



O dilema dos prisioneiros: valor dos paradoxos na clase de matemáticas

José M. Contreras, Carmen Batanero,
Pedro Arteaga, Gustavo Cañadas
Universidad de Granada

Resumo

En estatística e probabilidade encontramos diferentes paradoxos, de solución alcanzable aos estudantes, que permiten organizar actividades didácticas no ensino secundario e bacharelato. Neste traballo describimos o paradoxo dos tres prisioneiros, propoñendo algunhas formulacións e solucións. Tamén analizamos os contidos estatísticos traballados na súa solución, así como os posibles razoamentos erróneos dos estudantes. Finalizamos cunhas reflexións para a clase de estatística.

Abstract

In statistics and probability we find different paradoxes that students can solve without many problems, this lets us organize educational activities in secondary and high school. In this work we describe the "three prisoners" paradox, offering some formulations and solutions. We also analyze the statistical contents worked in its solution as well as the students' wrong reasoning. We conclude with some reflections for the statistics lessons.

INTRODUCCIÓN

Aínda que o ensino da probabilidade na educación secundaria e o bacharelato ten xa unha gran tradición, algúns profesores, cuxa formación inicial se centrou só nas competencias matemáticas, puideran sentirse inseguros cos novos enfoques recomendados nos Decretos de Ensinanzas Mínimas (MEC 2006, 2007). Nestes documentos recoméndase reforzar as intuicións dos estudantes e o razoamento estatístico, que van máis alá da comprensión dos conceptos e procedementos. É importante apoiar a estes profesores e proporcionarlles actividades que lles sirvan para motivar aos seus alumnos e axudarlles a enfrontarse con algunhas das súas intuicións erróneas, ao tempo que os informamos das posibles dificultades dos alumnos (Stohl, 2005).

Ademais da formación científica, o profesor require formación no coñecemento didáctico relacionado co tema específico que ensina. Diversos autores refírense a este coñecemento con diferentes nomes. Ball, Lubienski e Mewborn (2001) falan do coñecemento matemático para o ensino, que se describe en Hill, Ball, e Xilin (2008) como *o coñecemento matemático que utiliza o profesor na aula para producir instrución e crecemento no alumno* (páx. 374) e divídeno en dúas grandes categorías: coñecemento do contido e coñecemento pedagóxico do contido. Para o coñecemento pedagóxico do contido Hill, Ball, e Xilin (2008) propoñen ter en conta, o coñecemento do contido e os estudantes (KCS), o coñecemento do contido e o ensino (KCT), e o coñecemento do currículo. O coñecemento do

contido e os estudantes (KCS) *é o coñecemento de como os estudantes pensan, saben, ou aprenden este contido particular* (páx. 375). Inclúe o coñecemento dos erros e dificultades comúns, as concepcións erróneas, as estratexias utilizadas, o ser capaz de valorar a comprensión do alumno e saber como evoluciona o seu razoamento matemático. Respecto ao coñecemento do contido e o ensino (KCT) resulta da integración do contido matemático co coñecemento do ensino do devandito contido. Inclúe saber construír, a partir do razoamento dos estudantes e as estratexias utilizadas por eles, situacións didácticas pertinentes para tratar e corrixir os seus erros e concepcións erróneas.

A finalidade deste traballo é contribuír a reforzar este coñecemento pedagóxico, para o tema da probabilidade. Máis concretamente, presentamos unha análise do valor didáctico que o uso dos paradoxos pode ter na clase de probabilidade, analizando con detalle un destes paradoxos: o dilema do prisioneiro.

O VALOR DIDÁCTICO DOS PARADOXOS

Os paradoxos de probabilidade poden servir para formular situacións motivadoras na aula. Lesser (1998) indica que o uso intelixente de paradoxos na clase de matemáticas apoia unha pedagogía construtivista, promovendo unha aprendizaxe profunda a partir das crenzas previas e dando ao profesor o papel de facilitador da aprendizaxe. Podemos servirmos dalgúns destes paradoxos clásicos (Székely, 1986) para crear situacións didácticas que sirvan para provocar a

reflexión dos alumnos sobre as súas propias intuicións incorrectas.

Non é difícil encontrar exemplos sinxelos, pero que teñen solucións contra-intuitivas, xa que a historia da probabilidade e estatística están repletas de episodios e problemas que resultaron no seu tempo desafiantes e que mostran que a intuición aleatoria con frecuencia nos engana. A construción da teoría da probabilidade non foi sinxela, e é só o esforzo e a aprendizaxe a partir da análise dos propios erros, o que levou ao progreso desta (Batanero, Henry e Parzysz, 2005). Os estudantes pódense beneficiar ao desenvolver a súa motivación e meta-cognición, descubrindo as conexións entre a historia e a vida cotiá. Isto é importante, pois nalgunhas comunidades, inclúese o compoñente histórico como bloque transversal no currículo de matemáticas, tanto na educación secundaria obrigatoria coma no bacharelato (Consejería de Educación, 2007; 2008).

Falk e Konold (1992) afirman que a análise de paradoxos require, por parte do que analiza, unha conciencia dos seus propios pensamentos, o que é tan importante como a aprendizaxe da solución correcta e é un paso vital para alcanzar a capacidade matemática abstracta. Konold (1994) destaca o efecto motivador ao obter resultados sorprendentes na resolución de paradoxos, que anima aos estudantes a explorar o problema máis formalmente. León (2009) indica que a historia da probabilidade presenta situacións moi atractivas que poden conducir a reflexionar sobre a presenza do azar no cotián, ademais de servir de motivación cara o estudo por parte dos alumnos. No mesmo sentido exprésanse Basulto e Camúñez (2007).

No que segue describimos o dilema dos tres prisioneiros, mostrando unha formulación intuitiva das solucións correctas e analizando os obxectos matemáticos que se traballan na solución deste paradoxo. Presentamos tamén algunhas formulacións diferentes e posibles solucións a estas. Analizamos as posibles dificultades dos estudantes ao traballar con este problema e finalizamos con algunhas implicacións didácticas.

O DILEMA DOS PRISIONEIRO

Joseph Bertrand (1822-1900) foi un matemático francés do século XIX, que traballou en Teoría dos Números, Xeometría Diferencial, Economía, Termodinámica e Probabilidades. No seu libro *Cálcul des probabilités* publicado en 1888, describe numerosos exemplos de problemas de probabilidade contraintuitivos, entre outros, o seguinte, que é agora coñecido como o "Paradoxo da caixa de Bertrand":

Temos tres caixas e cada caixa ten dous caixóns cunha moeda cada unha: unha caixa contén dúas moedas de ouro, outra caixa dúas moedas de prata, e a caixa final unha de cada tipo. Despois de elixir unha caixa ao azar toma un caixón ao azar, e resul-

ta por exemplo que contén unha moeda de ouro. Cal é a probabilidade de que a outra tamén sexa de ouro?

Unha das moitas variantes do paradoxo da caixa de Bertrand é o denominado "dilema do prisioneiro". Hardin (1968) presenta o seguinte enunciado:

Tres prisioneiros esperan encarcerados o seu xuízo. Infórmaselles que a un deles se lles condenará a morte e que aos outros dous se lles liberará. Cando cada prisioneiro pensa nas posibilidades que ten de salvarse, o xuíz dille ao primeiro prisioneiro que o terceiro será liberado, preguntándolle se quere intercambiar a súa sorte co segundo. Que debe facer o prisioneiro?

Cando se propón este problema aos alumnos, moitos estudantes crean o espazo mostral das posibilidades sen considerar a forma en que a información proporcionada polo xuíz afecta ás probabilidades. Antes de coñecer que o terceiro prisioneiro se salva, as posibilidades de vida e morte dos prisioneiros serían as indicadas na Táboa 1. Polo tanto, un razoamento elemental indica que a probabilidade de que o primeiro prisioneiro morra é de 1/3 xa que só morrería no suposto 1. Como o xuíz indica ao prisioneiro A que o terceiro prisioneiro se salva, aparentemente só quedan dous supostos (1 e 2), polo que a resposta máis usual sería dicir que A e B teñen a mesma probabilidade (1/2) de morrer, e non paga a pena intercambiar o futuro do primeiro prisioneiro co do segundo. Non obstante, este razoamento é incorrecto.

	Prisioneiro A	Prisioneiro B	Prisioneiro C
Suposto 1	Morre	Libre	Libre
Suposto 2	Libre	Morre	Libre
Suposto 3	Libre	Libre	Morre

Táboa 1
Supostos posibles no dilema dos tres prisioneiros

SOLUCIÓN CORRECTA E OBXECTOS MATEMÁTICOS QUE SE TRABALLAN

Unha solución correcta obteríase comparando as probabilidades de que morran A e B, sabendo que se salva C. Sexan MA, MB e MC os sucesos de que morran, respectivamente A, B e C e SA, SB e SC os sucesos consistentes en que se salven. Para calcular P(MA/SC) habería que aplicar a fórmula da probabilidade condicional, é dicir:

$$P(MA / SC) = \frac{P(MA \cap SC)}{P(SC)}$$

Como sabemos que C se salva, P(SC)=1, e a probabilidade pedida é igual á do numerador P(MA∩SC). Utilizando

a fórmula da probabilidade composta:

$$P(MA \cap SC) = P(MA) \cdot P(SC / MA)$$

Ao salvarse sempre C : $P(SC / MA) = P(SC) = 1$, polo tanto, $P(MA \cap SC) = P(MA) = 1/3$, de onde:

$$P(MA / SC) = \frac{P(MA \cap SC)}{P(SC)} = \frac{1/3}{1} = 1/3$$

A probabilidade de que morra B , sabendo que se salva C , sería a complementaria da anterior, pois sabemos que ou ben o segundo ou o terceiro han de morrer, polo que a devandita probabilidade sería:

$$P(MB / SA) = 1 - P(MC / SA) = 2/3$$

Logo ao primeiro prisioneiro non lle convén intercambiar a súa sorte co segundo, xa que así tería o dobre de posibilidades de morrer, o cal é paradoxal.

No traballo na aula con este paradoxo usaranse implícita ou explicitamente os seguintes obxectos matemáticos (na clasificación de Godino, Font e Wilhelmi, 2008):

- *Linguaxe matemática*: utilízanse expresións verbais e numéricas das probabilidades dos sucesos implicados, así como linguaxe simbólica para calcular as devanditas probabilidades. Podería tamén utilizarse un diagrama en árbore para visualizar a situación.
- *Conceptos*: neste paradoxo os alumnos traballan a idea de experimento aleatorio, suceso, espazo mostral, complementario, probabilidade simple, composta e condicional, dependencia e independencia.
- *Propiedades*: algunhas propiedades que aparecen na resolución destes problemas son: diferenza entre probabilidade condicionada e simple, relación entre probabilidade condicionada, conxunta e simple, complementario, regra da unión, do produto.
- *Procedementos*: algúns procedementos que podemos encontrar na resolución destes paradoxos son: cálculo de probabilidades simples, compostas e condicionadas.
- *Argumentos*: a actividade permite usar o razoamento dedutivo e a realización de conxecturas e refutacións.

Como se mostra na Táboa 2, a resolución é bastante complexa, debido á gran cantidade de obxectos matemáticos que se manexan, incluíndo varias fórmulas de cálculo de probabilidade composta e condicional.

Tipo	Obxectos matemáticos	Significado na situación
Problema	Intercambiarse ou non polo segundo prisioneiro	Determinar a maior probabilidade de supervivencia
Linguaxes	Verbal	Explicación da situación
	Gráfica	Diagrama en árbol, táboa de posibles resultados
	Simbólica	Expresar sucesos, probabilidades
	Numérica	Cálculo das diferentes probabilidades
Conceptos	Experimento aleatorio	Elixir o prisioneiro que se salva Salvar a vida
	Sucesos; espazo mostral	Prisioneiro A, B, C Morrer/Salvarse
	Experimento composto	Composición dos experimentos anteriores
	Sucesos en el experimento compuesto	Producto cartesiano dos espazos anteriores (MA, SB, SC), etc.
	Intersección de sucesos	Conxunto común de sucesos
	Probabilidade clásica	Proporción de casos favorables a posibles
	Probabilidade condicional	Proporción de ocorrencia suceso respecto da ocorrencia doutro
Procedementos	Complementario	Suceso contrario a outro
	Cálculo da probabilidade condicionada	$P(MA / SC) = \frac{P(MA \cap SC)}{P(SC)}$
	Cálculo da probabilidade composta	$P(MA \cap SC) = P(MA) \cdot P(SC / MA)$
Propiedades	Cálculo do complementario	$P(MB / SA) = 1 - P(MC / SA)$
	Diferenza probabilidade condicionada e simple	Restricción do espazo mostral
Argumento	Regra da independencia	$P(SC / MA) = P(SC)$
	Razoamento dedutivo	Demostración da solución
Argumento	Conxecturas e refutacións	Contrastar as intuicións coas solucións

Táboa 2
Obxectos matemáticos implícitos na solución

PROCESOS MATEMÁTICOS NO TRABALLO CO PARADOXO

Tamén podemos observar os seguintes procesos matemáticos:

- *Procesos de materialización - idealización* (pasar de algo que se percibe a algo que non se percibe): por exemplo, os prisioneiros e situación de supervivencia aos que fan referencia o paradoxo son obxectos imaxinarios, que podemos materializar, se por exemplo, levamos a cabo unha simulación do experimento.
- *Procesos de particularización - xeneralización*: é cando pasamos dun caso particular, xeneralizando a unha propiedade dun conxunto ou viceversa, cando unha propiedade que sabemos é xeral, aplicámola a un caso particular. Por exemplo, sabemos que a suma total de todas as probabilidades dos sucesos nun experimento é a unidade. En cada exemplo, particularizando chegamos ás probabilidades dos sucesos dados. Así sabemos que a suma da probabilidade de supervivencia e morte ha de ser unha en cada caso sen ter que calculala.
- *Procesos de representación - significación*: os procesos de representación e significación aparecen continuamente no traballo matemático, pois como non podemos operar directamente con obxectos ideais, representamos as operacións sobre estes por medio de símbolos ou outros obxectos. Por exemplo, o obxecto "probabilidade" representámolo pola letra P ; a probabilidade dun suceso que denominamos A representámolo mediante $P(A)$.
- *Procesos de descomposición - reificación*: o alumno que trata de resolver o problema ten que pasar constantemente de considerar obxectos elementais (unitarios) a considerar obxectos compostos de varios obxectos elementais (sistémico): por exemplo, cada suceso dun experimento aleatorio é elemental, pero o espazo mostral do experimento é sistémico.

OUTRAS FORMULACIÓNS E SOLUCIÓNS CORRECTAS

Son moitas as formulacións deste problema e, ás veces, pequenos cambios, inflúen na solución. Unha versión de Gardner (1959) é a seguinte, de enunciado moi similar ao problema de Monty Hall (Batanero, Fernandes e Contreras, 2009).

Tres prisioneiros, A , B e C foron condenados a morte. O gobernador seleccionou un deles ao azar para ser perdoado. O prisioneiro A pide ao xuíz: "Se B é o perdoado, dáme o nome de C . Se C é o perdoado, dáme o nome de B , e se vou ser perdoado, lanza unha moeda para decidir se dar o nome de B ou C ".

O xuíz dille a A que B vai ser executado. A alégrase, crendo que, tanto a súa probabilidade de supervivencia, como a de C aumentou de $1/3$ a $1/2$. O prisioneiro A comunica a C a noticia. Pero C razoa que A aínda ten unha probabilidade de $1/3$ de ser o perdoado, e en cambio a súa probabilidade é agora $2/3$. Quen ten razón?

Como vemos, esta formulación é lixeiramente diferente, pois neste caso, son dous os prisioneiros que morren. Ao igual que na primeira versión, sexan SA , SB e SC os sucesos consistentes en que se salven, respectivamente A , B e C ; e MA , MB e MC que o alcaide informe que morre o correspondente. Aplicando o teorema de Bayes temos:

$$P(SA / MB) = \frac{P(SA \cap MB)}{P(MB)} = \frac{P(MB / SA)P(SA)}{P(MB / SA)P(SA) + P(MB / SB)P(SB) + P(MB / SC)P(SC)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

En consecuencia coa información dada polo xuíz, A ten agora unha probabilidade de salvarse igual a $1/3$, mentres que C ten unha probabilidade de $2/3$, ao ser as dúas probabilidades complementarias. Polo tanto, C ten razón.

Outra variante do problema é a proporcionada por Arriojas (2004):

Tres prisioneiros A , B e C saben que dous deles serán liberados. Posto que non se ten ningún criterio para decidir quen é liberado, A pide ao xuíz o nome dun dos prisioneiros (distinto del mesmo), a ser liberado. O xuíz négase co seguinte argumento: "Neste momento a túa probabilidade de ser liberado é de $2/3$. Non obstante, se che digo o nome dun dos prisioneiros que será liberado a túa probabilidade de saír libre reducirase a $1/2$. Como non quero prexudicarte non che direi nada". Ten razón o carcereiro?

O cambio deste enunciado respecto aos anteriores, consiste en que estamos a pensar en que acontecería, antes de saber o nome dun dos prisioneiros liberados, mentres que nas formulacións anteriores coñeciamos este nome. Para analizar esta nova situación, utilizamos de novo a mesma notación: MA , MB e MC os sucesos de que morran, respectivamente A , B e C , e SA , SB e SC os sucesos consistentes en que se salven. O espazo mostral do experimento descrito no enunciado ten tres resultados posibles: $\{(SA, SB), (SA, SC), (SB, SC)\}$. Como asumimos que os prisioneiros liberados escóllense ao azar, en ausencia de información, cada un destes posibles resultados debe ter a mesma probabilidade de acontecer e, polo tanto, a probabilidade de que quede libre o prisioneiro A , en ausencia de información, é igual a $2/3$.

Sexa A o prisioneiro que fai a pregunta. Para ter en conta a información dada polo xuíz, debemos considerar un experimento composto de dous: (a) a parella de presos liberada; e (b) a información que daría o xuíz. Polo tanto teremos catro posibles sucesos:

$$O_1 = \{(SA, SB), \text{ o xuíz informa a } A \text{ que } B \text{ será liberado}\}$$

$O_2 = \{(SA, SC), \text{o xuíz informa a } A \text{ que } C \text{ será liberado}\}$
 $O_3 = \{(SB, SC), \text{o xuíz informa a } A \text{ que } B \text{ será liberado}\}$
 $O_4 = \{(SB, SC), \text{o xuíz informa a } A \text{ que } C \text{ será liberado}\}$

Observamos que A é liberado se acontece O_1 ou O_2 , pois o xuíz nunca dirá a A o seu propio nome, mentres que se son liberados B e C , o xuíz dirá o nome de B ou C ao azar. En consecuencia, $P(O_1) = P(SA, SB) = 1/3$. De xeito análogo, $P(O_2) = P(SA, SC) = 1/3$. Polo tanto, a probabilidade de que A sexa liberado, unha vez que se dispón da información do xuíz segue sendo $1/3 + 1/3 = 2/3$. En consecuencia, a información que dea o xuíz no futuro non altera neste momento as posibilidades de que A saia libre.

POSIBLES DIFICULTADES NA ACTIVIDADE

Aínda que o problema é aparentemente simple, a súa complexidade móstrase na análise realizada dos obxectos matemáticos e dos procesos que se analizan na Táboa 2, así como nas diversas formulacións, nas que pequenos cambios afectan ao razoamento correcto. Tamén na forma en que, pequenas variantes do enunciado levan a unha solución diferente.

É interesante resaltar que, se a pregunta efectuada polo prisioneiro A tivese sido "Executarase o prisioneiro B ?", entón a resposta, "Si, B será executado" daría lugar a unha probabilidade de $1/2$ de salvarse a A . Pearl (1988) utilizou unha variante deste exemplo para mostrar que as actualizacións dos graos de crenza deben depender non só dos feitos observados, senón tamén da información a priori sobre as condicións do experimento (no exemplo, a consulta que se fai).

Tamén na literatura relacionada con este problema se describiron as seguintes dificultades:

○ Percepción da independencia

O primeiro problema prodúcese cando non se percibe a dependencia dos sucesivos experimentos (morrer ou salvarse) e (nome dado polo informante). É dicir, ou ben non se visualiza a estrutura do experimento composto ou se supoñen os sucesivos experimentos como independentes, atribuíndo unha propiedade (independencia) que non teñen os experimentos.

A primeira vista parece obvio que dá igual cambiar ou non, pois non se percibe a forma en que a información proporcionada afecta á probabilidade inicial de salvarse que, sen esta información, é $1/3$. Hai un fallo en percibir que se pode condicionar un suceso por outro que aparece despois del e que pode cambiar a probabilidade inicial do suceso. Este erro de razoamento é explicado por Falk (1986), mediante a "falacia do eixe temporal" que consiste en que as persoas cren erroneamente que unha información actual (información sobre un prisioneiro que se salva) non pode afectar á probabilidade dun suceso que aconteceu con ante-

rrioridade a esta (se o prisioneiro A fora indultado). Non obstante, vimos nas solucións como esta información repercute sobre a probabilidade dada, o mesmo que acontece nas probas diagnósticas, en que o resultado dunha análise clínica (que é posterior) afecta á probabilidade de ter unha enfermidade (anterior á análise). Esta falacia pode estar causada, en parte, pola confusión entre condicionamento e causalidade

Dende o punto de vista da probabilidade, se un suceso A é a causa estrita dun suceso B , sempre que suceda A , sucederá B , polo que $P(B/A) = 1$, é dicir, se un suceso A é causa doutro suceso B , entón A é dependente de B . Pero o contrario non sempre se cumpre segundo Falk (1986), pois un suceso A pode ser dependente doutro suceso B sen que un sexa a causa do outro. Por exemplo, sábese que o cancro de pulmón depende do hábito de fumar; pero fumar en si mesmo non é sempre a causa do cancro.

○ Incorrecta percepción do espazo mostral

Outra posibilidade de erro neste problema é unha incorrecta enumeración do espazo mostral nun ou varios dos experimentos que interveñen. A intuición dinos que, unha vez salvado un prisioneiro, só quedan dúas posibilidades equiprobables. Polo tanto, temos 50% de probabilidade de salvarnos e dá igual cambiar que non facelo. Neste razoamento estase a realizar unha incorrecta enumeración do espazo mostral, pois aínda o prisioneiro que sabemos se salva intervéñen no cálculo final. Esta dificultade de enumerar o espazo mostral ao calcular a probabilidade condicionada, foi descrita por Gras e Totohasina (1995).

IMPLICACIÓNS PARA O ENSINO

Neste paradoxo móstrase a influencia das crenzas subxectivas na asignación de probabilidades. O azar está presente na vida cotiá en moitos contextos nos que aparecen nocións de incerteza, risco e probabilidade, como os mostrados no paradoxo. Nestas situacións, calquera persoa ha de reaccionar á información dispoñible, para tomar decisións que lle poden afectar, emitir xuízos sobre relación entre sucesos ou efectuar inferencias e predicións (Gigerenzer, 2002).

Nestes contextos, a probabilidade non é unha propiedade obxectiva dos sucesos que nos afectan (como sería o peso, cor, superficie, temperatura) senón unha percepción ou grao de crenza na verosimilitude da persoa que asigna a probabilidade sobre a plausibilidade de ocorrencia do suceso (que acontecerá ou non). Por iso a visión subxectiva da probabilidade sería máis apropiada que a frecuencial ou clásica. Non obstante, aínda que as concepcións clásicas e frecuencial se contemplan no ensino, apenas se ten en conta a concepción subxectiva ou os contextos en que esta concepción podería aplicarse.

O paradoxo analizado suxire a importancia de que o ensino da probabilidade sirva para educar o razoamento pro-

babilístico necesario para enfrentarse ao azar na vida cotiá e mellorar as intuicións dos estudantes. O estado actual da tecnoloxía permite as simulacións e os experimentos, que axudan aos estudantes a resolver os paradoxos que se presentan mesmo en problemas de probabilidade aparentemente sinxelos e poderían servir para explorar situacións probabilísticas da vida real, sen necesidade dun gran nivel de formalización.

Autores como León (2009) indican que a historia da pro-

bilidade presenta situacións moi atractivas que poden conducir a reflexionar sobre a presenza do azar no cotián ademais de servir de motivación cara o estudo por parte dos alumnos. González (2004) tamén sinala que o uso da historia con fins didácticos depende do coñecemento histórico do profesor e a súa iniciativa para adaptar este saber aos intereses e necesidades do grupo. O estudo da historia da probabilidade e dos paradoxos asociados a esta será entón un compoñente importante na preparación dos profesores.

Bibliografía

- ARRIOJAS, M. (2004): *Teoría de las probabilidades*, Universidad Simón Bolívar, Caracas.
- BALL, D. L.; LUBIENSKI, S. T.; MEWBORN, D. S. (2001): "Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge". En V. Richardson (Ed.): *Handbook of research on teaching*, 433-456, American Educational Research Association, Washington, DC.
- BASULTO, J.; CAMUÑEZ, J. A. (2007): *La geometría del azar. La correspondencia entre Pierre de Fermat y Blaise Pascal*, Nivola, Madrid.
- BATANERO, C.; FERNANDES, J. A.; CONTRERAS, J. M. (2009): "Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas", *SUMA*, 62, 11-18.
- BATANERO, C.; HENRY, M.; PARZYSZ, B. (2005): "The nature of chance and probability". En G. A. Jones (Ed.): *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 15-37, Springer, New York.
- CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN. JUNTA DE ANDALUCÍA (2007): *ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía*.
- CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN. JUNTA DE ANDALUCÍA (2008): *ORDEN de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía*.
- FALK, R. (1986): "Conditional probabilities: insights and difficulties". En R. Davidson e J. Swift (Eds.): *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*, 292-297, International Statistical Institute, Victoria, Canada.
- FALK, R.; KONOLD, C. (1992): "The psychology of learning probability". En F. Gordon y S. Gordon (eds.), *Statistics for the twenty-first century*, MAA Notes 26, 151-164, Mathematical Association of America, Washington, DC.
- Gardner, M. (1959): "Mathematical games", *Scientific American*, 1, 180-182.
- GIGERENZER, G. (2002): *Reckoning with risk*, Penguin Books. London.
- GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R. (2008): "Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico", *Publicaciones*, 38, 25-48.
- GONZÁLEZ, P. (2004): "La historia de la matemática como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza", *SUMA*, 45, 17-28.
- GRAS, R.; TOTOHASINA, A. (1995): "Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.
- HARDIN, G. (1968): "The tragedy of commons", *Science*, 162, 1243-1248.
- HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. (2008): "Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students", *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- KONOLD, C. (1994): "Teaching probability through modeling real problems", *The Mathematics Teacher*, 87(4), 232-235.
- LEÓN, N. (2009): "La historia como elemento motivador hacia el estudio de la probabilidad: el problema de la apuesta interrumpida", *Sapiens: Revista Universitaria de Investigación*, 1, 69-88.
- LESSER, L. (1998): "Countering indifference – Using counterintuitive examples", *Teaching Statistics*, 20(1), 10-12.
- MEC (2006): *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*.
- MEC (2007): *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*.
- PEARL, J. (2000): *Causality: Models, reasoning, and inference*, Harvard University Press, Cambridge, MA.
- STOHL, H. (2005): "Probability in teacher education and development". En G. Jones (Ed.): *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning*, 345-366, Springer, New York.
- SZÉKELY, G. J. (1986): *Paradoxes in probability theory and in mathematical statistics*, Reidel, Dordrech.

Agradecementos

Proxecto EDU2010-14947 (MCINN-FEDER), beca FPI BES-2008-003573 (MEC-FEDER), becas FPU-AP2009-2807 e FPU-AP2007-03222 e ao grupo FQM126 (Junta de Andalucía).