Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

RECURSOS EN INTERNET PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD CONDICIONADA

Trabajo de Investigación Tutelada

Autor: José Miguel Contreras García

Tutora: Carmen Batanero Bernabeu

2009

La investigación presentada en este trabajo de investigación tutelada ha sido apoyado por Proyecto del Plan Nacional I+D+i, Ministerio de Educación y Ciencia: SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER "Uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones en la formación de profesores para enseñar Estadística" dentro de la Beca FPI: BES-2008-003573.

RECURSOS EN INTERNET PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD CONDICIONADA

INTRODUCCIÓN

En este trabajo llevamos a cabo un estudio sobre los diferentes recursos relacionados con la probabilidad condicional que podemos encontrar en Internet, con el fin de prever su utilidad en la enseñanza y las posibles dificultades que se pueden encontrar a la hora de utilizar estos contenidos en el aula con estudiantes. La elección de este tema se justifica por su papel en el currículo de Educación Secundaria y Bachillerato, su importancia en estadística y la vida cotidiana, así como las numerosas dificultades descritas en psicología y educación.

Para llevar a cabo el estudio, se ha realizado una búsqueda especifica de las diferentes aplicaciones interactivas, más conocidas como Applets, que simulan el comportamiento de distintos conceptos relacionados con el tema de referencia, y otros relacionados con él tales como el Teorema de Bayes, independencia o dependencia. También se ha extendido la búsqueda a tutoriales, calculadores y otros materiales disponibles en Internet.

La memoria se organiza en los siguientes apartados:

- En el primer capítulo comenzamos describiendo los objetivos de la investigación. Describimos la importancia de la probabilidad condicional en estadística y los contenidos relacionados con este tema en los Decretos de Enseñanzas Mínimas del Ministerio (MEC, 2007) y de la Junta de Andalucía (2007, 2008) para la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Posteriormente se presenta el marco teórico y se analizan todos los objetos matemáticos relacionados con la probabilidad condicional, apoyándonos en libros de texto tanto a nivel de secundaria como libros específicos de educación superior.
- Para fundamentar este trabajo, en el capítulo segundo presentamos un resumen las principales investigaciones relacionadas con la comprensión de la probabilidad condicional e independencia. Estas investigaciones se han realizado tanto en el campo de la Psicología, dentro de los estudios sobre razonamiento y toma de decisión bajo incertidumbre, como en el de la Educación Matemática. En primer lugar, revisamos los trabajos relacionados con la comprensión conceptual y procedimental. Incluimos también un apartado sobre el análisis de libros de texto y las conclusiones de este estado de la cuestión.

- En el capítulo tercero analizamos y clasificamos algunos recursos disponibles en Internet que podrían ser útiles para la enseñanza de la probabilidad condicional en los niveles citados y para la formación de los profesores que llevan a cabo esta enseñanza. Los recursos se clasifican y se lleva a cabo un análisis detallado de un ejemplo en cada categoría. El análisis detallado incluye: descripción de la aplicación, soluciones matemáticas o intuitivas, objetos matemáticos puestos en juego y posibles dificultades de los estudiantes. Se realiza también una breve descripción de otros dos ejemplos y se presenta una tabla de todos los recursos encontrados en la categoría. El capítulo finaliza con un análisis de los procesos matemáticos puestos en juego en el uso de los materiales analizados.
- En el capítulo cuarto presentamos las conclusiones a las que hemos llegado, divididas en conclusiones respecto de los objetivos, idoneidad didáctica del trabajo con los recursos y futuras líneas de investigación.

Somos conscientes de las limitaciones de las posibles conclusiones ya que no se ha desarrollado ningún trabajo de campo con tales aplicaciones. Sin embargo el estudio realizado nos ha permitido iniciarnos en la actividad investigadora, y familiarizarnos con los recursos con los que posteriormente diseñaremos algunas unidades didácticas que ayuden a la compresión de la probabilidad condicional.

CAPITULO 1
EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

En este Capítulo comenzamos describiendo los objetivos de la investigación. Continuamos analizando la importancia de la probabilidad condicional en estadística y los contenidos relacionados con este tema en los Decretos de Enseñanzas Mínimas del Ministerio (MEC, 2007) y de la Junta de Andalucía (2007, 2008) para la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Después de presentar el marco teórico, se analizan los objetos matemáticos relacionados con la probabilidad condicional.

1.2. OBJETIVOS

La investigación que presentamos se centra en la probabilidad condicional a nivel de Educación Secundaria y Bachillerato. Más concretamente, pretendemos iniciar un acercamiento a algunos puntos relacionados con la didáctica del tema, que nos ayude a enfocar una investigación posterior sobre formación de profesores en la enseñanza de la probabilidad condicional.

Nos basamos en el enfoque ontosemiótico de investigación descrito en este mismo capítulo y los objetivos concretos que se persiguen son los siguientes:

Objetivo 1. Analizar el objeto matemático "probabilidad condicional", mostrando la red de objetos (conceptos, propiedades, problemas, representaciones y argumentos) ligados a una presentación elemental del tema. La finalidad sería comenzar la construcción de un significado institucional de referencia que sirva de base a posteriores propuestas de formación de profesores.

Objetivo 2. Obtener una primera perspectiva de la investigación en psicología y educación en relación a la probabilidad condicional. Se trata de refinar trabajos de síntesis anteriores, completarlos e interpretarlos desde nuestro punto de vista, para identificar posibles problemas de investigación en el tema.

Objetivo 3. Realizar una búsqueda, clasificación y análisis de recursos de Internet que sean potencialmente útiles en la enseñanza de la probabilidad condicional. Puesto que nuestra intención es continuar la investigación diseñando una propuesta de enseñanza para profesores basada en la tecnología, un paso importante será conocer los recursos disponibles. En el análisis de estos recursos se usarán conceptos y métodos propuestos por los autores del enfoque ontosemiótico.

1.3. IMPORTANCIA DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL EN ESTADÍSTICA

Uno de los conceptos más fundamentales en la comprensión de la inferencia, tanto en su perspectiva clásica, como bayesiana, es el de probabilidad condicional, que permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que obtenemos nueva información (Heitele, 1975). La probabilidad no siempre se asigna en ausencia de información, sino que cuando tenemos conocimientos sobre los sucesos implicados, podemos utilizarlo para mejorar nuestra asignación de probabilidades.

Así, cuando un médico establece el diagnóstico de un enfermo, no sólo valora las probabilidades de incidencia de diversas posibles enfermedades que puedan corresponder a la misma patología en la población general. También tendrá en cuenta la edad y género del paciente y su historial de enfermedades previas. Ejemplos similares aparecen en muchos contextos cotidianos, desde el pronóstico del tiempo, resultados de partidos o votaciones, calificaciones en exámenes, veredictos en juicios, etc. Como señala Batanero (2006), si queremos preparar a los estudiantes para enfrentarse a la toma de decisiones en la vida cotidiana, es importante introducir la probabilidad condicional, base de la concepción subjetiva de la probabilidad. Dicha concepción aparece implícitamente en las orientaciones curriculares y tiene una aplicación mucho más general que otros enfoques de la probabilidad.

Díaz (2004) indica que la probabilidad condicional está en la base de muchos conceptos inferenciales, incluyendo los que tienen mayor dificultad de comprensión por parte de los investigadores:

- Con relación al test de significación (metodología de Fisher), interviene en la definición del valor-p, nivel de significación, distribución muestral del estadístico y región crítica, así como en la aplicación de la lógica del contraste;
- En el contraste de hipótesis (metodología de Neymann y Pearson) es básico, además de para los conceptos anteriores, en la definición de errores tipo I y II, potencia y

región de aceptación.

- En el método fiducial lo usamos para definir la función de verosimilitud.
- En la inferencia Bayesiana, tanto las probabilidades a posteriori como las verosimilitudes se definen en término de la probabilidad condicional. Es también el núcleo del teorema de Bayes y del concepto de región de credibilidad.
- También en la metodología de intervalos de confianza frecuenciales, tanto los conceptos de nivel de confianza, como la construcción del intervalo se basan en la probabilidad condicional.

Muchas interpretaciones erróneas descritas en la aplicación de estos conceptos (Vallecillos, 1994; 1999; Díaz, 2007) se deben bien a intercambio de términos en una probabilidad condicional, bien a la confusión entre probabilidad condicional y simple o a no comprender un razonamiento basado en una lógica condicional. Pensamos, por tanto, que sería preciso ayudar a profesores y estudiantes a mejorar su comprensión de este concepto.

Además, la probabilidad condicional interviene también en el estudio de la correlación y regresión, que se definen basándose en este concepto y que se extienden posteriormente a muchos procedimientos, tales como los modelos lineales, el análisis factorial o discriminante, la asociación en variables cualitativas, etc. Creemos que no es exagerado decir que la probabilidad condicional es posiblemente uno de los temas estadísticos más relevantes.

Por otro lado, el lenguaje y notación usadas en el caso de enseñarse no es siempre el más sencillo, como indica Feller (1973, pg. 127): La noción de probabilidad condicional es un instrumento básico de la teoría de probabilidades y, por desgracia, su gran simplicidad se ve a veces oscurecida por una terminología singularmente inadecuada".

Aunque hay antecedentes de investigación sobre este concepto, que se describen en el Capítulo 2, pensamos que no se le ha prestado la debida atención, en comparación a otros temas. Por un lado, una parte importante de la investigación realizada se ha llevado a cabo desde la psicología; por otra parte, las investigaciones desde la educación matemática, se restringen a estudios de evaluación o de resolución de problema, no habiéndose prestado atención ni a la evaluación de experimentos de enseñanza ni a la formación de profesores. Todo ello justifica el interés de una investigación sobre el tema, que iniciamos en este trabajo con el estudio de los recursos disponibles en Internet para la enseñanza del tema.

1.4. LA PROBABILIDAD CONDICIONAL EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA Y BACHILLERATO

La probabilidad condicional no aparece explícitamente en las orientaciones curriculares para la Educación Primaria, aunque si en la Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Respecto a la Enseñanza Secundaria Obligatoria el Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Secundaria (MEC, 2006 b) incluye, entre otros, los siguientes contenidos dentro del Bloque 6, *Estadística y probabilidad*:

- *Primer Curso.*
  - Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.
- *Tercer Curso.*
  - Sucesos y espacio muestral. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos. Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.
- *Cuarto curso. Opción A*
  - Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades.
- *Cuarto curso. Opción B*
  - Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades. Probabilidad condicionada.

Respecto a la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía (2007), los temas de estadística se incluyen en Educación Secundaria en el Bloque 6, “Interpretación de fenómenos ambientales y sociales a través de las matemáticas”. Se citan como contenidos de este Bloque los correspondientes a los Bloques 5, Funciones y gráficas y

6, Estadística y probabilidad del Decreto del Ministerio (MEC, 2006b), que se ponen en este currículo en relación directa. En definitiva, tanto a nivel del territorio MEC, como de la comunidad andaluza se espera que los alumnos, al finalizar esta etapa educativa hayan adquirido los rudimentos de la definición de la probabilidad condicional, la discriminen de la conjunta y compuesta y resuelvan problemas relacionados con la ayuda del diagrama en árbol y tablas de doble entrada.

En el caso de la Consejería de Educación (2007), se contemplan bloques de contenidos transversales, que se tendrán también en cuenta en el estudio de este tema:

- Resolución de problemas;
- Uso de los recursos TIC en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas;
- Dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas.

En relación al Bachillerato, el Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas (MEC, 2007) fija los siguientes contenidos, en los que la probabilidad condicional aparece como tema explícito. Además, será un instrumento en el estudio de las distribuciones de probabilidad.

- *Matemáticas I, modalidad de Ciencias y Tecnología:*
  - Distribuciones bidimensionales. Relaciones entre dos variables estadísticas. Regresión lineal.
  - Estudio de la probabilidad compuesta, condicionada, total y a posteriori.
  - Distribuciones binomial y normal como herramienta para asignar probabilidades a sucesos.

- *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I, modalidad Humanidades y Ciencias Sociales*
  - Distribuciones bidimensionales. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervienen dos variables a partir de la representación gráfica de una nube de puntos. Grado de relación entre dos variables estadísticas. Regresión lineal. Extrapolación de resultados.
  - Asignación de probabilidades a sucesos. Distribuciones de probabilidad binomial y normal.

- *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I, modalidad Humanidades y Ciencias Sociales*
  - Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes.
  - Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números.
  - Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad. Parámetros de una población. Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales.
  - Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución binomial y para la media de una distribución normal de desviación típica conocida.
  - Contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencias de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida.

Al desarrollar los núcleos de contenidos propuestos la Consejería de Educación (2008) remite a estos contenidos, que deben desarrollarse teniendo en cuenta cuatro núcleos transversales:

- La resolución de problemas.
- Aprender de y con la Historia de las Matemáticas.
- Introducción a los métodos y fundamentos matemáticos.
- Modelización matemática.

Respecto a la Historia, para el de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, la Consejería de Educación indica que se pueden trabajar, entre otros, los siguientes aspectos:

- Los inicios del cálculo de probabilidades desde Pacioli a Gauss y su influencia en las distribuciones de probabilidad. Las formulaciones actuales dadas por Borel y Kolmogorov. La progresión de la estadística durante el siglo XX con la aplicación de la probabilidad.

También se sugieren los siguientes aspectos históricos al desarrollar los núcleos de contenidos propuestos en el Real Decreto 1467/2007 para el currículo de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II:

- Historia de la Estadística y la Probabilidad: los orígenes de los censos desde la Antigüedad a nuestros días. Consideración de la estadística como ciencia: aportaciones deAchenwall, Quételect y Colbert. Los orígenes de la Probabilidad: Pacioli, Tartaglia, Pascal, Bernoulli, De Moivre, Laplace y Gauss. Las relaciones actuales entre Estadística y probabilidad: Pearson. Estadística descriptiva: Florence Nightingale.

1.5. MARCO TEÓRICO

En este trabajo vamos a utilizar algunas nociones teóricas desarrolladas por Godino y colaboradores en el enfoque ontosemiótico (EOS), que nos van a resultar de utilidad para analizar recursos didácticos en Internet relacionados con la probabilidad condicional. En concreto nos centramos en las prácticas matemáticas ligadas a la resolución de problemas relacionados con estos recursos o a la propia interpretación de los recursos y los posibles conflictos de los estudiantes.

1.5.1. LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA Y OBJETOS LIGADOS A ELLAS

Los autores de este marco teórico conciben la actividad matemática como un conjunto de prácticas, de las cuáles surgen los objetos matemáticos. Estas prácticas se hacen para resolver problemas que pueden ser matemáticos o extra-matemáticos (Godino, 2002).

Las prácticas pueden ser específicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una institución está constituida por las personas interesadas en resolver una misma clase de situaciones problemáticas. La pertenencia a una institución conlleva a la realización de unas prácticas sociales que son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento.

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas de las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. A la pregunta, sobre qué es el objeto matemático probabilidad condicional, se propone como respuesta, “el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas en los cuales interviene dicho objeto.

Puesto que los significados dependen de los contextos sociales y de los sujetos, su carácter es relativo. Su uso en el análisis didáctico lleva, en consecuencia, a introducir la tipología básica de significados (Godino, 2003). Respecto al significado institucional, se diferencia entre el global (qué significa un objeto en su sentido más amplio en una institución), referencial (qué significado en una enseñanza o investigación), pretendido (qué se pretende enseñar), implementado (qué se logra enseñar) y evaluado (qué parte se evalúa).

Godino, Batanero y Font (2007) describen diferentes categorías en los objetos ligados a las prácticas matemáticas, que serán objetos institucionales si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución o serán objetos personales si dichos sistemas de prácticas son realizados por una persona. Es decir, se tienen en cuenta las dimensiones social y personal del conocimiento y también el hecho de que una práctica personal pudiera ser o no adecuada desde el punto de vista de la institución. A continuación se describen las categorías de objetos propuestas.

- *Situaciones-problemas:* aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, problemas, acciones que inducen una actividad matemática. En nuestro caso el problema puede ser la búsqueda de una estrategia óptima en un juego, o bien otros problemas planteados por el profesor en relación a un recurso didáctico en Internet.
- *Lenguajes:* términos, expresiones, notaciones, gráficos que se utilizan para representar los datos del problema, las operaciones que hacemos con ellos, los objetos matemáticos que se utilizan y la solución encontrada. En los recursos de Internet analizados el lenguaje gráfico tiene un peso muy importante, aunque también se usa el lenguaje verbal, icónico y simbólico.
- *Conceptos- definición:* En las prácticas que llevan a cabo los estudiantes para resolver un problema matemático (en este caso cuando trabajan con el recurso) se usan implícita o explícitamente objetos matemáticos, de los cuáles el alumno ha de recordar o aplicar la definición. Por ejemplo, los estudiantes usarán implícitamente los objetos: aleatoriedad, espacio muestral, suceso, probabilidad, probabilidad condicional e independencia.
- *Proposiciones* o enunciados sobre relaciones o propiedades de los conceptos que

igualmente se han de emplear al resolver problemas matemáticos. Por ejemplo, cuando los estudiantes tienen que recordar que la suma de probabilidades en el espacio muestral es igual a la unidad.

- *Procedimientos:* Serían los algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo que los estudiantes han aprendido durante la enseñanza previa y que aplican al resolver el problema. En nuestro caso, los estudiantes usarán técnicas sencillas de cálculo de probabilidades, como técnicas combinatorias, uso de diagrama en árbol, etc.
- *Argumentos*: Serían los enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos o bien la solución de los problemas. Pueden ser deductivos, inductivos, formales o informales.

Godino, Batanero y Font (2007) indican que los seis tipos descritos están relacionados entre sí formando configuraciones, es decir redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Los autores clasifican estas configuraciones en epistémicas (cuando se trata de objetos institucionales) o cognitivas (si se refieren a objetos personales). La configuración epistémica es el conjunto de objetos matemáticos que intervienen en la resolución de las actividades. Dentro de la configuración se distingue la previa (los objetos que se supone el alumno conoce antes de trabajar en la unidad didáctica) y la emergente (lo que suponemos se va a aprender).

1.5.2. RELACIONES ENTRE OBJETOS: FUNCIÓN SEMIÓTICA

Otro desarrollo teórico de interés en nuestro estudio es el de función semiótica (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), que sirve para resaltar los procesos de interpretación que se llevan a cabo en la actividad matemática y en los cuales a veces pueden aparecer desajustes (conflictos) de interpretación entre alumnos y profesor.

Los autores del marco teórico describen la idea de función semiótica como correspondencia entre un antecedente y un consecuente, establecida por un sujeto (persona o institución). Un Applet en Internet, en sí mismo, puede considerarse como una función semiótica, donde el antecedente es el propio Applet, que representa visualmente un cierto juego (como el juego de Monty Hall) o bien un procedimiento o teorema matemático (por ejemplo, el teorema de Bayes). La correspondencia entre antecedente y consecuente suele estar implícita, aunque en algunos casos, se incluyen instrucciones para la interpretación de los recursos. Tanto si hay instrucciones como si no, es posible que el estudiante que trabaja con el recurso no comprenda su funcionamiento o no interprete correctamente los resultados producidos. Si las interpretaciones hechas por el estudiante no son las esperadas por el profesor, diremos que hay un conflicto semiótico.

El antecedente (expresión) y consecuente (significado) de una función semiótica no se restringen a conceptos, sino abarca toda la anterior ontología de objetos matemáticos u organizaciones de estos en entidades más complejas, como sistemas conceptuales o teorías. Así en nuestro estudio, podemos, generalmente, descomponer cada recurso, en partes, tras las cuáles aparecen diferentes objetos matemáticos implícitos. Se tratará, mediante el análisis de poner de manifiesto estos objetos, así como las dificultades que los estudiantes pueden tener en su uso.

1.5.3. CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA

Otro desarrollo teórico que usamos en nuestro trabajo es la noción de idoneidad didáctica de que se refiere con alguna situación didáctica y se define como la articulación de seis componentes, cada uno de los cuáles puede darse en mayor o menor grado (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005; Godino, Contreras y Font, 2006):

- *Idoneidad epistémica*: Representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Sería si los significados de los objetos presentes en un recurso son adecuados desde el punto de vista matemático.
- *Idoneidad cognitiva:* Grado en que los significados pretendidos/ implementados son asequibles a los alumnos, así como si los significados personales logrados por los alumnos son los significados pretendidos por el profesor.
- *Idoneidad interaccional*: Grado en que la organización de la enseñanza permite identificar conflictos semióticos y resolverlos durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional: Disponibilidad* y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *Idoneidad emocional:* Interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio.

1.5.4. ANÁLISIS DIDÁCTICO

De acuerdo a Godino, Font y Wilhelmi (2008) una tarea importante para el profesor es valorar la propia práctica docente con la finalidad de favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Para facilitar esta valoración los autores describen diversos niveles de análisis, algunos de los cuáles creemos que también pueden aplicarse al estudio de los recursos didácticos, entre ellos los recursos en Internet. En concreto, usaremos en nuestro estudio los siguientes tipos de análisis:

1. *Sistemas de prácticas y objetos matemáticos (previos y emergentes)*. Este nivel de análisis se aplica durante la planificación de cualquier proceso o situación de enseñanza y pretende estudiar las prácticas matemáticas planificadas. Permite descomponer el proceso de estudio previsto en una secuencia de episodios y, para cada uno de ellos, describir las prácticas supuestas de los potenciales alumnos. Como consecuencia del análisis se identifica una configuración epistémica global prevista en el desarrollo del proceso. Puede diferenciarse entre configuración previa (la que se supone tiene el alumno para poder realizar las tareas previstas) y emergente (la que se adquiere como consecuencia del aprendizaje). En nuestro caso trataremos de identificar las configuraciones y objetos latentes en los recursos analizados.
2. *Procesos matemáticos y conflictos semióticos*. En toda práctica Godino. Font y Wilhelmi identifican un *sujeto agente* (en nuestro caso un alumno potencial). Este segundo nivel de análisis se centra en los objetos y, procesos que intervienen en la realización de las prácticas previstas, y también en los que emergen de ellas, es decir, en el nivel cognitivo. La finalidad es describir la complejidad de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos que se podrían producir en su realización. En nuestro caso puesto que el análisis de los recursos se hace a priori, el estudio tendrá un carácter hipotético.
3. Idoneidad *didáctica del proceso de estudio*. Se trata de analizar si se verifican los diferentes tipos de idoneidad descritos en el punto anterior. Para ello los autores proporcionan unas guías de descriptores para poder valorar cada uno de los tipos de idoneidad.

1.6. LA PROBABILIDAD CONDICIONAL COMO OBJETO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL

En lo que sigue analizamos el objeto matemático "probabilidad condicional" y los objetos relacionados con él para definir un significado institucional de referencia en nuestro trabajo. Puesto que cualquier tema matemático puede estudiarse con diferentes niveles de formalización, el significado institucional de la probabilidad condicional puede variar, dependiendo de la institución de enseñanza. En nuestro caso, nos centraremos en la Educación Secundaria y Bachillerato, así como los conocimientos que un profesor de estos niveles debiera adquirir sobre el tema. Tomamos como base el trabajo de Díaz (2004) quien, para construir un cuestionario de evaluación sobre razonamiento condicional lleva a cabo un análisis del contenido sobre probabilidad condicional en los libros de estadística usados en las universidades españolas en la licenciatura de psicología. Completamos el estudio de la autora con el análisis de algunos libros de texto de estadística elemental a nivel universitario que citaremos cuando los utilicemos.

1.6.1. PROPIEDADES Y CONCEPTOS RELACIONADOS CON LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Álgebra de sucesos

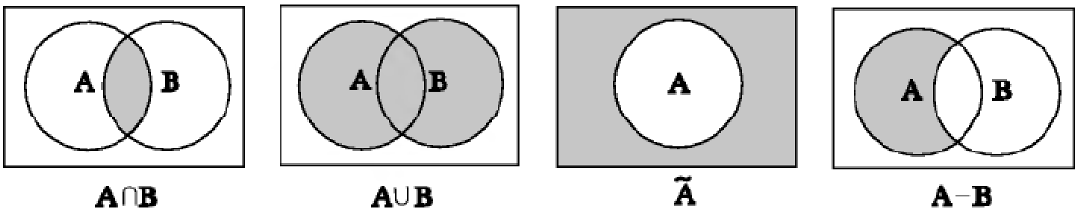
Para introducir la probabilidad condicional, necesitamos primeramente algunas ideas previas, entre ella los axiomas de probabilidad propuestos por Kolmogorov (ver, por ejemplo, Feller, 1973). Partiendo de un experimento aleatorio, definimos *espacio muestral* Ω como el conjunto de resultados posibles, es decir el conjunto de todos los sucesos aleatorios asociados a un experimento aleatorio.

Sea ρ una clase no vacía de conjuntos de Ω, que se denominarán sucesos aleatorios o simplemente sucesos. Se llama *suceso aleatorio A*, a cualquier subconjunto del espacio muestral.

Se consideran las operaciones entre sucesos, dentro del mismo espacio muestral Ω: el suceso unión $A \cup B$, el suceso intersección $A \cap B$ y el suceso complementario $\overline{A}$, que se representan en la Figura 1.1. Estas operaciones son similares a las definidas entre conjuntos y tienen sus mismas propiedades, por lo que ρ tiene una estructura de

Álgebra (de Boole o más generalizada).

Figura 1.1. Operaciones entre sucesos



Si $A \cap B = \varnothing$; entonces decimos que son *incompatibles* o *mutuamente* excluyentes. Este concepto será importante en nuestro análisis pues los alumnos confunden sucesos excluyentes e incompatibles. Dados $\{A_i\}$ decimos que forman un sistema completo de sucesos si son mutuamente excluyentes y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Probabilidad. Axiomática de Kolmogorov

Dado un espacio muestral Ω, y un σ-álgebra de sucesos ρ sobre él, diremos que cualquier función P definida sobre una clase P es una probabilidad sobre ρ si cumple los tres axiomas de probabilidad (Kolmogorov, 1956):

1. P: $\rho \rightarrow$ [0, 1] $\in R$. La probabilidad es una función definida sobre ρ y que sólo toma valores positivos comprendidos entre 0 y 1.
2. $P(\Omega) = 1$, La probabilidad del suceso seguro es 1.
3. Si $A, B \in \rho; A \cap B = \varnothing$; $\Rightarrow$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $\{A_i\}_{i=1}^{n} \in \rho$; $A_i \cap A_j = \varnothing \Rightarrow P(\cup A_i) = \sum_i P(A_i)$; es decir si un conjunto de eventos son mutuamente excluyentes o incompatibles, no ocurren simultáneamente, entonces la frecuencia relativa de su unión es la suma de las frecuencias relativas de cada uno.

Por lo tanto P es una función numérica sobre ρ es normada, no negativa y finitamente aditiva (medible) que toma sus valores en el intervalo [0.1]. Al valor de P para un suceso A se denominará *probabilidad de A* y se designará por $P(A)$. El par

(ρ, P) se denomina *campo de probabilidad* y la terna (Ω, ρ, P) se denomina *espacio de probabilidad* o espacio probabilístico. (Loeve, 1976).

Probabilidad condicional

Sean (Ω, ρ, P) un espacio probabilístico, sean dos sucesos $A, B \in \rho$ con probabilidades respectivas de ocurrencia $P(A)$ y $P(B)$. Se supone la siguiente situación:

Se sabe que el suceso *A* se ha verificado con $P(A) > 0$. Entonces cabe preguntarse si la probabilidad de que ocurra B seguirá siendo la misma o habrá sufrido alguna modificación. Es decir, vamos a ver en que circunstancias caben ambas respuestas.

Para calcular la probabilidad del suceso *B*, sabiendo que ha ocurrido el suceso *A*, suponemos que el espacio muestral Ω está formado por n sucesos elementales de los cuales n_1 son favorables a la realización del suceso *A*, n_2 lo son a *B* y n_T lo son a la del suceso $A \cap B$. Puesto que ponemos la condición de que ha ocurrido *B* se produce una restricción del espacio muestral que ahora coincide con *B*. Los sucesos posibles serán los que forman parte de *B*. Los favorables son los que forman parte de la intersección. Por tanto, la probabilidad del suceso *B* sabiendo que ha ocurrido *A*, que llamamos probabilidad de *P* condicionada por *A* y representamos por *P (B/A)*) es la razón entre las probabilidades $P(A \cap B)\ y\ P(A)$.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{; siempre que } P(A) > 0.$$

Definición intuitiva de probabilidad condicional

Algunos libros definen intuitivamente la probabilidad condicional *P(A/B)* de un suceso *A* dado otro suceso *B* a partir de la frecuencia relativa. Por ejemplo, Peña (1986, p. 76) define la frecuencia relativa de *A* condicionada a la ocurrencia de *B, en la forma siguiente:*

> *"considerando únicamente los casos en los que aparece B y viendo en cuántos de esos casos ocurre el suceso A; es, por tanto, igual a la frecuencia de ocurrencia conjunta de A y B, partida por el número de veces que ha ocurrido B"*

De esta definición deduce el concepto de probabilidad condicional, usando la siguiente notación:

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)},$$

donde AB representa el suceso ocurrencia conjunta de *A* y *B*, siempre suponiendo que *P(B)>0* (Peña, 1986, p. 76). En esta definición está implícita la restricción del espacio muestral. El autor no usa explícitamente el símbolo de la intersección de sucesos para la probabilidad conjunta. Otros autores como Kolmogorov (1956) utilizan este formato para referirse a la probabilidad de la intersección.

Propiedades de la probabilidad condicional

Nortes (1993) indica específicamente y demuestra que una probabilidad condicional cumple los tres axiomas de la probabilidad:

1. La probabilidad condicional es siempre un número entre 0 y 1.
$$0 \le P(A/B) \le 1$$
2. El axioma de la unión:
$$P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B/C).$$
3. $P(E/A) = \dfrac{P(E \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$. La probabilidad condicional del suceso seguro es igual a 1.

De estos axiomas principalmente podemos reducir las propiedades de la probabilidad condicional a las siguientes:

- En general *P(A/B)* es distinto a *P(B/A)*. Uno de los errores frecuentemente descritos sobre la comprensión de la probabilidad condicional es que los sucesos *A* y *B* a veces se intercambian o no se tiene conciencia de que *P(A/B)* puede ser diferente de *P(B/A)*.
- $P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$. La probabilidad condicional del suceso complementario a uno dado es igual a la unidad menos la probabilidad condicional del complementario.

- $P(\varnothing / A) = 1 - P(\Omega / A) = 0$; esto implica que la probabilidad conjunta de dos sucesos mutuamente excluyentes es igual a cero.
- $P(A \cup B / C) = P(A / C) + P(B / C) - P(A \cap B / C)$; es decir la probabilidad de la unión de dos sucesos condicionada a otro es igual a la suma de las probabilidades condicionadas menos la probabilidad de la intersección condicionada.
- Si $A \subset B \Rightarrow P(A / C) \leq P(B / C)$; Si un suceso está contenido en otro, la probabilidad del primero condicionada a otro suceso es siempre menor que la probabilidad del segundo condicionada al mismo. Si $A \subset B$ tenemos las siguiente propiedad (Poularikas, 1999): $P(A / B) = \dfrac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$.
- Si $A \subset B \Rightarrow P(A / B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$ y $P(B / A) = 1$; Si un suceso está contenido en otro, la probabilidad del primero condicionada al segundo es igual al cociente de las probabilidades respectivas. Si condicionamos el segundo al primero la probabilidad condicionada vale 1 (Zwillinger y Kokoska, 2000).
- $P(A \cap B) = P(A)\, P(B / A)$; Se obtiene fácilmente partiendo de la definición de la probabilidad condicionada $P(B / A)$.
- Para cualquier par de sucesos *A*, *B y C*, se cumple

  $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(B)P(A / B) + P(\overline{B})P(A / \overline{B})$ y en particular tenemos que:

  $$P(A / C) = P(A \cap B / C) + P(A \cap \overline{B} / C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} + \frac{P(A \cap \overline{B} \cap C)}{P(C)}$$

- Si A y B son mutuamente excluyentes. Tenemos las siguientes propiedades (Poularikas, 1999):
  1. $P(A / B) = 0$
  2. $P(A \cup B / C) = P(A / C) + P(B / C)$
  3. $\dfrac{P(A / B)}{P(B)} = \dfrac{P(B / A)}{P(A)}$

Peña (1986) hace hincapié en las siguientes propiedades:

- Es importante diferenciar entre $P(A \cap B)$ y *P(A/B)*
- Una probabilidad conjunta $P(A \cap B)$ es siempre menor que las probabilidades simples *P(A)* y *P(B).*
- Una probabilidad condicionada *P(A/B)* puede ser mayor, menor o igual que *P(A).*
- El espacio muestral en la probabilidad condicional *P(A/B)* queda restringido a *B.*

Respecto a esta última propiedad, Cuadras, Echevarría, Mateo y Sánchez (1988) distinguen entre P(A) probabilidad libre o incondicionada, donde el espacio muestral es Ω y P(A/B) probabilidad condicionada, donde el espacio muestral es B. B es el suceso condicionante o lo que Cuadras y cols. (1988) llaman "información". Díaz (2004) recuerda que nunca podría aparecer en una fórmula una suma o diferencia de probabilidades condicionadas a diferentes sucesos, dado que en este caso las probabilidades estarían definidas sobre distintos espacios muéstrales.

Aparte de las propiedades y los axiomas de probabilidad condicionada se han de tener en cuenta los siguientes conceptos relacionados.

Independencia

Para Borovcnck, Bentz y Kapadia (1991) la independencia es el concepto que distingue la teoría de la probabilidad, de la teoría de la medida. Es parte de las definiciones fundamentales en esta rama de las matemáticas, pero no un axioma básico.

Ortiz (1999) indica que es una hipótesis clave en teoremas fundamentales, como el de Bernoulli, que establece un puente del enfoque estructural a la interpretación frecuencial y por ello la identificación de este concepto contribuyó a la aceptación rápida de la axiomática de Kolmogorov por la comunidad científica. Con el concepto de independencia de ensayos similares es posible deducir una medida de probabilidad en el espacio producto con solo conocer la distribución de probabilidad en los espacios muéstrales de cada experimento simple. Por ello se convirtió en una pieza clave en la axiomática de Kolmogorov.

Dos sucesos *A* y *B,* tales que $P(B/A) = P(B)$ se conocen con el nombre de sucesos "independientes"; si por el contrario $P(B/A) \neq P(B)$ los sucesos los denominaremos “dependientes”. Dicho en palabras, los sucesos son independientes si la probabilidad de uno de ellos no cambia al condicionarlo por el otro. Otra forma de definir la independencia es a partir de la regla del producto, aunque es menos intuitiva para los alumnos:

$$A \text{ y } B \text{ son independientes si y sólo si } P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Cuadras y cols. (1988) afirman que esta propiedad es condición necesaria y suficiente para que dos sucesos sean independientes. Esta regla del producto se puede extender a más sucesos independientes:

$$P\ (A_1 \cap A_2 \cap\ ... \cap A_k)\ =\ P(A_1)\ x\ P(A_2)\ x\ ...\ x\ P(A_k)$$

Aunque la independencia entre sucesos se puede prever en algunos casos, como en lanzamientos de dados u otros juegos de azar, generalmente debe determinarse experimentalmente. Esto hace que, aunque la definición de independencia sea sencilla matemáticamente, los estudiantes tengan muchas dificultades al aplicarla para resolver problemas. Cuadras y cols. (1988) indican también algunas propiedades más de la independencia:

- *Si* A y B son dos sucesos independientes, también son independientes $A \text{ y } \overline{B}$; $\overline{A} \text{ y } B$; $\overline{A} \text{ y } \overline{B}$.
- Es *interesante* observar que la relación de independencia es simétrica, puesto que: $P(B/A) = P(B)$ implica que $P(A/B) = P(A)$. En efecto, Si $P(B/A) = P(B)$, se tendrá que $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A) \bullet P(B)/ P(B) = P(A)$.

Montgomery y Runger (2002) destacan además que la independencia implica resultados relacionados como:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$$

El concepto de independencia es una relación importante entre sucesos. Una relación mutuamente exclusiva entre dos sucesos está basada sólo en los resultados que comprenden los sucesos. Sin embargo, una relación de independencia depende del modelo de probabilidad usado para el experimento arbitrario. A menudo, la independencia es asumida para ser la parte del experimento arbitrario que describe el sistema físico en el estudio. Hwei y Hsu (2003) añaden la siguiente propiedad: Si *A, B y C tal que* $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$ entonces:

- *A, B y C* son *independientes.*
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$

Dependencia

Del concepto de independencia se deduce el concepto de sucesos dependientes. Cuadras y cols. (1988) lo definen de esta forma: "*Si* $P(A/B) \neq P(A)$*, la presencia de B altera la probabilidad de A y se dice que el suceso A es estocásticamente dependiente del suceso B. Si* $P(A/B) > P(A)$*, la presencia del suceso B favorece al suceso A. Si* $P(A/B) < P(A)$*, la presencia del suceso B desfavorece al suceso A*". Igualmente podemos decir que:

- *Cuando* $P(B/A) = P(B)$ entonces la ocurrencia de *A* no tiene ningún efecto sobre la de;
- Cuando $P(B/A) > P(B)$ entonces el suceso *A* favorece al *B;*
- Cuando $P(B/A) < P(B)$ entonces el suceso *A* desfavorece al *B;*
- Cuando $P(B/A) = P(B)$ entonces la ocurrencia de *A* no tiene ningún efecto sobre *B.*

Como veremos en el estudio de los antecedentes, los alumnos confunden sucesos independientes y mutuamente excluyentes. Sin embargo, hemos visto que la probabilidad conjunta de dos sucesos mutuamente excluyentes es igual a cero. Por ello, dos sucesos mutuamente excluyentes son dependientes, ya que la ocurrencia de uno hace que el otro no pueda ocurrir.

Otro punto que los alumnos confunden es la relación entre dependencia y causalidad. Este tipo de sesgo también se pone de manifiesto en los estudios sobre la forma en que los sujetos perciben la asociación entre variables. Por ejemplo, Estepa

(1994) ha puesto de manifiesto cómo algunos alumnos confunden correlación y causalidad, denominando a este fenómeno "concepción causal de la asociación estadística". Este aspecto no es muy estudiado en los libros de texto, aunque lo hemos encontrado explícitamente en Sacerdote y Balima (en preparación).

Los autores indican que *“la estadística no se ocupa de las relaciones causa-efecto;... la estadística puede ayudar a orientar una ciencia que estudia la naturaleza hacia una explicación causal, pero no a justificarla”* (p. 16).También resaltan que *“el tiempo no interviene en la estadística, aunque para algunos modelos será el factor ordenador de los resultados y el orden puede interesar”* (p. 16). Este comentario lo hacen para justificar que es posible calcular tanto una probabilidad condicional directa (respecto al tiempo) como su inversa.

Intercambiabilidad

En algunos de los textos de enfoque bayesiano se incluye este concepto, como hipótesis no tan restrictiva como la independencia. Por ejemplo, en Berry (1996, p. 134) se presenta este concepto en la forma siguiente: *“Dos experimentos son intercambiables si se cumple lo siguiente:*

1. *Los posibles resultados son los mismos en los dos;*
2. *La probabilidad de cada resultado de uno es la misma que en el otro;*
3. *La probabilidad condicional para el segundo experimento, dados los resultados del primero son las mismas que las probabilidades condicionales del primero, dado el segundo”.*

Regla del producto

Una propiedad relacionada con las anteriores es la regla del producto, que permite calcular las probabilidades en experimentos compuestos. Esta regla es la siguiente:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B / A)$$

Algunos de textos de estadística, como el de Nortes (1993), diferencian entre sucesos independientes y dependientes para la aplicación de la regla del producto, proporcionando explícitamente las fórmulas, o bien ejemplos de su aplicación, en los dos casos. Para dos sucesos independientes, la regla del producto se define en la fórmula siguiente

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Botella y cols. (1993, p. 283) introducen el teorema del producto del siguiente modo: "*La probabilidad de verificación simultánea de dos sucesos independientes es igual al producto de sus probabilidades simples*". Para más de dos sucesos independientes, se iría generalizando la regla. Por ejemplo, para tres sucesos independientes la regla es la siguiente:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

Para *n* sucesos independientes la regla del producto es como sigue:

$$\mathrm{P}\ (\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{A}_k) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) \text{ x } \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) \text{ x } \ldots \text{ x } \mathrm{P}(\mathrm{A}_k)$$

Para dos sucesos dependientes, la probabilidad de que ocurran *A* y *B* (sucesivas o simultáneas) es igual a la probabilidad de que ocurra A por la probabilidad de que ocurra B condicionando de A, es decir, según expresa Nortes Checa (1993, p. 219):

$$P\ (A \cap B)\ = P\ (A)\ \ P(B / A)$$

En el caso de más de dos sucesos dependientes, la regla del producto sería:

$$P(A \cap B \cap C)\ =\ P(A) \times P(B / A) \times P(C / A \cap B)$$

Teorema de la Probabilidad Total

Introducidas las nociones de dependencia e independencia y la regla del producto podemos pasar al teorema de la probabilidad total, que expresa la probabilidad de un suceso cuando se conocen las probabilidades de que este suceso sea debido a cada una de una serie de causas mutuamente incompatibles. Sea $\{A_i\}$ una sucesión de sucesos disjuntos dos a dos, y tales que $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$ y su unión constituya una partición del espacio muestral (sistema completo de sucesos). Se verifica que:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)\ =\ P(A_1)\ P(A_2 /\ A_1)\ P(A_3 /\ A_1 \cap\ A_2) \ldots P(A_n /\ A_1 \cap \ldots \cap A_{n\text{-}1})$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\ /\ A\right)\ =\ \sum_{i=1}^{n} P(A_i\ /\ A)$$

Teorema de Bayes

Sean n sucesos disjuntos $B_1, B_2,..., B_n, A \in \Omega$ tales que $P(B_i) > 0, P(A) > 0$ $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$; tales que forman un sistema completo de sucesos. Se verifica que:

$$P(Bi/A) \ = \ \frac{P(A/Bi)P(Bi)}{\sum_i P(Bi)P(A/Bi)} = \frac{P(A/Bi)P(Bi)}{P(A)}$$

Cuadras y cols. (1988, p. 122) definen los sucesos $\{B_1, B_2,..., B_n\} \in \Omega$ con $P(B_i) > 0$, como una partición del espacio muestral *E*. A estos sucesos los denominan "*causas*" y al suceso *A* "*efecto*". *A* es un suceso cualquiera que si ocurre, lo hace conjuntamente con uno de los sucesos de la partición $\{B_1, B_2,..., B_n\}$.

Las probabilidades $P(B_i) > 0;\ i = 1,...,n$ ***s**e denominan probabilidades a priori ya que son las que se asignan inicialmente al los sucesos B_i.Las probabilidades $P(A/B_i) > 0;\ i = 1,...,n$ ***s**e denominan verosimilitudes del suceso *A* admitiendo la hipótesis B_i.Las verosimilitudes $P(A/B_i) > 0$ nos permiten modificar nuestro grado de creencia original $P(B_i)$ obteniendo la probabilidad a posteriori $P(B_i/A)$.

Sean $B_1, B_2,..., B_n$ y *A* k sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos, entonces:

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + ... + P(B_k \cap A) = P(B_1)P(A/B_1) + ... + P(B_k)P(A/B_k)$$

1.6.2. PROBLEMAS Y PROCEDIMIENTOS

Un punto importante en nuestro marco teórico son los problemas que se resuelven con la ayuda de la probabilidad condicional. Díaz (2004, 2007) analiza los problemas relacionados con la probabilidad condicional en una muestra de libros de texto usados en la enseñanza de estadística en Psicología. Encuentra las siguientes categorías:

1. Calcular una probabilidad condicional, dentro de un experimento simple, como en el siguiente ejemplo, tomado de Gutiérrez Martínez y Rodríguez (1993, p. 47): "*Se lanza un dado. Sabiendo que ha aparecido un número mayor o igual que 5, ¿Cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 3?*"

2. Calcular una probabilidad condicional en un experimento compuesto. Díaz (2004, 2007) diferencia en este caso el contexto de muestreo con reposición y sin reposición. Un ejemplo del caso de muestreo con reposición es el siguiente, tomado de Devore (1998, p.119) es el siguiente: "*Una urna contiene 5 bolas rojas y 8 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola. Calcular la probabilidad de que la segunda bola sea verde.*

3. Calcular una probabilidad condicional a partir de probabilidades conjuntas y simples ($P(A/B) = P(A \cap B)/P\ (B)$, siempre que *P(B) >0*). Un ejemplo es el siguiente problema resuelto de Lipschutz y Lars (2001, pg.117). "*Sea A y B eventos con* $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.2$. *Encuentre:* $P(A \cup B)$, $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$ $P(A|B)$, $P(B|A)$ ".

4. Calcular una probabilidad compuesta haciendo uso de la regla del producto. Díaz (2004, 2007) diferencia los casos de sucesos dependientes e independientes. Un r ejemplo, en el caso de suceso dependiente es el siguiente: "*En una bolsa se tienen 4 bolas blancas y 2 bolas negras; otra contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras. Si se saca una bola de cada bolsa, hallar la probabilidad de que ambas sean blancas*" (Spiegel, 2000, p. 139).

5. Determinar si dos sucesos son dependientes o independientes: *Un juego consiste en arrojar simultáneamente una moneda u un dado. Comprobar que los sucesos en los que está implicados la moneda y el dado son independientes.* (Martín-Pliego y Ruiz-Maya , 2006, p. 41)

6. Diferenciar entre sucesos mutuamente excluyentes y sucesos independientes. Por ejemplo, "*¿Puede ser independientes dos sucesos mutuamente excluyentes que tienen probabilidad no nula?*" (Peña, 1986, p.77).

7. Calcular la probabilidad total. Todos los problemas relacionados con el teorema de Bayes implica la resolución de un problema de probabilidad total. Además, algunos

libros incluyen explícitamente este tipo de problemas. Por ejemplo el tomado de Gutiérrez, Martínez y Rodríguez (1993, p. 47). *"En una determinada población, el 40% son mujeres, el 30% son universitarios, y el 20% son mujeres universitarias. Si se selecciona al azar una mujer. ¿Cuál es la probabilidad de que sea universitaria?"*

8. Resolver problemas bayesianos. Son los problemas en que se da una partición del espacio muestral y la probabilidad inicial de los sucesos que la componen así como la condicional de un nuevo suceso que depende de los anteriores. Se pide la probabilidad final de los sucesos de la partición. *"Las probabilidades de que un artículo proceda de una fábrica A o de una B son 0,6 y 0,4, respectivamente. La fábrica A produce artículos defectuosos con probabilidad 0,01, y la B, con probabilidad 0,05. Se observa un artículo y resulta defectuoso. Calcula la probabilidad de que provenga de la fábrica A."* Arnold (2004, p. 43).

9. Resolver problemas de probabilidad condicional y conjunta en experimentos compuestos de diferentes experimentos simples. Por ejemplo:*"En una universidad terminan la carrera el 5% de Arquitectura, el 10% de Ciencias y el 50% de Letras (sólo hay estas carreras). Eligiendo un estudiante al azar se pide: a) Probabilidad de que sea de Arquitectura y haya terminado la carrera; b) Nos dice que ha terminado la carrera. Probabilidad de que sea de Arquitectura"* (Cuadras y cols., 1988, p. 137).

10. Estimar probabilidades condicionales y conjuntas mediante simulación. Estos problemas sólo los hemos encontrado en los dos libros con enfoque basado en el ordenador. Por ejemplo: *"Considera el ejemplo de prueba sanguínea discutido en el capítulo. Supón que haces tres pruebas y son todas positivas. ¿Tienes una alta probabilidad de tener la enfermedad? Usa Minitab en los cálculos"* (Albert y Rossman, 2001, p. 34),

1.6.3. REPRESENTACIONES Y ARGUMENTOS

Los elementos del lenguaje, tales como términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc. son necesarios para resolver los problemas matemáticos, para representar objetos abstractos, para generalizar su solución o para describirlos a otras personas. En relación a la probabilidad condicional hemos encontrados los siguientes:

Términos y expresiones

Encontramos una gran variedad en los libros analizados, entre los que citamos los siguientes: probabilidad, probabilidad condicionada, diagrama de árbol, aleatorio, conjuntos vacío, total, unión, intersección, probabilidad de la unión, probabilidad de la intersección, función probabilística, variable aleatoria, equiprobabilidad, independencia, dependencia, espacio muestral, suceso, frecuencia relativa, ley de los grandes números, regla de Laplace, regla del producto, convergencia, simulación con uso del ordenador, etc.

Asimismo encontramos *términos asociados a los conceptos relacionados*: distribución de probabilidad, variables aleatorias discretas y continuas, propiedades estadísticas, cálculo de probabilidades de variables y estadísticos, ley de los grandes números.

Hacemos notar que cada una de estas expresiones corresponde a conceptos o propiedades matemáticas que el estudiante debería haber aprendido antes de finalizar el tema, lo que muestra la complejidad del objeto de estudio.

Expresiones algebraicas

Expresiones como la siguiente, forman parte del conjunto de representaciones simbólicas relacionadas con la probabilidad y se usan sobre todo al dar argumentos de tipo deductivo:

$$P(G) = P((G \cap A)\ U\ (G \cap B)) = P(G \cap A) + P(G \cap B) = P(G/A)P(A) + P(G/B)P(B)$$

En ella tenemos una demostración de que la probabilidad de un suceso se puede descomponer como la suma de la descomposición de la probabilidad en otros sucesos compuestos. Otras expresiones algebraicas se usan al describir los conceptos relacionados: Por ejemplo, es frecuente encontrar expresiones algebraicas representando el teorema de Bayes.

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)P(A_j)}$$

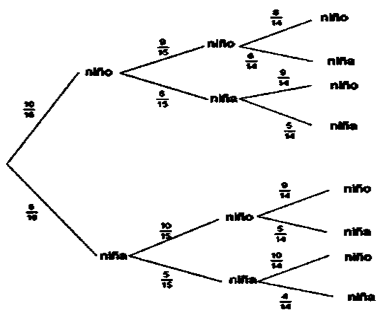
En ella podemos ver la descomposición de la probabilidad condicionada de un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos $\{A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n\}$, tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero y de un suceso B cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B \mid Ai)$, como el cociente de la descomposición de los sucesos simples en otros complejos. (Para ello utilizamos la propiedad anteriormente estudiada).

Representaciones gráficas

Los gráficos es uno de esos elementos que siempre están presentes en la Probabilidad. Se reconoce en los gráficos un medio elocuente de comunicar ideas, para refutar teorías, de representar relaciones entre varias variables, de usarlos para distinguir con ellos el foco de atención, en cómo se cuestionan los datos, en sus propósitos, en la precisión de la información cualitativa extraída de ellos y la realización ocasional de funciones instrumentales.

A la hora de representar la Probabilidad Condicionada es común el uso de los diagramas de árbol. Según Fischbein (1987), el diagrama en árbol facilita la resolución de problemas de probabilidad, aunque algunos autores han mostrado que los alumnos tienen dificultades en construir un diagrama en árbol adecuado al problema. En la figura 1.2 reproducimos un gráfico de diagrama de árbol que hemos encontrado en la Internet (www.mirrorservice.org/sites/home.ubalt.edu/ntsbarsh/Business-tat/opre504S.htm).

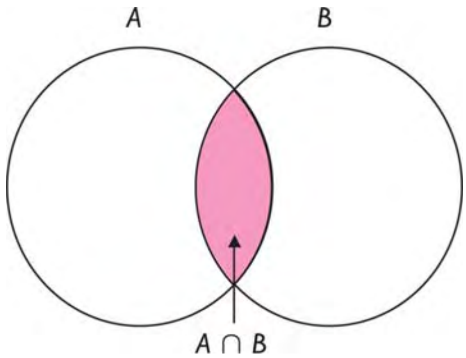
Figura 1.2. Diagrama de árbol



Otro gráfico que se utiliza a la hora de representar la Probabilidad condicionada es la representación de sucesos, mediante un diagrama de Venn. Con este gráfico tenemos una visión espacial de las diferentes situaciones que se pueden presentar en el comportamiento de intersecciones, uniones y como se condicionan unos sucesos a otros. (Ver Figura 1.3, encontrada en Internet en:

www.kalipedia.com/graficos/interseccion.html?x=20070926klpmateyp_30.Ges).

Figura 1.3. Representación de sucesos



Representaciones elaboradas por el ordenador

Merece mención aparte de representación, la simulación, la cual permite a través del ordenador estudiar las propiedades de un fenómeno aleatorio reemplazándolo por otro isomorfo. Por medio de dispositivos como el modelo de urnas es factible simular experimentos probabilísticos, tales como el lanzamiento de un dado, de una moneda, etc. El papel que juega la simulación en la enseñanza de la estadística y la probabilidad ha sido resaltado entre otros por Biehler (1997, 2003), Batanero (2003) y Mills (2003), avisando que la simulación permite poner en manos del estudiante un instrumento que hace posible la exploración y el descubrimiento de conceptos y principios que de otro modo serían mucho más abstractos. Sin embargo, la falta de "guías prácticas" que dirijan el trabajo de exploración del simulador, donde a veces se diseña de manera parcial y difusa los significados pretendidos en el proceso de estudio, provocará que los estudiantes tengan dificultades para observar el comportamiento del fenómeno (Godino, Font y Wilhelmi, 2008).

1.7. EDUCACIÓN ESTADÍSTICA EN INTERNET

La estadística es una de las materias que más ha sido influida por la tecnología, y en particular por Internet (Galmacci, 1996), a partir de las contribuciones de muchas personas e instituciones en todo el mundo, la mayoría de las cuales no buscan un beneficio económico directo. Destacamos la página de la *International Association for Statistical Education*, http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/ donde se recogen vínculos a otros servidores, así como publicaciones, incluyendo tesis doctorales, actas de conferencias y revistas electrónicas, como *Statistics Education Research Journal.* La importancia de estos recursos se reflejó en la organización de una conferencia estadística sobre "Statistics Education and Internet" en el año 2003 (http://www.ph-ludwigsburg.de/iase).

Estos recursos han influido en la metodología la enseñanza de la estadística (Hawkins, 1997). Los profesores usan recursos de Internet en sus clases en diversas formas: los libros de texto electrónicos o artículos disponibles en Internet se prestan a la consulta, en incluso a su modificación (blogs, aplicaciones Wiki, etc). La Internet proporciona para la enseñanza de la estadística datos de todo tipo, a partir de los Institutos de Estadística (e.g, http://www.ine.es/) o a partir de páginas dirigidas a la enseñanza de la estadística (e.g. http://lib.stat.cmu.edu/DASL/). Los estudiantes pueden realizar investigaciones sobre cualquier tema que les interese buscando sus datos en estos servidores. Además, los datos están preparados para introducirse directamente en las calculadoras gráficas u ordenadores de los alumnos, quienes pueden trabajar con los datos, combinarlos, intercambiarlos con sus compañeros o exportarlos a otros ordenadores o calculadoras.

Los recursos disponibles en Internet permiten la explotación de los objetos estadísticos significativamente abstractos a través de la creación de un micromundo virtual que el estudiante puede manejar, experimentando los efectos de las variables definidas. Entre otros temas, permite explorar los conceptos de probabilidad y de la inferencia, y sustituir las demostraciones formales por razonamientos más intuitivos (Mills, 2002). Veremos algunas de estas aplicaciones en el Capitulo 3.

Muchos de estos micromundos se basan en la simulación, sugerida por Heitele (1975) en su lista de ideas estocásticas fundamentales. La simulación desempeña en estadística un papel similar al del isomorfismo en otras ramas de la matemática. A través de la simulación ponemos en corespondencia dos experimentos aleatorios diferentes, con la condición de que cada suceso elemental del el primer experimento corresponde a un sólo un suceso elemental del segundo, a fin de que los hechos puestos en correspondencia, en ambos experimentos sean equiprobables.

Por otro lado, la simulación es más que una herramienta de enseñanza, es también una herramienta para el trabajo estadístico, por lo que conviene mostrarlo estudiantes. El método de simulación de Monte Carlo se desarrolló durante la Segunda Guerra Mundial por un grupo de matemáticos, entre ellos John von Neumann y se aplica hoy dia en la industria y previsión de muchos fenómenos. Por ello es un tema de interés en la enseñanza y los recursos en Internet facilitan su introducción.

Sin embargo, el uso de la simulación también tiene consecuencias negativas. Borovcnik y Peard (1996) destacan el hecho de que la solución obtenida por medio de la simulación no ofrece pistas sobre cómo y por qué la solución realmente resuelve el problema, ya que al estár basada en una perspectiva frecuentista de la probabilidad, no considera otros puntos de vista del concepto de probabilidad. Además, la simulación proporciona sólo una estimación de la frecuencia del valor teórico de la probabilidad, que puede apartarse del mismo, especialmente para un serie de experimentos pequeña. Además, los estudiantes pueden confundir los objetos matemáticos frecuencia y probabilidad, que son de naturaleza diferente (Dantal, 1997). Por esa razón, es necesario el estudio de la simulación en los recursos disponibles en Internet.

Una última aplicación son las plataformas que incluyen listas de discusión entre profesores o entre alumnos y gestión del trabajo de los alumnos a distancia, cuando el no es posible la comunicación directa con el profesor.

CAPITULO 2
INVESTIGACIONES PREVIAS SOBRE PROBABILIDAD CONDICIONAL

2.1. INTRODUCCIÓN

Para fundamentar este trabajo, en este capítulo presentamos un resumen las principales investigaciones relacionadas con la comprensión de la probabilidad condicional e independencia. Estas investigaciones se han realizado tanto en el campo de la Psicología, dentro de los estudios sobre razonamiento y toma de decisión bajo incertidumbre, como en el de la Educación Matemática.

La síntesis que realizamos parte del artículo de Díaz y de la Fuente (2005), así como del estado de la cuestión que Díaz (2007) presenta en su tesis doctoral y se amplía con otras investigaciones no tenidas en cuenta por estas autoras. En primer lugar revisamos los trabajos relacionados con la comprensión conceptual y procedimental, que son la mayoría, pues los trabajos sobre enseñanza del tema son bastante escasos. Incluimos también un apartado sobre el análisis de libros de texto y las conclusiones de este estado de la cuestión.

2.2. COMPRENSIÓN CONCEPTUAL

Algunas investigaciones sobre la comprensión conceptual de la probabilidad condicional se centran en analizar si los alumnos son capaces de aplicar la definición o propiedades del concepto en situaciones muy simples, como el muestreo con o sin reposición.

2.2.1. COMPRENSIÓN DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Intuitivamente la probabilidad condicional $P(A/B)$ de un suceso A dado otro suceso B se define como la probabilidad de que ocurra el suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B y formalmente se define mediante la siguiente expresión, con la condición de que $P(B)>0$.

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$$

Algunas investigaciones analizan si los estudiantes comprenden estas definiciones y pueden aplicarlas en la resolución de problemas y toma de decisiones en la vida diaria. Las principales dificultades aparecen cuando no se sabe si dos sucesos o experimentos son o no independientes, por ejemplo, en el contexto de muestreo.

En este contexto Maury (1986) analizó la comprensión intuitiva de la probabilidad condicional en 374 estudiantes del curso preuniversitario y últimos cursos de Bachillerato, usando un contexto de extracción de bolas en urnas y otro de ruletas. En el primer caso, la extracción se realiza con y sin reemplazamiento. Aunque el 60% de los alumnos resolvió correctamente los problemas de probabilidad simple, sólo el 25% resolvió adecuadamente los de probabilidad condicional La dificultad se debió principalmente a que los dos sucesos considerados no eran equiprobables. En otro experimento Maury (1985; 1986) planteó a 290 alumnos de entre 13 y 16 años el mismo problema usando sucesos equiprobables y la tasa de respuestas correctas subió al 70%.

Para Maury este mayor éxito indica el reconocimiento intuitivo de la independencia por parte de los alumnos. La autora también observó un éxito mayor cuando en la pregunta se listan todos los sucesos posibles del espacio muestral, que cuando no se listan, considerando, en consecuencia, que parte de la dificultad de los problemas se debe a que los alumnos no son capaces de restringir correctamente el espacio muestral en la probabilidad condicional.

Totohasina (1992) propuso problemas de probabilidad condicional a 67 alumnos del curso preuniversitario, que habían estudiado la probabilidad, pero no la probabilidad condicional. Aproximadamente el 60% de ellos lo resolvieron correctamente apoyándose en representaciones como diagrama en árbol, tabla de doble entrada o representación rectangular. Algunos estudiantes no interpretaron probabilísticamente el enunciado, haciendo uso sólo de las frecuencias absolutas de casos. Otros alumnos a veces no restringieron el espacio muestral al calcular las probabilidades condicionales o bien confundieron la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional.

2.2.2. INTERCAMBIO DE SUCESOS EN LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Muchos estudiantes no discriminan adecuadamente entre las dos direcciones de la probabilidad condicional *P(A/B)* y *P(B/A),* error que Falk (1986) denomina *falacia de la condicional transpuesta* y que se ha observado principalmente en problemas de contextos médicos. En este se confunde la probabilidad de tener una enfermedad cuando ha sido positiva una cierta prueba con la probabilidad de un resultado positivo en la prueba, dado que se tiene la enfermedad (Eddy, 1982). Por ejemplo, la probabilidad de tener una mamografía positiva si se tiene cáncer de pecho (que es muy alta), se confunde con la de tener cáncer de pecho si se tiene la mamografía positiva (que es muy pequeña). En todo caso, la prestigiosa revista Lancet publicó un estudio donde se advierte de los riesgos de un diagnóstico erróneo en la prueba de mamografía (Gotzsche y Olsen, 2000) u se indica que para mejorar su capacidad de decisión, las mujeres que toman la prueba debería ser informada de los riesgos potenciales en el caso de un falso positivo.

También Batanero, Estepa, Godino y Green (1996) encontraron esta misma confusión en la interpretación de tablas de contingencia donde se confunden las dos posibles frecuencias condicionales relacionadas con una misma celda de datos. En su investigación, alrededor del 20% de los estudiantes del curso preuniversitario confundieron "porcentaje de fumadores que contraen cáncer de pulmón" con "porcentaje de personas con cáncer de pulmón que fuman".

Esta confusión se extiende asimismo al contexto de la interpretación del nivel de significación α en los contrastes de hipótesis (Vallecillos, 1994). El nivel de significación α se define como la probabilidad condicional de obtener un resultado R en la región de rechazo cuando la hipótesis nula H_o es cierta, es decir $\alpha = P(R / H_o)$. Cuando un contraste de hipótesis resulta significativo (lo que quiere decir que R ha ocurrido) y alguien pregunta por la probabilidad de haber cometido un error (la probabilidad de que H_0 sea cierta) a menudo se contesta con α. En esta situación se estaría confundiendo $P(R / H_o)$ con $P(H_o / R)$. Pero la probabilidad $P(H_o / R)$ no tiene sentido en inferencia clásica, y sólo puede calcularse en inferencia bayesiana, con lo que los investigadores estarían mezclando la filosofía e interpretación de estas dos escuelas de inferencia, que son incompatibles (Díaz, 2007).

Una posible explicación dada por Falk (1986) a la confusión entre los dos sentidos de la probabilidad condicional es la imprecisión del lenguaje cotidiano. Cuando escribimos una probabilidad condicional usando la notación matemática es claro cuál es el suceso condicionante y cuál el condicionado, pero en el lenguaje ordinario la probabilidad condicional (tener cáncer si se es fumador) y su inversa (ser fumador si se tiene cáncer) no siempre se distinguen claramente entre sí o de la probabilidad conjunta (ser fumador y tener cáncer).

2.2.3. CONFUSIÓN ENTRE PROBABILIDAD CONDICIONAL Y CONJUNTA

Debido a esta imprecisión del lenguaje, en los problemas de probabilidad condicional los alumnos confunden con frecuencia la probabilidad condicional y la probabilidad conjunta. Por este motivo en la investigación de Ojeda (1995), las preguntas sobre intersección de sucesos fueron más difíciles que las de probabilidad condicional y la mitad de los sujetos del estudio interpretaron la intersección como condicionamiento. Einhorn y Hogarth (1986) sugieren que los enunciados que usan la conjunción "*y*" pueden llevar a confundir la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional, como ocurrió en su investigación al preguntar a 24 estudiantes *"¿Cuál es la probabilidad de ir al supermercado y comprar café?"*.

Un error relacionado con la probabilidad conjunta es la *falacia de la conjunción* (Tversky y Kahneman, 1982b) o creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que la de uno de ellos por separado o la de su unión. Puesto que la probabilidad de la intersección se obtiene multiplicando dos probabilidades, que son números menores o iguales a la unidad, el resultado de esta multiplicación nunca puede ser mayor que la de uno de los factores. Sin embargo, muchos alumnos dan una mayor probabilidad a la intersección de dos sucesos si uno de ellos es muy probable, como por ejemplo, consideran más probable "ser joven e ir a la discoteca" que simplemente "ser joven". El error es resultado de considerar a la conjunción "ser joven e ir a la discoteca"· más representativa de la población que ser simplemente joven.

2.2.4. RELACIÓN ENTRE INDEPENDENCIA Y PROBABILIDAD CONDICIONAL

Las dificultades de comprensión de la probabilidad condicional son debidas en ocasiones a la falta de percepción de la independencia, ya que dos sucesos son independientes si la probabilidad de uno de ellos no cambia al condicionarlo por el otro.

La dificultad de aplicar la idea de independencia continúa en la Universidad, como muestra Sánchez (1996), quien pasó un cuestionario a 88 profesores de Matemáticas que participaban en México en un programa de actualización. Sólo 44 profesores hicieron intentos sistemáticos por resolver un problema de independencia. De ellos 39 dieron una respuesta, pero sólo 4 utilizaron la regla del producto y llegaron a la solución correcta. En las respuestas incorrectas encuentra dos tipos de razonamiento:

1. Creer que dos sucesos son independientes si y sólo si son excluyentes, error muy extendido, y descrito anteriormente por Kelly y Zwiers (1986), quienes suponen que es debido a la imprecisión del lenguaje ordinario, en que "independiente" puede significar, a veces, separado. Esta creencia es errónea pues dos sucesos excluyentes son justamente dependientes pues uno no puede ocurrir a la vez que el otro.
2. Creer que para que dos sucesos sean independientes cada uno de ellos ha de pertenecer a un experimento diferente y no al mismo experimento. También esto es falso, pues al tomar al azar una mujer de una población, los sucesos "ser menor de 20 años" y "ser sevillana" son independientes, aunque se refieran a un mismo experimento (tomar la mujer al azar de la población).

2.2.5. CONDICIONAMIENTO Y CAUSACIÓN

La causalidad es un concepto científico, filosófico y psicológico complejo, aunque las personas lo comprenden de forma intuitiva en base a su experiencia cotidiana con situaciones de relaciones de causa y efecto. La relación causal estricta ocurre cuando al variar un suceso *A* (por ejemplo, al cambiar la cantidad de agua en un recipiente) otro suceso cambia (el peso del recipiente cambiará). Es difícil de hallar en el mundo real relaciones perfectas de cause y efecto y por ello los estadísticos hablan de relación de *causa débil* cuando al suceder *A* cambia la probabilidad de que ocurra *B* (Díaz, 2007). Es decir, cuando *P(B/A)* es diferente de *P(B)*, por lo cual una relación de causalidad implica una dependencia de tipo estadístico entre los sucesos implicados. Por ejemplo, a mayor número de horas de estudio aumenta la probabilidad de una mejor nota, pero no es seguro, pues el alumno podría hacer un mal examen por un cansancio excesivo.

Desde el punto de vista de la probabilidad condicional, si un suceso *A* es la causa estricta de un suceso *B*, siempre que suceda *A*, sucederá *B*, por lo que *P(B/A)=1*. Sin embargo lo contrario no es cierto, ya que dos sucesos pueden ser dependientes, sin que uno de ellos sea causa del otro. Por ejemplo hay una relación inversa entre la tasa de natalidad de un país y la esperanza de vida, pero la relación no es de tipo causal.

Desde el punto de vista psicológico, la persona que evalúa una probabilidad condicional P(A/B) puede percibir dos relaciones diferentes entre A y B:

- *B Relación causal:* Si percibe que *B* (suceso condicionante) es causa de *A* causal, estimando la probabilidad de un efecto *A* dado cierto conocimiento de la causa *B*. Por ejemplo, la probabilidad de que si una persona tiene pulmonía tenga fiebre es alta.
- *Relación diagnóstica:* Si percibe *A* como una causa de B, se realizaría un razonamiento diagnóstico, estimando la causa dado el conocimiento del efecto. En el ejemplo, si una persona tiene fiebre, la probabilidad de que tenga pulmonía no es alta, pues hay muchas enfermedades que originan la fiebre.

Aunque matemáticamente los dos enunciados son equivalentes, desde un punto de vista psicológico hay una creencia que las relaciones causales son más fuertes que las relaciones diagnósticas (Tversky y Kahneman, 1982a) debido a la existencia de un sesgo causal cuando las personas se enfrentan con tareas relacionadas con la probabilidad condicional.

La relación de causalidad también se asocia, a menudo, con la secuencia temporal (Falk, 1986) y algunos estudiantes tienen problemas con la condicionalidad cuando se invierte el eje de tiempo en que los sucesos ocurren de una forma natural. Por ejemplo, si les preguntamos cuál es la probabilidad de que el abuelo de una persona tuviera los ojos azules. Esta creencia, que consiste en rechazar la evidencia ocurrida después del suceso que juzgamos, se conoce como *falacia del eje temporal* y consiste en suponer que el suceso condicionante en la probabilidad condicional ha de preceder temporalmente al condicionado.

Entender que la probabilidad de un suceso puede ser revisada a la luz de resultados posteriores es importante en la aplicación del Teorema de Bayes donde la actualización de las probabilidades a la luz de los resultados juega un papel tan importante. Gras y Totohasina (1995) identifican tres tipos de concepciones erróneas sobre la probabilidad condicional en estudiantes:

- En la *concepción cronológica* los estudiantes interpretan la probabilidad condicional *P(A/B)* como una relación temporal, donde el evento condicionante *B* siempre precede al suceso *A.*
- En la *concepción causal*, los estudiantes interpretan la probabilidad condicional *P(A/B)* como una relación causal implícita, donde el suceso condicionante B es la causa y A la consecuencia.

- En la *concepción cardinal* los estudiantes interpretan la probabilidad condicional $P(A/B)$ como la proporción $\frac{Card\ (A \cap B)}{Card(B)}$, que es correcta sólo en el caso de un espacio muestral finito equiprobable. Otros estudiantes interpretan $P(A/B)$ como la proporción $\frac{Card\ (A)}{Card(B)}$, que es siempre falso.

2.3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Otras investigaciones estudian las estrategias y errores de los estudiantes al resolver problemas. Las más importantes son las relacionadas con el Teorema de Bayes y las que analizan cómo influyen las variables del problema en la resolución.

2.3.1. PROBLEMAS RELACIONADOS CON EL TEOREMA DE BAYES

Totohasina (1992) encuentra las siguientes estrategias espontáneas entre los alumnos que tratan de resolver un problema del Teorema de Bayes:

- Cambio de referencial: Consiste en restringir el espacio muestral para tratar el problema como si se tratase de un problema de probabilidad simple.
- Cálculo de cocientes de porcentajes, lo que implica, en la práctica la fórmula de Bayes, aunque deducida de una materia informal.

Después de realizar un experimento de enseñanza de la probabilidad condicional, pero en el que no se introduce formalmente el teorema de Bayes, aunque se plantean y resuelven problemas de probabilidad inversa basándose en árboles y tablas de doble entrada, propone a los alumnos un problema de Bayes y examina los tipos de diagramas en árbol utilizados por los alumnos.

El autor supone que los alumnos pueden encontrarse con dificultades en función del tipo de representación elegida para resolver el problema, que les es dado en formato verbal. Al pasar, por ejemplo, a una tabla de doble entrada, se dificulta la percepción de la naturaleza secuencial de algunos problemas, porque lo que queda más visible es la intersección de los dos sucesos y puede llevar a los alumnos a confundir la probabilidad condicional y la conjunta. De un total de 65 alumnos que participaron en la evaluación, 26 construyeron un árbol directo, con lo que se resaltó claramente el aspecto secuencial de los experimentos (cálculo de la probabilidad directa); 9 de estos estudiantes llegaron a construir correctamente al árbol inverso, que muestra claramente la probabilidad inversa. Otros 7 alumnos usaron el diagrama en árbol, pero no contemplaron el aspecto secuencial y no llegaron a asignar correctamente las probabilidades. Sólo 9 alumnos llegaron a la solución correcta de los problemas. Los autores concluyen que el uso de un árbol es el recurso más efectivo para resolver problemas de probabilidad condicional, sobre todo cuando se refiere a un problema diacrónico (dirigido en el tiempo). Pero puede reforzar las concepciones causalistas o cronologistas en los alumnos que las manifiestan.

Otra dificultad descrita por Totohasina es la necesidad de invertir condición y condicionado en los problemas tipo Bayes, ya que, como hemos señalado, los alumnos con frecuencia confunden el papel de estos dos sucesos en una probabilidad condicional y por tanto confunden una probabilidad condicional con su inversa. Totohasina sugiere que este obstáculo de "reversibilidad" también aparece en el aprendizaje de otras nociones matemáticas, por ejemplo al aprender el concepto de primitiva de una función, partiendo del de derivada.

2.3.2. INFLUENCIA DEL LENGUAJE Y EL FORMATO

Pollatesk y cols. (1987) analizan las variables que pueden influir en la resolución de los problemas de probabilidad condicional, entre otras, el formato en que se da el enunciado (probabilidad o porcentaje), y el contexto. El porcentaje de respuestas correctas fue similar para las problemas dados en probabilidades o dados en porcentajes, pero en el caso en que el factor causal se hacía presente, la versión porcentual es más sencilla y los alumnos dan mayor número de respuestas correctas que en la versión probabilística.

Gigerenzer (1994) sugiere que la dificultad en la resolución de problemas referidos al teorema de Bayes desaparece cuando las preguntas se plantean en términos de frecuencias. Llama a este formato *frecuencias naturales* porque se asemeja más a la forma en que recogemos información de las frecuencias de sucesos aleatorios en una situación de *muestreo natural* a lo largo de nuestra experiencia. Cuando la información se ofrece en términos de frecuencia, el cálculo de la probabilidad a posteriori es más natural, porque el sujeto no tiene que aplicar toda la complejidad del teorema de Bayes, sino sólo tener en cuenta los casos favorables y posibles, de modo que el problema se transforma en un problema simple de probabilidad. Sus resultados coinciden con los de Ojeda (1995) en sus investigaciones con estudiantes de secundaria.

Resultados similares se han obtenido al plantear otros problemas probabilísticos en términos frecuenciales, por lo que Gigerenzer y colaboradores recomiendan, cuando sea posible, cambiar a frecuencias el formato de las preguntas. En el caso particular de la *falacia de la conjunción* Fiedler (1988) encontró una reducción considerable del número de respuestas incorrectas al plantear las preguntas en formato de frecuencias.

Siguiendo esta línea de investigación, Lonjedo y Huerta (Huerta y Lonjedo 2003; Lonjedo, 2003; Lonjedo y Huerta, 2005) describen algunas variables que influyen sobre la resolución de problemas de probabilidad condicional por estudiantes con y sin nociones previas de los contenidos. Los autores analizan si la resolución de los problemas puede hacerse utilizando el razonamiento numérico y por tanto los estudiantes no necesitan utilizar las relaciones entre probabilidades para resolver el problema. Esto ocurre sobre todo cuando los problemas no son interpretados como probabilidades y a causa de ello no se usan las propiedades de la probabilidad para obtener la solución del problema. Es sólo al final del proceso de resolución del problema cuando los estudiantes responden a la pregunta del problema en términos de probabilidad.

Lonjedo y Huerta concluyen que hay factores que afectan al éxito en la resolución del problema que no necesariamente son el conocimiento de las relaciones entre probabilidades. Estos factores pueden ser la naturaleza de los datos de los problemas. En su estudio clasifican los problemas atendiendo a la naturaleza de los datos en el texto del problema, distinguiendo entre datos presentados en términos de probabilidad, datos presentados en frecuencias absolutas, datos presentados en términos de razón o datos expresados en combinación. Los autores presentaron un estudio en el que se les presentaban a los alumnos 6 problemas de probabilidad condicional en el que la estructura de datos no varía, pero sí su naturaleza y el contexto. Los resultados mostraban que el éxito en la resolución de los problemas no dependía del uso correcto de unas determinadas fórmulas. Estudiantes capacitados para ello, no siempre usaban los datos interpretados como probabilidades. Por otra parte, estudiantes que no conocen dichas fórmulas resuelven los problemas, por lo que el éxito no depende de ellas sino del uso correcto del razonamiento aritmético aplicado a unos datos no interpretados como probabilidades, sino como razones o proporciones.

2.3.3. Uso de representaciones en la solución de los problemas

Las representaciones juegan un papel primordial en la resolución de problemas matemáticos. Los sistemas de representación son entidades abstractas compartidas que se usan para organizar la información mediante determinadas reglas sintácticas. Martignon y Wassner (2002) plantean el uso de diagrama en árbol, junto con las frecuencias naturales para enseñar la resolución de problemas que involucren el Teorema de Bayes. En la solución del mismo se comienza identificando los sucesos a que se refiere la pregunta del problema y se les denota. A continuación se les organiza para operar con ellos, por ejemplo, sustituyéndolos en una fórmula y finalmente se opera para obtener la solución.

Una representación adecuada de los problemas facilita el cálculo y produce soluciones acertadas a los problemas (Gigerenzer y Hoffrage, 1995). El éxito se debe a la estrecha relación entre el diagrama en árbol y la forma inductiva en que procesamos la información en las tareas bayesianas. Usando la regla matemática de Bayes realizaríamos las mismas operaciones, pero en un orden diferente, es decir, siguiendo un proceso deductivo, y aunque nuestra mente está equipada para ambos tipos de procesos, el primero es más intuitivo y natural.

2.4. LA PROBABILIDAD CONDICIONAL EN LOS LIBROS DE TEXTO

Algunos autores analizan la presentación de la probabilidad condicional en los libros de texto, junto con otros conceptos que generalmente suelen aparecer ligados a ella, tales como dependencia e independencia o probabilidades en experimentos compuestos.

En su revisión de libros de texto, Ortiz (1999) comprueba que muchos no incluyen el estudio de la probabilidad condicional y cuando lo hacen el estudio está muy restringido. En su análisis, Ortiz (1999) encontró dos variantes principales de la definición de probabilidad condicional en los libros de secundaria.

- Definición tipo 1: "*Si A y B son dos sucesos en un espacio muestral E, definimos la probabilidad de A condicionada por B, como el cociente entre la probabilidad de la intersección de A y B y la probabilidad de B*".
- Definición tipo 2: "*La probabilidad del suceso condicionante P(B) debe ser distinta de cero para poder definir la probabilidad condicional como:*

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\text{,,}$$

En otros casos, vio que se hacia mención de la probabilidad condicional, a través de un ejemplo, aunque sin nombrarla explícitamente. Un hecho observado por Ortiz es la ambigüedad del lenguaje, lo que da lugar a confusión en los alumnos, ya que, en vez de indicar que la probabilidad del suceso *B* viene condicionada por el suceso *A* se dice que es el suceso *B* el que viene condicionado. Esto podría dar la falsa impresión de que estamos trabajando con una probabilidad simple o de que se quiere realizar otra operación entre sucesos. Esta ambigüedad llega a veces a presentar una definición de “suceso condicionado” incorrecta desde el punto de vista tradicional y señalada por autores como Falk (1986).

Respecto a indicar que el suceso condicionante tiene que tener una probabilidad no nula, son pocos libros los que lo incluyen. También observó que en otros libros, aunque no hace mención explícita de la probabilidad condicionada, si aparecen ejercicios relacionados con ella. No se destaca tampoco el papel de los dos sucesos que intervienen en la probabilidad condicional ni el diferente valor de la probabilidad condicional cuando intercambiamos estos sucesos entre si.

Respecto a la independencia de sucesos, la definición que presentan los libros de texto es a través de la probabilidad condicionada, es decir que dos sucesos son independientes cuando $P(B/A)=P(B)$ suele aparecer en gran cantidad de los textos. También la definición de que dos sucesos son independientes cuando el resultado de uno de ellos no influye en la realización del otro, aparece en la mayoría de los casos. El teorema de la probabilidad total y las fórmulas de Bayes apenas se incluyen en los textos analizados.

Lonjedo y Huerta (2005) exploran los problemas escolares verbales de probabilidad condicional en los libros de texto, observan que las cantidades presentes en la mayor parte de estos problemas, no están expresadas en términos de probabilidad sino que presentan naturaleza diversa. Según los autores los problemas escolares de probabilidad condicional encontrados en los libros de texto solo serán clasificados como problemas de cálculo de probabilidades si los datos del problema son interpretados como probabilidades y es necesaria las relaciones entre probabilidades para solucionarlos.

2.5. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO DE LAS INVESTIGACIONES PREVIAS

En los apartados anteriores hemos realizado una revisión de las investigaciones en sobre comprensión de la probabilidad condicional, conjunta, independencia y teorema de Bayes. Se han descrito diferentes errores y algunas de las razones para los mismos, así como algunas variables que facilitan la resolución de los problemas sobre estos conceptos.

La investigación revisada muestra que este no es un tema sencillo, que tiene una amplia variedad de matices y los alumnos lo asocian con la problemática de la causalidad y temporalidad, teniendo dificultad en la percepción de los experimentos compuestos en el caso de situaciones sincrónicas. Se confunde independencia y exclusión, se cambian los términos de la probabilidad condicional, se confunde ésta con la conjunta y se asigna a la probabilidad conjunta un valor mayor que a la probabilidad simple, violando las reglas lógicas del cálculo de probabilidades. La presentación en los libros de texto no siempre es completa y los problemas incluidos en el tema, en ocasiones son problemas aritméticos y no verdaderos problemas probabilísticos.

En consecuencia, pensamos que dada la importancia de la probabilidad condicional en estadística y en la vida cotidiana, las dificultades descritas en los alumnos y las carencias de los libros de texto, merece la pena continuar la investigación sobre el tema. Nuestro estudio en el Capítulo 3 de recursos disponibles en Internet para la enseñanza del tema se orienta a identificar aquellos que pudieran contribuir a la superación de algunos de los errores descritos. Este estudio lo usaremos como fundamento para en una próxima investigación diseñar procesos de estudio de la probabilidad condicional y su didáctica, dirigidos a la formación de profesores.

CAPITULO 3.
RECURSOS EN INTERNET PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo analizamos y clasificamos algunos recursos disponibles en Internet que podrían ser útiles para la enseñanza de la probabilidad condicional en diferentes niveles educativos y para la formación de los profesores que llevan a cabo esta enseñanza. La finalidad es por un lado seleccionar algunos de estos recursos para, en una segunda fase de la investigación (futura tesis doctoral), diseñar unidades didácticas basadas en el uso de la tecnología para la formación de profesores respecto a la enseñanza de la probabilidad condicional. Por otro lado, la información que hemos recogido puede orientar a los profesores en la mejora de su enseñanza del tema.

3.2. METODOLOGÍA DEL ESTUDIO

En este capítulo hemos llevado a cabo una primera clasificación de los recursos, que luego puede ser modificada o ampliada en la futura tesis doctoral. La búsqueda se ha realizado a través de varios sistemas:

- Explorando algunos servidores de educación estadística, que incluyen listados de recursos en Internet. Hemos explorados los servidores de Biblioteca virtual de recursos manipulativos (http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html); en la plataforma Mundo matemático (http://www.planetamatematico.com/), NCTM (http://www.nctm.org/); IASE (http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/); Proyecto Descartes del Ministerio de Educación, Política Social y Deporte (http://descartes.cnice.mec.es/) y el servidor de nuestro grupo (http://www.ugr.es/~batanero/).
- A partir de algunos artículos que describen recursos en Internet, como los Mills (2002) y de Díaz y de la Fuente (2005).
- Mediante búsqueda directa en buscadores de Internet, utilizando palabras claves como “Applet” y alguna de las siguientes “probabilidad condicional” “probabilidad condicionada”, “Independencia”, “conditional probability“, “Bayes”, etc.

Una vez localizado un recurso, se clasifica en algunos de los apartados que se describen en este capítulo. Localizados los principales recursos dentro de una de las categorías, se estudian eligiendo uno que nos parezca interesante desde el punto de vista didáctico. Llevaremos a cabo un análisis detallado de dicho ejemplo. Asimismo, se eligen otros dos recursos de interés para hacer una descripción resumida y el resto simplemente se listan en una tabla.

El principal recurso en cada categoría se analiza desde diferentes puntos de vista. En primer lugar, describimos el recurso, proporcionando datos de su ubicación en Internet y su autor, así como los objetivos que se persiguen con él, caso de que se hayan explicitados o puedan deducirse del análisis del recurso. En segundo lugar se lleva a cabo un análisis matemático de las posibles soluciones correctas (en caso de que se trate de un problema o un juego cuya estrategia se justifique mediante la solución de un problema). Si se trata de un recurso de exploración, analizamos tan sólo los objetos matemáticos en juego.

De acuerdo a Godino, Font y Wilhelmi (2008) una tarea importante para el profesor es valorar la práctica docente con la finalidad de favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Para facilitar éste valoración los autores describen diversos niveles de análisis, algunos de los cuáles creemos que también pueden aplicarse al estudio de los recursos didácticos, entre ellos los recursos en Internet. El análisis del recurso se completa con dos de estos análisis:

a. Los sistemas de prácticas y objetos matemáticos implícitos en estas soluciones correctas o el trabajo con el recurso. Según los autores, el análisis de objetos ligados a las prácticas se aplica durante la planificación de la enseñanza y pretende estudiar las prácticas matemáticas planificadas para dicha enseñanza. Permite descomponer el proceso de estudio previsto en una secuencia de episodios y describir las prácticas supuestas. Como consecuencia, trataremos de identificar las configuraciones y objetos latentes en el trabajo de los estudiantes al resolver problemas con los recursos analizados.
b. Los posibles conflictos semióticoss de los estudiantes en el uso del recurso, describiendo con detalle las que se hayan reportado en las investigaciones previas, como por ejemplo, Díaz (2005) y Díaz y de la Fuente (2005).

Para algunos recursos se describe la literatura o historia relacionada y las variantes del mismo recurso encontradas en otros sitios de Internet. Se finaliza el capítulo con la descripción de los procesos matemáticos implícitos en su uso y una valoración global de la idoneidad didáctica del trabajo con este problema en cursos de formación de profesores.

A continuación presentamos los resultados.

3.3. JUEGOS

En esta categoría se incluyen diversos juegos encontrados en Internet, donde interviene la probabilidad condicional. La utilidad que pueden tener estos juegos en la formación de profesores es que permiten contextualizar la reflexión epistemológica sobre la probabilidad condicional y otras ideas estocásticas fundamentales, y analizar las posibles dificultades y obstáculos de los alumnos en el tema (Godino, Batanero y Flores, 1999).

El problema de Monty Hall

En este apartado analizamos un recurso (cuya pantalla principal se muestra en la figura 1) que hemos preparado y que simula el problema conocido como "Problema de Monty Hall", e incluye también algunas actividades en relación al juego.

Dirección en Internet: http://www.ugr.es/~odap2/1/

Figura 3.3.1. Pantalla principal del Juego de Monty Hall

Descripción

Este juego, cuya pantalla principal se nuestra en la figura 3.3.1 también aparece como parte de los Applets incluidos en el National Library of Virtual Manipulatives (http://nlvm.usu.edu/) en relación con los temas de tratamiento de datos y probabilidad. Permite experimentar una de las versiones del Problema de Monty Hall. El recurso está inspirado en el concurso televisivo Let's Make a Deal (Hagamos un trato), emitido entre 1963 y 1986 en la televisión americana y su nombre proviene del presentador del concurso, Monty Hall. El concurso generó bastante polémica en relación a posibles soluciones del problema matemático latente y muestra las intuiciones incorrectas en relación a la probabilidad condicional. La formulación más conocida de dicho problema proviene de una carta a la columna de Marilyn vos Savant en Parade Magazine (Bohl, Liberatore, y Nydick, 1995) y se reproduce a continuación.

> *Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de las otras, cabras. Escoges una puerta, digamos la nº1, y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, digamos la nº3, que contiene una cabra. Entonces te pregunta: "¿No prefieres escoger la nº2?". ¿Es mejor para ti cambiar tu elección?*

El problema original fue planteado por Selvin (1975 a), quien posteriormente (Selvin, 1975b) hace la primera mención del término "problema de Monty Hall". Un problema análogo denominado "problema de los tres prisioneros", fue publicado por Gadner (1959), aunque su versión hace el proceso de elección explícito, evitando las suposiciones de la versión original.

Solución Matemática del Juego

Cuando se trabaja con el problema de Monty Hall en un curso de probabilidad, podemos hacer a los estudiantes alguna pregunta del tipo: ¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia entre cambiar o no? ¿Cuál sería la opción correcta, quedarse con la puerta inicial, cambiar a la otra puerta o es irrelevante? Les pediremos que justifiquen su decisión con un argumento de tipo probabilístico.

Para simplificar el problema, asumimos que solamente hay dos tipos de jugador, los que nunca cambian de puerta y los que cambian siempre. La pregunta se limita a ver que tipo de jugador tiene la mayor probabilidad de ganar el coche. En caso de que los estudiantes no logren dar la solución o den una solución errónea (lo cuál es lo más frecuente), se puede dar oportunidad de simular el juego usando el recurso y obtener datos experimentales que les ayuden a intuir (y posteriormente demostrar) la solución correcta (Ver Figura 2). La solución correcta se basa en tres suposiciones básicas:

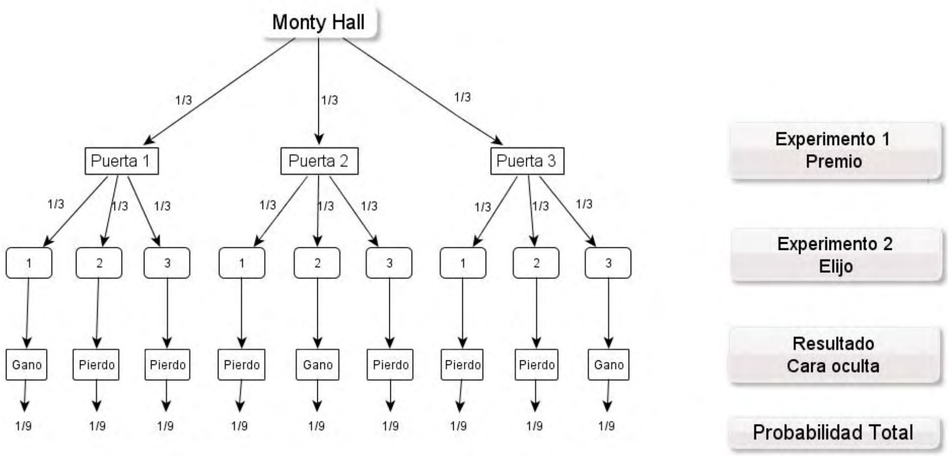
- Que el presentador *siempre* abre una puerta,
- Que la escoge *después* de que el concursante escoja la suya, y que tras ella *siempre* hay una cabra.

Figura 3.3.2. Resultado de una simulación

Solución intuitiva 1

Una estrategia de solución es usar un diagrama en árbol (Figura 3), donde vemos fácilmente las distintas posibilidades que podemos encontrarnos. Hay dos puertas sin premio y una con premio. Por tanto la posibilidad de elegir la puerta premiada es 1/3. Si me quedo con esta puerta y no cambiamos solo tenemos 1/3 de posibilidades de ganar y 2/3 de perder. Si, por el contrario, cambio de puerta, la probabilidad de ganar será la misma que elegir inicialmente la puerta sin premio, es decir 2/3.

Figura 3.3.3. Espacio muestral cuando no se cambia de puerta



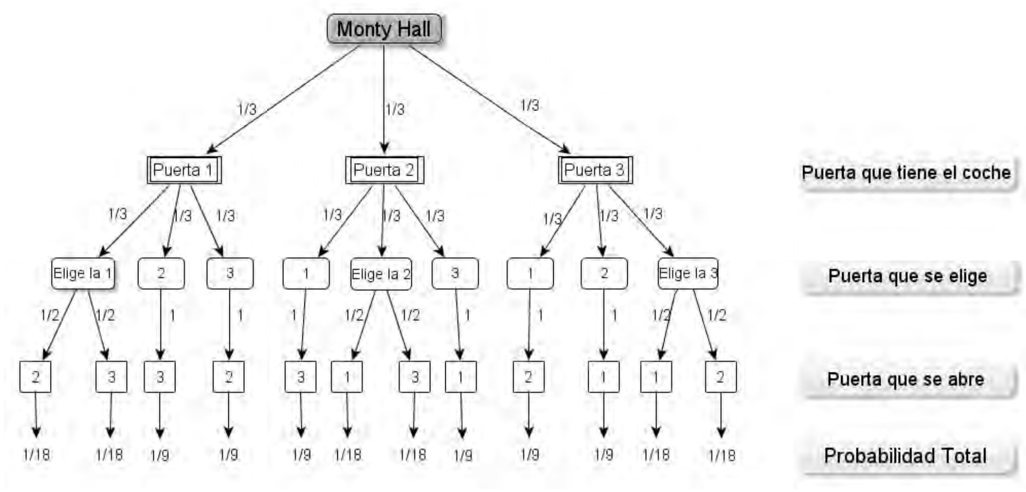
Solución intuitiva 2

Otro razonamiento que da la misma solución es el siguiente: Consideramos, en primer lugar, el experimento “puerta que tiene el premio” (cada puerta tiene probabilidad 1/3). A continuación, consideramos la puerta que se elige (1/3 cada puerta). Estos dos primeros experimentos son independientes.

El tercer experimento es la puerta que abre el locutor que es dependiente de los anteriores, como se muestra en el diagrama en árbol (Figura 4). Observamos que si cambiamos de puerta, las posibilidades de ganar son de 1/3, sumando las probabilidades de todas las ramas del árbol. Sin embargo si cambiamos, tenemos probabilidad 2/3 porque:

- Si escogemos una puerta con una cabra, entonces el presentador muestra la otra cabra. Nosotros cambiamos (a la puerta que tiene el coche) y ganamos;
- Escogemos puerta con coche, entonces, el presentador muestra la otra cabra, cambiamos (a la puerta con la segunda cabra) y perdemos.

Figura 3.3.4. Espacio muestral en el experimento compuesto



Solución experimental

El trabajo de los alumnos con el Applet, experimentando con el juego y reflexionando sobre los resultados, proporciona a los estudiantes una experiencia intuitiva sobre los resultados que se obtienen en este juego con cada una de las dos estrategias (cambiar o no cambiar de puerta). Partiendo de la evidencia de estos resultados (claramente se observa experimentalmente que las posibilidades de ganar el juego son el doble al cambiar la puerta), el alumno ve sus intuiciones contradichas, es decir, se produce un conflicto cognitivo y al tratar de resolverlo, eventualmente puede llegar a uno de los razonamientos intuitivos mostrados anteriormente. En el transcurso de la experimentación con el Applet, debemos elegir una de las tres puertas al azar (este es el primer experimento aleatorio). La experiencia con el juego muestra al alumno la siguiente secuencia:

- Una vez hemos elegido una de las puertas, el programa nos abre una puerta donde no hay dicho premio.
- A continuación, el programa nos da la opción de quedarnos con la puerta elegida o cambiar a la que queda sin descubrir.

Cuando realizamos el juego, el Applet nos proporciona, ¿cuándo se lo pedimos? una tabla similar a la Tabla 3.3.2. Gracias a ella podemos conocer el porcentaje de éxitos con cada una de las estrategias "ganar cambiando" y "ganar no cambiando".

Tabla 3.3.2. Tabla de datos proporcionada por el Applet

% de ganar cuando no cambias. (número de aciertos de las veces que no cambiamos)
% de ganar cuando cambias. (número de aciertos de las veces que cambiamos)

A partir de los resultados proporcionados en esta tabla podemos comparar la frecuencia relativa de ganar en cada una de las dos estrategias e intuir qué estrategia es mejor. Teniendo en cuenta que los resultados son aleatorios, deberíamos realizar el juego un número de veces considerable para que los resultados se ajusten a la solución del problema, pero el ordenador permite un gran número de simulaciones rápidamente

En conclusión, el Applet nos proporciona una solución experimental, sobre cuál es la estrategia ganadora. Pero no nos explica la razón de por qué una estrategia es preferible a la otra. Será necesario que el profesor trate de reconducir al estudiante a una de las soluciones intuitivas 1 o 2, para que comprenda el comportamiento del juego.

Solución formal 1

La solución formal de este problema utiliza las propiedades de la probabilidad condicionada, que es un objeto cuya definición es sencilla de entender pero difícil de aplicar.

Para llegar a la solución definimos los siguientes sucesos:

- *A:* El jugador selecciona la puerta que contiene el coche en su selección inicial.
- *B:* El jugador selecciona una puerta que contiene una cabra en su selección inicial.
- *G:* El jugador gana el coche.

Asumimos que hay dos tipos de jugador, los que nunca cambian de puerta y los que cambian siempre; en este caso la pregunta se limita a ver que tipo de jugador tiene la mayor probabilidad de ganar el coche. Estamos interesados en calcular $P(G)$ para cada tipo de jugador. Para calcular $P(G)$, basta con notar que $G=(G \cap A) \cup (G \cap B)$, ya que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = \Omega$. Esto es equivalente a decir que $\{A, B\}$ es una partición de Ω, siendo Ω el espacio muestral del experimento; por tanto, aplicando el axioma de la unión de probabilidades.

$$P(G)=P((G \cap A) \cup (G \cap B)) = P(G \cap A) + P(G \cap B) = P(G/A)P(A) + P(G/B)P(B)$$

En cualquier caso, dado que no tenemos ninguna razón para pensar lo contrario, podemos aplicar el principio de indiferencia, suponiendo que las puertas son indistinguibles y diremos que $P(A)=1/3$ *y* $P(B)=2/3$ pues hay un coche y dos cabras. Para ello, aplicamos simplemente la regla de Laplace. Ahora debemos definir que tipo de jugador estamos estudiando:

- *Jugador que nunca se cambia:* En este caso $P(G|A)=1$ *y* $P(G|B)=0$ pues el jugador se queda con su selección inicial. Por lo tanto $P(G)=1/3$.
- *Jugador que siempre se cambia:* En este caso $P(G|A)=0$ *y* $P(G|B)=1$ pues el jugador se cambia a la única puerta cerrada que queda (y sabemos que como el presentador sabe donde esta el coche, siempre mostrará una cabra). Por lo tanto $P(G)= /3$.

En resumen, si mantiene su elección original, gana si escogió originalmente el coche (con probabilidad de 1/3), mientras que si cambia, gana si escogió originalmente una de las dos cabras (con probabilidad de 2/3). Por lo tanto, el concursante debe cambiar su elección si quiere maximizar la probabilidad de ganar el coche.

Solución formal 2

Sea ξ: $(\Omega, P) \Rightarrow \{1,2,3\}$ la variable aleatoria que asigna un número de puerta (aquella detrás de la cual se encuentra el coche). Esta variable aleatoria tiene distribución discreta uniforme (es decir todos los valores son equiprobables) y son estocásticamente independientes.

Sea ϕ: $(\Omega'', P'') \Rightarrow \{n\}$ la variable aleatoria número de la puerta que abre el moderador y que dependerá de las anteriores. Si $\eta=\xi$ (el concursante elige el coche), entonces hay dos posibles valores con probabilidad ½ (los números de las dos puertas no elegidas por el concursante). En caso contrario, solo hay un valor, con probabilidad 1 (el número de la puerta sin coche). La probabilidad que el candidato se lleve el coche bajo el supuesto que él no cambia de puerta es entonces $P(\eta=\xi)=1/3$. La probabilidad que el candidato se lleve el coche bajo el supuesto que él cambia de puerta es entonces $P(\eta\neq\xi)=2/3$.

Objetos matemáticos puestos en juego

Al resolver matemáticamente el juego mediante alguna de las soluciones anteriores se utilizan implícitamente los objetos matemáticos que se muestran en la tabla 3.3.3. Observamos en dicha tabla que, dependiendo de la solución, se pueden usar una configuración diferente de objetos matemáticos, siendo más complejas las soluciones formales, especialmente la segunda que involucra la idea de variable aleatoria. Por tanto, el recurso que hemos construido en si mismo no determina el trabajo matemático que se hace, sino, junto con el tipo de solución obtenida. Ello hace que con este Applet se pueda trabar a diversos niveles de profundidad, dependiendo del tipo de estudiante.

Tabla 3.3.3. Configuraciones epistémicas en las soluciones correctas

Tipo	Objetos matemáticos	Significado en la situación	Int. 1	Int. 2	Exp.	Form 1	Form 2
Problema	- Elección de la puerta	- Determinar la mejor estrategia	X	X	X	X	X
Lenguaje	- Verbal	- Explicación de la situación	X	X	X	X	X
	- Gráfico	- Diagrama en árbol - Representación icónica del juego	X	X			
	- Simbólico	- Expresar sucesos, probabilidades				X	X
	- Numérico: Porcentajes	- Probabilidades en porcentaje			X		
	- Numérico: Frecuencias	- Resultados del experimento			X		
	- Icónico	- Iconos que representan los sucesos y resultados			X		
Conceptos	- Experimento aleatorio	- Elegir una puerta - Puerta que abre el locutor - Ganar el premio	X X X	X X X	X X X	X X X	X X X
	- Sucesos; espacio muestral	- Puertas 1, 2, 3 - Ganar/no ganar	X X	X X	X X	X X	X X
	- Experimento compuesto	- Composición de los experimentos anteriores	X	X	X	X	X
	- Sucesos en el experimento Compuesto	- Producto cartesiano de los espacios muéstrales anteriores	X	X	X	X	X
	- Frecuencia relativa	- Éxitos / número experimentos			X		
	- Convergencia	- Tendencia de la frecuencia a un valor fijo			X		
	- Intersección de sucesos	- Conjunto común de sucesos.				X	
	- Unión de sucesos	- Sucesos en uno u otro conjunto				X	
	- Suceso imposible	- Intersección de un suceso y su complementario				X	
	- Probabilidad clásica	- Proporción de casos favorables a posibles	X	X		X	X
	- Probabilidad frecuencial	- Límite de la frecuencia			X		
	- Axiomas probabilidad	- Explicitación de los axiomas				X	X
	- Probabilidad condicional	- Proporción de ocurrencia suceso respecto a la ocurrencia de otro	X	X	X	X	X
	- Regla de la suma	- Probabilidad de ganar	X	X		X	X
	- Regla del producto	- Probabilidad conjunta; dependencia					X
	- Variable aleatoria	- Número de puerta con premio - Número de puerta elegida					X
	- Igualdad de v. aleatorias	- Coincidencia de valores; acierto					X
	- Distribución de probabilidad	- Conjunto de valores con sus probabilidades					X
	- Distribución discreta uniforme	- Conjunto finito de valores equiprobables					X

	- Variables aleatorias independientes	- La distribución de una no depende de la de la otra					X
Procedimiento	- Cálculo prob. intuitivo	- Aplicar reglas intuitivas	X	X			
	- Cálculo prob. formal	- Aplicar reglas de cálculo formal				X	X
	- Cálculo de probabilidad frecuencial	- Estimar la probabilidad mediante la frecuencia			X		
	- Representación gráfica	- Diagrama; esquema	X	X			
Propiedades	- Diferencia probabilidad condicionada y simple	- Restricción del espacio muestral	X	X		X	X
	- La frecuencia converge a la probabilidad	- Ley empírica de los grandes números			X		
	- Teorema Prob. total	- Aplicar a la situación				X	
	- Axioma de unión	- La probabilidad de la suma es suma de probabilidades	X	X		X	X
Argumento	- Razonamiento deductivo	- Demostración de la solución	X	X		X	X
	- Razonamiento empírico	- Comparar aciertos con distintas estrategias			X		

Dificultades posibles de los estudiantes

La complejidad del problema, aparentemente simple se muestra en el análisis realizado de objetos matemáticos y de los procesos que se analizarán en la sección 3.8. También en la literatura relacionada con este problema se han descrito varias soluciones erróneas, relacionadas con una deficiente intuición sobre la probabilidad, que comentamos a continuación. Estas soluciones pueden ser debidas a errores en el proceso de representación-interpretación (conflictos semióticos) o bien a la atribución de propiedades que no tienen a ciertos objetos o situaciones, como vemos en los casos que siguen.

Razonamiento erróneo 1. Percepción de la independencia

Un primer problema se produce porque no se percibe la dependencia de los sucesivos experimentos (elegir una puerta inicialmente y puerta que abre el locutor). Es decir, o bien no se visualiza bien la estructura del experimento compuesto o se suponen los sucesivos experimentos como independientes, habiendo un conflicto consistente en atribuir una propiedad (independencia) que no tienen los experimentos. Pensamos que esto es un conflicto semiótico pues no se ha interpretado correctamente la descripción verbal del experimento (ha habido un fallo de interpretación de esta descripción verbal, que no es más que la representación del experimento real).

A primera vista parece obvio que da igual cambiar de puerta o no, pues no se visualiza la forma en que la información proporcionada por el locutor afecta a la probabilidad inicial de obtener un premio que, sin esta información, es 1/3. De nuevo hay un fallo en percibir una propiedad: Se puede condicionar un suceso por otro que aparece antes o después de él y este condicionamiento puede cambiar la probabilidad inicial del suceso.

Este error de razonamiento es explicado mediante la “falacia del eje de tiempos” descrita por Falk (1986), que consiste en que las personas creen erróneamente que una información actual (la puerta mostrada por el locutor) no puede afectar a un suceso que ocurrió con anterioridad a la misma (en qué puerta estaba el premio). Esta falacia puede estar causada, en parte, por la confusión entre condicionamiento y causalidad (nuevo conflicto semiótico al confundir entre si dos conceptos diferentes). En el capítulo 2 se comentó sobre esta creencia errónea y sus posibles explicaciones.

Razonamiento erróneo 2. Incorrecta percepción del espacio muestral

Otra posibilidad de error en este problema es una incorrecta enumeración del espacio muestral en uno o varios de los experimentos que intervienen. Es decir, habría un fallo en pasar de la idea espacio muestral (intensivo) al espacio muestral concreto (extensivo) o lo que es lo mismo, fallo en la particularización del espacio muestral en este experimento.

La intuición nos dice que, una vez elegida la puerta, y quitando la puerta que abre el locutor, que nunca tiene premio, sólo quedan dos posibilidades equiprobables. Por tanto, y la puerta que nosotros escogimos tiene un 50 % de tener una cabra y por tanto da igual cambiar que no hacerlo. En este razonamiento se está realizando una incorrecta enumeración del espacio muestral al calcular la probabilidad condicionada, otro sesgo descrito por Gras y Totohasina (1995).

El problema radica en que estamos cometiendo un error en este planteamiento y es que no consideramos la información disponible de que “el presentador conoce donde está el premio”. Ya que el presentador abre la puerta después de la elección de jugador, la elección del jugador afecta a la puerta que abre el presentador, por tanto el espacio muestral en el segundo experimento depende del resultado del primero:

- Si el jugador escoge en su primera opción la puerta que contiene el coche (con una probabilidad de *1/3*), entonces el presentador puede abrir cualquiera de las dos puertas restantes. El espacio muestral tiene dos posibilidades con probabilidad *1/2*

Además, el jugador pierde el coche si cambia cuando se le ofrece la oportunidad.

- Pero, si el jugador escoge una cabra en su primera opción (con una probabilidad de *2/3*), el presentador *sólo* tiene la opción de abrir una puerta, y esta es la única puerta restante que contiene una cabra. En ese caso, el espacio muestral tiene un solo elemento, la puerta restante *tiene* que contener el coche, por lo que cambiando lo gana.

Razonamiento erróneo 3. Incorrecta asignación inicial de probabilidades

Otra solución incorrecta se obtiene de la siguiente interpretación, que es una variante de la anterior: Si el presentador escoge de manera aleatoria entre las puertas que aún no se han abierto, entonces la probabilidad que el candidato se lleve el coche (en el caso de no cambiar de puerta) es 0,5 pues el coche ha de estar en una de las puertas no abiertas. Por lo tanto, 0,5 es la probabilidad que el candidato se lleve el coche. El problema ahora es que la asignación de probabilidades a las puertas que abre el locutor es incorrecta. Este fallo se debe a incorrecta aplicación de la regla de la suma de probabilidades porque hay una errónea descomposición-composición de los sucesivos espacios muéstrales en los diferentes experimentos.

Esto sucede porque lo que muestra el presentador no afecta a tu elección original, sino sólo a las otras dos puertas no escogidas. Una vez se abre una puerta y se muestra la cabra, esa puerta tiene una probabilidad de 0 de contener un coche, por lo que deja de tenerse en cuenta. Si el conjunto de esta puerta más la que has elegido tenían una probabilidad de contener el coche de 2/3 en el experimento inicial (elegir la puerta), entonces, si una tiene una de ellas (la abierta) tiene probabilidad de 0 en el segundo experimento (que la puerta tenga el coche), la tercera puerta (no elegida ni abierta) debe tener una probabilidad de 2/3.

Es decir, la probabilidad de 2/3 se traspasa entera a la puerta no escogida ni abierta por el locutor (en lugar de dividirse entre las dos puertas sin abrir), porque en ningún caso puede el presentador abrir la puerta escogida inicialmente.

Razonamiento erróneo 4. Interpretación incorrecta de la convergencia

Podría originarse una reafirmación en la creencia de que es indiferente cambiar o no de puerta si, al experimental con el Applet, el alumno obtiene (debido a la aleatoriedad) un resultado parecido con las dos estrategias.

Esta posibilidad es mayor cuando el número de experimentos que se hagan con el Applet sea pequeño, pues la convergencia de las frecuencias relativas a la probabilidad se cumple a largo plazo, pero no en pequeñas series de ensayos. Si el alumno obtiene este resultado, podría llegar a admitir que su suposición inicial era correcta. Habría acá el peligro de que se reafirme en la "creencia en la ley de los pequeños números" (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982), que consiste en esperar convergencia incluso en pequeñas series de experimentos. Puesto que la ley de los grandes números indica que la frecuencia relativa se aproximará a la probabilidad en una larga serie de ensayos, si los resultados obtenidos en una serie de ensayos (incluso pequeña) confirman la hipótesis errónea de que es indiferente cambiar de puerta, el estudiante no sólo no cae en su error, sino que puede considerar los resultados experimentales como confirmación de su hipótesis.

Variantes y otros juegos

El juego de Monty Hall está basado en una paradoja clásica de la teoría de las probabilidades, que fue planteada por Joseph Bertrand (1822-1900), matemático francés cuyas principales áreas de trabajo fueron la Teoría de Números, la Geometría Diferencial y la Teoría de las Probabilidades. En 1888 publicó el libro *Calcul des probabilitiés*, el cual, contiene numerosos ejemplos de problemas de probabilidades en los cuales el resultado depende del método de resolución del problema, entre ellos el siguiente problema original

Tenemos tres cajas: una caja que contiene dos monedas de oro, una caja con dos monedas de plata, y una caja con una de cada tipo. Después de elegir una caja al azar se toma una moneda al azar, por ejemplo una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra también sea de oro?

Puede parecer que la probabilidad de que vuelva a salir otra moneda de oro sea de 1/2, pero de hecho, la probabilidad es 2/3.

Las soluciones correctas e incorrectas descritas se aplican ahora a esta variante. Encontramos otra versión con cartas de colores. El problema en este caso es el siguiente:

Supongamos que se tienen tres cartas: una carta de color negro en ambos lados, una carta blanca en ambos lados y una carta mixta que es de color negro en un lado y blanca por el otro. Ponemos todas las cartas en un sombrero, cogemos una al azar, y la colocamos sobre una mesa. El lado de la carta hacia arriba es de color negro. ¿Cuáles son las probabilidades de que el otro lado también sea negro?

El problema con las 100 puertas: Una versión algo más elaborada para ver la dependencia de los experimentos es replantear el problema. Si en lugar de haber sólo tres puertas hubiese 100, y tras la elección original el presentador abriese 98 de las restantes para mostrar que tras de ellas hay cabras, y el concursante cambiase su elección ganaría el coche sólo si lo ha escogido originalmente (1 de cada 100 veces). Pero si la cambia, ganaría si no lo ha escogido originalmente (y por tanto es lo que resta tras abrir las 98 puertas), 99 de cada 100 veces.

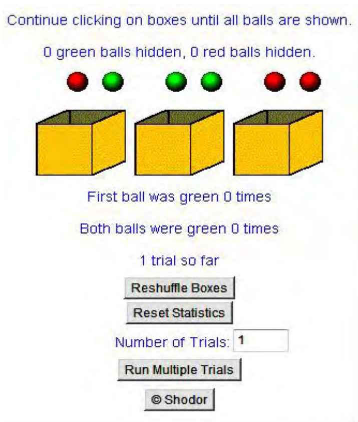
Urna con fichas de dos colores (two colours). Esta actividad permite al usuario simular la extracción bolas de color rojo y verde que se encuentran en tres cajas. Las cajas están predispuestas de manera que hay dos bolas rojas en una caja, dos bolas de color verde en otra, y una verde y una bola roja en el tercero. El usuario puede mezclar el orden de las cajas y el orden en el que se extraen las bolas de las cajas. Para ejecutar en modo de prueba múltiples, introducimos el número de ensayos que deseamos en el cuadro y hacemos clic en el botón de ejecutar múltiples ensayos. El programa permite al usuario manipular el número de pruebas para experimentar con la probabilidad condicional. Para calcular la probabilidad de que el evento se produzca debe tener en cuenta qué efecto tiene el primer evento en el segundo. En este Applet la condición es que la primera bola debe ser verde. En el podemos comparar el número de veces que la primera bola está en verde y el número de veces que ambas son de color verde para conocer la probabilidad condicional. En la tabla 3.3.4 se presentan las variantes encontradas del problema de Monty Hall y otros juegos paradójicos que se relacionan con la probabilidad condicional.

Tabla 3.3.4. Juegos sobre probabilidad condicional

Nombre	Dirección
100 puertas	http://estadisticaparatodos.es/taller/montyhall/montyhall.html
Advanced Monty Hall	http://www.shodor.org/interactivate/activities/AdvancedMontyHall/
Cartas	http://web.educastur.princast.es/ies/iesreype/Departamentos/Mates/paradojas.htm.
Coin Toss Applet	http://www.ibiblio.org/links/applets/appindex/cointoss_a.html

Generalized Monty Hall	http://www.shodor.org/interactivate/activities/GeneralizedMontyHall/
Ken white's coin flipping page	http://shazam.econ.ubc.ca/flip/index.html
Las dos monedas	http://www.betweenwaters.com/probab/coingame/coinmainD.html
Let’s make a deal	http://www.stat.sc.edu/~west/javahtml/LetsMakeaDeal.html
Monedas	http://www.betweenwaters.com/probab/coingame/coinmainD.html
Monty Hall	http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_117_g_3_t_5.html?from=topic_t_5.html
Monty Hall Problem Demonstration	http://onlinestatbook.com/simulations/monty_hall/monty_hall.html
Monty Knows	http://math.ucsd.edu/~crypto/Monty/monty.html
Monty may puzzle	http://www.betweenwaters.com/probab/monty/montmainD.html
Monty's dilemma	http://www.mste.uiuc.edu/pavel/java/dilemma/index.html
Simple Monty Hall	http://www.shodor.org/interactivate/activities/SimpleMontyHall/
The gambler's ruin problem	http://math.ucsd.edu/~anistat/gamblers_ruin.html
The let's make a deal applet	http://www.stat.sc.edu/~west/javahtml/LetsMakeaDeal.html
The Monty Hall problem	http://people.hofstra.edu/Steven_R_Costenoble/MontyHall/MontyHallSim.html
The Monty Hall Problem	http://www.nytimes.com/2008/04/08/science/08monty.html?_r=1
The three door dilemma	http://www.dcity.org/braingames/3doors/index.htm
Three doors simulation	http://www.decisionhelper.com/montyhall.htm
Two colours	http://www.shodor.org/interactivate/activities/twocolors/

Figura 3.3.5. Two colours



3.4. EXPLORACIÓN DE CONCEPTOS

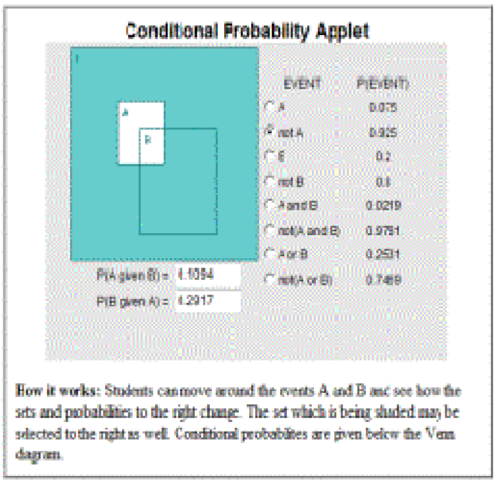
Incluimos en este apartado los recursos que pueden servir para visualizar algunos de los objetos matemáticos que se relacionan con la probabilidad condicional, o algunas de las propiedades o teoremas relacionados con los mismos. Dichos recursos permiten al estudiante variar diferentes datos, tales como el número de sucesos o las probabilidades de los mismos y ver el efecto de dicho cambio sobre otros sucesos y probabilidades. A continuación describimos algunos recursos en esta categoría.

Exploración de las operaciones con sucesos y sus probabilidades

En primer lugar analizamos un recurso (cuya pantalla principal se muestra en la figura 3.4.1) que permite explorar las operaciones entre dos sucesos.

Dirección en Internet: http://www.stat.tamu.edu/~west/Applets/Venn1.html

Figura 3.4.1. Pantalla del Conditional ProbabilityApplet



Descripción

El recurso muestra un diagrama de rectángulo con una partición del espacio muestral en un suceso A y su contrario no A y otro suceso B y su contrario. Las probabilidades de A y B y de sus contrarios están fijadas, mientras que las de las operaciones binarias con estos cuatro sucesos van a depender de su situación relativa en el espacio muestral.

Pinchando con el ratón, se puede también colorear diferentes sucesos, $A, B, \overline{A}, \overline{B}, A \cap B, \overline{A \cap B}, A \cup B$ y $\overline{A \cup B}$. La posición relativa de los sucesos A y B se pueden modificar moviendo el cursor, visualizando las probabilidades $P(A \cap B)$,

$P(\overline{A \cap B})$, $P(A \cup B)$ y $P(\overline{A \cup B})$. Este programa calcula automáticamente las probabilidades condicionales $P(B/A)$ y $P(A/B)$, aunque no muestra cómo se hace el cálculo sino tan sólo el resultado.

Un primer objetivo es que el alumno perciba el significado de la intersección, la unión y los complementarios y de cómo cambian las probabilidades según la posición relativa de los sucesos. También permite observar la diferencia entre *P(A/B)* y *P(B/A)*, ya que muchos estudiantes confunden estas dos probabilidades o las consideran iguales, según Einhorn y Hogarth (1986). Es decir muchos estudiantes no discriminan adecuadamente entre las dos direcciones de la probabilidad condicional *P(A/B)* y *P(B/A)*, error que Falk (1986) denomina *falacia de la condicional transpuesta.*

Otra posible aplicación sería comprobar que independencia no es lo mismo que mutua exclusividad. Moviendo los sucesos *A* y *B* hasta que no tengan intersección común (es decir sean mutuamente excluyentes) se observa claramente que tanto la probabilidad condicional $P(A/B)$ como la de la intersección $P(A \cap B)$ son nulas, aunque el producto de las probabilidades de los sucesos *A* y *B* no lo sea. Por tanto no se cumple la definición de independencia.

También se puede trabajar el error denominado falacia de la conjunción (Tversky y Kahneman, 1982b) o creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que la de uno de ellos por separado o la de su unión. Los estudiantes pueden experimentar que la intersección siempre tiene una probabilidad igual o menor que la de cualquiera de los sucesos.

Análisis matemático del recurso

El recurso es básicamente una visualización de las diferentes operaciones que se pueden formar con dos sucesos, y sus respectivas probabilidades. A partir de los sucesos A, B, $\overline{A}$ y $\overline{B}$ con $P(A)$, $P(B)$, $P(\overline{A})$ y $P(\overline{B})$ fijos, el Applet nos muestra directamente las siguientes propiedades:

- Descomposición de la probabilidad de la intersección:
  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
- Descomposición de la probabilidad de la unión:
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- Probabilidad del complementario:

  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

- Leyes de Morgan que permite calcular la `probabilidad del contrario de la unión e intersección

  $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B}) \quad o \quad P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$

- Cálculo de la probabilidad condicional a partir de la intersección

  $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Objetos matemáticos puestos en juego

Un resumen de los objetos matemáticos y significados implícitos en el recurso se presenta en la Tabla 3.4.1.

Dificultades posibles de los estudiantes

Una de las principales dificultades que pueden encontrar los estudiantes es la interpretación del lenguaje del Applet. En la columna de la izquierda aparecen diferentes operaciones con sucesos bajo la palabra "event" y las notaciones de las operaciones con sucesos, aunque intuitivas son correctas. Sin embargo, en la columna derecha sólo aparece mención a P(event), pero luego en cada fila no vuelve a aparecer la notación de probabilidad. Es por ello que los estudiantes podrían considerar todas las probabilidades listadas como probabilidades simples (en lugar de referirse a la probabilidad de la unión, intersección o contrario).

La notación coloquial para los sucesos intersección y la probabilidad condicional puede también ocasionar el error pues Einhorn y Hogarth (1986) sugieren que los enunciados que usan la conjunción "*y*" pueden llevar a confundir la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional.

Por otro lado, como no se puede cambiar el tamaño relativo de los sucesos A y B, se puede interpretar que la probabilidad solo depende de la posición relativa de los sucesos, aunque en realidad también dependería del tamaño de los sucesos en relación al espacio muestral.

Tabla 3.4.1. Objetos matemáticos implícitos en el recurso

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación
Situaciones-problemas	- Exploración de las operaciones entre sucesos y sus probabilidades	- Experimentación del cambio de probabilidades al cambiar la posición relativa de dos sucesos
Lenguaje	- Gráfico: Visualización mediante rectángulos	- Partición de un espacio muestral (A, no A; B, no B) - Intersección y unión de B con el suceso A - El área de rectángulo total sería la probabilidad 1
	- A, B	- Sucesos
	- A and B, not A and B	- Intersección de sucesos e intersección de complementarios;
	- Not A, not B	- Complementarios de los sucesos A y B
	- A or B, Not A or B	- Unión de los sucesos A y B
	- A given B, B given A	- Condición; hay una incorrección pues lo que se condiciona es la probabilidad no los sucesos
	- P(A), P(B), …	- Probabilidad de los sucesos
	- P (Event)	- Se refiere a las probabilidades de los sucesos listados en la pantalla;
	- Verbal	- Explicación de la situación
Conceptos	- Experimento aleatorio	- Experimento abstracto, no se concreta
	- Sucesos	- Cuatro partes en el espacio muestral, se trata de sucesos disjuntos dos a dos
	- Espacio muestral	- Conjunto de posibilidades
	- Complementarios	- El espacio muestral menos el suceso
	- Unión	- Suceso formado por el conjunto de todos los elementos que forman parte de cada suceso por separado
	- Intersección	- Suceso formado por el conjunto de todos los elementos comunes a los todos los sucesos
	- Partición	- El área de cada rectángulo y su complementario es igual al del rectángulo mayor
	- Probabilidad	- Medida relativa del área de cada parte respecto al total
	- Probabilidad condicional P(B/A)	- Medida relativa del área de $B \cap A$ respecto a cada parte A
Procedi-mientos	- Cambio de posición relativa con el cursor	- Se modifica el área de algunas regiones y su medida relativa respecto al total
	- Cálculo de probabilidades condicionadas	- Se aplicaría la fórmula; automático
	- Comparación de probabilidades	- Representación de las distintas probabilidades simples y condicionadas; automático; visualmente las puede comparar el alumno
	- Representación gráfica	- Diagrama
Propiedades	- La probabilidad condicional P(A/B) puede ser diferente de la probabilidad condicional P(B/A)	- La medida relativa del área de $B \cap A$ respecto a cada parte A puede ser diferente a la medida relativa del área de $B \cap A$ respecto a B
	- Independencia	- Cuando dos sucesos son independientes se muestra que la probabilidad condicional de B condicionado a A es igual a la probabilidad de B
	- Incompatibilidad	- Cuando dos sucesos son incompatibles se muestra que la probabilidad condicional de B condicionado a A es igual a cero
Argumentos	- Visualizaciones	- Definición visual de las distintos sucesos y de la relación entre ellos

Variantes y otros recursos de exploración

En la figura 3.4.2 mostramos un recurso que puede servir para explorar la idea de independencia. Los estudiantes deben imaginar una baraja de cartas que contienen tarjetas de color rojo y negro y hacer predicciones sobre la ocurrencia de diferentes sucesos. El porcentaje de tarjetas rojas puede ser modificado. Se trata de hacer concienciar a los estudiantes de que la probabilidad de cada suceso no varía en función de los resultados obtenidos.

Se les debe alentar a jugar el juego de varias maneras. En primer lugar, hacemos un ejercicio en el que la carta adivinada es la roja De esta manera se puede estimar la proporción de tarjetas rojas encubiertas. El mismo ejercicio puede ser realizado por adivinar el porcentaje de cartas de color negro. Al final del ejercicio, los estudiantes deben ser animados a reflexionar sobre la idea de independencia y sobre la existencia de sesgos tales como la falacia del jugador. También se puede hacer observar la estabilización de las frecuencias relativas a la larga, pero hacer notar las fluctuaciones en las series cortas de ensayos.

Figura 3.4.2. Card test Applet

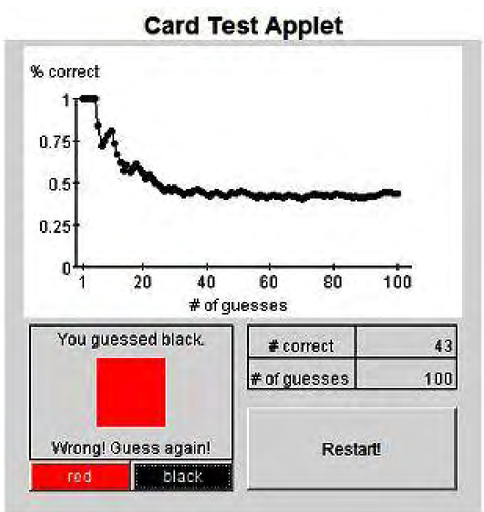
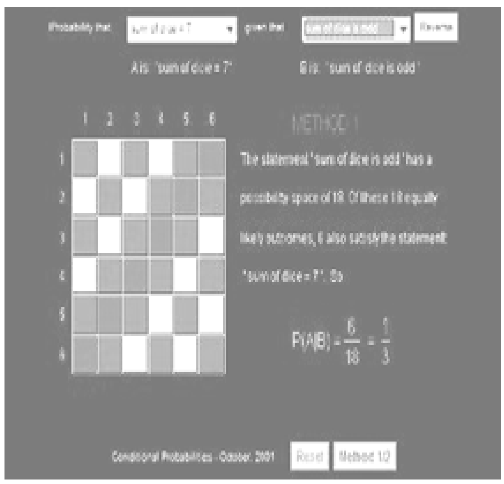


Figura 3.4.3. Conditional probability Applet



El recurso de la figura 3.4.3. consta de un cuadrado de seis por seis que representa las 36 posibilidades a la hora de tirar 2 dados de seis caras y nos permite investigar cómo se comportan las probabilidades condicionales. Hay 2 listas desplegables en la parte superior de la pantalla. Podemos hacer una elección de estas listas para ver los diferentes sucesos que se presentan en el Applet y decidir cual es el suceso condicionante. Cuando se haya elegido el suceso de cada lista, algunas de las celdas del cuadrado se colorearan de rojo o amarillo.

Los cuadrados de color representan el número de combinaciones de los dados que satisfagan la condición B (la segunda condición de la derecha de la lista desplegable). De estas celdas de color, el rojo representa las combinaciones, que también cumplen la primera condición (A).

Tabla 3.4.2. Recursos para visualización de la probabilidad condicional y otros objetos

Nombre	Dirección
Bayes Rule	http://www.bolderstats.com/gallery/prob/bayes.html
Birthday Demonstration	http://onlinestatbook.com/simulations/birthday/birthday.html
Cabri Java Applet	http://www.planetqhe.com/beta/compound%20events%20two/CabriJava%20Files/CAB.HTM
Card test Applet	http://www.stat.tamu.edu/~west/Applets/cardtest.html
Condicional probability demo	http://onlinestatbook.com/chapter5/conditional_demo.html
Conditional probability	http://www.rfbarrow.btinternet.co.uk/htmasa2/Prob2.htm
Conditional probability and independent events	http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Probability/ConditionalProbability.shtml
Conditional Probability and Multiplication Rule	http://www.spsu.edu/math/deng/m2260/stat/cond/cond.html
Conditional probability Applet	http://www.stat.tamu.edu/~west/Applets/Venn1.html
Conditional Probability Demo	http://onlinestatbook.com/simulations/conditional_p/conditional_p.html
Dice and conditional probability	http://www.math.fau.edu/Richman/Liberal/dice.htm
Dice Table	http://www.shodor.org/interactivate/activities/DiceTable/
Gamblers Fallacy Simulation	http://onlinestatbook.com/simulations/gambler_fallacy/gambler.html
Java Applets: TwoArm	http://www.dim.uchile.cl/~mkiwi/ma34a/libro/chapter4/TwoArm/TwoArm.html
Marbles	http://www.shodor.org/interactivate/activities/marbles/
Probabilty by	http://www-stat.stanford.edu/~susan/surprise/

Surprise	
Racing Game with One Die	http://www.shodor.org/interactivate/activities/RacingGameWithOneDie/
Random Birthday Applet	http://www-stat.stanford.edu/~susan/surprise/Birthday.html
Two Events: Conditioning	http://www.stat.wvu.edu/SRS/Modules/ProbLaw/GivenProb.html
Venn Conditional	http://www.bolderstats.com/gallery/prob/conditional.html
Venn Diagram	http://www.bolderstats.com/gallery/prob/venn.html
Venn Diagram Applet	http://www.teachers.ash.org.au/miKemath/VennDiagramApplet/VennGame.html
Venn Diagram Shape Sorter	http://www.shodor.org/interactivate/activities/ShapeSorter/
Venn Diagrams	http://www.shodor.org/interactivate/activities/VennDiagrams/
Venn Diagrams and Probability	http://www.stat.berkeley.edu/~stark/Java/Html/Venn3.htm

Existen dos métodos para calcular $P(A/B)$, uno de ellos implica contar los cuadrados de colores, el otro utiliza una fórmula. El Applet nos proporciona métodos para ver cómo se relacionan entre sí. Si pulsamos "Reverse", se intercambian las declaraciones *A* y *B*. Con lo que debemos detectar rápidamente que $P(A/B)$ no es, en general, igual a $P(B/A)$.

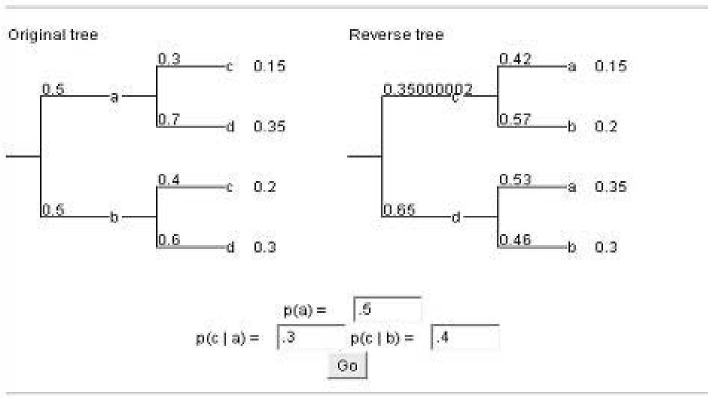
Finalmente, en la tabla 3.4.2 presentamos las direcciones de estos y otros recursos de exploración.

3.5. RECURSOS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Según Fischbein (1975), el diagrama en árbol facilita la resolución de problemas de probabilidad, aunque algunos autores han mostrado que los alumnos tienen dificultades en construir un diagrama en árbol adecuado al problema. En el Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile encontramos una ayuda para la construcción de estos diagramas, que mostramos en la Figura 3.5.1.

Dirección en internet:
http://www.dim.uchile.cl/~mkiwi/ma34a/libro/chapter4/Tree/Tree.html

Figura 3.5.1. Pantalla principal del recurso para construcción de diagramas en árbol



Descripción

Los gráficos de árbol son uno de los recursos más útiles para visualizar tanto situaciones de combinatoria como situaciones probabilísticas. En la terminología de Fischbein (1975) pertenecen a los "modelos esquemáticos" y presentan importantes características intuitivas. Fischbein comparte con Bruner la hipótesis de que una estructura puede manifestarse de diferentes formas: enactiva, icónica y simbólica sin cambiar, por ello, sus características esenciales. El uso de métodos adecuados de representación facilita y acelera el tránsito hacia la comprensión de un concepto. Entre las representaciones gráficas destaca el diagrama en árbol al que Fischbein considera un modelo generativo en cuanto sugiere y facilita una generalización iterativa (experimentos sucesivos con sus sucesos) generalización constructiva (experimento compuesto a partir del simple), ayudando a desarrollar el razonamiento recursivo. El diagramas de árbol según Fischein da a los conceptos un significado intuitivo que, por una parte, ayuda a su comprensión algebraica y, por otra, le va a dar un sentido a la fórmula de resolución. Ofrecen una representación de la estructura de la situación lo que contribuye a la inmediatez de la comprensión y a la búsqueda de la solución del problema. A pesar de esta importancia, Pesci (1994) demostró que los estudiantes tenían dificultades para construir diagramas de árbol adecuado para representar situaciones problemáticas y, así, el mismo gráfico es la causa de muchos errores.

Bayes Tree está pensado para ayudar en esta tarea. La pantalla presenta un diagrama de árbol con dos ramas, cada una de las cuales tiene dos bifurcaciones, por lo cual representa el espacio muestral en un experimento compuesto, donde cada experimento simple tiene dos sucesos.

El Applet presenta unas casillas donde se pueden introducir las probabilidades a priori *P(A)* y las probabilidades condicionales *P(C/A)* y *P(C/B)*. Una vez introducidos los datos, se presiona el botón "go" y el programa calcula las probabilidades conjuntas $P(A \cap C) = P(A)\ P(C/A)$ y $P(A \cap D) = P(A)\ P(D/A)$ etc., visualizándolas al final de cada rama del árbol. El Applet también incluye el árbol inverso que permite calcular las probabilidades condicionales inversas *P(A/C)*, *P(B/C)*, *P (A/D*. *P(B/D)*. Por tanto, puede ser útil para visualizar la solución de problemas de Bayes en caso de sólo dos sucesos en la partición del espacio muestral.

Análisis matemático del recurso

El recurso resume básicamente el teorema de Bayes y las propiedades de la probabilidad condicionada.

- Teorema de Bayes:

$$P(B_i / A) = \frac{P(A/B_i)P(B_i)}{\sum_i P(B_i)P(A/B_i)} = \frac{P(A/B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

- Cálculo de la probabilidad condicional a partir de la intersección:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Cálculo de la probabilidad de la intersección a partir de la condicional (variante)

$$P(A/B)P(B) = P(A \cap B) \text{ o } P(B/A)P(A) = P(A \cap B)$$

- Cálculo de la probabilidad simple a partir de la intersección y de la condicional (variante)

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A/B)} \text{ o } P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B/A)}$$

Objetos matemáticos puestos en juego

El análisis de este recurso muestra los siguientes objetos matemáticos implícitos:

Tabla 3.5.1. Objetos matemáticos implícitos en el recurso

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación
Situaciones-problemas	- Exploración del teorema de Bayes	- Experimentación de la descomposición de los sucesos al cambiar las probabilidades condicionadas y simples
Lenguaje	- Gráfico: Visualización mediante diagramas de árbol	- Partición de un espacio muestral en el experimento simple - Partición de un espacio muestral en el experimento compuesto - Descomposición de un experimento en probabilidades condicionadas - Posibles sucesos que originan un suceso dado
	- a, b, c	- Sucesos de la partición
	- c|b, c|a	- Condicionamiento de sucesos
	- P(a), P(c|b), P(c|b)	- Probabilidad simple y probabilidades condicionadas iniciales
	- Icónico	- Iconos que representan los sucesos y resultados
Conceptos	- Experimento aleatorio	- Experimento abstracto, no se concreta
	- Sucesos - Sucesos complementarios	- Cuatro sucesos en el espacio muestral - Los sucesos a y b son complementarios - Los sucesos c y d son complementarios
	- Probabilidad simple	- Probabilidad de cada elemento de forma independiente;
	- Probabilidad condicional	- Probabilidad de los elementos compuestos que forman el diagrama de árbol
	- Intersección de sucesos - Probabilidad conjunta	- Conjunto común de sucesos - Probabilidad de la intersección
Procedimientos	- Cambio de probabilidades iniciales con el cursor	- Se modifica el diagrama de árbol y las respectivas probabilidades simples y condicionadas
	- Cálculo de probabilidades condicionadas	- Se aplicaría la fórmula; automático
	- Cálculo de probabilidades inversas	- Se aplicaría la fórmula; automático
	- Comparación de probabilidades	- Representación de las distintas probabilidades simples y condicionadas; automático
	- Representación gráfica	- Diagrama de árbol; esquema
Propiedades	- La probabilidad condicional P(A/B) puede ser diferente a P(B/A)	- Se observa numéricamente
	- Teorema probabilidad total	- A partir de las distintas probabilidades representadas podemos calcular la probabilidad total
	- Teorema de Bayes	- A partir de las distintas probabilidades representadas podemos calcular la probabilidad condicional de cualquier suceso condicionado a otro
	- Independencia	- Cuando dos sucesos son independientes se muestra que la probabilidad condicional de un suceso condicionado a otro es igual a la probabilidad del primero
	- Incompatibilidad	- Cuando dos sucesos son incompatibles se muestra que la probabilidad condicional de de un suceso condicionado a otro es igual a cero
Argumentos	- Visualizaciones	- Definición visual de las distintos sucesos y de la relación entre ellos

Dificultades posibles de los estudiantes

La complejidad del problema radica en la falta de claridad del Applet, ya que no queda claro que probabilidad calcula. Los errores que pueden cometer los estudiantes a la hora de interpretar el Applet van desde identificar a y b como dos sucesos que no tienen nada en común (siendo uno el complementario del otro) o creer que el Applet representa cuatro sucesos distintos (siendo en realidad dos y sus complementarios).

Otro problema que se pueden dar a la hora de interpretar el diagrama es que en ningún momento aparece que significa ninguno de los valores que se calculan cuando se ingresan los resultados. Lo que lleva que se confunda por ejemplo *P(c)* con *P(c/a).*

Variantes

En la figura 3.5.2. se presenta conjuntamente el diagrama en árbol y tabla de doble entrada, que también es un recurso útil para resolver problemas de probabilidad, aunque Totohasina indicó que resalta mejor la intersección de sucesos que la probabilidad condicional. Escribimos los números en el interior de la tabla. Como se ve, el marginal de fila y columna de los totales se actualizan continuamente. Hacemos clic en el botón de calcular para el cálculo de las probabilidades y aparecerán en su lugar dentro del diagrama de árbol. Tiene la ventaja de presentar simultáneamente datos en frecuencias absolutas y en probabilidades por lo que según Martignon y Wassner (2002) facilitaría la resolución de los problemas.

Figura 3.5.2. Tree Diagram Applet

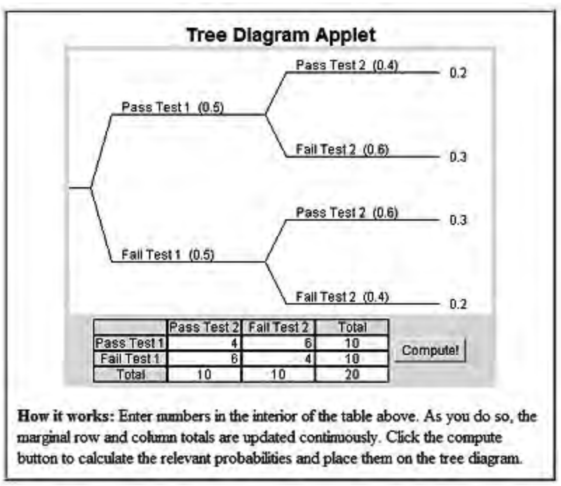
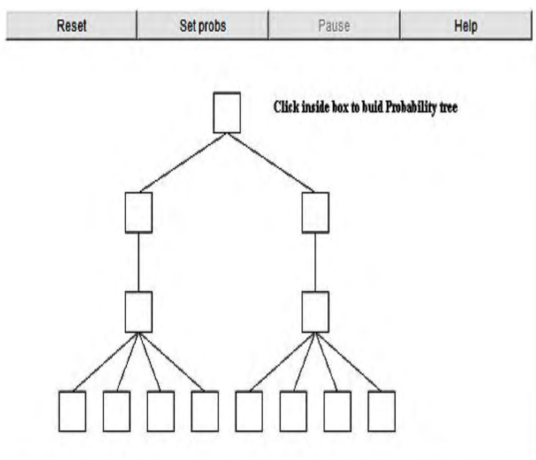


Figura 3.5.3. Building a probability tree



Se han encontrado otros ejemplos, tales como el presentado en la figura 3.5.3. que crea automáticamente diagramas en árbol que pueden ayudar a la interpretación de cómo se distribuyen los sucesos. Este recurso tiene la ventaja de permitir más de dos ramas en cada bifurcación del árbol, pero presenta el inconveniente que una vez que se subdivide una rama en cierto número de partes las ramas del mismo nivel se dividen igualmente Otros ejemplos los reproducimos en la tabla 3.5.2.

Tabla 3.5.2.

Nombre	Dirección
Bayes' Theorem Demonstration	http://onlinestatbook.com/simulations/bayes/bayes.html
Bayes Tree Building probability trees	http://www.bolderstats.com/gallery/prob/bayesTree.html http://www-stat.stanford.edu/~susan/surprise/ProbabilityTree.html
Libro de Probabilidades Universidad de Chile	http://www.dim.uchile.cl/~mkiwi/ma34a/libro/chapter4/Tree/Tree.html
Probability trees	http://www.geocadabra.nl/geocadabra_english_probabilitytree.htm
Tree Applet	http://www.stat.sc.edu/~west/Applets/tree.html

3.6. LECCIONES O LIBROS DE TEXTO

En este apartado encontramos versiones electrónicas de lecciones de probabilidad condicional o del teorema de Bayes que a veces forman parte de libros de Probabilidad completos. La ventaja que el libro electrónico aporta se debe, en primer lugar, al formato de hipertexto, que permite ampliar información sobre ciertos temas que aparecen marcados con hipervínculos, cuando lo desea el lector. Navegando a través de los hipertextos, el estudiante puede consultar temas de complejidad creciente, en forma más productiva de lo que se haría en un texto o incluso una enciclopedia. Además, estos libros o lecciones electrónicos incorporan recursos de visualización y exploración.

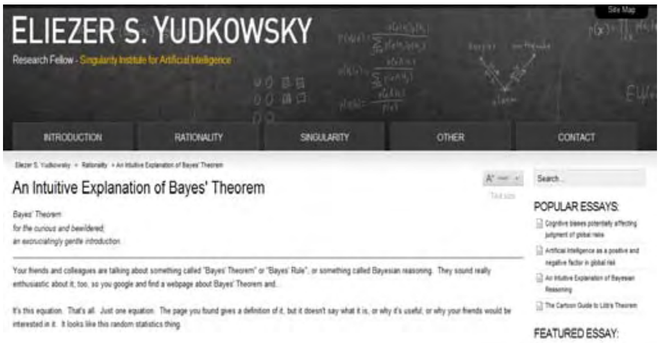
Direccion en Internet: http://yudkowsky.net/rational/bayes

Descripción

En la pagina web de Eliezer Yudkowsky, podemos encontrar ‘An Intuitive Explanation of Bayes Theorem’ un tratado sobre el teorema de Bayes dentro del contexto científico médico (con ejemplos aplicados al cáncer de mama), donde se explica en qué consiste la probabilidad condicional, se desarrolla con detalle el Teorema de Bayes y se explican las diferencias entre le razonamiento estadístico tradicional y el bayesiano. El recurso incluye numerosos ejemplos, con calculadores interactivos asociados, donde, además de comprobar la solución del ejemplo, pueden variarse los datos para ver cómo afectan a la solución. Proporciona también notas de humor para aligerar la exposición del tema.

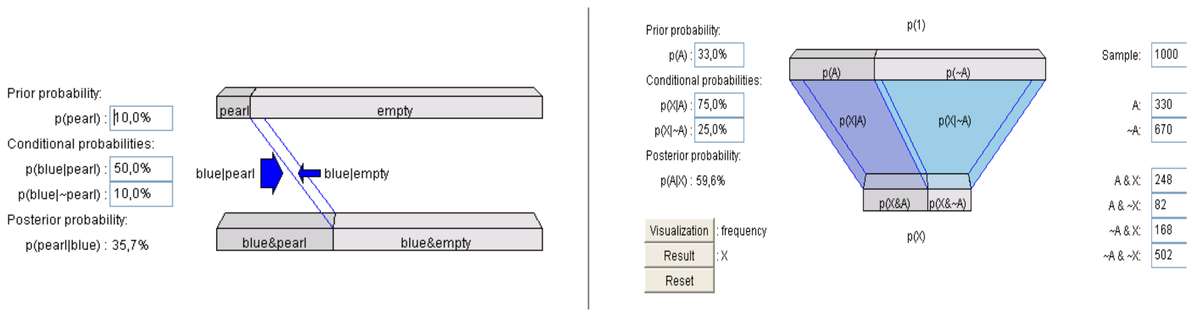
Un aspecto importante de esta página es el del uso de las tablas 2x2 que aparecen en la mayoría de los ejemplos. A partir de dicha tabla podemos utilizar todas las propiedades de la probabilidad condicionada tales como la intersección o el teorema de Bayes para aplicarlas en contexto médico.

Figura 3.6.1. An Intuitive Explanation of Bayes Theorem



El autor plantea cuestiones médicas tales como la siguiente: *"1% de las mujeres a la edad de cuarenta años que participan en una mamografía tienen cáncer de mama. 80% de las mujeres con cáncer de mama positivo dan positiva en una mamografía. 9,6% de las mujeres sin cáncer de mama también tendrá positivas mamografías. Una mujer en este grupo de edad dio positiva la mamografía. ¿Cuál es la probabilidad de que ella tenga realmente el cáncer de mama?"* donde se pueden observar elementos correspondientes a la probabilidad condicionada y a la relaciones que se dan entre las probabilidades.

Figura 3.6.2. Dos recursos de visualización en la lección



Otro aspecto importante que podemos observar en Internet es la descripción de los distintos errores que se pueden dar en este tipo de problemas, tanto a nivel estudiantes como a nivel profesional, tales como *"sólo alrededor del 15% de los médicos son capaces de resolver el problema de manera correcta"*. Además podemos encontrar calculadores para ayudarnos a comprobar como funcionan este tipo de problemas y explicaciones de cómo descomponer el problema de manera que la resolución de este sea lo más fácil posible. También se introducen recursos de visualización (Ver ejemplos en la figura 3.6.2).

Análisis matemático del recurso

El recurso resume el teorema de Bayes y el funcionamiento de la Estadística Bayesiana, sobre todo aplicada al análisis de tablas 2x2. A partir de los sucesos A y B_i con $P(A)$ y $P(B_i)$, el autor nos muestra como funcionan las diferentes propiedades de la probabilidad condicionada, aplicando estas propiedades a ejemplos médicos, sobretodo sobre cáncer. Para ello utiliza los siguientes elementos y propiedades matemáticas:

- Teorema de Bayes:

$$P(B_i / A) = \frac{P(A/B_i)P(B_i)}{\sum_i P(B_i)P(A/B_i)} = \frac{P(A/Bi)P(Bi)}{P(A)}$$

- Teorema de la Probabilidad Total:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i / A\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i / A)$$

- Cálculo de la probabilidad condicional a partir de la intersección

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ o } P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- Cálculo de la probabilidad de la intersección a partir de la condicional (variante)

$$P(A/B)P(B) = P(A \cap B) \text{ o } P(B/A)P(A) = P(A \cap B)$$

- Cálculo de la probabilidad simple a partir de la intersección y de la condicional (variante)

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A/B)} \text{ o } P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B/A)}$$

Objetos matemáticos puestos en juego

En la tabla 3.6.2. incluimos los objetos matemáticos y significados implícitos en el recurso. Nótese que la notación para el suceso intersección es incorrecta y no hay una notación específica para la probabilidad condicional.

Dificultades posibles de los estudiantes

Una de las principales dificultades que pueden encontrar los estudiantes es el hecho de que la notación y las definiciones son poco explicitas y a veces la forma en la que el autor se expresa parece poco seria. Aparte de lo poco formal de las explicaciones el autor intenta explicar el comportamiento del teorema de Bayes sin dar nociones básicas ninguna del comportamiento de la probabilidad, sus propiedades y sus definiciones. En consecuencia, aunque posiblemente el recurso es útil para médicos y otros profesionales de ciencias de la salud, quienes han de usar el teorema de Bayes en el diagnóstico, puede que los estudiantes no transfieran lo aprendido a otras situaciones de uso del teorema de Bayes. También podrían presentarse algunas de las dificultades ya descritas en relación a los recursos anteriores.

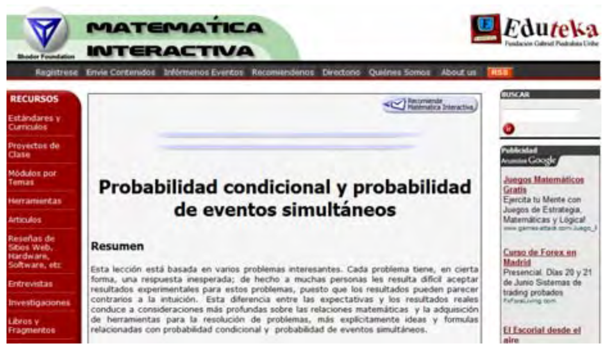
Tabla 3.6.2. Objetos matemáticos implícitos en el recurso

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación
Situaciones-problemas	- Exploración del teorema de Bayes	- Experimentación del cambio de probabilidades inversas al cambiar los datos
Lenguaje	- A, B, x	- Sucesos de la partición
	- A y B	- Intersección de sucesos
	- A |B, B |A, A|x, x|A	- Condición
	- P(A), P(B), …	- Probabilidad de los sucesos
	- Icónico	- Iconos que representan los sucesos y resultados
	- Verbal	- Explicación de la situación
Conceptos	- Experimento aleatorio	- Experimento abstracto, no se concreta
	- Sucesos	- Cuatro partes en el espacio muestral, se trata de sucesos disjuntos
	- Tablas 2x2	- Situación espacial de los sucesos
	- Complementarios	- El total menos el suceso
	- Unión	- Suceso formado por el conjunto de todos los elementos que forman parte de cada suceso por separado
	- Intersección	- Suceso formado por el conjunto de todos los elementos comunes a los todos los sucesos
	- Partición	- El área de los cuatro rectángulos es igual al del rectángulo mayor
	- Probabilidad	- Medida relativa de cada parte respecto al total
	- Probabilidad condicional	- Medida relativa de $B \cap A$ respecto a cada parte A o de B
	- Intersección de sucesos	- Conjunto común de sucesos
	- Cálculo de probabilidades condicionadas	- Se aplicaría la fórmula en los calculadores

	- Cálculo de probabilidades simples	- Se aplicaría la fórmula en los calculadores
	- Comparación de probabilidades	- Representación de las distintas probabilidades simples y condicionadas;
Propiedades	- La probabilidad condicional P(A/B) puede ser diferente de la probabilidad condicional P(B/A)	- La medida relativa del área de B∩A respecto a cada parte A puede ser diferente a la medida relativa del área de B∩A respecto a B
	- Teorema probabilidad total	- A partir de las distintas probabilidades representadas podemos calcular la probabilidad total
	- Teorema de Bayes	- A partir de las distintas probabilidades representadas podemos calcular la probabilidad condicional de cualquier A condicionado a B
	- Independencia	- Cuando dos sucesos son independientes se muestra que la probabilidad condicional de B condicionado a A es igual a la probabilidad de B
	- Incompatibilidad	- Cuando dos sucesos son incompatibles se muestra que la probabilidad condicional de B condicionado a A es igual a cero
Argumentos	- Visualizaciones	- Definición visual de las distintos sucesos y de la relación entre ellos

Variantes y otros ejemplos de lecciones o libros de texto

En la figura 3.6.3 mostramos una unidad de introducción a la probabilidad condicionada, el teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes obtenida de la página Descartes del Ministerio de Educación. En ella se supone el conocimiento de los conceptos elementales de la teoría de la probabilidad (suceso, operaciones con sucesos, etc.). La unidad tiene también una práctica para recordar las propiedades de la probabilidad y la relación con la unión e intersección de sucesos.

Figura 3.6.3. Probabilidad Condicional	Figura 3.6.4. Probabilidad condicional y probabilidad de eventos simultáneos
	

El recurso de la figura 3.6.3 encontramos una lección basada en varios problemas de probabilidad condicional, en particular el trabajo con experimentos compuestos.

Incluye situaciones que a muchas personas les resulta difícil de comprender ya que sus resultados experimentales pueden parecer contrarios a la intuición, con lo los podemos definir como paradójicos. Esta lección pretende conducir a consideraciones más profundas sobre las relaciones matemáticas y a la adquisición de herramientas para la resolución de problemas relacionados con probabilidad condicional y probabilidad de eventos simultáneos. Al terminar esta lección, se intenta que los estudiantes hayan aprendido la fórmula para la probabilidad de eventos simultáneos independientes.

Otros ejemplos

Se han encontrado otros ejemplos, que reproducimos en la tabla 3.6.3.

Tabla 3.6.3.

Nombre	Dirección
An Intuitive Explanation of Bayes' Theorem	http://yudkowsky.net/rational/bayes
Conditional Probability; Definitions and Interpretations	http://www.math.uah.edu/stat/prob/Conditional.xhtml
Contingency Tables	http://onlinestatbook.com/stat_sim/contingency/index.html
Probabilidad condicional y ejemplos	http://www.hrc.es/bioest/Probabilidad_15.html
Probabilidad condicional y probabilidad de eventos simultáneos	http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/lessons/pm4.html
Statmedia	http://www.ub.edu/stat/GrupsInnovacio/Statmedia/demo/Statmedia.htm
The Beginnings of Probability...	http://mathforum.org/isaac/problems/prob1.html
Hare and Tortoise	http://www.mathsonline.co.uk/nonmembers/resource/prob/chaseme1.html
Probability of Simultaneous Events Discussion	http://www.shodor.org/interactivate/discussions/ProbabilityOfSimulta/
Base Rates	http://onlinestatbook.com/chapter5/base_rates.html
The Probability of Penalizing the Innocent Due to Bad Test Results	http://www.intuitor.com/statistics/BadTestResults.html
Java Applets: Bayes	http://www.dim.uchile.cl/~mkiwi/ma34a/libro/chapter4/Bayes/Bayes.html
Conditional probability module	http://www.ibiblio.org/links/devmodules/condprob/index.html

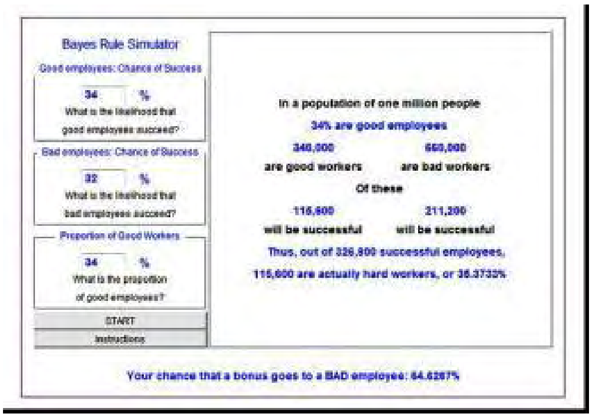
Conditional Probability and Conditional Distributions	http://www.math.unl.edu/~sdunbar1/Teaching/MathematicalFinance/Lessons/Conditionals/ConditionalProbability/condprob.shtml
Conditional Probability	http://www.cut-the-knot.org/Probability/ConditionalProbability.shtml
Conditional Probability	http://www.math.uah.edu/stat/prob/Conditional.xhtml
Conditional Probability and Independence	http://people.hofstra.edu/Stefan_Waner/tutorialsf3/unit6_5A.html
Conditional Probability	http://www.mathgoodies.com/lessons/vol6/conditional.html
Conditional Probability Investigation	http://www.saskschools.ca/curr_content/mathb30/prob/les5/invest3.htm

3.7. CALCULADORES

Algunos recursos son simplemente una ayuda en los cálculos. Entre ellos encontramos (Figura 3.7.1) el siguiente calculador de la probabilidad condicionada utilizando el teorema de Bayes.

Dirección en Internet: http://www.gametheory.net/Mike/applets/Bayes/WhoReward.html

Figura 3.7.1. Calculador de Bayes



El Applet consiste en un simulador de probabilidad condicionada a partir de un ejemplo sobre una empresa. Se desea recompensar los empleados con gran capacidad para el trabajo, con bonos. ¿Qué probabilidades hay de premiar a los buenos empleados y no a los empleados que no cumplen? A la izquierda, se introduce la posibilidad de "éxito" para cada tipo de empleado. Por ejemplo, el 80% en el primer cuadro significa que 20 veces de cada 100, una gran capacidad para trabajo no es reconocida, o el 25% significa que 25 de cada 100 personas trabajan duro. El estudiante puede comprobar los cambios en la probabilidad final cuando varía los datos del problema. Además puede utilizarlo como calculadora para resolver sus problemas de probabilidad condicional.

Análisis matemático del recurso

El recurso resume el teorema de Bayes a partir de un calculador que simula un ejemplo concreto sobre una empresa. Comenzando con dos sucesos, el Applet nos muestra los resultados del teorema de Bayes. Para ello utiliza los siguientes elementos y propiedades matemáticas:

- Teorema de Bayes:

$$P(Bi\ /\ A) = \frac{P(A\ /\ Bi)P(Bi)}{\sum_i P(Bi)P(A\ /\ Bi)} = \frac{P(A\ /\ Bi)P(Bi)}{P(A)}$$

Objetos matemáticos puestos en juego

A continuación incluimos la tabla de análisis de objetos matemáticos y significados implícitos en el recurso. Nótese que la notación para los sucesos es incorrecta y no hay una notación para la probabilidad condicional.

Tabla 3.7.1. Objetos matemáticos implícitos en el recurso

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación
Situaciones-problemas	- Exploración del teorema de Bayes	- Calcular la probabilidad condicionada a partir de sucesos simples
Lenguaje	- Buen empleado, mal empleado, proporción de buenos empleados	- Sucesos
	- Icónico	- Iconos que representan los sucesos y resultados
	- Verbal	- Explicación de la situación
	- Sucesos	- Conjunto del espacio muestral
	- Complementarios	- El total menos el suceso
	- Intersección	- Suceso formado por el conjunto de todos los elementos comunes a los todos los sucesos
	- Probabilidad	- Medida relativa de cada parte respecto al total
	- Probabilidad condicional	- Medida relativa de B∩A respecto a cada parte A o de B
	- Cálculo de probabilidades condicionadas	- Se aplicaría la fórmula en los calculadores
	- Cálculo de probabilidades simples	- Se aplicaría la fórmula en los calculadores
	- Comparación de probabilidades	- Representación de las distintas probabilidades simples y condicionadas;
Propiedades	- La probabilidad condicional P(A/B) puede ser diferente de la probabilidad condicional P(B/A)	- La medida relativa del área de B∩A respecto a cada parte A puede ser diferente a la medida relativa del área de B∩A respecto a B

	- Teorema probabilidad total	- A partir de las distintas probabilidades representadas podemos calcular la probabilidad total
	- Teorema de Bayes	- A partir de las distintas probabilidades representadas podemos calcular la probabilidad condicional
Argumentos	- Visualizaciones	- Definición visual de las distintos sucesos y de la relación entre ellos

Dificultades posibles de los estudiantes

Una de las principales dificultades que pueden encontrar los estudiantes es la notación ya que el ejemplo puede ser las definiciones de los sucesos son poco explicitas. Aparte el Applet intenta explicar el comportamiento del teorema de Bayes a través de un ejemplo, sin dar nociones básicas ninguna del comportamiento de la probabilidad condicionada, sucesos, etc. Por ello podrían aparecer de nuevo las dificultades descritas anteriormente en otros recursos.

Variantes y otros ejemplos de lecciones o libros de texto

En la figura 3.7.2 mostramos un calculador aplicado al juego de dados y a la probabilidad condicional. Se selecciona dos eventos de entre todos los posibles que podrían ocurrir al tirar un par de dados y que se despliegan al pinchar el color de cada dado. En los eventos del espacio producto se pueden seleccionar los distintos sucesos del experimento como puede ser que el color blanco sea 4 y la suma es 7. Podemos ver que hay 11 pares de valores con el elemento 4 y para las que 2 dan como suma 7. Por lo tanto, la probabilidad de que la suma 7, dado que aparece un 4, es 2 / 11. A partir de ejemplos de este tipo podemos comprobar cual es el funcionamiento y la relación de los sucesos en la probabilidad condicionada.

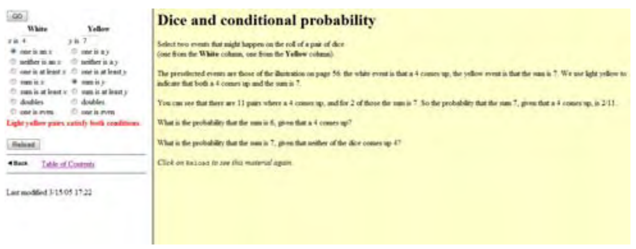
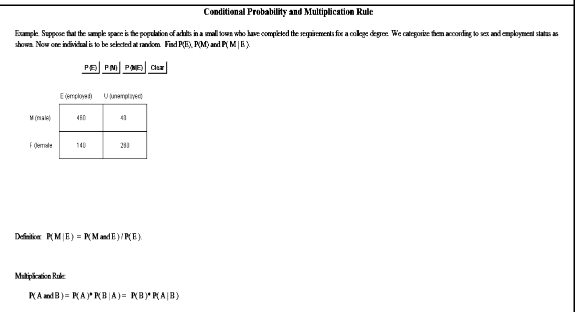
Figura 3.7.2. Probabilidad Condicionada	Figura 3.7.3. Conditional Probability and Multiplication Rule
	

Tabla 3.7.2. Calculadores de probabilidad condicional

Nombre	Dirección
Bayes Rule Applet: Who to Reward?	http://www.gametheory.net/Mike/Applets/Bayes/WhoReward.html
Bayes' Rule Calculator	http://stattrek.com/Tools/BayesRuleCalculator.aspx
Condition Probability Applet	http://www.ibiblio.org/links/applets/appindex/CommCh.html
Conditional Probability and Multiplication Rule	http://www.spsu.edu/math/deng/m2260/stat/cond/cond.html
Dice and conditional probability	http://math.fau.edu/Richman/Liberal/dice.htm
Joe's Conditional Probability	http://webspace.ship.edu/deensley/prep2008/participants/ Joyner%20-%20Probability_June%2012.html

El recurso de la figura 3.7.3 encontramos un calculador de probabilidad simple y condicionada aplicado a un ejemplo en el que se supone que el espacio muestral muestra la población de adultos en una pequeña ciudad que hayan cumplido los requisitos para un título universitario. Se clasifican los datos según el sexo y el tipo de empleo. Eligiendo una persona que se elegirán al azar podemos encontrar *P(E), P(M) y P(M | E).*

Otros ejemplos

Se han encontrado otros ejemplos, que reproducimos en la tabla 3.7.2

3.8. PROCESOS MATEMÁTICOS

De acuerdo a Godino, Font y Wilhelmi (2008), un segundo tipo de análisis didáctico es el de los p*rocesos matemáticos y conflictos semióticos*. En toda práctica interviene un *sujeto* (en nuestro caso los posibles alumnos que resuelven el problema). Este nivel de análisis se centra en los procesos que, efectivamente, intervienen en la realización de las prácticas previstas y los conflictos de los estudiantes.

Además de los objetos matemáticos ya descritos, los autores consideran procesos de *materialización – idealización*, *particularización – generalización*, *descomposición – reificación*, *representación – significación*, *personalización – institucionalización*. La finalidad es describir la complejidad de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos que se podrían producir en su realización.

Para finalizar el capítulo realizaremos ahora este análisis sobre el conjunto de applets presentados. En nuestro caso puesto que el análisis de los recursos se hace a priori, el estudio tendrá un carácter hipotético.

Podemos observar los siguientes procesos de *materialización-idealización* (es decir pasar de algo que se percibe a algo que no se percibe):

- Los objetos gráficos del Applet (puertas, premio, dados, bolas en urnas, cuadrados de una partición, ramas de un árbol) e incluso las acciones que realizamos con él (pinchar en una puerta, mover un cuadrado, añadir una rama al árbol introducir un dato en un calculador) son objetos visibles u ostensivos, pero representan a otros objetos u acciones (puerta en el concurso, coche o cabra reales; apuesta que se hace; dados, particiones de un conjunto, diagrama en árbol) que son imaginarios.
- Las operaciones aritméticas se representan simbólicamente; por ejemplo *1/3* representa la operación de dividir la unidad en tres partes y también el resultado de la división, que es un número real que no percibimos directamente. Igualmente las operaciones algebraicas de cálculo de probabilidades se representan simbólicamente.
- Los diferentes símbolos o palabras representan propiedades, conceptos u operaciones. Por ejemplo, $G = (G \cap A) \cup (G \cap B)$ representa en forma visible una propiedad matemática. La fórmula del teorema de Bayes representa en forma simbólica el enunciado del teorema y también la serie de operaciones de cálculo necesarias en su aplicación.
- El diagrama en árbol representa, por un lado la estructura del experimento (por pasos) y en cada paso, los resultados del experimento y sus probabilidades.

Procesos de particularización – generalización (dualidad extensivo – intensivo).

Es cuando pasamos de un caso particular, generalizando a una propiedad de un conjunto o viceversa, cuando una propiedad que sabemos es general, la aplicamos a un caso particular:

- Sabemos que la suma total de todas las probabilidades de los sucesos en un experimento es la unidad. Particularizando llegamos en el problema de Monty Hall a que la probabilidad inicial de elegir una de las tres puertas es *1/3*.

- Sabemos que la probabilidad de la intersección de sucesos independientes es el producto de probabilidades. Particularizando, llegamos a las probabilidades de las ramas finales en un diagrama en árbol.
- Al trabajar con el Applet en el problema de Monty Hall vemos que si cambiamos de puerta estamos obteniendo el doble de aciertos que si no cambiamos. Aunque no sepamos por qué, aceptamos (generalizando) que la probabilidad de acierto cambiando de puerta será el doble que si no se cambia. Al trabajar con el Applet que simula la realización de un experimento, observamos la estabilidad de las frecuencias a la larga; probando con varios sucesos y generalizando llegamos a una comprensión intuitiva de la ley de grandes números.
- Conocemos el axioma de la unión que se cumple en forma general. Para el problema de Monty Hall, en la solución formal 1 aplicamos el axioma de la unión al caso del suceso suma de dos sucesos (aunque se cumple para cualquier número de sucesos, acá particularizamos para 2).

Procesos de representación – significación.

Los procesos de representación y significación aparecen continuamente en el trabajo matemático, pues como no podemos operar directamente con objetos ideales, representamos las operaciones sobre los mismos por medio de símbolos o por medio de otros objetos. Es decir, o bien representamos un objeto abstracto de cierta manera o bien tenemos que interpretar (dándole un significado) una representación matemática:

- El juego real de Monty Hall lo representamos en el Applet mediante gráficos dinámicos; la elección de una puerta la representamos pinchando en el gráfico que representa esta puerta. Igualmente representamos la extracción real de bolas de una urna, la construcción real de un diagrama en árbol, lanzamiento de dados, etc.
- El objeto "probabilidad" lo representamos por la letra P; la probabilidad de un suceso que denominamos A lo representamos mediante $P(A)$. A (el suceso) a su vez representa un resultado en el juego, por ejemplo, ganar. Dependiendo del Applet, se representan los sucesos con cuadrados o regiones, ramas de un árbol, etc,

Procesos de descomposición – reificación (dualidad sistémica – unitario).

El alumno que trata de resolver el problema tiene que pasar constantemente de considerar objetos elementales (unitarios) a considerar objetos compuestos de varios objetos elementales (sistémico):

- Cada suceso del experimento consistente en elegir una puerta (o de uno de los otros experimentos) es elemental. Pero el espacio muestral del experimento (conjunto de las tres puertas) es sistémico.
- Cada resultado del juego de Monty Hall (ganar o perder) es elemental. Pero la frecuencia relativa o el porcentaje de veces que se gana o pierde se calcula como una operación sobre el total de los resultados al realizar *n* veces el experimento.
- Cada rama del diagrama en árbol es elemental, mientras que todo el diagrama en árbol es sistémico.
- En la solución formal 2 al problema de Monty Hall, cada valor de la variable aleatoria es elemental, mientras que la variable aleatoria y su distribución son sistémicos.

Procesos de personalización - institucionalización (dualidad personal – institucional).

Los autores indican que al comenzar un proceso de estudio será necesario lograr que los estudiantes asuman el problema y se involucren en su solución. Es lo que Brousseau (1998) denomina la *devolución* del problema. Pensamos que esto se consigue totalmente con el uso de estos recursos, pues el interés del alumno se centra en ganar, en el caso de los juegos o en explorar el recurso en los otros casos. y olvida que se trata de un problema matemático. Ha personalizado la situación.

El proceso inverso es pasar de lo personal a lo institucional. Esto lo logra el maestro cuando discute colectivamente con los estudiantes para decidir cuáles de las soluciones son correctas y por qué.

CAPITULO 4. CONCLUSIONES

4.1. INTRODUCCIÓN

Para finalizar el trabajo de investigación comentamos las conclusiones a las que hemos llegado, tanto a nivel de objetivos, como respecto a la idoneidad didáctica de los recursos trabajados en la enseñanza de la probabilidad condicional. Asimismo comentamos algunas posibles líneas de investigación para proseguir este trabajo.

4.2. CONCLUSIONES RESPECTO DE LOS OBJETIVOS

En primer lugar comentamos las conclusiones respecto a los objetivos presentados en el Capítulo 1 y que reproducimos aquí para facilitar la lectura.

- *Objetivo 1. Analizar el objeto matemático "probabilidad condicional", mostrando la red de objetos (conceptos, propiedades, problemas, representaciones y argumentos) ligados a una presentación elemental del tema.* Con ello pretendíamos comenzar el análisis del significado institucional de referencia en esta investigación.

Para lograr este objetivo, hemos creído oportuno realizar un resumen de todos los elementos y propiedades relacionados con la probabilidad condicional encontrados en un conjunto de libros de texto que consideramos apropiados, tanto a nivel de secundaria como a nivel universitario. En primer lugar se presenta en el Capítulo 1 las propiedades y conceptos, seguidamente los problemas y procedimientos, además de incluir elementos del lenguaje, tales como términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc. necesarios para resolver problemas, representarlos, generalizarlos o describirlos. Con ello se comienza a describir el significado institucional de referencia, que se refinará en la continuación de la investigación.

La conclusión que se obtiene de este análisis es que la probabilidad condicionada es uno de los conceptos más complejos, dentro del contenido de Probabilidad y Estadística en la Enseñanza Secundaria, por los muchos elementos que engloba y que el alumno ha de relacionar.

- *Objetivo 2. Obtener una primera perspectiva de la investigación en Psicología y Educación en relación a la probabilidad condicional.*

Para lograrlo, y partiendo de trabajos de síntesis anteriores en el Capítulo 2 hemos descrito las principales investigaciones relacionadas con la comprensión de la probabilidad condicional.

Como conclusión hemos comprobado que la probabilidad condicionada está íntimamente relacionada con errores comunes en el aprendizaje de los estudiantes, tanto a nivel conceptual (intercambio de sucesos en la probabilidad condicional; confusión de independencia y mutua exclusividad, confusión de probabilidad conjunta y condicional), como a nivel procedimental (aplicación del teorema de Bayes, resolución de problemas) e incluso de lenguaje. Son muchos también los sesgos de carácter psicológico (como la falacia de la condicional transpuesta, la falacia de la conjunción o del eje de tiempos) que no parecen mejorar con la enseñanza según Díaz (2007).

Por otro lado apenas hay investigaciones centradas en la enseñanza y no conocemos ninguna centrada en la preparación matemática o didáctica de los profesores. Por ello consideramos que sería interesante tocar estos aspectos en un trabajo futuro.

- *Objetivo 3. Realizar una búsqueda, clasificación y análisis de recursos de Internet que sean potencialmente útiles en la enseñanza de la probabilidad condicional.*

El objetivo de encontrar elementos en Internet que pudiesen ayudar a la comprensión de la probabilidad condicional se ha trabado de cumplir mediante una ardua tarea de búsqueda, clasificación, agrupación y análisis de los distintos recursos que se presenta en el Capítulo 3. El resultado ha sido un índice bastante amplio de recursos que proporcionan ayudas de aprendizaje, plantean una visión diferente del término probabilidad condicionada, plantean problemas paradójicos, permiten la graficación, simulación y experimentación y proporcionan al estudiante un aspecto visual del que carecen los libros de texto. Pensamos que un uso adecuado de estas ayudas, debidamente insertado en el proceso de aprendizaje ayudará al estudiante a comprender las propiedades y aplicaciones de la probabilidad condicional.

4.3. IDONEIDAD DIDÁCTICA DEL TRABAJO CON LOS RECURSOS

A continuación tratamos de usar la noción de idoneidad didáctica que generalmente se aplica a la valoración alguna situación didáctica, en el análisis de los recursos presentados en el capítulo 3. Usaremos como ejemplo el problema de Monty Hall (sección 3.3), aunque igualmente se aplicaría al resto de los recursos.

La idoneidad didáctica se define como la articulación de seis componentes (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005; Godino, Contreras y Font, 2006) cada uno de los cuales puede presentarse en mayor o menor grado. Para analizar si se verifican los diferentes tipos de idoneidad descritos en el punto anterior, los autores proporcionan unas guías de descriptores para poder valorar cada uno de los tipos de idoneidad. En el trabajo en el aula, se plantearía el problema a los estudiantes, dejando un tiempo para la posible solución. Seguidamente se discutirían con los estudiantes las soluciones correctas e incorrectas encontradas por los mismos, hasta lograr que se acepte alguna de las soluciones correctas.

El profesor ayudaría a analizar las causas de los errores y haría un resumen de lo aprendido. En caso de resistencia a la solución, se dejaría experimentar con la solución para que, al ver sus intuiciones refutadas por la evidencia empírica, los estudiantes tratasen de revisar la solución errónea y sus causas.

A continuación describimos y valoramos resumidamente los componentes de la idoneidad:

- *Idoneidad epistémica o matemática*: Se trata de ver si hay representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Pensamos que el Applet, junto con el proceso de estudio descrito podría tener una idoneidad matemática en el aprendizaje de los conceptos de: probabilidad condicional, experimento compuesto, dependencia e independencia y experimentos dependientes e independientes. Como vemos en la Tabla 3.3.3, esta idoneidad podría ser más o menos grande, dependiendo del tipo de solución encontrada. En general las soluciones formales tienen mayor idoneidad en un curso universitario y de formación de profesores, pero en un curso con chicos de secundaria, las soluciones intuitivas podrían ser suficientes. La solución empírica, tiene, en general, baja idoneidad matemática, a menos que se complemente con una solución intuitiva o formal.

- *Idoneidad cognitiva:* Mide el grado en que los significados pretendidos/ implementados son asequibles a los alumnos, así como si los significados personales logrados por los alumnos son los significados pretendidos por el profesor. Pensamos que la situación planteada tiene suficiente idoneidad en cursos de formación de profesores, sobre todo de profesores de secundaria. Asimismo podría tener idoneidad suficiente en los últimos cursos de secundaria o Bachillerato, pues los razonamientos descritos están al alcance de los alumnos.
- *Idoneidad interaccional*: Grado en que la organización de la enseñanza permite identificar conflictos semióticos y resolverlos durante el proceso de instrucción. Este tipo de idoneidad dependerá de cómo organiza el educador el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en grupos para que surja el conflicto y se explicite. Será importante también organizar una solución colectiva de las soluciones para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los puntos equivocados.
- *Idoneidad mediacional*: Disponibilidad y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. No se precisa de muchos recursos, pues incluso podría hacerse una simulación con objetos físicos. Pero, con un solo ordenador en el aula, donde los alumnos pueden jugar colectivamente se puede trabajar esta situación. La idoneidad aumentaría si se trabaja en el aula de informática donde cada alumno o profesor puede experimentar individualmente o por parejas con el recurso.
- *Idoneidad emocional:* Interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio. Pensamos que esta es la más alta de todas con este juego que sin duda intriga e interesa a todo el que trata de resolverlo.

Los componentes de idoneidad estudiados para el problema de Monty Hall se pueden extrapolar a otros recursos, siempre que su uso esté basado en situaciones didácticas apropiadas al mismo. La disponibilidad de recursos libremente accesibles en Internet hace que la cultura y la ciencia se están democratizando cada vez más, por lo que el aprendizaje se lleva a cabo no sólo en el aula tradicional (Galmacci, 2001). El uso de este tipo de recursos aumenta la motivación de los alumnos por el tema, ya que se presentan los conceptos de una forma más llamativa y permite al alumno adoptar un papel activo en su aprendizaje. Es por ello importante que el profesor tenga en cuenta estos recursos y los incorpore a su enseñanza.

4.4. POSIBLES LÍNEAS PARA CONTINUAR LA INVESTIGACIÓN

Para finalizar describimos brevemente los puntos sobre los que pensamos trabajar en una futura tesis doctoral.

En primer lugar se piensa continuar el análisis de los recursos didácticos relacionados con la probabilidad condicional en Internet, las posibles soluciones si se trata de problemas, como de los objetos matemáticos usados y posibles dificultades de los estudiantes. Todo ello con la finalidad de orientar a los profesores que deseen utilizar estos recursos.

Sin embargo, un recurso didáctico por si sólo no resuelve todos los problemas de aprendizaje. Se plantea, así el reto de diseñar unidades didácticas para la enseñanza de la probabilidad condicional en Educación Secundaria y Bachillerato que incorpore estos recursos. Asimismo sería necesario evaluar dichas unidades didácticas, en cursos con alumnos de estos niveles educativos. Sería también posible pensar en la enseñanza universitaria y realizar estudios de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad condicional utilizando recursos de Internet con este tipo de estudiantes.

Finalmente, el campo en que pensamos concretar nuestra futura tesis doctoral es la formación de profesores de Educación Secundaria y Bachillerato, pues la investigación sobre este punto es inexistente. Por un lado, nos podríamos concretar en la evaluación de los conocimientos matemáticos o didácticos de dichos profesores, para la cual sería necesario elaborar instrumentos adecuados de evaluación y analizar los resultados en muestras de profesores en formación o ejercicio.

Por otro, se podría diseñar unidades didáctica dirigidas a la preparación de estos profesores (tanto en el aspecto matemático como en el didáctico) basándonos en los recursos de Internet analizados y los resultados de la investigaciones presentadas en el Capítulo 2. En concreto nuestra intención en diseñar un curso que pueda realizarse a distancia, evaluar su efectividad con algunos profesores y ofertar libremente el material preparado en Internet a través de la página del grupo de investigación. Con ello cumpliríamos el requisito de elaborar una tesis en el tema específico del Proyecto SEJ-2007-60110, centrado en la formación de profesores y en el cual he recibido la beca de Formación del Personal Investigador BES-2008-003573.

REFERENCIAS

Albert, J. H. y Rossman, A. (2001). *Workshop statistics. Discovery with data. A bayesian approach.* Bowling Green. OH: Key College Publishing.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. y Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27 (2), 151 – 169.

Berry, D. A. (1995). *Basic statistics: A Bayesian perspective.* Belmont, CA: Wadsworth.

Bertrand, J. (1888). Calcul des probabilités. Paris : Gauthier Villars.

Biehler, R. (1997). Software for learning and for doing statistics». *International Statistical Review,* 65(2), 167-190.

Biehler, R. (2003). Interrelated learning and working environments for supporting the use of computer tools in introductory courses. En L. Weldon y J. Engel (Eds.), *Proceedings of IASE Conference on Teaching Statistics and the Internet*. Berlin: IASE. CD-ROM.

Bohl, A. H., Liberatore, M. J., y Nydick, R. L. (1995). A tale of two goats... and a car, or the importance of assumptions in problem solutions. *Journal of Recreational Mathematics,* 1–9.

Borovnik, M., Bentz, H. J. y Kapadia, R. (1991). A Probabilistic perspective. En R. Kapadia y M. Borovnick (Eds), *Chance encounters: Probability in education*. (pp. 27-72). Dordrecht: Kluwer.

Botella, J., León, O. G. y San Martín, R. (1993). *Análisis de datos en psicología I.* Madrid: Pirámide.

Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2007). *ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.*

Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2008). *ORDEN de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía*.

Cuadras, C. M., Echevarría B., Mateo, J. y Sánchez, P. (1988). *Fundamentos de estadística. Aplicación a las ciencias humanas.* Madrid: Promociones Publicaciones Universitarias.

Dantal, B. (1997). Les enjeux de la modélisation en probabilité. In *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 57-59). Reims: Commission Inter-IREM.

Devore J.L. (1998), *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. Internacional Thomson Editores.

Díaz, C. (2004). *Elaboración de un instrumento de evaluación del razonamiento condicional. Un estudio preliminar*. Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.

Díaz, C. (2005). Evaluación de la falacia de la conjunción en alumnos universitarios. *Suma*, 48, 45-50.

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005a). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, 59, 245-260.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005b). Recursos para la enseñanza del razonamiento bayesiano en Internet. Trabajo presentado en el Congreso Internacional: *El Profesorado ante el reto de las Nuevas Tecnologías en la Sociedad del Conocimiento.* Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Universidad de Granada. Granada, Marzo 2005.

Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. En D. Kahneman, P. Slovic y Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.

Einhorn, H.J. y Hogart, R.M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin.* 99, 3 –19.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Feller, W. (1973). *Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones.* México: Limusa.

Fiedler, K. (1988). The dependence of the conjunction fallacy on subtle lingüistic factors. *Psychological Research*, 50, 123-129.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* Dordrecht: Reide.

Galmacci, G. (2001). The impact of Internet on the researchers' training. En C.

Batanero (Ed.), *Training researchers in the use of statistics* (pp. 159-169). Granada: International Statistical Institute.

Gardner, M. (1959). Mathematical games. *Scientific American*, 1959, 180–182.

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). En G. Wright y P. Ayton (Eds.), *Subjective probability* (pp. 129-161). Chichester: Wiley.

Gigerenzer, G. y Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats (pp. 129-161). *Psychological Review*, 102, 684-704.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 22* (2 y 3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero**, C.** y Flores, P. (1999). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores. En *Homenaje al profesor Oscar Sáenz Barrio* (pp. 165-185). Granada: Departamento de Didáctica y Organización Escolar.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones,* 38, 25-48.

Godino, J., Wilhelmi, M. y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education,* 4(2), 1-26.

Gotzsche P. y Olsen, O. (2000). Is screening for breast cancer with mammography justifiable? *Lancet* 355, 129-34.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.

Gutiérrez R., Martínez A. y Rodríguez C. (1993). *Curso básico de probabilidad*. Madrid Ediciones Pirámide.

Hawkins, A. (1997). How far have we come? Do we know where we are going? En E. M. En E. M. Tiit (Ed.), *Computational statistics & statistical education* (pp. 100-122). Tartu: International Association for Statistical Education e International Association for Statistical Computing.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6*, 187 – 205.

Hwei P. y Hsu, Ph.D., (2003). *Theory and problems of probability, random variables, and random processes.* Ciudad: Schaum.

Kahneman, D., Slovic, P., y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.* New York: Cambridge University Press.

Kelly, I. W. y Zwiers, F. W. (1986). Mutually exclusive and independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory. *Teaching Statistics* 8, 96-100.

Kolmogorov A.N.(1956). Foundations of the theory of probability. Chelsea Publishing Company.

Lipschutz S., Lars M. (2001) *Schaum, Teoría de y problemas de probabilidad.* Macgraw-Hill.

Loeve M. (1975). *Teoría de la probabilidad* Madrid: Editorial Tecnos.

Huerta, M. P., Lonjedo, M.A. (2003) La resolución de problemas de probabilidad condicional, *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Granada.

Lonjedo, M. A, (2003) *La resolución de problemas de probabilidad condicional. Un estudio exploratorio con estudiantes de bachiller*. Universidad de València. Memoria de tercer ciclo.

Lonjedo M.A., Huerta M.P. (2005), La naturaleza de las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional. Su influencia en el proceso de resolución del problema. Simposio de la SEIEM.

Martin-Pliego F.J., Ruiz-Maya L. (2006), *Fundamentos de Probabilidad.* Internacional Thomson Editores.

Martignon, L. y Wassner, C. (2002). Teaching decision making and statistical thinking with natural frequencies. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics.* Ciudad del Cabo: IASE. CD ROM.

Maury, S. (1985). Influence de la question dans una épreuve relative á la notion d'independance. *Educational Studies in Mathematics,* 16, 283-301.

Maury, S. (1986). *Contribution à l'étude didacique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problémes.* Tesis doctoral. Universidad de Montpéllier II.

MEC (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.*

MEC (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.*

Mills, J. D. (2002), Using computer simulation methods to teach statistics: a review of the literature. *Journal of Statistics Education* 10(1).

Milton, S. J., Arnold J.C. (2004), *Probabilidad y estadística con aplicaciones para ingeniería y ciencias computacionales*. McGraw-Hill Interamericana.

Montgomery, D.C., Runger, G.C. (2002) *Applied statistics and probability for engineers*, New York: John Wiley.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Nortes Checa, A. (1993). *Estadística teórica y aplicada*. Barcelona: PPU.

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, 5, 37-55.

Ortiz J. J. (1999). *Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Peña, D. (1986). *Estadística. Modelos y Métodos 1. Fundamentos.* Madrid: Alianza Editorial.

Pesci, A. (1994). Tree graphs: use as an aid in casual compounds events. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the PME XVIII,* (v.4, pp. 25-32). Lisboa: Departamento de Educaçao. Universidade de Lisboa.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding Conditional Probabilities. *Organitation, Behavior and Human Decision Processes.* 40, 255 – 269.

Poularikas A. D. (1999). *The handbook of formulas and tables for signal processing.* Boca Raton: CRC Press.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en alumnos con preparación matemática avanzada.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Sacerdote, A. y Balima, G. (En preparación). *Estadística bayesiana.* Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires. On line: http://www.fi.uba.ar/materias/6109 /libro.html

Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Educación Matemática* (pp. 389-404). México.

Selvin, S. (1975a). A problem in probability. *American Statistician* 29(1):67

Selvin, S. (1975b). On the Monty Hall problem. *American Statistician* 29(3):134 (August 1975).

Spiegel, M. R. (2000). *Estadística.* Mc Graw Hill.

Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle.* Tesis Doctoral. Universidad Rennes I.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982a). Causal schemas in judgment under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982b). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Vallecillos, A (1994). *Estudio teórico experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-second Session of the International Statistical Institute* (Tome 58, Book 2) (pp. 201 – 204). Helsinki, Finland: International Statistical Institute.

Zwillinger; D. y Kokoska S. (2000). *Standard probability and statistics tables and formula,*. London: Chapman & Hall.

ANEXO.

TRABAJOS REALIZADOS DURANTE EL PERIODO DE MASTER

1. Arteaga, P., Contreras, J. M. y Ruiz (2008). Sentido numérico y elaboración de gráficos estadísticos. *Actas de las XIV Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas: Sentido Numérico* Granada: Sociedad Thales de Educación Matemática. CD-ROM.
2. Arteaga, P., Contreras, J. M. y Gonzato, M. (2009). Elaboración de gráficos estadísticos y sentido numérico en profesores en formación. Trabajo presentado en *las XIV Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.* Gerona: Federación Española de Profesores de Matemáticas.
3. Batanero, C., Contreras, J. M. y Arteaga (2009). Taller: Ideas estocásticas fundamentales. Trabajo presentado en las *XIV Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.* Gerona: Federación Española de Profesores de Matemáticas.
4. Contreras, J. M., Batanero, C. y Fernández, J. A. (2009). Problema de Monty Hall. Un análisis semiótico. *XIII Simposio de la SEIEM*, Santander. Comunicaciones en los grupos de trabajo.
5. Contreras, J. M., Batanero, C. y Fernández, J. A. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall. En L. Serrano (Ed.). Investigaciones en didáctica de la estadística.