, para, de este modo, aumentar su conocimiento sobre el tema.

El cuestionario utilizado, que se incluye como anexo, junto con las tablas de resultados en cada una de las muestras, es una parte del cuestionario RPC (Razonamiento Probabilístico Condicional), elaborado y validado por Díaz (BATANERO; DÍAZ, 2007; DÍAZ; DE LA FUENTE, 2007a). Los ítems del cuestionario fueron adaptados de investigaciones previas y seleccionados a partir de juicio de expertos. Sus características psicométricas se evaluaron en pruebas pilotos con muestras de entre 45 y 90 estudiantes. La autora informa de la validación de contenido, criterio y constructo, así como sobre diversos coeficientes

de fiabilidad, que oscilan entre 0,797 y 0,896.

El ítem 1 evalúa la "*falacia de las tasas base*", que aparece en las alternativas (a) y (b). El distractor (c) indica confusión entre probabilidad condicional y conjunta. Para determinar la respuesta correcta (d) se debe aplicar el teorema de Bayes.

El ítem 2 estudia la confusión entre sucesos *independientes y mutuamente excluyentes* (alternativa a). La respuesta correcta sería la (d); mientras que el distractor (b) trata de detectar la creencia errónea de que sólo pueden ser independientes los sucesos de experimentos sucesivos en el tiempo y el (c) presenta la afirmación incorrecta que la regla del producto no se cumple en el caso de sucesos independientes.

El ítem 3 evalúa la *confusión entre probabilidad conjunta y condicional* (alternativa c), siendo la respuesta correcta la (a), ya que se pide una probabilidad condicional. Si el alumno elige el distractor (b), está aplicando la regla del producto, en lugar de dividir las probabilidades, por tanto no recuerda la fórmula de la probabilidad condicional.

El ítem 4 evalúa la *falacia de la conjunción* (alternativa b). La respuesta correcta es la (a) ya que la probabilidad simple es mayor que la conjunta, pues el resultado de aplicar la regla del producto es siempre menor que cada una de las probabilidades por separado. Si el alumno elige el distractor (c) está considerando como equiprobables la probabilidad simple y la conjunta.

El ítem 5 evalúa la *falacia de la condicional transpuesta* (alternativas a y c). La respuesta correcta es la (b) pues el test se diseña para detectar una cierta enfermedad por lo que ha de haber alta probabilidad de detectarla. Aunque la probabilidad de que una persona sana tenga un resultado positivo (falso positivo) en la prueba es muy pequeña, no es imposible y el alto número de personas sanas en la población hace que la probabilidad de estar enfermos si el test ha sido positivo no sea, en general, demasiado alta (EDDY, 1982).

El ítem 6 evalúa la *falacia del eje de tiempo.* El resultado (c) es el correcto ya que, si la bola pasa por el canal *II* puede caer por *R* o por *B* con igual probabilidad, y si pasa por *I*, sólo puede caer por *R*. Si se elige el distractor (b) se está confundiendo el suceso condicionado ya que se está calculando la probabilidad de que habiendo salido la bola por *R*, la bola haya pasado por *II*. Si se elige el distractor (a) no se está teniendo en cuenta las bolas que caen por el orificio *B*, es decir, no se tiene en cuenta el condicionamiento por un suceso posterior; lo mismo ocurre si se elige el distractor (d), pero en este caso, además se piensa que no se puede calcular la probabilidad de un suceso condicionado a

otro que ocurra anteriormente.

El ítem 7 también evalúa la *falacia del eje de tiempo* en un contexto de muestreo sin reposición. Dado que en la segunda extracción hay una bola negra, ésta queda eliminada de la primera extracción, por lo que el espacio muestral se restringe a $\{(n,n);(b_1,n);(b_2,n)\}$ y la respuestas correcta es (a). Si elige el distractor (d) no se está teniendo en cuenta el condicionamiento a un suceso que ocurre posteriormente, mostrando la falacia del eje. Si elige el distractor (b) o (c) se está confundiendo probabilidad condicional y conjunta; en el primer caso no se tiene en cuenta la condición dada y en el segundo si.

4 Resultados y discusión

En las Tablas 1 a 7 se detallan las frecuencias y porcentajes de cada uno de los distractores para cada ítem en las dos muestras.

Tabla 1 - Resultados en el ítem 1

	Matemáticas (n=95)		Máster (n=101)	
Respuesta	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a. 80 %	22	23,2	27	26,7
b. 15%	8	8,4	21	20,8
c. (15/100) x (80/100)	56	58,9	44	43,6
d. 41 %	7	7,4	8	7,9
En blanco	2	2,1	1	1,0
Total	95	100,0	101	100,0

Tabla 2 - Resultados en el ítem 2

	Matemáticas (n=95)		Máster (n=101)	
Respuesta	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a. No, porque en la baraja hay un rey de oros	39	41,1	24	23,8
b. Sólo si después de sacar la carta y ver si es rey se coloca en la baraja y se saca una segunda carta para ver si es oros	33	34,7	31	30,7
c. No, porque P(rey de oros) = P(rey) x P(oros)	6	6,3	11	10,8
d. Sí, en todos los casos	17	17,9	34	33,7
En blanco	-	-	1	1,0
Total	95	100,0	101	100,0

Tabla 3 - Resultados en el ítem 3

	Matemáticas (n=95)		Máster (n=101)	
Respuesta	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a. $\frac{0,8}{10,3} = 0,0776$, probabilidad de 7,76%	40	42,1	46	45,5
b. $10,3 \cdot 0,8 = 8,24$, probabilidad del 8,24%	29	30,5	17	16,9
c. 0,8 %	25	26,3	37	36,6
En blanco	1	1,1	1	1,0
Total	95	100,0	101	100,0

Tabla 4 - Resultados en el ítem 4

	Matemáticas (n=95)		Máster (n=101)	
Respuesta	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a. Rafa Nadal pierde el primer set.	40	42,1	72	71,3
b. Rafa Nadal pierde el primer set, pero gana el partido.	13	13,7	10	9,9
c. Los dos sucesos son iguales de probables.	40	42,1	18	17,8
En blanco	2	2,1	1	1,0
Total	95	100,0	101	100,0

Tabla 5 - Resultados en el ítem 5

	Matemáticas (n=95)		Máster (n=101)	
Respuesta	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a. Predecir que una persona tiene cáncer si ha dado positivo en el test de diagnóstico.	14	14,7	13	12,9
b. Predecir un resultado positivo en el test de diagnóstico si la persona tiene cáncer.	42	44,3	39	38,6
c. Tengo la misma confianza en ambas predicciones.	37	38,9	46	45,5
En blanco	2	2,1	3	3,0
Total	95	100,0	101	100,0

Tabla 6 - Resultados en el ítem 6

	Matemáticas (n=95)		Máster (n=101)	
Respuesta	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a. 0,50	62	65,3	70	69,3
b. 0,33	9	9,5	6	5,9
c. 0,66	22	23,1	24	23,8
d. No se puede calcular	2	2,1	0	0
Respuestas en blanco	0	0	1	1,0
Total	95	100,0	101	100,0

Tabla 7 - Resultados en el ítem 7

	Matemáticas (n=95)		Máster (n=101)	
Respuestas	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a. 1/3	22	23,2	36	35,6
b. 1/4	24	25,3	17	16,8
c. 1/6	12	12,6	13	12,9
d. 1/2	32	33,7	32	31,7
En blanco	5	5,2	3	3,0
Total	95	100,0	101	100,0

En la Tabla 8 presentamos las frecuencias y porcentajes de las diferentes falacias o sesgos en cada grupo (alumnos de Licenciatura y alumnos de Máster). Notamos una fuerte incidencia de los sesgos analizados en ambos grupos, destacando la falacia del eje de tiempos descrita por Falk (1986) que se dio en alrededor de dos de cada tres participantes en nuestro estudio en el ítem 6 y uno de cada tres en el ítem 7, con frecuencia muy parecida a la obtenida en la muestra de Díaz (2007) con estudiantes de psicología. Asimismo hay una alta presencia de la falacia de la condicional transpuesta, descrita también por Falk (1986) (con más de la mitad de participantes incurriendo en este error en el ítem 5). También es importante en los participantes del estudio la confusión entre probabilidad conjunta y condicional, con frecuencia variable en los diferentes ítems, siendo mayor en el ítem 1 (con un 58,9% de estudiantes de Matemáticas y 43,6 de Máster) que en el 3 (con un 26,3% de estudiantes de Matemáticas y 36,6 en el Máster).

La falacia de las tasas base, que en nuestra muestra se dio en el 31,6%

de los estudiantes de Matemáticas y en el 47,5% de los de Máster en el ítem 1. Aparecen, asimismo, con alta frecuencia dos concepciones incorrectas sobre la independencia: confundirla con la mutua exclusividad (KELLY; ZWIERS, 1986; SÁNCHEZ, 1996) (en un 41,1% y 23,8% respectivamente en el ítem 2) o considerar que sólo puede darse en experimentos sucesivos (34,7% y 30,7% de participantes de cada muestra en el mismo ítem), creencias que también aparecieron en el estudio de Totohasina (1992) y Gras y Totohasina (1995). En el ítem 4, 40% y 17,8% respectivamente de estudiantes de matemáticas y Máster consideran las probabilidades simple y compuesta igualmente probables. La falacia de la conjunción (TVERSKY; KAHNEMAN, 1982b), sin embargo, se dio en un porcentaje menor, en alrededor del 10% en nuestra muestra.

Todos estos resultados replican los de Díaz y de la Fuente (2007b) con estudiantes de Psicología, quienes a pesar de su menor preparación matemática presentaron porcentajes de sesgos muy similares excepto en la falacia de las tasas base que se presentó en sólo el 15% de la muestra de estudiantes, posiblemente porque estos estudiantes utilizan con frecuencia problemas tipo Bayes en situaciones de diagnóstico psicológico.

Tabla 8 - Síntesis de sesgos (Matemáticas y Máster de Secundaria)

			Matemáticas (n=95)		Master (n=101)	
Item	Opciones	Sesgos evaluados	Frecuencia	%	Frecuencia	%
1	a y b	Falacia tasas base	30	31,6	48	47,5
1	c	Confunde probabilidad condicional y conjunta	56	58,9	44	43,6
2	a	Confunde independencia y mutua exclusividad	39	41,1	24	23,8
2	b	Independencia sólo en experimentos sucesivos	33	34,7	31	30,7
3	c	Confunde probabilidad condicional y conjunta	25	26,3	37	36,6
4	b	Falacia de la conjunción	13	13,7	10	9,9
4	c	Probabilidad conjunta y simple idénticas	40	42,1	18	17,8
5	a y c	Falacia de la condicional transpuesta	51	53,6	59	58,4
6	a y d	Falacia eje de tiempos	64	67,4	70	69,3
6	b	Confunde el suceso condicionado	9	9,5	6	5,9
7	d	Falacia eje de tiempos	32	33,7	32	31,7
7	b y c	Confunde probabilidad condicional y conjunta	36	37,9	30	29,7

Observamos, también, pocas diferencias en las dos muestras, con algo más de presencia de la falacia de las tasas base en los alumnos del Máster, confusión de independencia y mutua exclusividad y consideración de probabilidad conjunta y simple como iguales en los estudiantes de matemáticas y resultados similares o contradictorios según el ítem en el resto de sesgos. En consecuencia, no observamos grandes diferencias en la presencia de los diferentes sesgos en los dos grupos que componen nuestra muestra.

En la Tabla 9 mostramos el número de sesgos observado en cada participante, donde observamos que sólo 13 de los futuros profesores participantes no presentan ningún sesgo, siendo lo más habitual presentar entre 1 y 3 sesgos. Cabe destacar que unos 42,8% de la muestra presentan tres sesgos o más. El número medio de sesgos fue 2,28 en los licenciados en matemáticas y 2,32 en los estudiantes de Máster, de modo que tampoco hay diferencias importantes en este punto.

Tabla 9 - Número de sesgos por participante

	Lic. Matemáticas		Máster Secundaria	
Sesgos por profesor	Frecuencia	%	Frecuencia	%
0 sesgos	3	3,2	10	9,9
1 sesgo	19	20,0	16	15,8
2 sesgos	36	37,9	28	27,7
3 sesgos	24	25,3	31	30,7
4 sesgos	11	11,5	11	10,9
5 sesgos	2	2,1	5	5,0
Total	95	100,0	101	100,0

Como resumen del estudio de sesgos, observamos que son pocos los futuros profesores que se encuentran libres de los mismos en las situaciones planteadas, muchas de las cuales aparecen en la vida cotidiana o profesional. Deducimos que la formación matemática recibida por los futuros profesores no es suficiente para hacerles conscientes de la existencia de estos sesgos y que, por lo tanto, los podrían transmitir a sus estudiantes. Aunque los ítems propuestos estaban diseñados para mostrar distintas falacias comunes en la población, esto no justifica la presencia tan extendida en la muestra.

Será, por tanto, necesario que los formadores de profesores, tanto en la

Licenciatura de Matemáticas, como en el Máster tengan en cuenta estos resultados y se organicen actividades formativas que ayuden a superar estos errores, ya que, como indican Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2006), éstos podrían incidir en la confianza que muestren en la enseñanza de este tema en el futuro.

5 Implicaciones para la formación de profesores

Los resultados de nuestro estudio confirman la existencia de los sesgos más reportados en la investigación previa en los futuros profesores de matemáticas españoles. Los resultados, en algunos de los ítems, han sido peores que los obtenidos por Díaz y de la Fuente (2007b) en estudiantes de Psicología, a pesar de la mayor preparación matemática de los participantes de nuestra muestra. Estos resultados son motivo de preocupación, ya que los futuros profesores de nuestra muestra tenderán a fallar en la enseñanza de la probabilidad así como en algunas actividades profesionales que requieren del razonamiento probabilístico, tales como "averiguar lo que los estudiantes saben, la elección y la gestión de las representaciones de las ideas matemáticas, la selección y modificación de los libros de texto, decidir entre los cursos alternativos de acción" (BALL; LUBIENSKI; MEWBORN, 2001, p. 453). En consecuencia, se sugiere la necesidad de mejorar la educación sobre probabilidad que estos futuros profesores reciben durante su formación

Por otro lado, la compleja relación entre los conceptos probabilísticos y la intuición (BOROVCNIK; PEARD, 1996) se muestran también en los resultados, puesto que la alta preparación matemática no fue suficiente para evitar sesgos de razonamiento. Ello sugiere la necesidad de prestar más atención a la enseñanza de heurísticas en la resolución de problemas matemáticos y la importancia que en la resolución de los problemas matemáticos tienen los procesos psicológicos.

Como apunta Fernández (1990), la función principal del proceso de diagnóstico pedagógico es la toma de decisiones sobre los cambios que requiere el modelo de enseñanza para ayudar al alumno en su adquisición de habilidades y competencias. Nuestra investigación no solo sugiere la necesidad de reforzar la formación sobre probabilidad condicional en los futuros profesores, sino también un cambio en la aproximación de este aprendizaje haciendo más hincapié en aquellos razonamientos sesgados que están presentes en los futuros profesores. Una enseñanza basada en el uso de la simulación, y la reflexión en pequeños

grupos sobre estas dificultades podrían ayudar a superar estos sesgos.

Siguiendo las recomendaciones de Nisbett y Ross (1980, p. 280, 281), los profesores deberían recibir también una "mayor motivación para prestar atención a la naturaleza de las tareas inferenciales que realizan y a la calidad de su ejecución" y consecuentemente "*la estadística debería enseñarse conjuntamente con material basado en estrategias intuitivas y errores inferenciales*". Los ítems presentados en este trabajo y los resultados del estudio podrían, en este sentido, servir de base para preparar situaciones didácticas dirigidas a la formación de profesores en que estos, en primer lugar, respondiesen intuitivamente a los ítems. En segundo lugar se les resolvería los problemas o se les proporcionaría información sobre las probabilidades de los sucesos implicados para, de este modo, enfrentarlos con sus propias intuiciones incorrectas.

Agradecimientos: este trabajo forma parte del proyecto: EDU2010-14947, MICINN- FEDER y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

BALL, D. L.; LUBIENSKI, S. T.; MEWBORN, D. S. Research on teaching mathematics: the unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In: RICHARDSON, V. (Ed.). **Handbook of research on teaching.** Washington, DC: American Educational Research Association, 2001. p. 433-456.

BATANERO, C.; CAÑIZARES, M. J.; GODINO, J. Simulation as a tool to train pre-service school teachers. In: AFRICAN REGIONAL CONFERENCE OF ICMI, 1th, 2005, Ciudad del Cabo. **Proceedings**... Ciudad del Cabo: ICMI, 2005. p. 1-8. CD-ROM.

BATANERO, C.; DÍAZ, C. Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v.8 n.2, p.197-223, 2007.

BOROVCNIK, M.; PEARD, R. Probability. In: BISHOP A. J.; CLEMENTS, K.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J.; LABORDE, C. (Eds.), **International handbook of mathematics education** Dordrecht: Kluwer. 1996. p. 239-288.

CARDEÑOSO, J. M.; PORLAND, R.; AZCÁRATE, P. Concepción de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 16, n.1, p. 85-98, 1998.

CONTRERAS, J.M.; DÍAZ, C.; BATANERO, C.; ORTIZ, J. J. Razonamiento probabilístico de profesores y su evolución en un taller formativo. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 2, p. 181-198, 2010.

DÍAZ, C. Evaluación de la falacia de la conjunción en alumnos universitarios. **Suma**, Torrent, v. 48, n.1, p. 45-50, Feb. 2005.

DIAZ, C. **Viabilidad de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en Psicología.** 2007. 587f. Tesis (Doctorado en Psicología) - Departamento de Metodología de las Ciencias del Comportamiento, Universidad de Granada, Granada, 2007.

DÍAZ, C.; BATANERO, C.; CONTRERAS, J, M. Teaching independence and conditional probability. **Boletín de Estadística e Investigación Operativa**, Madrid, v. 26, n. 2, p.149-162, jun. 2010.

DÍAZ, C.; DE LA FUENTE, I. Validación de un cuestionario de razonamiento probabilístico condicional. **REMA**, Oviedo, v. 12, n.1, p. 1-15, 2007a.

DÍAZ, C.; DE LA FUENTE, I. Assessing psychology students' difficulties with conditional probability and bayesian reasoning. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, Ankara, v. 2, n.2, p. 128-148, July 2007b.

EDDY, D. M. Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. In: KAHNEMAN, D.; SLOVIC Y TVERSKY, P. (Eds.), **Judgement under uncertainty: Heuristics and biases.** New York: Cambridge University Press. 1982. p. 249-267.

FALK, R. Conditional probabilities: insights and difficulties. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STA-TISTICS, 2th, 1986, Victoria. **Proceedings...** Victoria: International Statistical Institute, 1986. p. 292-297. CD-ROM.

FERNÁNDEZ, S. Diagnostico curricular y dificultades de aprendizaje. **Psicothema**, Oviedo, v. 2, n.1, p. 37-56, 1990.

GRAS, R.; TOTOHASINA, A. Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 15, n.1, p. 49 - 95, 1995.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education,** Reston, VA, v. 39, n. 4, p. 372 - 400, July 2008.

KELLY, I. W.; ZWIERS, F. W. Mutually exclusive and independence: Unraveling basic misconceptions in probability theory. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STA-TISTICS, 2th, 1986, Victoria. **Proceedings...** Victoria: International Statistical Institute, 1986. p. 96-100. CD-ROM.

MA, L. P. **Knowing and teaching elementary mathematics.** Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE ESPAÑA-MEC. **Real Decreto 1513/2006**, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación primaria. Madrid: MEC, 2006a.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE ESPAÑA-MEC. **Real Decreto 1631/2006**, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Madrid: MEC, 2006b.

NISBETT, R.; ROSS, L. **Human inference:** Strategies and shortcomings of social judgments. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1980.

OJEDA, A. M. Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. **UNO**, Barcelona, v. 5, p. 37-55, jul. 1995.

ORTIZ, J. J. et al. Comparación de probabilidades en profesores en formación. En: BOLEA, P.; GONZÁLES, M. J.; MORENO, M. (Eds.), SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 10, 2006, Huesca. **Actas…** Huesca: SEIEM. 2006. p. 268-276.

POLLATSEK, A.; WELL, A. D.; KONOLD, C.; HARDIMAN, P. Understanding Conditional Probabilities. **Organization, Behavior and Human Decision Processes**, Seattle, v. 40, n. 2, p. 255-269, 1987.

SÁNCHEZ, E. Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En: HITT, F. (Ed.), **Investigaciones en Matemática Educativa** México: Grupo Editorial Iberoamericano. 1996. p. 389-404.

SEDLMEIER, P. **Improving statistical reasoning. Theoretical models and practical implications.** Mahwah, NJ: Erlbaum, 1999.

SERRADÓ, A.; AZCÁRATE, P.; CARDEÑOSO, J.M. Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 7th, 2006, Salvador, **Proceedings...** Salvador: International Statistical Institute, 2006. Disponible en: <www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications>. Acceso en: 2 Enero 2012.

STOHL, H. Probability in teacher education and development. In: JONES, G. (Ed.), **Exploring probability in schools:** Challenges for teaching and learning. Nueva York: Springer. 2005. p. 345-366.

TARR, J. E.; LANNIN, J. K. How can teachers build notions of conditional probability and independence? In: JONES, G. A. (Ed.). **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning** Nueva York: Springer. 2005. p. 216-238.

TOTOHASINA, A. **Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de concetpions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle**. 1992. 341f. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) –Instituto de Formacion de Profesores. Departamento de Matemáticas, Universidad de Rennes I, Rennes, 1992.

TRURAN, J. M.; TRURAN, K. M. Statistical independence: One concept or two? In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICS EDUCATION- ICME, 8th, 1997, Victoria. **Proceedings...** Victoria: Swinburne University of Technology, 1997. Papers from Statistical Education Presented at Topic Group 9, p. 87-100. CD-ROM.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Judgements of and by representativeness. En: KAHNEMAN, D.; SLOVIC, P.; TVERSKY, A. (Eds.). **Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.** Nueva York: Cambridge University Press. 1982a. p. 84-98.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. On the psychology of prediction. En: KAHNEMAN, D.; SLOVIC, P.; TVERSKY, A. (Eds.). **Judgement under uncertainty: Heuristics and biases.** Cambridge, MA: Cambridge University Press. 1982b. p. 69-83.

VALERA, S.; SÁNCHEZ, J.; MARÍN, F. Contraste de hipótesis e investigación psicológica española: Análisis y propuestas. **Psicothema**, Oviedo, v. 12, n. 2, p. 549-582, 2000.

WATSON, J.M. Profiling teacher's competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Dordrecht, v. 4, n. 4, p. 305-337, dic. 2001.

Submetido em Junho de 2011.
Aprovado em Janeiro de 2012.

Apéndice: Cuestionario y resultados por ítem

Ítem 1. Un taxi se vio implicado en un accidente nocturno. Hay dos compañías de taxis en la ciudad, la Verde y la Azul. El 85% de los taxis de la ciudad son Verdes y el 15% Azules. Un testigo identificó el taxi como Azul. El tribunal comprobó la fiabilidad del testigo bajo las mismas circunstancias de la noche del accidente y concluyó que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul?

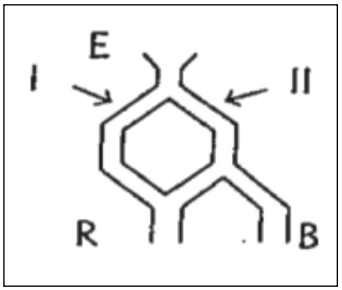
Ítem 2. Se extrae una carta al azar de una baraja española (40 cartas con números del 1 al 7, sota caballo y rey). Sea A el suceso "se extrae una carta de oros " y B el suceso "se extrae un rey" ¿Los sucesos A y B son independientes?

Ítem 3. La probabilidad de que una mujer de 40 años tenga una mamografía positiva es el 10,3%. La probabilidad de que una mujer de 40 años tenga cáncer de pecho y una mamografía positiva es de 0,8%. Una mujer de 40 años se realiza una mamografía y resulta positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente tenga cáncer?

Ítem 4. Supón que Rafa Nadal alcanza la final de Roland Garros en 2010. Para ganar el partido hay que ganar tres sets. ¿Cuál de los siguientes sucesos consideras más probable?

Ítem 5. Un test diagnóstico de cáncer fue administrado a todos los residentes de una gran ciudad. Un resultado positivo en el test es indicativo de cáncer y un resultado negativo es indicativo de ausencia de cáncer. ¿En cuál de las siguientes predicciones tienes más confianza?

Ítem 6. Una bola se suelta por la entrada E. Si sale por R, ¿Cuál es la probabilidad de que haya pasado por el canal 1?



Ítem 7. Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar? P (N_1/ N_2).