ISSN 2255-5854



Actas de las Primeras Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria

J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga

Actas de las 1ª Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria

Número I, Año I vol 2
Junio 2013
Actas de las 1ª Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria
ISSN: 2255-5854
Depósito Legal: GR 446-2013

Editada por el Grupo de Investigación en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).
probabilidadcondicionada@jvdiesproyco.es
Telf. 958 243952
Facultad de Ciencias de la Educación.
Universidad de Granada, Campus Cartuja, C.P. 18071, Granada

Actas de las 1ª Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria

Número 1, Año I
Junio 2013

Editores:
José Miguel Contreras (Universidad de Granada)
Gustavo. R. Cañadas (Universidad de Granada)
María. M. Gea (Universidad de Granada)
Pedro Arteaga (Universidad de Granada)
Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada

Diseño:
José Miguel Contreras (Universidad de Granada)

Coordinadores Jornadas:
José Miguel Contreras (Universidad de Granada)
José María Cardeñoso (En comisión de servicio en la Universidad de Cádiz)

Coordinador Web Jornadas:
José Miguel Contreras (Universidad de Granada)

Comité organizador de las Jornadas:
Pedro Arteaga (Universidad de Granada), Gustavo Cañadas (Universidad de Granada), José María Cardeñoso (En comisión de servicio en la Universidad de Cádiz), José Miguel Contreras (Universidad de Granada), Carmen Díaz (Universidad de Huelva), Antonio Estepa (Universidad de Jaén), Assumpta Estrada (Universidad de Lleida), José Antonio Fernandes (Universidad de Minho), Ramón Gutiérrez (Universidad de Granada), Juan Godino (Universidad de Granada), Juan Jesús Ortíz (Universidad de Granada), Ernesto Sánchez (Cinvestav México), Luís Serrano (Universidad de Granada), Rafael Roa (Universidad de Granada) , Dra. Cristina Vargas (Universidad de Granada), Magdalena Gea (Universidad de Granada), Jesús del Pino (Universidad de Jaén), Emilse Gómez (Universidad Nacional de Colombia).

Comité científico (revista y jornadas):
Dr. Pedro Arteaga (Universidad de Granada), Dra. Carmen Batanero (Universidad de Granada), Dr. Gustavo Cañadas (Universidad de Granada), Dr. José María Cardeñoso (En comisión de servicio en la Universidad de Cádiz), Dr. Arcos Cebrián (Universidad de Granada), Dr. José Miguel Contreras (Universidad de Granada), Dra. Carmen Díaz (Universidad de Huelva), Dr. Antonio Estepa (Universidad de Jaén), Dra. Assumpta Estrada (Universidad de Lleida), Dr. José Antonio Fernandes (Universidad de Minho), Dr. Ramón Gutiérrez (Universidad de Granada), Dr. Juan Godino (Universidad de Granada), Dr. Francisco Ocaña Peinado (Universidad de Granada), Dr. Juan Jesús Ortíz (Universidad de Granada), Dr. Ernesto Sánchez (Cinvestav México), Dr. Luís Serrano (Universidad de Granada), Dr. Rafael Roa (Universidad de Granada), Dra. Cristina Vargas (Universidad de Granada).

La estadística ha jugado un papel primordial en el desarrollo de la sociedad moderna, al proporcionar herramientas metodológicas generales para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar de forma óptima experimentos, mejorar las predicciones y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. Esta relevancia ha producido un interés creciente por la enseñanza de la estadística, y en particular por la investigación en educación estadística. (Carmen Batanero)

Como coordinador de las Jornadas quiero agradecer la bienvenida que ha tenido esta nueva experiencia a todos los participantes de la primera edición. Me gustaría destacar que, aunque el trabajo no ha sido fácil, la recompensa de ver como este proyecto funcionaba nos dejó a más de uno sin palabras. Un resumen puede ser el siguiente: 275 participantes (que acreditaron su participación, 328 inscritos), 2.007 comentarios, 1.087 discusiones (líneas de comentarios), 13.646 visitas a la web en los tres días de jornadas, 268.408 páginas visitadas,... Otro aspecto destacable ha sido la valoración realizada por los participantes, con promedios superiores a 8,7 sobre 10 en todas las categorías.

En este segundo número se incluyen los trabajos completos (ponencias, comunicaciones y póster) de las Primeras Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.

José Miguel Contreras García
Coordinador de las 1ª Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria

Pueden obtener la versión electrónica de esta publicación en el sitio web:
http://www.estadis.net/grupo

Índice

Ponencias Invitadas

Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores	Godino, Juan D.	1
Hacia una Cultura Estadística	Olguin Scherffig, Mario	17
Intuições de alunos do 9º ano em independência e probabilidade condicionada	Fernandes, José António y Ferreira Correia, Paulo	19
La cuantificación del azar: Una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica de probabilidad	Sánchez, Ernesto y Valdez, Julio	39
Los fenómenos de cambio	Estepa Castro, Antonio	47
Sentido estadístico: componentes y desarrollo	Batanero, Carmen	55

Comunicaciones

A aprendizagem dos conceitos de população, amostra e amostra representativa no 8.º ano de escolaridade	Roque, Cristina y Ponte, João Pedro	65
A capacidade de interpretação gráfica dos alunos do 5.º ano na exploração de notícias da comunicação social	Gregório, M., Henriques, A., Ponte, J. P.	73
A organização conceptual dos estudantes, dada através das Redes Associativas Pathfinder, do conceito de Probabilidade: Um estudo com alunos do 9.º ano de Escolaridade do Ensino Básico Português	Almeida, Cesário, Casas García, Luis y Luengo González, Ricardo	83
Actitudes, experiencia previa y nivel de logro en Estadística en la carrera de Psicología	Bologna, Eduardo León y Vaiman, Marcelo	91
Análisis de la presentación de la probabilidad condicionada en libros de texto de 2º de bachillerato	Cantero Tomás, Ángel	105

Aplicación de la Encuesta de Estructura Salarial en un grupo de alto rendimiento en Enseñanza Secundaria	López Iñesta, Emilia y Bolufer Costa, Mª Dolores	113
Atividades de interpretação de gráficos de barras e linhas: o que sabem os alunos do 5º ano?	Evangelista, Maria Betânia	121
Auxiliando alunos do 4º ano do Ensino Fundamental no desenvolvimento do pensamento estatístico	Conti, Keli Cristina; Pereira, Eduardo L.; Carvalho, Dione L. de y Carvalho, Carolina	129
Comparación entre los contenidos del currículo chileno y español en el área de estadística y probabilidad	Morales Merino, Rodolfo y Ruiz Reyes, Karen	137
Compreensão de escalas representadas em gráficos por alunos adultos pouco escolarizados	Bezerra, Lucicleide y Guimarães, Gilda	143
Concepción de una competencia estadística para el estudiante de doctorado en Ciencias Pedagógicas	Gorina Sánchez, Alexander y Alonso Berenguer, Isabel	149
Conocimiento de contenido estadístico de los maestros	Sanoja de Ramírez, Julia y Ortíz Buitrago, José	157
Conocimiento matemático y didáctico en profesores de primaria para la enseñanza de las probabilidades	Vásquez Claudia y Alsina Angel	165
Desafíos de la enseñanza de la estadística basada en proyectos	Godino, Juan D.; Arteaga, Pedro; Estepa, Antonio y Rivas, Hernán	173
Desarrollo teórico del tema de combinatoria presente en algunos libros de texto de matemática de educación secundaria en España	Espinoza González, Jonathan y Roa Guzmán, Rafael	181
Descripción de la variabilidad estadística de datos en el contexto de una situación de tratamientos médicos	Orta Amaro, José Antonio y Fernández Delgado, Gilberto	189
Dificultades de estudiantes de psicología en relación al contraste de hipótesis	Vera, Osmar y Díaz, Carmen	197
Dificultades de estudiantes mexicanos que concluyeron el bachillerato para resolver problemas ternarios de probabilidad condicional	Inzunsa Cazares, Santiago y Huerta Palau, Pedro	205
Educação estatística crítica no contexto da educação a	Zampieri, Maria Teresa y Javaroni,	213

distância	Sueli Liberatti	
El centro de recursos CRDM-Guy Brousseau y el análisis estadístico implicativo como herramienta en la formación de profesores	Orús Báguena, Pilar; Peydró Pons, Laura y Gregori Huerta, Pablo	221
El histograma como un instrumento para la comprensión de las funciones de densidad de probabilidad	Behar Gutiérrez, Roberto y Grima Cintas, Pere	229
El humor en el aula de Estadística	Guitart Coria, Mónica y Flores Martínez, Pablo	237
El uso de Geogebra como herramienta para el aprendizaje de las medidas de dispersión	Del Pino, Jesús	243
El uso de las situaciones aleatorias en la enseñanza de la probabilidad	Osorio Gonzales, Augusta	251
Estrategias y conflictos semióticos de estudiantes de psicología al evaluar un problema de independencia	Cañadas de la Fuente, Gustavo R. y Gea Serrano, M. Magdalena	257
Estudio comparativo de los currículos de probabilidad y estadística español y americano	Jaldo Ruiz, Pilar	265
Evaluación de errores de profesores de matemática en tareas de alfabetización estadística y de razonamiento estadístico	Tauber, Liliana Mabel; Cravero, Mariela y Redondo, Yanina	273
Evaluación de respuestas a una tarea de recuento	Wilhelmi, Miguel R.; Belletich, Olga; Lasa, Aitzol y Reina, Luis	285
Evolución del nivel competencial estadístico de los alumnos de Secundaria Obligatoria	Vega Quirós, María; Azcárate, Pilar Goded y Cardeñoso Domingo, José María	293
Experiencia de implementación de múltiples estrategias de enseñanza en cursos de probabilidad y estadística para ingeniería	Giuliano, Monica; Pérez, Silvia N.; Sacerdoti, Aldo; Gil, Myrian; Bosio, Agustín y Fernández Ussher, Juan Manuel	301
Exploración de conceptos de probabilidad con Geogebra	Mercado Martínez, Miguel	309
Explorando compreensões sobre amostragem com uma professora utilizando o software TinkerPlots 2.0	Martins, Niedja Pereira; Monteiro, Carlos Eduardo Ferreira y Queiroz, Tamires Nogueira	319

Fases en la resolución de problemas de probabilidad condicional y variables de investigación	Huerta Palau, M. Pedro y Arnau Bresó, Joaquín	327
Formação estatística dos licenciandos em matemática no Brasil	Bezerra, Lucicleide y Gitirana, Verônica	335
Inferencias estadísticas informales en estudiantes mexicanos	García Ríos, V. Nozair	343
Formação estatística dos licenciandos em matemática no Brasil	Bezerra, Lucicleide y Gitirana, Verônica	359
La aleatoriedad desde la perspectiva de los estudiantes del profesorado de Matemática	Moreno, Amable; Cardeñoso, José María y González García, Francisco	367
La organización de datos bidimensionales en libros de texto de Bachillerato	Gea Serrano, M. Magdalena; Batanero Bernabeu, Carmen; Cañadas de la Fuente, Gustavo R. y Arteaga Cezón, Pedro	373
La relación entre la variable aleatoria y la variable estadística: un análisis epistemológico disciplinar	Ruiz Hernández, Blanca y Albert Huerta, José Armando	383
Las preguntas del examen de estadística descriptiva	Salcedo, Audy	391
Los gráficos estadísticos en las directrices curriculares para la Educación Primaria en España y Colombia	Castellanos Sánchez, María Teresa y Arteaga Cezón, Pedro	397
Metodologías activas en el análisis multivariante	Gutiérrez Jáimez, Ramón; Gutiérrez Sánchez, Ramón y Linares Pérez, Josefa	405
Niveles de razonamiento frente a problemas binomiales	Mayén Galicia, Silvia, Salazar Nájera, Ariana y Sánchez Sánchez, Ernesto	409
Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a una situación básica de variable aleatoria y distribución	García, Jaime y Sánchez, Ernesto	417
Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre problemas binomiales	Landín Vargas, Pedro Rubén	425
Nuevos métodos para la enseñanza de muestreo con R: el paquete ‘TeachingSampling’	Arcos, Antonio; Rueda, María del Mar y Molina, David	433

O conhecimento didático do professor no ensino da variação estatística	Quintas, Sandra; Tomás Ferreira, Rosa y Oliveira, Hélia	439
O conhecimento estatístico para ensinar de dois futuros professores a partir da análise de episódios de sala de aula	Henriques, A. y Oliveira, H.	447
O desenvolvimento de investigações estatísticas: Um estudo com futuros professores e educadores	Santos, Raquel y Ponte, João Pedro	455
O ensino da estatística no ensino superior em Portugal: o caso de uma professora	Felgueiras, Óscar	463
O ensino de estatística no ensino médio utilizando medidas biométricas	Oliveira Júnior, Ailton Paulo, Miziara, Eduardo Luiz y Amaral, Paloma Lima	473
O jogo MAX_MIN - Estatístico	Lopes, José Marcos	481
O que aprendem os professores uns com os outros? O trabalho colaborativo como forma de promover o desenvolvimento do conhecimento estatístico para o ensino	Caseiro, Ana; Ponte, João Pedro y Monteiro, Cecília	489
O uso de simulações para desenvolver a noção de probabilidade e a capacidade de resolução de problemas	Fernandes, Cláudia y Ponte, João Pedro	497
Pegada ecológica: tarefas estatísticas	Raposo, Sónia; Nascimento, Maria; Estrada, Assumpta y Martins, Alexandre	505
Potencialidades do uso da folha de cálculo na construção de tabelas e gráficos estatísticos	Fernandes, José António; Pereira de Vasconcelos, António y Vasconcelos Pereira Gonçalves, Catarina	515
Práticas profissionais dos professores do 1.º ciclo com representações estatísticas	Velez, Isabel y Ponte, João Pedro	523
Prueba exploratoria sobre competencias de futuros maestros de Primaria: Conocimiento del bloque relativo al tratamiento de la información, azar y probabilidad, en el currículo escolar de Matemáticas	Anasagasti Aguirre, Jon y Berciano Alcaraz, Ainhoa	531
Razonamiento Combinatorio y el currículo español	Fernández Millán, Elena	539

Reflexões de docentes sobre o ensino de combinatória: transitando entre conhecimento pedagógico e do conteúdo	Arimatéa Rocha, Cristiane de y Souza Rosa Borba Rute Elizabete de	555
Significado de la probabilidad frecuencial en futuros profesores	Ortiz de Haro, Juan J.; Mohamed Maanan, Nordin y Serrano Romero, Luis	563
Significados de la probabilidad en el currículo español para la educación primaria	Gómez, Emilse y Contreras, José Miguel	571
Técnicas Monte Carlo para la enseñanza de la estadística	Bueno Pérez, F.M. Alexander y Manzano Diosdado, Daniel	579
Un escenario de investigación para el desarrollo de una educación estadística crítica en el nivel medio	Magallanes, Adriana; Colaneri, Daríor y Rodrígruez, María Inés	587
Una comparativa sobre la enseñanza virtual en asignaturas de muestreo en diversos niveles educativos	Arcos, Antonio; Rueda, María del Mar y Molina, David	595
Una propuesta para la enseñanza del teorema de Bayes a través de un juego de dados y de resolución de problemas	Lopes, José Marcos	601

Pósters Virtuales

Análisis de un Recurso para el Cálculo de Probabilidades en Experimentos Sencillos	Ruiz Reyes, Karen y Contreras García, José Miguel	603
Aplicaciones de la estadística a otras áreas: ¿Es necesaria la estadística en la historia del arte?	Contreras García, Javier	605
Aprendiendo Probabilidad en la Web	Lara Porras, Ana María; Román Montoya, Yolanda y Pérez Bueno, Fernando	607
Babelomics: una herramienta web para la enseñanza del análisis estadístico de datos genómicos	García-García, Francisco; Marbà Maya, Martina y Montaner González, David	609
Cálculo de la probabilidad condicional y de Bayes en hoja de cálculo	Anjo, Álvaro	611
Cognición situada y enfoque sociocultural Vigotskiano en la	Obando Bastidas, Jorge Alejandro y	613

enseñanza de la estadística	Sanchez Castellanos, Maria Teresa	
Diseño de herramientas interactivas orientadas a la resolución de problemas de estadística en el ámbito de las ciencias del deporte	López-Iñesta, Emilia y Zacarés González, Mario	615
Educação Estatística e uso de software educativo para análise de dados	Campêlo, Siquele R. Carvalho y Liliane, M. T. Lima	617
El blog como medio de difusión de la Estadística	Salmerón, R. y Ocaña-Peinado, F. M.	619
El uso de software libre en la enseñanza de la Estadística	García Rubio, Noelia; Gámez Martínez, Matías; Alfaro Navarro, José Luis y Alfaro Cortés, Esteban	621
Empleo de OCW-UPM en la docencia de Estadística aplicada para estudiantes de posgrado	Ayuga Téllez, Esperanza y González García, Concepción	623
Enseñanza de la Estadística en la formación de matronas de la Comunidad Valenciana	García García, Francisco	625
Enseñanza no presencial de la estadística a través del uso de herramientas web	Tarazona Campos, Sonia	627
Estadística en una Tablet: APPES	Ruiz Castro, J.E.; Aguilera, A.M.; Escabias, M.; García Montero, J. y Raya Miranda, R.	629
Evaluación de competencias en la asignatura Cálculo de Probabilidades I	Rosales Moreno, María Jesús; Huete Morales, María Dolores; Quesada Rubio, José Manuel; Del Moral Ávila, María José y Navarrete Álvarez, Esteban	631
Formación permanente del profesorado de matemática en la enseñanza de la estadística Caso: l.b. pbro. Manuel Arocha	Santamaría L., María B, Sanoja de Ramírez, Julia	633
La aventura del azar: aprender estadística experimentando	Torrado Robles, Nuria y Huertas Cejudo, Edmundo José	635
O Ensinar e o Aprender Estatística em uma Ação Pedagógica Fundamentada na Teoria da Biologia do Conhecer	Samá Pinto, Suzi; Porciúncula da Silva, Mauren Moreira y Pereira Laurino, Débora	637
O ensino da Inferência Estatística em cursos de graduação: um	Henning, Elisa; Konrath, Andréa Cristina y Ramos, Marcelo Sávio	639

estudo de caso		
Olimpíada de Estadística: un recurso para fomentar el desarrollo de la cultura estadística	Rodríguez, María Inés y Herrera, María Inés	641
Probabilidades e cidadania nas aulas de matemática: uma combinação impossível?	Mourinha, Carlos	643
Problemas que involucran probabilidad en las pruebas de acceso a la Universidad en el Distrito Andaluz	Carretero Rivas, Magdalena S. y Contreras García, José Miguel	645
Recursos didácticos para la enseñanza del paquete estadístico SPSS en el Grado de Logopedia	Vargas, Cristina; Cañadas, Gustavo R.; Aguayo, Raimundo; Cañadas, Guillermo A.; Pérez, José M. y De la Fuente, Emilia I.	647
¿Se plantea una necesidad de formación estadística en el Grado de Maestro?	Arteaga Martínez, Blanca y Navarro Asencio, Enrique	649
Uma visão da Educação Estatística no Extremo Sul da Costa do Brasil	Samá Pinto, Suzi y Porciúncula da Silva, Mauren Moreira	651
Un recurso para la enseñanza de la Estadística: video tutoriales para las prácticas de ordenador	Caballero Águila, Raquel; Martínez Rodríguez, Ana María y Oya Lechuga, Antonia	653
Una experiencia didáctica en la enseñanza de los modelos Binomial y Poisson para el estudio de patrones de dispersión espacial	Nóbrega Suárez, José Renato	655
Wonderland… attitudes towards statistics of portuguese university students	Nascimento, Maria; Estrada Roca, Assumpta y Martins, J. Alexandre	657

Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores

Juan D. Godino
Universidad de Granada

Resumen

La investigación sobre diseño y análisis de tareas en educación matemática está siendo promovida en distintos foros y publicaciones internacionales. Constituye el núcleo central de la ingeniería didáctica y de manera más general de la metodología de investigación basada en el diseño. En este trabajo mostramos la aplicación de algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática para el diseño y análisis de tareas dirigidas a la formación matemática y didáctica de profesores. Más concretamente usamos la noción de idoneidad didáctica para proporcionar criterios para el diseño de tareas y la herramienta configuración de objetos y procesos para realizar análisis detallados de los conocimientos puestos en juego en su resolución. El análisis metodológico realizado se contextualiza en una secuencia de tareas, derivadas del experimento de observar la suma de puntos al lanzar dos dados, que pretenden desarrollar componentes del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de educación primaria sobre estocástica.

Palabras claves: formación de profesores, tareas matemáticas, enfoque ontosemiótico, conocimiento didáctico-matemático, probabilidad

Abstract

Tasks design and analysis to develop teachers' didactical-mathematical knowledge

Research on task design and analysis is being promoted in various mathematics education international forums and publications. It is the core of didactic engineering and more generally of design based research methodology. In this paper we apply some theoretical tools from the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction to the design and analysis of tasks aimed at teachers' education in mathematics and didactic of mathematics. More specifically we use the notion of didactical suitability to provide criteria for task design, and the configuration of objects and processes to analyze in detail the knowledge involved in its resolution. A sequence of tasks, derived from the experiment consisting in observing the sum of points in throwing two dice serves to contextualize the methodological analysis, which seeks to develop the stochastic knowledge for teaching of prospective primary school teachers.

Key words: teachers' education, mathematics tasks, onto-semiotic approach, didactic-mathematical knowledge, probability

1. Introducción

El diseño y análisis de tareas en educación matemática está recibiendo recientemente una atención especial a nivel internacional, como se muestra en los trabajos presentados en el "Topic Study Group 31, Task Desing and Analysis" del congreso ICME 12 (Seul, Corea, 2012), que fue continuación del TSG 34 organizado sobre el mismo tema en el congreso ICME 11 (Monterrey, México, 2008). Otro indicador del interés del tema es la convocatoria

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 1-15). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

de un ICMI Study[1] sobre diseño y análisis de tareas, cuya conferencia inicial tendrá lugar en Oxford en 2013. Igualmente, encontramos la publicación del triple número especial sobre esta temática en la revista *Journal of Mathematics Teacher Education* (2007).

En estas reuniones y publicaciones se convoca a investigadores, profesores y expertos en el desarrollo de recursos para la enseñanza para investigar de manera sistemática sobre el diseño y análisis de tareas matemáticas. Se esperan aportaciones, apoyadas empíricamente, que subrayen los principios de diseño, los enfoques teóricos usados y proporcionen ejemplos de tareas diseñadas para promover el aprendizaje matemático. De manera específica en el TSG 31 del ICME 12 se propusieron los siguientes temas:

1. Desarrollos teóricos y prácticos que guíen el diseño y análisis de tareas.
2. Análisis de diversas aproximaciones y tradiciones que guían el diseño/análisis de tareas y de sus explicaciones teóricas.
3. Propuestas de ejemplos de análisis de tareas, que estudien las relaciones entre las tareas, el desarrollo psicológico, y el desarrollo matemático.
4. Estudios críticos de la literatura o meta-análisis del diseño y análisis de tareas.

En el TSG 34, ICME 11 (http://tsg.icme11.org/tsg/show/35) se hizo referencia a la diversidad de tipos de tareas usadas en educación matemática: problemas, tareas realistas, tareas prácticas, tareas ricas en tecnología, tareas que provocan conflictos cognitivos, secuencia de cuestiones que apoyan la comprensión conceptual, tareas rutinarias, tareas no rutinarias, tareas de aplicación, etc. Aunque este listado de tipos de tareas es muy diverso se entiende que no se trata simplemente de "cosas que hay que hacer", sino de actividades que sean cruciales para enmarcar la actividad matemática que se debe poner en juego.

Conviene tener en cuenta, no obstante, que el tema no se puede considerar como algo novedoso ya que el diseño y análisis de tareas viene siendo central en diversos enfoques teóricos como, por ejemplo, en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD, Brousseau, 1998), en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999), en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS, Godino, Batanero y Font, 2007), o en el marco de la "Educación Matemática Realista" (Van den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005). El enfoque metodológico de la *ingeniería didáctica* (Artigue, 2011), basada en la TSD, y de manera más general las *investigaciones basadas en el diseño* (IBD, Kelly, Lesh y Baek, 2008), conceden un papel esencial a la selección y el análisis de las situaciones-problemas/tareas como punto de partida de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La metodología de aprendizaje basado en proyectos (Batanero y Díaz, 2004; 2011; MacGillivray y Pereira-Mendoza, 2011) constituye otra iniciativa en la misma dirección que el diseño y análisis de tareas, en este caso para la educación estadística.

Entendiendo el diseño de tareas en el sentido amplio que proponen Watson y Mason (2007, p. 206), la distinción entre este campo y la investigación basada en el diseño se diluye:

"Tarea en el sentido amplio incluye la actividad que resulta cuando los aprendices se comprometen con una tarea, incluyendo cómo alteran la tarea con el fin de darle sentido, las maneras en que el profesor dirige y reorienta la atención del aprendiz hacia los aspectos que surgen, y cómo los aprendices son estimulados para reflexionar o aprender a partir de la experiencia de comprometerse en la actividad iniciada por la tarea".

En este trabajo vamos a presentar algunas nociones y herramientas analíticas del EOS que tienen utilidad en el diseño y análisis de tareas, aplicándolas a un proceso de formación inicial de futuros profesores de educación primaria. Describiremos una secuencia de tareas/cuestiones, derivadas de un problema sobre la suma de puntos al lanzar dos dados, que ha sido usada para profundizar en la faceta epistémica del conocimiento didáctico-

[1] https://sites.google.com/site/icmistudy22/home

matemático (Godino, 2009) en un curso orientado a la formación didáctico-matemática de futuros maestros sobre estocástica.

En la sección 2 describimos brevemente el marco teórico utilizado; en la sección 3 presentamos el contexto formativo y la secuencia de tareas derivadas de la experiencia de enseñanza; en la sección 4 aplicamos la "guía para el reconocimiento de objetos y procesos", desarrollada en el marco del EOS al análisis de la actividad estocástica desplegada en la realización de las tareas propuestas en la experiencia. En la sección 5 formulamos cuestiones/tareas que se orientan al desarrollo de otras facetas del conocimiento didáctico-matemático de los profesores. Finalmente, en la sección 6 argumentamos sobre la necesidad de ampliar la atención desde las tareas hacia el análisis de la idoneidad didáctica de los procesos de estudio matemático y didáctico.

2. Marco teórico

En el marco del EOS se ha introducido la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2011) como criterio sistémico para el diseño, implementación y valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dicha idoneidad supone la articulación coherente de seis idoneidades parciales: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional. Para cada una de estas facetas o dimensiones, en el marco teórico se distinguen diversos componentes e indicadores empíricos, que expresan un conjunto de principios didácticos, concordantes con otros marcos teóricos usados en educación matemática.

Tanto en el EOS, como en la TSD y la TAD la noción de situación-problema, o tarea (no rutinaria), desempeña un papel central, ya que se asume una visión antropológica para la matemática, la cual se concibe como una actividad ligada a la resolución de determinadas tareas problemáticas[2]. Son las situaciones-problemas/ tareas las que dan sentido a la matemática, entendidas como sistema de estructuras conceptuales, social o culturalmente compartidas. Debido a esta relevancia, el primer componente de la *idoneidad epistémica* de un proceso de estudio matemático se refiere a los problemas/ tareas, e incluye los siguientes indicadores de idoneidad:

- En el proceso de estudio se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.
- Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).

El EOS propone como criterios básico de idoneidad para las tareas matemáticas planteadas con fines de instrucción la representatividad de las mismas dentro de un universo o conjunto de posibles tareas, cuya resolución permita dar sentido a los objetos matemáticos pretendidos. Además, la resolución[3] de estas situaciones-problemas deberá poner en juego y dar sentido al uso de diversos sistemas de representación, así como al sistema de reglas conceptuales, proposicionales, procedimentales y argumentativas cuyo dominio progresivo por los estudiantes sería el objetivo de la enseñanza. Así mismo, la secuencia de tareas debe establecer conexiones con los objetos de los diversos bloques temáticos y las aplicaciones a otras disciplinas (idoneidad ecológica).

La valoración de la idoneidad epistémica de una tarea requerirá realizar un análisis a priori detallado de su resolución, para identificar los objetos centrales que se ponen en juego, y reconocer las variables didácticas de la tarea que permitan generar otras tareas interconectadas, así como prever los conflictos potenciales en el trabajo con la misma[4]. Esta

[2] Para nosotros una tarea (no rutinaria, sino problemática) será la actividad de indagación realizada en el seno de un sistema didáctico (estudiantes, profesor, medio) para dar respuesta a una cuestión.

[3] Dicha resolución requiere una compleja dialéctica profesor - estudiante (que en el marco teórico se conceptualiza como la dualidad institucional - personal del conocimiento matemático).

[4] Ver ejemplo de aplicación a la evaluación del conocimiento de los profesores en Arteaga et al. (2012)

información será de utilidad en las fases de implementación de las tareas y evaluación de los aprendizajes para diseñar estrategias de institucionalización – personalización de los conocimientos matemáticos. Una herramienta aportada por el EOS para realizar este análisis es la noción de configuración de objetos y procesos (Figura 1), que puede aplicarse tanto desde el punto de vista institucional o epistémico, como personal o cognitivo.

Como se propone en Godino (2009), esta herramienta, complementada con una colección de enunciados de cuestiones y tareas descritas en dicho trabajo, puede ser usada para evaluar y desarrollar de manera sistemática los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor. Con las necesarias adaptaciones, dichas cuestiones y tareas pueden ser usadas para: (i) la valoración del conocimiento y competencias iniciales en procesos formativos para el desarrollo de competencias profesionales, (ii) como "cuestionario" de auto-evaluación y reflexión del profesor sobre aspectos relevantes de su propia práctica, y (iii) como instrumento de valoración interna o externa de un proceso de estudio implementado.

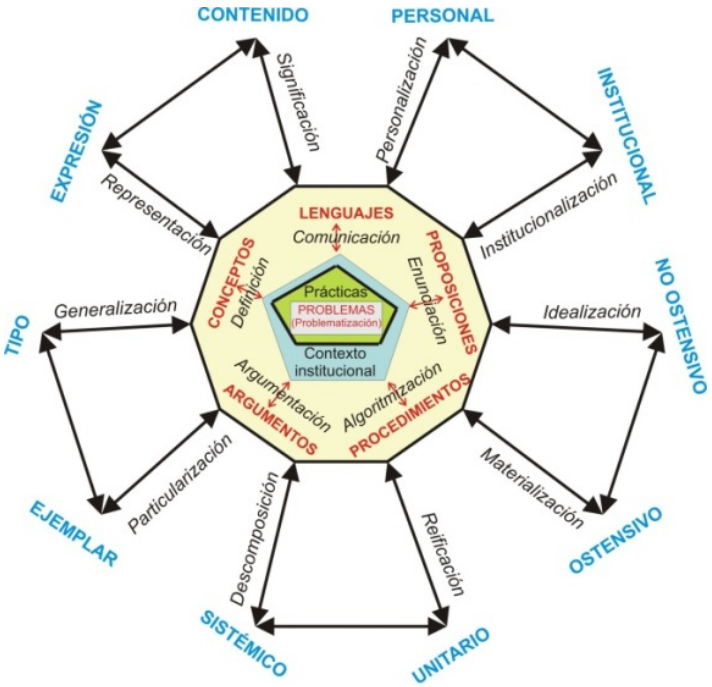


Figura 1: Configuración de objetos y procesos matemáticos

3. Formación de profesores sobre estocástica

En este apartado ejemplificamos las ideas anteriores en un caso práctico referido a la formación didáctico-matemática de profesores de educación primaria sobre estocástica elemental, que ha sido analizada previamente en Batanero, Godino y Roa (2004) y Batanero y Díaz (2012).

3.1. Contexto formativo

Describimos, en primer lugar, un *ciclo formativo* que estamos experimentando en la formación didáctico-matemática de futuros profesores, que incluye los siguientes tipos de situaciones – problemas/tareas:

1) Resolución de problemas/tareas de acuerdo a un modelo didáctico socio - constructivo – interaccionista; en particular problemas que históricamente tuvieron un papel en la creación de conocimiento matemático.

2) Reflexión epistémico - cognitiva sobre los objetos y significados[5] puestos en juego en la resolución de problemas/tareas, incluyendo ítems y respuestas en pruebas de evaluación.

3) Análisis de interacciones en la clase de matemáticas, orientado al reconocimiento de actos y procesos de significación.

4) Análisis de recursos para la enseñanza, incluyendo las orientaciones curriculares, libros de texto, material manipulativo y tecnológico.

5) Análisis del sistema de normas que condicionan y soportan la actividad de estudio matemático.

6) Valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio matemático.

Para cada una de estas situaciones se implementa una trayectoria didáctica que contempla las siguientes fases o momentos: 1) Presentación de las consignas; 2) Exploración personal; 3) Trabajo cooperativo en equipos para elaborar una respuesta compartida; 4) Presentación y discusión; 5) Institucionalización por el formador, explicitando los conocimientos pretendidos; 6) Estudio personal de documentos de trabajo seleccionados, apoyado por las tutorías individuales y grupales.

3.2. Secuencia de tareas derivadas del lanzamiento de dos dados

En este apartado describimos un ejemplo de proyecto (Lanzamiento de dos dados) que venimos usando en la formación de profesores de educación primaria para profundizar en el conocimiento común, conocimiento avanzado y algunos aspectos relevantes del conocimiento especializado del contenido (Hill, Ball, y Schilling, 2008; Godino, 2009), en este caso referido a las nociones estocásticas elementales. En la Figura 1 se incluye el enunciado del proyecto a los profesores en formación (analizado con más detalle en Godino y Batanero, 2011).

Raquel es una maestra de Primaria y lleva unos días trabajando algunas nociones de probabilidad en su clase de 6º. Sus alumnos asignan sin dificultad probabilidades a ciertos sucesos simples, como los resultados de lanzar un dado o una moneda o de girar una ruleta con todos los sectores iguales. Para hoy decide plantear la siguiente actividad:

Actividad 1. Suma de puntos al lanzar dos dados:

"Vamos a jugar con dos dados por parejas. Lanzamos los dados y sumamos los puntos obtenidos. Si resulta una suma de 6, 7, 8, ó 9 entonces gana A una ficha; si la suma es distinta de esos números gana B una ficha.

1. ¿Qué prefieres ser jugador A o B?
2. Juega con un compañero 10 veces y anota los resultados de las sumas que obtienes. ¿Quién ha ganado más veces A o B?
3. ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué?

Actividad 2. Recogida de datos de la clase:

A continuación Raquel recoge en la Tabla 1 los datos de las 10 parejas de alumnos que hay en la clase y les pide construir un diagrama de barras con estos datos.

[5] Los objetos y significados matemáticos sobre los que se orienta la reflexión se describen en Godino, Batanero y Font (2007), así como los supuestos antropológicos que sirven de base al "enfoque ontosemiótico". Los estudiantes son introducidos progresivamente en el reconocimiento de tales objetos y procesos, así como a la perspectiva plural y relativista del significado de los objetos matemáticos.

Tabla 1: Resultados al lanzar dos dados

	Suma de puntos	Numero veces	Frecuencia relativa
Gana B	2	2	0,02
	3	9	0,09
	4	12	0,12
	5	20	0,2
Gana A	6	7	0,07
	7	12	0,12
	8	14	0,14
	9	9	0,09
Gana B	10	8	0,08
	11	4	0,04
	12	3	0,03

Raquel plantea a los niños las siguientes preguntas:

4. ¿Quién ha ganado más veces los jugadores A o los B?

5. ¿Quién tiene más probabilidad de ganar?

Figura 2. Proyecto planteado a los estudiantes

La formación matemática y didáctico-matemática de los futuros maestros se contempla mediante el planteamiento, resolución y discusión de las siguientes tareas:

Tarea 1: ¿Es equitativo este juego? ¿Tiene ventaja un jugador sobre el otro según estas reglas del juego? Determina la probabilidad teórica que tienen de ganar los jugadores A y B.

Tarea 2: Si realizáramos 100 tiradas, ¿con cuánta frecuencia se espera que gane A y B? Prepara una tabla de frecuencias relativas con los 100 datos experimentales obtenidos y un diagrama de frecuencias relativas. ¿Quién ha ganado más veces A o B? Compara estos resultados con los resultados esperables teóricamente. ¿Qué ha ocurrido? ¿Por qué no ha ganado más veces el jugador A como era de esperar?

Tarea 3: ¿Qué puede hacer la maestra en esta situación para explicar el resultado a sus alumnos?

Tarea 4: ¿Qué conocimientos matemáticos se ponen en juego en la resolución de las tareas 1 a 3?

La realización de las tareas 1 y 2 ponen en juego conocimientos matemáticos "comunes y avanzados" sobre contenidos estocásticos elementales; en primer lugar los de aleatoriedad, experimento aleatorio, suceso, espacio muestral y resultado. Como se muestra en la tabla 1 el jugador A gana si sale suma igual a 6, 7, 8 y 9. Dicha suma constituye una variable aleatoria, que lleva asociada una distribución de probabilidad. De los 36 valores posibles en el experimento, la variable aleatoria "suma de los puntos" en 20 casos favorece a A, luego la probabilidad de que gane A es $P(A)$ =20/36 = 0,555. El jugador B gana en los restantes casos, por tanto gana en 16 casos de los 36; $P(B)$ = 16/36 = 0,445. En consecuencia, tiene ventaja el jugador A. De acuerdo con la convergencia estocástica, se debe esperar que en largas series de jugadas el jugador A gane más veces que el B.

En la muestra de 100 lanzamientos proporcionada por la maestra el jugador A ha ganado en 42 casos, mientras que el B en 58. Aunque, teóricamente se espera que las frecuencias relativas de un experimento aleatorio converjan al valor de la probabilidad del

suceso correspondiente esta “tendencia” o “convergencia” es “lenta” y presenta fluctuaciones en series cortas. Una muestra de tamaño 10, incluso 100, es bastante pequeña para que haya poco riesgo de “perder” en este juego, aunque en principio se tenga ventaja.

Las tareas 3 y 4 ponen en juego conocimientos especializados sobre probabilidad, los cuales son necesarios para una gestión adecuada de la situación de enseñanza. La tarea 3 propone a los profesores en formación que generen nuevas tareas relacionadas con el experimento aleatorio. Estas pueden consistir en construir el espacio muestral del experimento y las respectivas probabilidades de los sucesos, lo cual permitirá de manera racional justificar que el jugador A tiene ventaja, o bien usar simuladores que permitan observar de manera intuitiva cómo es la convergencia estocástica de las frecuencias relativas hacia las probabilidades (ley empírica de los grandes números) (Figura 3).

Tabla 1: Distribución de probabilidad de la suma de puntos al lanzar dos dados

Suma de puntos	Casos posibles	Probabilidad
2	(1,1)	0,028
3	(1,2), (2,1)	0,056
4	(1,3),(2,2),(3,1)	0,083
5	(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)	0,111
6	(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)	0,139
7	(1,6),(2,5),(3,4),(4,3), (5,2), (6,1)	0,167
8	(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)	0,139
9	(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)	0,111
10	(4,6), (5,5), (6,4)	0,083
11	(5,6), (6,5)	0,056
12	(6,6)	0,028

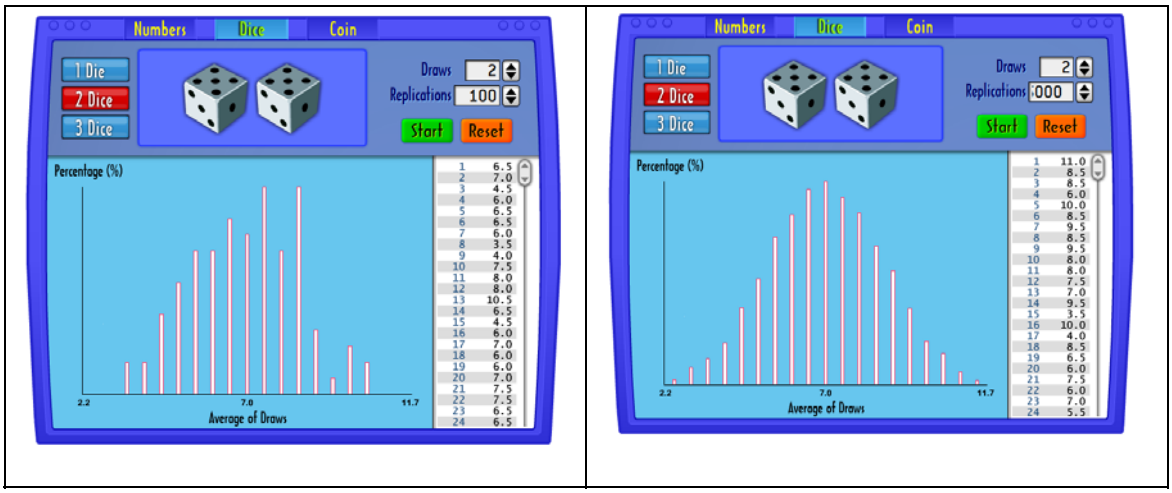


Figura 3. Lanzamiento de dos dado 100 y 10000 veces (Simulador disponible en, http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=159)

La tarea 4 propone una reflexión sistemática sobre los tipos de objetos matemáticos involucrados y los significados específicos con los cuales se usan. Tanto en esta tarea como en tarea 3 se involucra la faceta epistémica (conocimientos institucionales) del conocimiento especializado del contenido.

4. Análisis de la secuencia de tareas

El reconocimiento y gestión de los conocimientos puestos en juego en la realización de las tareas requiere que el futuro profesor, tras la realización de las actividades, analice los objetos intervinientes y emergentes en la resolución, y los significados que se les atribuye en el contexto específico. La Tabla 2 incluye una posible "Guía para el reconocimiento de objetos y significados" (GROS), que se proporciona al futuro maestro para guiarle en este análisis y que acá es aplicada, como ejemplo ilustrativo, al proyecto "Lanzamiento de dos dados".

Tabla 2: Objetos y significados en la situación (aplicando la guía GROS)[6]

Objetos:	Significados (referencia / uso):
Situaciones – problemas	
- Determinar si un juego de azar (suma de puntos al lanzar dos dados) es equitativo	- Desarrollo de competencias de cálculo de probabilidades - Reflexión sobre intuiciones probabilísticas en situaciones de juegos de azar.
- Analizar los datos obtenidos en una experiencia empírica con el juego	- Desarrollo de competencias de análisis de datos - Reflexión sobre las propiedades de la convergencia en pequeñas muestras
Elementos lingüísticos	
- Términos y expresiones verbales	- Palabras con significado matemático; por ejemplo, equitativo, probabilidad, resultados
- Tabla de doble entrada	- Para enumerar los posibles resultados en dos dados o espacio muestral compuesto
- Tabla de valores, probabilidades/ frecuencias	- Distribuciones de probabilidad/ frecuencia
- Diagrama de barras	- Distribuciones de probabilidad/ frecuencia
- Icono	- Para representar dados físicos en el simulador
Conceptos – definición	
- Experimento aleatorio	- Lanzar dos dados y observar el resultado
- Espacio muestral	- 36 pares de valores posibles en los dos dados
- Probabilidad	- proporción de casos favorables entre posibles; número al que tiende la frecuencia en una serie larga; grado de creencia en que un suceso ocurra
- Variable aleatoria	- Variable cuyos valores dependen del resultado del experimento; valor de la suma de los datos
- Conjunto de valores de la variable	- Conjunto de las 11 sumas posibles al lanzar dos dados
- Distribución de probabilidad triangular)	- Sistema formado por los valores posibles de la suma de puntos y sus probabilidades
- Juego equitativo	- Juego de azar en la que los jugadores tienen igual esperanza matemática de ganar

[6] No se incluye un análisis exhaustivo de los objetos y significados puestos en juego en la realización del proyecto. El análisis se puede ampliar teniendo en cuenta, no solo los procesos de significación, sino otros tipos de procesos descritos en el EOS (generalización – particularización; materialización – idealización; personalización – institucionalización; etc.). Se incluyen ejemplos de estos análisis en Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2010); Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011).

- Variable estadística	- Variable que toma los valores de la suma de puntos en la muestra de 100 experimentos
- Distribución de frecuencias	- Sistema formado por los valores de la suma de puntos en el experimento y sus frecuencias en 100 lanzamientos

Tabla 2: Objetos y significados en la situación (aplicando la guía GROS) continuación

Objetos:	Significados (referencia / uso):
Propiedades	
- Simetría del dado, equiprobabilidad	- No hay razón para preferir un caso sobre otro
- Regla de la unión	- La suma de todas las probabilidades es la unidad
- Regla de Laplace	- La probabilidad es el cociente entre casos favorables y posibles
- Juego equitativo	- La esperanza matemática de cada jugador es idéntica
- Convergencia	- Al crecer el número de ensayos la frecuencia relativa se va estabilizando; las oscilaciones son cada vez menores, hay una tendencia
- Oscilaciones de las frecuencias en pequeñas muestras	- La convergencia es lenta; hay gran fluctuación en pequeñas muestras
Procedimientos	
- Construcción del espacio muestral	- Enumeración sistemática de las pares de valores posibles y sus sumas
- Tabulación de frecuencias y probabilidades	- Construcción de las distribuciones de frecuencias / probabilidades, expresadas numéricamente
- Cálculo de probabilidades	- Cálculo de probabilidades de cada jugador aplicando la regla de Laplace - Estimación de probabilidades mediante las frecuencias
- Elaboración de diagramas de barras	- Representación de las distribuciones de frecuencias y de probabilidades
- Comparación de frecuencias y probabilidades en un gráfico cartesiano	- Estudiar las diferencias entre frecuencias y probabilidades
Argumentos	
- Convención social	- Para justificar que todas las caras del dado son equiprobables (no hay razones para suponer que las caras no tengan simetría)
- Análisis de ejemplos	- Para justificar que A no haya ganado en la serie de 100 lanzamientos
- Deducciones informales	- Para justificar que el juego no es equitativo - Para deducir la apuesta que lo convertiría en equitativo
- Simulación del experimento	- Uso de la convergencia para “mostrar” empíricamente una propiedad

La reconstrucción de la configuración de objetos y significados, como la incluida en la Tabla 2, para las distintas situaciones-problemas usadas en un proceso de estudio es necesaria para que el profesor pueda gestionar las interacciones en el aula, y decidir posibles institucionalizaciones de los conocimientos puestos en juego. La confrontación de este análisis con los resultados de las investigaciones previas y la propia experiencia docente permitirá prever potenciales conflictos de significado que deberán ser tenidos en cuenta. Las investigaciones previas muestran algunos de estos conflictos, por parte de futuros profesores en actividades similares. Por ejemplo, Arteaga (2011) muestra los siguientes conflictos en

una tarea relacionada con el análisis de la aleatoridad: Confusión frecuencia- probabilidad, sesgo de equiprobabilidad, creencia en la ley de los pequeños números, errores en razonamiento proporcional, errores en la elaboración de las gráficas, confundir la variable dependiente e independiente, confundir frecuencia y valor de la variable. La identificación de los conflictos potenciales que los estudiantes pueden tener en el estudio del tema requiere la revisión de la literatura correspondiente sobre las concepciones (correctas o incorrectas), formas de conocimiento y tipos de comprensiones (Even y Tirosh, 2002) de los estudiantes[7] sobre los distintos objetos matemáticos en la situación. La guía GROS se ha aplicado también como ayuda para analizar sistemáticamente las configuraciones cognitivas iniciales y finales de los futuros profesores (ver ejemplo en Arteaga et al., 2012).

El análisis se puede completar con la identificación de los procesos matemáticos intervinientes (especialmente, particularización – generalización; materialización – idealización) (Font y Godino, 2008; Font, Godino y Gallardo, 2013). Otras actividades de análisis didáctico se describen en Godino y Batanero (2011).

5. Desarrollo de otras facetas del conocimiento especializado del contenido

En el apartado anterior hemos presentado y analizado tareas cuyo objetivo es desarrollar la faceta epistémica del conocimiento especializado del contenido, especialmente la generación de tareas para la enseñanza y el reconocimiento de objetos y procesos matemáticos implicados en la realización de las prácticas matemáticas. Mediante la previsión de conflictos potenciales se aborda también aspectos de la faceta cognitiva del conocimiento especializado del contenido (errores, dificultades de los estudiantes).

En este apartado enunciados algunas nuevas cuestiones/tareas didáctico-matemáticas que atienden a las facetas interaccional y mediacional. Será necesario analizar cómo interaccionan el profesor con los estudiantes, y estos entre sí, a propósito de cuestiones específicas relacionadas con las competencias matemáticas que se desean desarrollar en los estudiantes. Partiendo de los significados iniciales de los estudiantes habrá que observar el progresivo acoplamiento de dichos significados a los pretendidos por el profesor, para lo cual la identificación de los momentos conflictivos y de negociación de significados deberá ser de atención preferente. Habrá que ver si el problema ha sido transferido y asumido por los estudiantes, si los conceptos, propiedades, procedimientos y argumentaciones que se ponen en juego concuerdan con los pretendidos. La actividad formativa de los profesores con relación al análisis de las interacciones en el aula y el uso de recursos (faceta del conocimiento especializado del contenido con relación a la enseñanza) podemos concretarla en las siguientes tareas, las cuales suponen que los profesores en formación las abordan después de haber sido implementado u observado el proceso de estudio correspondiente[8].

Tarea 5. ¿Cuáles han sido los papeles asumidos por el profesor y los estudiantes? ¿Qué conocimientos han emergido como consecuencia de la actividad matemática de los estudiantes y cuáles han sido institucionalizados por el profesor?

Tarea 6. ¿Qué conflictos de significado han tenido lugar y cómo han sido abordados por el profesor y los estudiantes? ¿Cómo y cuándo han sido identificados los conflictos?

Tarea 7. ¿Cuáles han sido los recursos materiales usados y cuál ha sido su papel en la enseñanza y aprendizaje?

[7] Este complejo multidimensional que en la literatura de investigación se describe como “conocimiento y comprensión”, concepciones, competencias, …, se describe en el EOS con la noción de “configuración cognitiva”.

[8] En la siguiente dirección de YouTube encontramos un video de una clase en la que un profesor realiza el experimento de observar la suma de puntos al lanzar dos dados:
https://www.youtube.com/watch?v=MoW2Ii6P1Zw&feature=related

En Godino y Batanero (2011) se analizan estas y otras cuestiones relacionadas y se propone una "Guía para el reconocimiento de actos y procesos de significación", utilizada en nuestra experiencia de formación inicial de maestros.

Otra faceta del conocimiento especializado del contenido matemático se refiere al tratamiento que se da al tema, en este caso a las nociones estocásticas elementales, en las orientaciones curriculares, así como las conexiones que se pueden establecer entre dicho tema y otras partes de las matemáticas, y también con otras disciplinas (faceta ecológica del conocimiento y la instrucción matemática en el marco del EOS). La evaluación y desarrollo de dichos conocimientos se puede hacer mediante el planteamiento de las siguientes cuestiones:

Tarea 8. ¿Qué elementos del currículo son abordados mediante la realización de las tareas propuestas (fines, objetivos)? ¿Qué conexiones se pueden establecer con otros temas del programa de estudio, u otras materias, mediante la realización de las tareas o de variantes de las mismas? ¿Qué factores de índole social, material, o de otro tipo, condicionan la realización de las tareas?

La toma de conciencia o reconocimiento, por parte del profesor, de la trama de normas (reglas, hábitos, etc.) que hacen posible y condicionan la enseñanza y el aprendizaje matemático es un componente clave del conocimiento especializado del contenido. Desde el nivel más general de las directrices curriculares, fijadas con frecuencia con decretos oficiales, hasta los comportamientos de cortesía y respeto mutuo entre profesor y alumnos, los procesos de enseñanza y aprendizaje están regulados por normas, convenciones, hábitos, costumbres, tradiciones, etc.

En Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009) se analiza esta dimensión normativa de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ampliando las nociones de contrato didáctico (Brousseau, 1988) y norma socio-matemática (Cobb y Bauersfled, 1995), y proponiendo una tipología de normas apoyada en la aplicación del EOS. "Una empresa prioritaria del análisis didáctico debe ser el estudio de esta "dimensión normativa" para, por un lado, poder describir con mayor precisión el funcionamiento de los procesos cognitivos e instruccionales normados y, por otro, incidir en aspectos de la dimensión normativa (modificándolos si fuera necesario) para facilitar la mejora de dichos procesos de estudio de las matemáticas" (Godino et al, 2009, p. 60).

El desarrollo de este componente del conocimiento especializado se puede promover mediante la realización de tareas como la enunciada a continuación.

Tarea 9. ¿Cuáles son las principales normas que intervienen en las distintas facetas del proceso de estudio y cómo afectan al desarrollo del mismo?

En Godino y Batanero (2011) se aborda el reconocimiento de normas en el ejemplo del proceso formativo basado en la realización del proyecto de "lanzamiento de dos dados". El origen de unas normas está en la propia Didáctica de la Matemática y ciencias afines (psicopedagogía), en particular los "principios socio-constructivos – instruccionales", en el Departamento que fija el programa de estudios, la administración educativa que fija un número de créditos para la asignatura. Unas normas se aplican en el momento de planificación de la actividad (elección de la situación – problema), otras en la implementación o evaluación (normas interaccionales). Algunas normas permiten un cierto grado de libertad en su aplicación (normas interaccionales derivadas del modelo didáctico) mientras que otras dejan poca o ninguna libertad al profesor (número de créditos asignados a la asignatura; la manera de justificar la solución del problema).

Los análisis precedentes tienen una orientación descriptiva (¿qué puede ocurrir, o qué ha ocurrido?,...), y explicativa (¿por qué han actuado del tal modo el profesor y los estudiantes?,...). Estos análisis deben proporcionar información para emitir un juicio valorativo sobre el proceso de estudio. En el caso de que la formación se realice en estrecha

relación con la fase de prácticas en las escuelas o institutos, se trate de la formación de profesores en ejercicio, o se disponga de grabaciones audio-visuales de lecciones planificadas e impartidas en las escuelas será posible focalizar los procesos de evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático aplicando la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2011).

Dado un proceso de estudio "vivido" por un profesor (o del que se dispone de una descripción suficiente) la promoción y evaluación de su competencia profesional se puede hacer mediante la realización de la siguiente tarea:

Tarea 10. ¿Cómo valorarías la idoneidad didáctica del proceso? ¿Cómo se puede mejorar el proceso de estudio?

Se supone que el profesor está familiarizado con las dimensiones, componentes e indicadores empíricos de la noción de idoneidad didáctica, por lo que deberá emitir juicios razonados sobre la idoneidad epistémica, cognitiva – afectiva, instruccional y ecológica. En Godino y Batanero (2011) se aborda la valoración de la idoneidad didáctica del proceso formativo basado en la realización del proyecto de "lanzamiento de dos dados", y el reconocimiento de aspectos del mismo cuyo cambio aumentaría dicha idoneidad.

6. Reflexiones finales: De las tareas a la idoneidad didáctica

Aunque la selección y adaptación de tareas es un elemento clave de los procesos de estudio matemático, sin embargo, fijar la atención solo en las tareas es claramente insuficiente. Las tareas están destinadas a ser usadas por un profesor usualmente en un contexto de aula, de manera que es necesario tener en cuenta una secuencia de momentos didácticos. La tarea puede ser resuelta por el profesor y mostrada a los estudiantes para que aprendan la manera de resolver ese tipo de tareas; o por el contrario la tarea es presentada para que los estudiantes la asuman como propia, exploren posibles soluciones, las formulen, comuniquen y validen.

Sin duda la calidad de los aprendizajes alcanzables según estas alternativas es bien diferente. En consecuencia, nos parece necesario ampliar el foco de atención de la investigación desde las tareas matemáticas a las situaciones didáctico-matemáticas, como se indica en la Figura 2. En dicha figura también se indica la necesidad de adoptar una perspectiva más amplia, como es la aportada por la ingeniería didáctica, entendida como equivalente a las investigaciones basadas en el diseño (Godino et al, 2013). Así mismo, se debe progresar desde posiciones descriptivas – explicativas hacía un planteamiento normativo que tenga en cuenta principios didáctico – matemáticos sobre los cuales existe un consenso en la comunidad de educación matemática. Estos principios están incorporados en los indicadores empíricos de idoneidad didáctica sintetizados en Godino (2011).

El foco de atención en el diseño de las tareas debe orientarse a mostrar cómo la realización de las mismas influye o determina el aprendizaje matemático, el cual depende de múltiples factores, no solo de las tareas matemáticas seleccionadas. Por ello la herramienta "configuración de objetos y procesos" que ha desarrollado el EOS se revela como un recurso útil ya que ayuda a identificar los objetos y procesos matemáticos puestos en juego, prever conflictos potenciales y en consecuencia, tomar decisiones sobre estrategias instruccionales.

El uso de recursos materiales y tecnológicos en el diseño e implementación de tareas para el estudio matemático es también un componente clave en los procesos de enseñanza y aprendizaje, como se reconoce en las directrices curriculares y los resultados de investigaciones didácticas. Este componente está contemplado en el EOS desde un punto de vista epistemológico: tales medios son concebidos como "objetos que intervienen en la práctica matemática", y por tanto, hacen posible la práctica al tiempo que la condicionan.

Así, en el caso del proyecto "lanzamiento de dos dados" se usan dos dados físicos para realizar efectivamente el experimento y los resultados se registran en las matrices de datos de una hoja de cálculo; además, se requiere usar un simulador del experimento para poder apreciar la convergencia estocástica de las frecuencias relativas a las respectivas probabilidades. El discurso teórico requerido para enunciar las definiciones y proposiciones (p. e, la ley de los grandes números) es apoyado ostensivamente por las visualizaciones de los diagramas de barras de las distribuciones de frecuencias y probabilidades y el dinamismo de las simulaciones probabilísticas.

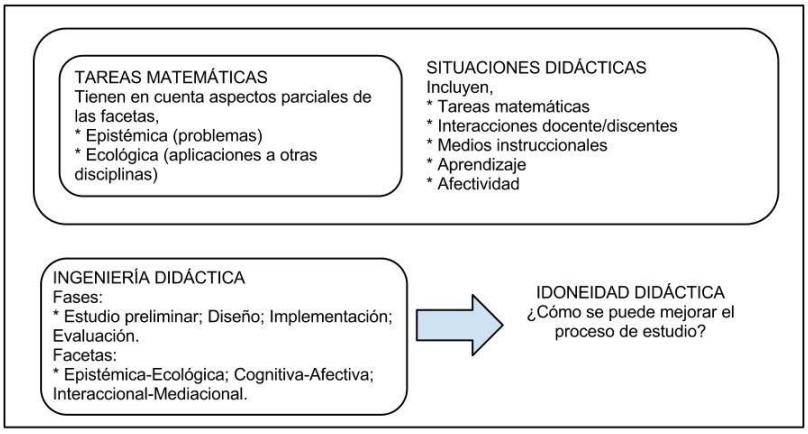


Figura 2. De las tareas a la idoneidad didáctica

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), y EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MEC).

Referencias

Arteaga, P. (2011). Evaluación de conocimientos estadísticos y conocimientos didácticos sobre estadística en futuros profesores.Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G.R. y Gea, M. (2012).Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. *Educação Matemática y Pesquisa 14* (2), 279-297

Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique: un essai de synthèse. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck y F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 225-237). Grenoble: La pensée sauvage.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. ISBN 84-699-4295-6. (Disponible en Internet,

www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm)

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (125-163). Zaragoza: ICE

Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.). (2011). *Estadística con proyectos.* Departamento de Didáctica de la Matemática. www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm

Batanero, C. y Díaz, D. (2012). Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics 3* (1), 3-13

Batanero, C., Godino, J. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of statistics Education 12* (1).

Brousseua, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (3), 309-336.

Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Even, R. y Tirosh, T. (2002). Teacher knowledge and understanding of students' mathematical leaning. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 219-240). London: Lawrence Erlbaum y NCTM.

Font, V. y Godino, J. D. (2008). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa 8* (1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. Educational Studies in Mathematics, 82:97–124.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2011). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 9-33). Melilla: Facultad de Humanidades y Educación.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. R. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. *Proceedings of the CERME 8*, Turkey.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2): 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77 (2), 247-265.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400

Kelly, A. E., Lesh, R. A., y Baek, J. Y. (Eds.) (2008). *Handbook of design research in methods in education.Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. New York, NY: Routledge.

MacGillivray, H. y Pereira-Mendoza, L. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint*

ICMI and IASE study (pp. 109-120). New York: Springer.

Watson, A, y Mason, J. (2007). Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10: 205-215.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(4), 287-307.

Hacia una Cultura Estadística…

Mario Olguin Scherffig
Universidad de las Américas de Chile
Presidente de la International Organitation for a Statistical Culture

Resumen

Mucho se habla y dice a título de la Estadística, incluso su nombre es signo a veces, de cuestionamientos y acalorados debates sobre su verdadera utilidad.

Desde sus inicios la estadística ha estado ligada a usos impropios, dados principalmente por quienes no conocen sus fundamentos o lo que es peor, los conocen en forma errada.

No se trata de proponer aquí a la Estadística con un grado de ciencia, técnica, herramienta o como quien quiera asignarle una jerarquía. Si no que se trata de valorar su importancia y la transversalidad de su quehacer.

Podríamos estar largas horas, debatiendo sobre la pertenencia de esta área y como se liga a otras. Esta imposibilidad de desunirla con todo lo que nos rodea, es lo que me permite reflexionar sobre la estadística… como un tipo de Cultura Universal.

Palabras clave: Cultura estadística.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 17). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Intuições de alunos do 9º ano em independência e probabilidade condicionada*

José António Fernandes[1], *Paulo Ferreira Correia*[2]

[1]Universidade do Minho
[2]Escola Secundária/3 de Barcelos

Resumo

Nesta investigação estudam-se as intuições de alunos nos conteúdos de probabilidade condicionada e independência, considerando as respostas dos alunos (corretas e erradas), as justificações por eles apresentadas e relações entre o desempenho na disciplina de Matemática e as respostas. Participaram no estudo 310 alunos do 9º ano de escolaridade, a quem foi aplicado um questionário com várias tarefas sobre probabilidade condicionada, independência e probabilidade geral. Em termos de resultados, salienta-se que mais de metade dos alunos apresentou respostas corretas em mais de dois terços dos itens, uma considerável menor percentagem de alunos apresentaram justificações adequadas às respostas corretas e, em geral, o aumento da percentagem de respostas corretas com o desempenho em Matemática.

Palavras-chave: Probabilidade condicionada; Independência; Intuições de alunos do 9º ano.

1. Introdução

Atualmente, o ensino das Probabilidades e da Estatística tem sido aprofundado nos programas escolares e nas salas de aula de muitos países. No caso das Probabilidades, o seu ensino logo nos primeiros anos de escolaridade tem sido preconizado por alguns investigadores (e.g., Batanero, 2013; Fischbein, 1975) com o fundamento de que se trata de uma temática em que proliferam muitas intuições erradas e a ausência de ensino formal contribui para a consolidação dessas intuições.

Em situações contraintuitivas, Fernandes (1990) observou uma forte adesão a ideias intuitivas erradas por alunos do 11º ano (sem ensino de Probabilidades). Também em situações não contraintuitivas, Fernandes (2001) observou ganhos relativamente limitados dos alunos do 11º ano (sem ensino de Probabilidades) relativamente a alunos do 8º ano, especialmente no caso de acontecimentos de experiências compostas.

Ora, encontrando-se os conteúdos de probabilidade condicionada e independência entre aqueles que mais revelam ideias intuitivas erradas dos alunos (e não só) importa conhecer mais profundamente as ideias intuitivas dos alunos em fases etárias mais novas, tendo em vista avaliar das possibilidades do ensino formal de tais conceitos de modo a evitar a consolidação dessas intuições erradas.

Embora, tradicionalmente, os conteúdos de probabilidade condicionada e independência sejam abordados apenas no ensino secundário, são vários os estudos (e.g., Tarr & Lannin, 2005; Tarr, 1997) que referem que eles são de facto apropriados para o currículo de matemática do ensino básico. Para Tarr (1997) a aprendizagem dos conceitos de probabilidade condicionada e independência não precisa de ser adiada até que os estudantes tenham desenvolvido destrezas robustas na comparação de frações, devendo a abordagem destes conceitos ser efetuada de uma forma intuitiva.

* Uma versão muito semelhante a este texto foi apresentada pelos mesmos autores no III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola, realizado em fevereiro de 2013 na Universidade do Minho, Braga.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 19-37). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

No caso português, os resultados referidos por Correia, Fernandes e Contreras (2011) e Correia e Fernandes (2012), sobre as intuições de alunos do 9º ano de escolaridade em probabilidade condicionada nos contextos de tabelas simples, tabelas de dupla entrada e de sacos com bolas, revelam-se encorajadores quanto à possibilidade de introduzir o estudo deste conceito no 9º ano.

2. Investigação prévia

Segundo Garfield e Ahlgren (1988), de uma maneira geral, as dificuldades dos estudantes no desenvolvimento correto de intuições sobre ideias probabilísticas fundamentais deve-se essencialmente a três aspetos: muitos estudantes têm dificuldades associadas ao conceito de número racional e ao nível do raciocínio proporcional, aspetos usados no cálculo, descrição e interpretação de probabilidades; as ideias probabilísticas conflituam muitas vezes com as experiências dos estudantes e com a forma como eles veem o mundo; e muitos estudantes desenvolvem aversão às probabilidades ao serem expostos a um ensino muito abstrato e formal do tema.

2.1. Probabilidade condicionada

Segundo Spinillo (2002), o raciocínio proporcional envolve basicamente relações de primeira ordem, em que se comparam os elementos de uma razão, e relações de segunda ordem, em que se comparam duas razões. Além disso, essas razões podem ser do tipo *parte-parte* quando se comparam duas partes de um todo (e.g., o número de bolas de cada uma das duas cores de bolas existentes num saco) e *parte-todo* quando se comparam uma parte com o todo (e.g., o número de bolas de uma das cores com o número total de bolas existentes num saco).

Além das razões parte-parte e parte-todo, no presente estudo introduzimos a relação de primeira ordem *todo-todo* para designar as comparações entre o número total de elementos de cada um dos sacos, a que Cañizares (1997) chama comparação do número de casos possíveis, e entre o número total de elementos de um conjunto antes e após a extração, com ou sem reposição, de um elemento desse conjunto.

Na opinião de Tarr e Lannin (2005) os julgamentos em probabilidade condicionada requerem a habilidade de estabelecer comparações probabilísticas, havendo evidências contraditórias que documentam as destrezas de alunos do ensino básico para efetuarem corretamente tais comparações. Para Piaget e Inhelder (1951) é necessário que as crianças compreendam as relações parte-todo para compararem probabilidades de acontecimentos, enquanto outros autores identificaram outras estratégias que permitem aos alunos efetuar essas comparações. Recorrendo a vantagens (*odds*) ou outra comparação do tipo parte-parte, os alunos dos estudos de Falk (1993) e Green (1983) foram capazes de comparar probabilidades de dois acontecimentos, sugerindo que os alunos não precisam de atingir o estádio das operações formais para efetuarem com sucesso comparações probabilísticas (Tarr & Lannin, 2005).

Tarr (1997), num estudo com 26 alunos do 5º ano, observou que, antes de um programa de instrução em probabilidade condicionada e independência, os alunos começaram por utilizar mais comparações parte-parte do que comparações parte-todo quando faziam julgamentos sobre probabilidade condicionada. Segundo o autor, se bem que as comparações parte-parte permitem a muitos alunos perceberem que a probabilidade condicionada de alguns acontecimentos se altera em situações de não reposição, estas estratégias limitam, muitas vezes, os alunos no reconhecimento de que a probabilidade de todos os acontecimentos se altera nas situações em que não há reposição.

Fischbein e Gazit (1984), numa experiência de ensino sobre probabilidade condicionada, envolvendo 285 alunos dos 5º, 6º e 7º anos de escolaridade, concluíram que a

percentagem de respostas corretas na determinação de probabilidades condicionadas em situações sem reposição, em geral, foi mais baixa do que nas situações com reposição.

No caso específico da probabilidade condicionada, Pollatsek, Well, Konold e Hardiman (1987) verificaram que os alunos confundem $P(A|B)$ com $P(A\cap B)$, isto é, não distinguem claramente os significados da condicional e da conjunta, confusão que se tornou particularmente evidente aquando da interpretação de enunciados de problemas que implicavam a identificação destas probabilidades. Esta dificuldade também foi observada em futuros professores do ensino primário (Contreras, Batanero, Díaz & Fernandes, 2011; Estrada & Díaz, 2006) e em alunos do 9º ano de escolaridade (Correia et al., 2011) na resolução de uma tarefa envolvendo frequências de dois acontecimentos numa tabela de dupla entrada.

Falk (1986) verificou que muitos alunos não discriminam entre uma probabilidade condicionada e a sua transposta, isto é, entre as duas probabilidades $P(A|B)$ e $P(B|A)$, erro que designou por *falácia da condicional transposta*. No estudo de Correia et al. (2011), antes referido, verificou-se que alguns alunos do 9º ano também aderiram a este erro.

No estudo desenvolvido por Lecoutre e Durand (1988), em que participaram 342 alunos dos 14 aos 18 anos de idade, os autores concluíram que os alunos tendem a admitir que acontecimentos de caráter aleatório são por natureza equiprováveis. Esta ideia, designada por *enviesamento de equiprobabilidade*, mostrou-se extremamente resistente a variações de fatores relacionados com a situação experimental (informação de natureza combinatória, de natureza frequencista, modificações ao nível da formulação, etc.) e com fatores de caracterização dos sujeitos (nível de formação, tipo de estudos secundários, sexo, etc.), que foram manipulados no estudo.

Watson (2005), com base numa ampla revisão de literatura sobre a compreensão de conceitos probabilísticos, concluiu que, geralmente, os alunos são capazes de apreciar a incerteza e o propósito das tarefas que lhe são propostas, enquanto raciocínios sofisticados envolvendo raciocínio proporcional, independência e espaços amostrais são difíceis para a maioria dos alunos. Contudo, a autora conjetura que a situação pode melhorar com a introdução, em muitos países, do ensino de Probabilidades no ensino básico, o que não acontecia aquando das investigações analisados no seu estudo.

2.2. Independência

Fischbein, Nello e Marino (1991), num estudo em que participaram 618 alunos do 4º ano ao 8º ano de escolaridade, sem instrução em probabilidades, questionaram os alunos sobre se o acontecimento *obter três faces europeias* é mais provável em três lançamentos consecutivos de uma moeda ou no lançamento simultâneo de três moedas. Os autores verificaram que cerca de um terço dos alunos responderam que a probabilidade não era a mesma, sendo predominante, em todos os anos de escolaridade, a crença de que é mais provável obter três faces europeias em três lançamentos consecutivos de uma moeda do que no lançamento simultâneo de três moedas. Apoiados nas entrevistas realizadas, os autores concluíram que os alunos acreditavam fortemente que os resultados obtidos no lançamento da moeda podiam ser controlados pelo indivíduo.

Resultados ligeiramente melhores foram obtidos por Green (1983) em alunos dos 11 aos 16 anos de idade, com um quarto de respostas incorretas, quando estes foram questionados sobre a face mais provável de obter no quinto lançamento de uma moeda ao ar, depois de ter saído a face europeia nos quatro lançamentos anteriores.

Já no estudo de Konold, Pollatsek, Well, Lohmeier e Lipson (1993), em que foi pedido a estudantes universitários de um curso de remediação matemática para indicarem qual das sequências seguintes é mais provável e menos provável de ocorrer, respetivamente, quando é lançada cinco vezes uma moeda equilibrada: a) $EEENN$; b) $NEENE$; c)

NENNN ; d) *ENENE* ; e) as quatro sequências são igualmente prováveis (*E* representa a face europeia e *N* a face nacional), verificou-se que quase dois terços dos alunos identificaram corretamente a sequência mais provável, mas apenas cerca de um terço dos alunos identificaram corretamente a sequência menos provável. Fernandes (1990), num item muito semelhante ao usado por Konold et al. (1993), obteve resultados muito semelhantes em alunos do 11º ano e futuros professores de Matemática. Face aos resultados obtidos, os autores concluíram existir um conflito entre a crença da equiprobabilidade de obter cada face da moeda e a crença de que em vários lançamentos da moeda obtém-se sensivelmente o mesmo número de cada uma das faces.

Outra dificuldade dos alunos resulta da tendência de negligenciarem a influência da dimensão da amostra quando efetuam estimativas de probabilidade, atribuindo às pequenas amostras propriedades apenas válidas na população ou em grandes amostras (Kahneman & Tversky, 1982). Na situação seguinte, apresentada por Fischbein e Schnarch (1997), muitos alunos revelaram essa tendência.

> A probabilidade de obter face europeia pelo menos duas vezes quando se lançam três moedas é:
> a) Menor do que a probabilidade de obter face europeia pelo menos 200 vezes quando se lançam 300 moedas.
> b) É igual à probabilidade de obter face europeia pelo menos 200 vezes quando se lançam 300 moedas.
> c) É maior do que a probabilidade de obter face europeia pelo menos 200 vezes quando se lançam 300 moedas. (p. 99)

Nesta questão, cerca de um terço dos alunos do 5º ano e três quartos dos alunos do 11º ano aderiram à ideia errada de que a probabilidade de obter face europeia pelo menos 2 vezes quando se lançam 3 moedas é igual à probabilidade de obter face europeia pelo menos 200 vezes quando se lançam 300 moedas, revelando que, de uma maneira geral, a utilização da estratégia efeito do tamanho da amostra aumentou com a idade. Esta é uma crença tão forte que disfarça uma ideia mais subtil, especificamente a ideia de que se a amostra se torna maior, a probabilidade de obter um certo resultado empírico tende a aproximar melhor a predição teórica. Por outro lado, os estudantes poderão não compreender a influência do tamanho da amostra porque invocam raciocínio proporcional e assumem que toda a amostra deve ser proporcional ou refletir o comportamento da população.

O problema seguinte, apresentado por Fischbein e Schnarch (1997) a alunos do 5º ano, 7º ano, 9º ano, 11º ano e a estudantes universitários, despoletou a sua adesão à heurística da representatividade (Kahneman & Tversky, 1982).

> No jogo do loto escolhem-se 6 números de um total de 49. O João escolheu os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e a Ana escolheu os números 39, 1, 17, 49, 8 e 27. Qual deles tem maior chance de ganhar?
> a) O João tem mais chances de ganhar.
> b) A Ana tem mais chances de ganhar.
> c) O João e a Ana têm as mesmas chances de acertar nos 6 números. (p. 98)

Nas justificações dos alunos que responderem que a Ana tem mais chances de ganhar está implícita a adesão à heurística da representatividade se a justificação do aluno evoca argumentos de aleatoriedade (e.g., referir que a chave da Ana reflete maior aleatoriedade do que a chave do João). A adesão à estratégia da representatividade diminuiu com a idade, variando entre cerca de um quinto dos estudantes universitários e dois terços dos alunos do 5º ano.

Os *efeitos recente negativo* e *recente positivo* (Fischbein, 1975) são ideias que ilustram a heurística da representatividade. No primeiro caso verifica-se uma tendência para acreditar que, após a obtenção de uma sequência de faces nacional no lançamento de uma moeda equilibrada, seria mais provável sair a face europeia; enquanto no segundo caso há uma tendência para acreditar que, após a obtenção de uma sequência de faces nacional no

lançamento de uma moeda, seria mais provável sair novamente a face nacional. No caso do estudo de Fischbein e Schnarch (1997), a adesão à estratégia *efeito recente negativo* diminuiu com a idade, tendo sido adotada por cerca de um terço dos alunos do 5º ano e por nenhum aluno universitário; quanto à estratégia *efeito recente positivo*, ela ocorreu residualmente. Já no estudo de Green (1983), antes referido, observou-se um equilíbrio entre a percentagem de alunos a aderirem ao efeito recente positivo e ao efeito recente negativo (ligeiramente superior a 10%), aumentando a percentagem de respostas corretas com a idade (entre 67% e 80%).

Tarr (1997) concluiu que, antes da instrução, alunos do 5º ano sentiram mais dificuldades no conteúdo independência do que nos conteúdos probabilidade condicionada e probabilidade geral, em consequência da sua predisposição para adotarem a estratégia da representatividade (Kahneman & Tversky, 1982) quando faziam julgamentos probabilísticos. Já depois de uma experiência de ensino centrada na compreensão dos conceitos de probabilidade condicionada e independência, verificou-se que os estudantes foram, de uma maneira geral, bem-sucedidos na aprendizagem dos dois conceitos.

3. Metodologia

No presente estudo pretendeu-se, fundamentalmente, estudar as ideias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade acerca da probabilidade condicionada e independência em diferentes contextos. Para tal, foi realizado um estudo, fundamentalmente, de tipo quantitativo e de natureza descritiva e comparativa.

Participaram no estudo 310 alunos do 9º ano de escolaridade pertencentes a quatro escolas do Litoral Norte de Portugal, duas inseridas em meio urbano e duas em meio rural. As idades dos alunos variavam entre os 13 e os 17 anos, com 14 anos de média de idades (que é a idade normal de frequência do 9º ano); 51% dos alunos eram do sexo feminino e 49% do sexo masculino; e as suas classificações na disciplina de Matemática, no final do 8º ano, numa escala de 1 a 5, variavam entre 2 e 5, com uma média de 3,1.

A recolha de dados foi efetuada através de um questionário que, para além de algumas questões centradas na aquisição de informação pessoal, incluía nove questões, quase todas com vários itens, sobre independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral (ver Anexo). Na Tabela 1 apresenta-se a distribuição dos itens segundo o conteúdo que avaliam e o contexto em que são apresentados.

Tabela 1. Distribuição dos itens do questionário segundo o conteúdo e o contexto

	Contexto						
Conteúdo	Moeda	Roleta	Saco de bolas	Fichas	Gráfico de barras	Tabela simples	Tabela de dupla entrada
Independência	1	2					
Probabilidade condicionada			3a, 3b, 4a, 4b, 8a1, 8b1	9b, 9c	5b	6b	7b2, 7b3
Probabilidade geral			8a2, 8b2	9a	5a	6a	7a1, 7a2, 7a3, 7b1

O questionário estrutura-se em duas partes: a parte I englobando quatro questões de escolha múltipla, em que se pedia aos alunos para justificarem a opção selecionada, e a parte II englobando as restantes cinco questões de desenvolvimento, envolvendo o cálculo de probabilidades.

Nos itens das questões de probabilidade geral, as questões 7a1, 7a2, 7a3 referem-se ao significado de valores fornecidos numa tabela de dupla entrada; a questão 9a) refere-se à obtenção do espaço amostral; as questões 7b1, 8a2 e 8b2 referem-se à probabilidade conjunta, embora o cálculo da probabilidade conjunta, por definição, envolva a

probabilidade condicionada; e as questões 5a) e 6a) referem-se à probabilidade da união de acontecimentos disjuntos.

O questionário foi aplicado em aulas dos alunos, de 90 minutos, no início do 2º período escolar do ano letivo 2011/2012 e os alunos tinham estudado os conteúdos de Probabilidades, previstos no programa da disciplina de Matemática do 9º ano no início do ano letivo — aspetos de linguagem e definições clássica e frequencista de probabilidade, dos quais não fazem parte a probabilidade condicionada e a independência.

Em termos de análise de dados, estudaram-se as respostas, as justificações e os erros cometidos pelos alunos nos vários itens individuais do questionário e em diferentes conjuntos de itens, incluindo os diferentes conteúdos (independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral) e o tipo de item (escolha múltipla e desenvolvimento), determinando-se frequências e recorrendo-se a tabelas como forma de sintetizar os resultados.

Além da análise ao nível da estatística descritiva, acima referida, aplicou-se o teste de independência de qui-quadrado (χ^2) para comparar as percentagens de respostas corretas e erradas em cada um dos itens do questionário e o teste de Kruskal-Wallis para comparar a realização dos alunos em cada um dos conteúdos (independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral) e no questionário com o seu desempenho em Matemática (fraco, médio e bom).

Na codificação do desempenho dos alunos em Matemática recorreu-se à classificação do aluno no final do 8º ano, numa escala de 1 a 5, de acordo com o seguinte critério: desempenho fraco correspondente aos níveis 1 ou 2; desempenho médio correspondente ao nível 3; e desempenho bom correspondente aos níveis 4 ou 5. Em termos de análise estatística, usou-se o programa *SPAW Statistics 18*, adotou-se o nível de significância estatística de 0,05 e consideraram-se as não respostas como sendo respostas erradas.

4. Apresentação de resultados

A apresentação dos resultados do estudo estrutura-se em três secções: a primeira centrada na análise das respostas (corretas e erradas); a segunda focada na análise das justificações e estratégias dos alunos para explicarem as suas respostas; e a terceira centrada na comparação entre o desempenho em Matemática e as respostas (corretas e erradas) em cada um dos itens, nos três conteúdos considerados e na totalidade do questionário.

4.1. Análise das respostas

Relativamente às respostas dos alunos, na Figura 1 podemos observar a percentagem de respostas corretas em cada um dos 23 itens do questionário, que foram apresentadas pelos 310 alunos que participaram no estudo.

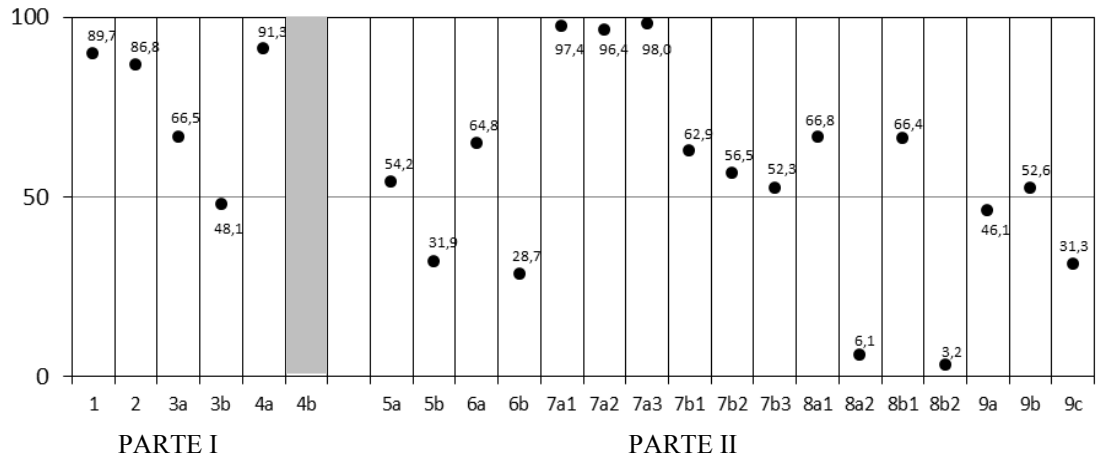


Figura 1. Percentagem de respostas corretas em cada um dos 23 itens do questionário

Globalmente, verifica-se que a percentagem de respostas corretas varia entre o mínimo de 3,2% e o máximo de 98,0%, com uma média de respostas corretas de 60,0% e um desvio padrão de 27,5% no conjunto de todos os itens do questionário, o que leva a concluir que o grupo de alunos envolvidos no estudo revelou uma razoável realização no conteúdo estudado.

Da Figura 1 conclui-se que os itens de significado de valores de uma tabela de dupla entrada (itens 7a1, 7a2, 7a3), considerados no conteúdo probabilidade geral, foram os que se revelaram mais fáceis para os alunos, com percentagens de respostas corretas acima de 96%. Já os itens 8a2 e 8b2, sobre probabilidade conjunta e inseridos no mesmo conteúdo, foram os que se revelaram mais difíceis para os alunos, com percentagens de respostas corretas igual ou inferior a 6%.

Nas questões de independência (itens 1 e 2), a percentagem de alunos a apresentarem como resposta a opção correta manteve-se acima de 86%; nas questões de probabilidade condicionada, a percentagem de respostas corretas variou entre 28,7% e 91,3%, sendo que nas questões de escolha múltipla (itens 3a, 3b, 4a e 4b) a percentagem de respostas corretas variou entre 48,1% e 91,3% e nas questões de cálculo de probabilidade (itens 5b, 6b, 7b2, 7b3, 8a1, 8b1, 9b e 9c) a percentagem de respostas corretas variou entre 28,7% e 66,8%.

Na Tabela 2 apresenta-se a distribuição das percentagens de respostas (corretas e erradas) dos alunos segundo os três conteúdos contemplados no questionário: independência; probabilidade condicionada e probabilidade geral.

Tabela 2. Distribuição (em %) das respostas dos 310 alunos segundo o conteúdo

	Respostas		Não respostas
Conteúdo (nº de itens)	Corretas	Erradas	
Independência (2)	88,2	11,3	0,5
Probabilidade condicionada (12)	56,1	38,3	5,6
Probabilidade geral (9)	58,8	34,6	6,6

Da leitura da Tabela 2 confirma-se que o conteúdo em que os alunos revelaram melhor desempenho foi o de independência. Neste caso, poderão ter contribuído para essa superior realização dos alunos o facto de os dois itens de independência serem de escolha múltipla, nos quais se obtiveram percentagens de respostas corretas superiores do que nos itens de desenvolvimento, o questionário contemplava um número muito inferior de itens de independência do que dos outros dois conteúdos e as justificações apresentadas pelos alunos nestes itens (parte I) nem sempre justificavam adequadamente a opção correta.

Quanto aos conteúdos probabilidade condicionada e probabilidade geral, estes reúnem uma percentagem bastante próxima de respostas corretas, embora bastante inferior à percentagem de respostas corretas no conteúdo independência.

Do exposto, conclui-se que o tipo de questão (escolha múltipla e resposta curta) influenciou o desempenho dos alunos nos vários conteúdos de probabilidades, uma vez que as questões de escolha múltipla reúnem uma maior percentagem de respostas corretas do que as questões de resposta curta e as questões de resposta curta, incluídas apenas nos conteúdos probabilidade condicionada e probabilidade geral, explicam as menores percentagens de respostas corretas nesses conteúdos.

No conteúdo probabilidade geral, apresenta-se na Tabela 3 a distribuição das percentagens de respostas (corretas e erradas) dos alunos segundo os vários conceitos contemplados nos itens desse conteúdo.

Tabela 3. Distribuição (em %) das respostas dos 310 alunos no conteúdo probabilidade geral

Conceito (nº de itens)	Respostas	Não respostas

	Corretas	Erradas	
Frequências (3)	97,3	1,6	1,1
Probabilidade da união (2)	59,5	36,1	4,4
Espaço amostral (1)	46,1	45,8	8,1
Probabilidade conjunta (3)	24,1	62,9	13,0

Da Tabela 3 destaca-se a percentagem de respostas corretas abaixo dos 50% nas questões de probabilidade conjunta e espaço amostral. No caso da probabilidade conjunta, embora a percentagem de respostas corretas seja muito inferior à percentagem de respostas corretas dos outros conceitos do conteúdo probabilidade geral, tal como se pode observar no gráfico da Figura 1, no item 7b1 a percentagem de respostas corretas foi de 62,9%.

Na Tabela 4 apresenta-se a distribuição das percentagens de respostas (corretas e erradas) dos alunos nas questões que envolvem situações de extração de objetos (bolas ou fichas) com reposição (itens 3a, 4a e 8a1) e sem reposição (itens 3b, 4b, 8b1, 9b e 9c) no conteúdo de probabilidade condicionada.

Tabela 4. Distribuição (em %) das respostas dos 310 alunos nas questões com e sem reposição

	Respostas		Não respostas
Tipo de extração (nº de itens)	Corretas	Erradas	
Probabilidade condicionada em situações com reposição (3)	74,7	22,4	2,9
Probabilidade condicionada em situações sem reposição (5)	56,0	37,0	7,0

Dos dados da Tabela 4 conclui-se que foram mais fáceis para os alunos as questões que envolviam a probabilidade condicionada em situações com reposição do que em situações sem reposição e também foi nas situações sem reposição que mais alunos não responderam às questões.

4.2. Análise das justificações e estratégias

Na Tabela 5 apresenta-se a distribuição das resoluções dos alunos segundo as estratégias de contagem utilizadas nos 4 itens da questão 8 (utilizadas em 9,8% das resoluções), no item 9a de escrita do espaço amostral (utilizadas em 83% das resoluções) e nos itens 9b e 9c (utilizadas em 14,7% das resoluções).

Tabela 5. Distribuição das resoluções dos alunos segundo as estratégias de contagem utilizadas nas questões 8 e 9

Estratégias	Percentagem de utilização
Configurações	41,0
Diagrama de árvore	29,8
Tabela de dupla entrada	16,0
Enumeração não sistemática	4,2
Diagrama de árvore e regra do produto	3,6
Regra do produto	3,1
Desenhos	1,1
Regrada soma	0,7
Diagrama de árvore, regra do produto e regra da soma	0,5

Pela Tabela 5 conclui-se que as estratégias de contagem mais utilizadas pelos alunos incidiram na determinação de *configurações*, na construção de um *diagrama de árvore* e na

construção de uma *tabela de dupla entrada*, sendo a estratégia *configurações* claramente a preferida dos alunos. No entanto, estas estratégias foram utilizadas essencialmente quando se solicitava a determinação do espaço amostral (item 9a), sendo muito pouco utilizadas por iniciativa do aluno nas restantes questões envolvendo experiências compostas.

Na Tabela 6 apresenta-se a distribuição das justificações dos alunos segundo o tipo de relação estabelecida (todo-todo, parte-parte e parte-todo) para compararem probabilidades condicionadas nas questões 3 e 4 (itens 3a, 3b, 4a e 4b). Nestas questões observaram-se 938 justificações destes tipos, num universo de 1104 justificações (85,0% das justificações): 414 nos dois itens da questão 3 e 524 nos dois itens da questão 4.

Tabela 6. Distribuição das justificações utilizadas pelos alunos nas questões 3 e 4 segundo o tipo de relação estabelecida

Tipo de relação	Percentagem
Todo-Todo	4,7
Parte-Parte	71,2
Parte-Todo	24,1

Da leitura da Tabela 6 conclui-se que na comparação de probabilidades condicionadas predominaram as relações do tipo parte-parte. Mesmo tendo sido lecionada a regra de Laplace (que envolve uma relação do tipo parte-todo) os alunos não deram preferência a este tipo de relação, tal como era de esperar.

Na tabela 7 apresenta-se a distribuição das justificações apresentadas pelos alunos na parte I do questionário, que foram codificadas em três categorias: justificações de natureza tautológica, justificações que revelam a adesão ao enviesamento de equiprobabilidade e justificações que revelam a adesão à heurística de representatividade. Nestes itens (1, 2, 3a, 3b, 4a e 4b) observaram-se 267 justificações desta natureza num universo de 1686 justificações (15,8% das justificações): 100 no item 1; 60 no item 2; 91 nos dois itens da questão 3; e 16 nos dois itens da questão 4.

Tabela 7. Distribuição de justificações apresentadas pelos alunos nos itens da parte I do questionário (itens de escolha múltipla)

Natureza da justificação	Percentagem
Tautológica	30,7
Heurística da representatividade	16,5
Enviesamento de equiprobabilidade	52,8

Pela Tabela 7 conclui-se da forte adesão à estratégia de enviesamento de equiprobabilidade (se um acontecimento é possível, ele é equiprovável) para justificar que dois acontecimentos são equiprováveis e a afirmações tautológicas que não justificam a opção selecionada uma vez que se limitam a repetir, em parte ou no todo, o enunciado da questão. Quanto à heurística da representatividade, as estratégias repartiram-se entre o *efeito recente negativo* e o *efeito recente positivo* nas questões de independência, isto é, nas questões 1 e 2.

Na Tabela 8 apresenta-se a distribuição de justificações com potencial para justificar a opção correta apresentada pelos alunos nas questões da parte I do questionário. As justificações foram classificadas em dois grandes grupos: justificações específicas (utilizadas em 605 de 1686 justificações) e justificações gerais (utilizadas em 420 de 1686 justificações), conforme reunissem potencial para responder corretamente apenas à situação específica do questionário ou reunissem potencial para responder corretamente a situações similares às apresentadas no questionário, respetivamente.

Tabela 8. Distribuição das justificações dos alunos para a escolha da resposta correta nos itens da parte I do questionário (itens de escolha múltipla)

Justificações	Percentagem
Gerais	**41,0**
Razões de probabilidade	82,6
Razão bolas pretas (brancas) / bolas brancas (pretas)	14,0
Os sacos têm quantidades proporcionais de bolas	3,4
Específicas	**59,0**
No saco há tantas bolas brancas como pretas	35,2
Há menos bolas pretas do que brancas no saco	30,0
A região preta da roleta é maior que a região branca	21,3
O saco B tem mais bolas brancas do que o saco A	11,2
O saco B tem mais bolas do que o saco A	2,3

Entre as duas categorias de justificações, salienta-se uma maior percentagem de justificações específicas em relação às justificações gerais. No caso da justificação *razão bolas pretas (brancas)/bolas brancas (pretas)*, ela integra o conjunto das justificações gerais, enquanto vantagem (quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos desfavoráveis) porque os sacos continham apenas dois tipos de objetos (bolas brancas e bolas pretas). Contudo, tal não é garantia de que os alunos recorressem a estra estratégia caso a situação envolvesse mais tipos de objetos.

Quanto às justificações específicas, salientam-se as justificações *no saco há tantas bolas brancas como pretas* e *há menos bolas pretas do que brancas no saco,* alicerçadas na comparação do número de casos favoráveis e desfavoráveis.

Na Tabela 9 apresenta-se a distribuição dos erros dos alunos nas questões de resposta curta de determinação de uma probabilidade, excetuando as questões 7a1, 7a2, 7a3 e 9a por não envolverem o cálculo de uma probabilidade. Da observação da Tabela 9, conclui-se que o erro predominante, com uma percentagem bastante expressiva comparativamente com os restantes erros, foi o erro *probabilidade diferente da probabilidade pedida*. Este erro consiste na apresentação de uma razão que, embora não sendo a probabilidade solicitada, é a razão de probabilidade de um acontecimento com significado no contexto da situação apresentada.

Tabela 9. Distribuição dos erros cometidos pelos 310 alunos nas questões de resposta curta que envolviam o cálculo de uma probabilidade

Erros	Percentagem (Frequência)
Probabilidade diferente da probabilidade pedida	48,0 (917)
Considerar valores que a variável pode tomar em vez da frequência que lhe está associada	12,5 (239)
Valor maior que 1 sem que seja o inverso de uma probabilidade	6,8 (130)
Inverso de uma razão de probabilidade	5,8 (110)
Cálculo de duas probabilidades em vez de uma	4,0 (76)
Razão bolas brancas (pretas) / bolas pretas (brancas)	3,8 (72)
Centrar a atenção na cor das bolas	3,6 (69)
Admitir que a probabilidade conjunta é igual à soma ou diferença de probabilidades	3,4 (64)
Não considerar a reposição quando é devida	2,3 (44)
Considerar a reposição quando não é devida	1,4 (27)
Probabilidade igual a 1	1,4 (27)
A razão é menor que 1 e envolve o número de linhas da tabela	0,9 (18)
Não considerar a ordem	0,4 (8)

Outros valores	5,7 (108)
Total	**100 (1909)**

Dada a diversidade de erros que esta categoria envolve, efetua-se de seguida uma análise mais pormenorizada desta situação, resultando este erro de o aluno: confundir as relações de ordem *maior*, *maior ou igual*, *menor* ou *menor ou igual* (36); ignorar o acontecimento condicionado (29); ignorar o acontecimento condicionante (222); considerar o acontecimento complementar (38); reduzir despropositadamente o espaço amostral (6); interpretar incorretamente a informação fornecida no enunciado (29); confundir probabilidade condicionada e probabilidade conjunta (236); confundir uma probabilidade condicionada com a sua transposta (37); ignorar um dos acontecimentos da conjunção (15); confundir as probabilidades condicionadas associadas aos itens 9b e 9c, traduzindo dificuldades no reconhecimento dos acontecimentos condicionante e condicionado (139); outras probabilidades (130).

O erro *considerar valores que a variável pode tomar* na obtenção de uma razão de probabilidade resulta de o aluno: considerar o valor da variável *idade* do eixo horizontal do gráfico da questão 5, considerar o valor da variável *número de irmãos* da questão 6 e considerar o valor da variável *número de bolas* na questão 8. Nesta categoria incluíram-se também os erros resultantes de considerar o número de barras do gráfico da questão 5, isto é, um número de valores que a variável *idade* pode tomar e de considerar o *número de linhas da tabela* na questão 6, isto é, o número de valores que a variável *número de irmãos* pode tomar.

Já o erro *inverso de uma razão de probabilidade* consiste em obter o inverso da probabilidade pedida ou o inverso de uma razão de probabilidade que, embora não sendo a probabilidade solicitada, representa a probabilidade de um acontecimento com significado no contexto da situação apresentada.

O erro *valor maior que 1 sem que seja o inverso de uma probabilidade* consiste na obtenção de uma razão maior que 1 ou em considerar para probabilidade um número inteiro maior do que 1. Embora quase todos os valores inteiros considerados pelos alunos tenham um significado no contexto do problema, a realidade é que o valor apresentado para a probabilidade pedida não tem qualquer significado no contexto de Probabilidades.

O erro *cálculo de duas probabilidades* consiste em considerar duas razões de probabilidade, quando a resposta correta envolve apenas uma.

O erro *razão bolas brancas (pretas)/bolas pretas (brancas)* consiste em identificar a probabilidade com uma espécie de *vantagem*, isto é, a razão entre o número de bolas brancas (pretas) e o número de bolas pretas (brancas) existentes no saco ou a razão do número de bolas brancas existentes no saco antes e depois da primeira extração.

O erro *centrar a atenção na cor* consiste em centrar a atenção na cor dos objetos em vez do número de configurações possíveis, tomando para acontecimentos elementares pares do tipo BB, BP, PB e PP quando há vários objetos de cada tipo e considerando-os acontecimentos elementares equiprováveis.

O erro *admitir que a probabilidade conjunta é igual à soma ou diferença de probabilidades* consiste em adicionar ou subtrair probabilidades. No caso da soma de probabilidades, o aluno admite que $P(A \cap B) = P(A \mid B) + P(B)$ em vez de considerar que $P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B)$.

Por oposição às categorias antes referidas, incluíram-se na categoria *outros valores* as respostas desprovidas de sentido na situação apresentada.

4.3. Desempenho em matemática e respostas

Efetuou-se uma análise das respostas por item, por grupos de itens correspondentes aos diferentes conteúdos — independência, probabilidade condicionada e probabilidade

geral, e na totalidade do questionário segundo os níveis de desempenho em matemática, codificado em fraco, médio e bom.

Na análise de cada uma das questões do questionário utilizámos o teste de qui-quadrado para testar a independência entre as variáveis desempenho em matemática (fraco, médio e bom) e o tipo de resposta (correta e errada). Na Tabela 10 apresenta-se a distribuição das respostas corretas nos 23 itens do questionário, segundo o nível de desempenho em matemática dos alunos envolvidos no estudo.

Tabela 10. Distribuição das respostas corretas segundo o desempenho dos alunos em matemática

Item	Percentagem de respostas corretas segundo o desempenho em Matemática			Valor da estatística χ^2	Valor de p
	Fraco	Médio	Bom		
1	87,5	86,4	97,7	8,022*	0,018
2	83,3	83,2	96,5	9,598**	0,008
3a	54,2	65,6	83,7	18,164**	0,000
3b	41,7	46,4	55,8	3,764	0,153
4a	88,5	90,4	95,3	2,791	0,248
4b	71,9	84,0	89,5	10,196**	0,006
5a	39,6	48,8	79,1	31,176**	0,000
5b	14,6	28,8	55,8	36,430**	0,000
6a	49,0	61,6	88,4	32,203**	0,000
6b	16,7	23,2	51,2	29,656**	0,000
7a1	92,7	100,0	100,0	— ***	—
7a2	92,7	98,4	97,7	— ***	—
7a3	93,8	100,0	100,0	— ***	—
7b1	50,0	60,8	81,4	19,742**	0,000
7b2	44,8	53,6	74,4	17,029**	0,000
7b3	38,5	48,0	73,3	23,338**	0,000
8a1	58,3	64,0	82,6	13,248**	0,001
8a2	1,0	2,4	17,4	26,229**	0,000
8b1	49,0	67,2	83,7	24,581**	0,000
8b2	1,0	0,0	10,5	— ***	—
9a	35,4	48,0	54,7	7,122*	0,028
9b)	34,4	57,6	65,1	19,437**	0,000
9c	25,0	32,0	36,0	2,700	0,259

* Diferenças estatisticamente significativas a menos de 0,05.

** Diferenças estatisticamente significativas a menos de 0,01.

*** Não foi possível aplicar o teste de qui-quadrado por existir 3 células com frequência esperada inferior a 5.

Pela tabela 10 observa-se, em geral, um aumento da percentagem de respostas corretas quando passamos de um desempenho fraco em matemática para um desempenho médio e deste para um desempenho bom. Nos itens 1 e 2 (itens de independência) e no item 8b2 (item de probabilidade geral) observam-se percentagens semelhantes de respostas corretas nos níveis de desempenho fraco e médio e um aumento considerável destas respostas no nível de desempenho bom. De entre estas questões, não foi possível aplicar o teste de qui-quadrado à questão 8b2, por existir um número excessivo de células (3 células) com frequência esperada inferior a 5.

Nos itens 7a1, 7a2 e 7a3 (itens de probabilidade geral), em que se avaliava a capacidade de atribuir significado a dados de uma tabela de dupla entrada, observam-se percentagens semelhantes de respostas corretas nos três níveis de desempenho em matemática, muito próximas ou mesmo de 100%. Em todas estas questões não foi possível aplicar o teste de qui-quadrado pelas mesmas razões que as referidas para a questão 8b2.

Dos restantes 19 itens, em 16 a aplicação do teste de qui-quadrado determinou diferenças estatisticamente significativas a menos de 5% e nos 3 restantes itens (3b, 4a e 9c, de probabilidade condicionada) não se verificaram diferenças estatisticamente significativas.

Para cada um dos conjuntos de itens considerados, correspondentes aos três conteúdos considerados e à totalidade do questionário, aplicámos o teste bilateral não paramétrico de Kruskal-Wallis para comparar o desempenho dos alunos nesses conteúdos e no questionário com o desempenho em matemática. Na Tabela 11 apresentam-se os resultados dessa análise, incluindo os valores da média, do desvio padrão e da estatística do teste e correspondente valor de prova.

Tabela 11. Análise das respostas corretas por desempenho em matemática nos três conteúdos considerados e no questionário

Dimensões	Média (desvio padrão) do número de respostas corretas segundo o desempenho em matemática						Valor da estatística H_E	Valor de p
	Fraco		Médio		Bom			
Independência	1,7	(0,54)	1,7	(0,53)	1,9	(0,24)	16,150**	0,000
Probabilidade condicionada	5,4	(2,61)	6,6	(2,59)	8,5	(2,45)	54,148**	0,000
Probabilidade geral	4,6	(1,39)	5,2	(1,17)	6,3	(1,16)	70,188**	0,000
Questionário total	11,6	(3,79)	13,5	(3,29)	16,7	(2,96)	79,836**	0,000

** Diferenças estatisticamente significativas a menos de 0,01.

Pela Tabela 11 verifica-se que o teste de Kruskal-Wallis determinou diferenças estatisticamente significativas em todos os três conteúdos estudados e na totalidade do questionário.

Em síntese, podemos concluir que ao maior nível de desempenho em matemática corresponde, em geral, uma melhor realização dos alunos nas diversas dimensões estudadas no questionário, tendo-se obtido diferenças estatisticamente significativas na grande maioria dos itens considerados individualmente, em todos os conteúdos considerados (independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral) e na totalidade do questionário.

5. Conclusão

Na globalidade do questionário verificou-se que, em média, os alunos responderam corretamente a quase dois terços dos itens. O facto de se ter obtido uma maior percentagem de respostas corretas no caso do conteúdo independência e percentagens semelhantes nos conteúdos probabilidade condicionada e probabilidades geral, leva-nos a concluir que a independência e a probabilidade condicionada não se revelaram conteúdos mais difíceis do que a probabilidade geral. Por outro lado, tal como verificou Fischbein e Gazit (1984), também foi consideravelmente maior a percentagem de respostas corretas na globalidade dos itens envolvendo extração com reposição relativamente aos que envolvem extração sem reposição.

Em termos das justificações e estratégias avançadas pelos alunos para as suas respostas nos itens de escolha múltipla salienta-se o recurso a relações parte-parte, como se observou em Correia e Fernandes (2012), e a adesão ao enviesamento de equiprobabilidade, a justificações tautológicas e à heurística da representatividade a partir dos efeitos recentes positivo e negativo. Em termos de estratégias de contagem foram mais utilizadas pelos alunos a determinação das diferentes configurações, a construção de um diagrama de árvore e a construção de uma tabela de dupla entrada, as quais foram utilizadas principalmente quando se solicitava a determinação do espaço amostral e muito pouco usadas nas outras questões, particularmente no cálculo de probabilidades em experiências compostas onde a

construção de um diagrama de árvore ou de uma tabela de dupla entrada se poderia revelar uma estratégia muito promissora.

No caso das respostas corretas, observou-se que, em pouco menos de metade dos casos, os alunos apresentaram justificações gerais, que garantem a seleção das respostas corretas nas situações apresentadas e em situações similares, e em pouco mais de metade dos casos, os alunos apresentaram justificações específicas, que garantem a resposta correta apenas nas situações do questionário. Relativamente ao estudo de Fernandes (2001), este resultado representa um aumento significativo da adesão a raciocínios gerais no caso dos alunos do 8º ano, que não tinham tido ensino prévio de probabilidades.

No caso dos itens envolvendo o cálculo de probabilidades observaram-se vários tipos de erros, salientando-se a determinação de uma probabilidade diferente da probabilidade pedida, com cerca de metade dos erros, seguindo-se considerar valores da variável em vez das frequências no caso dos gráficos, um valor maior do que 1 sem que seja o inverso de uma probabilidade, o inverso de uma razão de probabilidade e calcular duas probabilidades em vez de uma, entre outros. No caso da determinação de uma probabilidade diferente da pedida, destacou-se o facto de os alunos ignorarem o acontecimento condicionante, também observado em Correia et al. (2011), confundirem a probabilidade condicionada com a probabilidade conjunta, também observado em Correia et al. (2011) e Pollatsek et al. (1987), dificuldades no reconhecimento dos acontecimentos condicionante e condicionado e dificuldades na interpretação dos enunciados.

Ao aumento de desempenho em matemática correspondeu, em geral, um aumento da percentagem de respostas corretas dos alunos na maioria dos itens e em qualquer dos conteúdos avaliados (independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral), tal como se verificou no estudo de Fernandes (2001) no caso da probabilidade geral.

Globalmente, os resultados obtidos no presente estudo, enfatizando a percentagem de respostas corretas, os raciocínios e o aumento da percentagem de respostas corretas com o maior desempenho em matemática, constituem evidências que corroboram a possibilidade de introduzir o ensino da independência e da probabilidade condicionada na escolaridade básica.

Referências

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación? In J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho, & F. Viseu (Orgs.), *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 9-21). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

Contreras, J. M., Batanero, C., Díaz, C., & Fernandes, J. A. (2011). Prospective teachers' common and specialized knowledge in a probability task. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Rzeszów, Poland, 9th to 13th February 2011.

Correia, P. F., Fernandes, J. A., & Contreras, J. M. (2011). Intuições de alunos do 9º ano de escolaridade sobre probabilidade condicionada. In C. Nunes, A. Henriques, A. Caseiro, A. Silvestre, H. Pinto, H. Jacinto & J. Ponte (Orgs.), *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Correia, P. F. & Fernandes, J. A. (2012). Comparação de probabilidades condicionadas no contexto de extração de bolas de um saco. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre & C. Nunes (Orgs.), *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 429-442). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Estrada, A., & Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two way tables: an exploration study with future teachers. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics.* Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education.

Falk, R. (1993). *Understanding probability and statistics: a book of problems*. Wellesley, Massachusetts: A K Petrers.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistic* (pp. 292-297). Victoria, BC: University of Victoria.

Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Fernandes, J. A. (2001). Intuições probabilísticas em alunos do 8.º e 11.º anos de escolaridade. *Quadrante*, *10*(2), 3-32.

Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 1-24.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 96-105.

Fischbein, E., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1991). Factors afecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 523-549.

Garfield, J., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*, 44-63.

Green., D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (vol. 2, pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1982). Subjective probability: A judgment of representativeness. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 32-47). Cambridge: Cambridge University Press.

Konold, C., Pollatsek, A., Well, A., Lohmeier, J., & Lipson, A. (1993). Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education,* 24(5), 392-414.

Lecoutre, M.; Durand, J. (1988). Jugements probabilistes et modeles cognitifs: etude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics,* 19(3), 357-368.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., & Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organitation, Behavior and Human Decision Processes*, *40*, 255-269.

Spinillo, A. G. (2002). O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção. *Psicologia: Reflexão e Crítica, 15*(3), 475-487.

Tarr, J. E. (1997). Using middle school students' thinking in conditional probability and independence to inform instruction. (Doctoral dissertation, Illinois State University, 1997). *Dissertation Abstracts International, 49,Z*5055.

Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 215-238). New York, NY: Springer.

Watson, J. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 145-169). New York, NY: Springer.

ANEXO

Parte I

Esta parte do questionário é constituída apenas por questões de escolha múltipla. Das três alternativas que te são apresentadas escolhe **apenas uma** e assinala-a com um ×. Não te esqueças de justificar a tua escolha.

1. Quando se lança uma moeda há dois resultados possíveis: obter a face Euro (E) ou obter a face Nacional (N). Lançou-se **cinco** vezes consecutivas uma moeda equilibrada ao ar e obteve-se sempre a face Euro, isto é, a sequência $E\,E\,E\,E\,E$.

Algum dos seguintes resultados é mais provável?

☐ Obter novamente a face Euro no sexto lançamento.
☐ Obter a face Nacional no sexto lançamento.
☐ É igualmente provável obter qualquer uma das faces da moeda no sexto lançamento.
Justifica a tua resposta.

2. Quando se gira a roleta da Figura 1, há dois resultados possíveis para o ponteiro quando a roleta parar: o ponteiro assinala a cor branca (B) ou o ponteiro assinala a cor preta (P).
Girou-se **cinco** vezes a roleta e obteve-se a sequência $B\,P\,P\,B\,P$.
Gira-se novamente a roleta pela **sexta** vez. Algum dos seguintes resultados é mais provável?



Figura

☐ O ponteiro assinala a cor **Branca** quando a roleta para.
☐ O ponteiro assinala a cor **Preta** quando a roleta para.
☐ É igualmente provável o ponteiro assinalar qualquer uma das cores, branca ou preta, quando a roleta para.
Justifica a tua resposta.

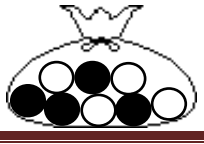
3. Considera dois sacos A e B com bolas brancas e bolas pretas.
O saco A tem 10 bolas brancas e 20 bolas pretas.
O saco B tem 100 bolas brancas e 200 bolas pretas.

a) Retira-se, ao acaso, uma bola do saco **A** e uma bola do saco **B** e verifica-se que são ambas brancas. Depois de se **colocar** de novo estas bolas nos respetivos sacos, retira-se novamente uma bola de cada um dos sacos.
Algum dos seguintes resultados é mais provável?

☐ Obter uma bola branca do saco **A**.
☐ Obter uma bola branca do saco **B**.
☐ É igualmente provável obter uma bola branca do saco **A** e do saco **B**.
Justifica a tua resposta.

b) Retira-se, ao acaso, uma bola do saco **A** e uma bola do saco **B** e verifica--se que são ambas brancas. **Sem colocar** de novo estas bolas nos respetivos sacos, retira-se novamente uma bola de cada um dos sacos.
Algum dos seguintes resultados é mais provável?
☐ Obter uma bola branca do saco **A**.
☐ Obter uma bola branca do saco **B**.
☐ É igualmente provável obter uma bola branca do saco **A** e do saco **B**.
Justifica a tua resposta.

4. Num saco há 4 bolas brancas e 4 bolas pretas, conforme se mostra na figura seguinte. As bolas são todas iguais exceto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente (uma a seguir à outra) **duas** bolas do saco.



a) Extrai-se uma 1ª bola do saco e **coloca-se** essa bola no saco antes de se extrair uma 2ª bola. Comparativamente com a probabilidade da 1ª bola ser preta, a probabilidade de a 2ª bola ser branca:
☐ Aumenta.
☐ Diminui.

☐ Mantém-se.

Justifica a tua resposta.

b) Extrai-se uma 1ª bola do saco e **não se coloca** essa bola no saco antes de se extrair uma 2ª bola. Comparativamente com a probabilidade da 1ª bola ser preta, a probabilidade de a 2ª bola ser branca:

☐ Aumenta.

☐ Diminui.

☐ Mantém-se.

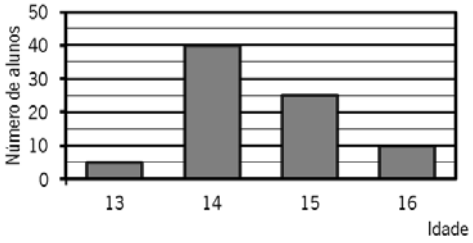
Justifica a tua resposta:

Parte II

Nas questões desta parte do questionário deves indicar todos os cálculos e raciocínios que realizaste para obter as respostas apresentadas.

5. Um dos trabalhos realizados pelo João para a disciplina de Matemática consistiu em fazer o registo das idades dos alunos do 9.º ano da sua escola e em elaborar um gráfico da distribuição dos alunos por idades. O gráfico que o João elaborou, apresentado ao lado, está correto.

Escolheu-se, ao acaso, um aluno do 9.º ano da escola do João.



a) Qual a probabilidade de o aluno ter mais de 14 anos?

b) Esse aluno tem menos de 15 anos. Qual a probabilidade de ele ter 13 anos?

6. Escolheram-se, ao acaso, 60 estudantes de uma escola e perguntou-se a cada um deles o seu número de irmãos. A partir das respostas dadas, obtiveram-se os dados do quadro seguinte:

Nº de irmãos	**Nº de estudantes**
0	8
1	25
2	15
3 ou mais	12

Escolhe-se, novamente ao acaso, um estudante do grupo dos 60 estudantes.

a) Qual a probabilidade de o estudante escolhido ter mais que 1 irmão?

b) Sabe-se que o estudante escolhido tem menos que 2 irmãos. Qual a probabilidade de ter exatamente 1 irmão?

7. Escolheram-se, ao acaso, 25 estudantes de uma escola e perguntou-se a cada um deles se praticava ou não desporto. Os dados obtidos foram registados, segundo o sexo dos estudantes, no quadro seguinte.

	Rapariga	Rapaz	Total
Pratica desporto	8	6	14
Não pratica desporto	7	4	11
Total	15	10	25

a) No quadro anterior, o que representa: **1)** O número 14; **2)** O número 10; **3)** O número 6.

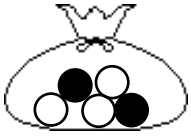
b) Escolhe-se, ao acaso, um estudante do grupo dos 25 estudantes.

1) Qual a probabilidade de o estudante ser rapaz e praticar desporto?

2) Sabe-se que o estudante escolhido pratica desporto. Qual a probabilidade de ser rapaz?

3) Sabe-se que o estudante escolhido é rapaz. Qual a probabilidade de praticar desporto?

8. Num saco há 3 bolas brancas e 2 bolas pretas, conforme se mostra na figura seguinte. As bolas são todas iguais exceto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente **duas** bolas do saco.



a) Considera que a **1ª** bola extraída **é colocada** de novo no saco antes de se extrair a **2ª** bola.
1) Sabe-se que a **1ª** bola extraída é branca. Qual a probabilidade de a **2ª** bola ser branca?
2) Qual a probabilidade de obter **duas** bolas brancas?
b) Considera que a **1ª** bola extraída **não é colocada** de novo no saco antes de se extrair a **2ª** bola.
1) Sabe-se que a **1ª** bola extraída é branca. Qual a probabilidade de a **2ª** bola ser preta?
2) Qual a probabilidade de obter **uma** bola branca e **uma** bola preta (por qualquer ordem)?

9. Num saco há 4 fichas todas iguais, em duas estão inscritos os números 1 e 2 e nas restantes duas estão inscritas as letras A e B, como se mostra a seguir.



Considera que a Ana tirou, ao acaso, duas fichas do saco **sem repor** a 1ª ficha no saco antes de retirar a 2ª ficha.

a) Escreve todas as sequências possíveis para as duas fichas extraídas pela Ana.
b) Sabendo que a **primeira** ficha tem uma letra, determina a probabilidade de a **segunda** ficha ter um número.
c) Sabendo que a **segunda** ficha tem um número, determina a probabilidade de a **primeira** ficha ter também um número.

La cuantificación del azar: una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica de probabilidad

Sánchez Sánchez, Ernesto y Valdez Monroy, Julio César

CINVESTAV-IPN

Resumen

La tesis que se defiende en este artículo es que para alcanzar un nivel adecuado de comprensión de probabilidad por parte de los estudiantes de bachillerato (15-17 años) es necesario que sean capaces de hacer inferencias que conecten los enfoques subjetivo, clásico y frecuencial. Dentro de las posibles inferencias, las más importantes son las que se refieren al contenido (informal) de la ley de los grandes números. Los argumentos se basan en las observaciones obtenidas mediante sesiones de entrevista realizadas con un estudiante de bachillerato quien antes no había estudiado ningún tema de probabilidad. Se analizan sus respuestas verbales y escritas frente a tareas que incluyen actividades de simulación física y computacional. En dicho análisis se utilizan los niveles de razonamiento definidos por Jones: subjetivo, transicional, cuantitativo informal y numérico. Los resultados muestran las dificultades del estudiante para entender la probabilidad como una medida del azar. En particular, la interacción con el entrevistador y la discusión de los resultados sobre prácticas de simulación física y computacional reveló que un aspecto crucial para la articulación de los enfoques de probabilidad mediante la ley de los grandes números es el razonamiento con números relativos.

Palabras clave: Enfoques de probabilidad, Inferencialismo, Razonamiento probabilístico, Simulación, Cuantificación del azar.

1. Introducción

La tesis que se quiere ilustrar es que el nivel de comprensión del concepto de probabilidad que alcanza un sujeto está asociado con las inferencias significativas y plausibles que es capaz de formular con él, y dentro de éstas, juegan un papel crucial las que se refieren al contenido de la Ley de los Grandes Números (LGN). Es claro que un conocimiento funcional no se restringe a utilizar el enfoque clásico, el enfoque frecuencial o, incluso, un enfoque subjetivo para estimar la probabilidad de un evento si el número obtenido no puede ser utilizado para hacer afirmaciones que extiendan el conocimiento o permitan tomar decisiones o hacer predicciones. Al parecer, para formular tales inferencias, se hace necesario un enfoque holístico que haga intervenir y articule los tres enfoques de probabilidad; en particular, una manera de relacionar el enfoque clásico con el frecuencial es mediante la ley de los grandes números. Conviene mencionar también al enfoque subjetivo, ya que las ideas subjetivas de los estudiantes reflejan su confianza y expectativas acerca de eventos inciertos.

Jones (2005) señala que no hay estudios a nivel secundaria que aborden la conexión entre los enfoque clásico y frecuencial de la probabilidad. Ireland y Watson (2009) en respuesta al señalamiento de Jones, llevaron a cabo un estudio con estudiantes de grado 5-6 (11-12 años) para explorar la comprensión de la probabilidad en el continuo de lo experimental a lo teórico, es decir, su comprensión informal de la ley de los grandes números. Una de sus conclusiones es que el elemento más complicado de comprender es la ley de los grandes números. Konold et al. (2011) analizan las consecuencias de introducir dos nociones de probabilidad: la teórica y la experimental. Exploran el pensamiento de una estudiante de 8º grado (14 años) que ha estudiado probabilidad. Informan que tiene serios obstáculos para vincular su noción de probabilidad teórica con su noción de probabilidad

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 39-46). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

experimental, las cuales sabe calcular sin problemas. Estos estudios indican la dificultad de los estudiantes de edades previas a los 14 años para entender la conexión entre ambos enfoques y, por tanto, de la LGN. Parece razonable estudiar el razonamiento de estudiantes de mayor edad con la idea de revelar el tipo de dificultades que enfrentan para hacer la conexión entre los enfoque de probabilidad. Por ejemplo, Albert (2003) estudia la articulación de los enfoques subjetivo y frecuencial con estudiantes universitarios.

Por otro lado, el marco de Jones *et al*. (1997) propone jerarquías de los conceptos básicos de probabilidad para describir su aprendizaje, partiendo de un nivel subjetivo hasta alcanzar un nivel numérico. Su idea es que el razonamiento probabilístico de los estudiantes sigue un proceso de cuantificación de sus nociones subjetivas de incertidumbre, azar y probabilidad, y puede observarse a través de las soluciones que expresan al resolver problemas. En consecuencia, propone segmentar las soluciones de los alumnos en cuatro niveles, mismos que marcan las características de un progreso cognitivo. Su método da lugar a una jerarquía para cada concepto básico: espacio muestral, definición clásica y aproximación frecuencial, comparación de probabilidades y otros.

En el presente trabajo se sigue la misma idea de Jones *et al*. para construir una jerarquía que ayude a describir el aprendizaje de la probabilidad; no obstante hay dos diferencias fundamentales: 1) Se estudia un solo sujeto y de mayor edad que los examinados por Jones *et al*.; 2) Se estudian varios conceptos básicos de manera conjunta, especialmente el enfoque clásico, el enfoque frecuencial, espacio muestral y comparación de probabilidades. Con base en estas consideraciones formulamos la pregunta: ¿Cuáles son las características de una jerarquía similar a la de Jones *et al*. al observar a un estudiante de bachillerato en su proceso de aprendizaje de la probabilidad mientras resuelve un problema?

2. Marco Conceptual

El marco consta de tres componentes: en la primera, las lecciones del inferencialismo, se presentan unas proposiciones teóricas referentes a la comprensión conceptual; en la segunda componente, se menciona el papel de las dificultades, concepciones erróneas o sesgos que frenan o desvían el entendimiento de la noción de probabilidad; la tercer componente, es una jerarquía de desarrollo del aprendizaje de la probabilidad, adaptada del marco de Jones *et al*. (1997) y enriquecida con observaciones realizadas en la presente investigación.

2.1. Lecciones del inferencialismo

Bakker y Derry (2011) recogen proposiciones teóricas de una teoría semántica llamada inferencialismo (Brandom, 2000) con el propósito de ponerlas al servicio de la reflexión sobre la inferencia estadística informal. Opinan que la teoría puede ayudar a superar tres desafíos que enfrenta la educación estadística: 1) Evitar el conocimiento inerte, que significa reproducir definiciones o fórmulas sin usarlas efectivamente; 2) Evitar un enfoque atomístico, que presenta los conceptos de manera aislada; 3) Encontrar secuencias de enseñanza para permitir al estudiante que se apropie de los conocimientos de manera coherente. Los autores resaltan en su exposición tres proposiciones que consideran las lecciones del inferencialismo para la educación estadística: 1) Los conceptos se entienden, en primer lugar, en términos de su papel en el razonamiento e inferencias realizados dentro de una práctica social de dar y pedir razones, y no sólo en términos representacionales; 2) Para entender el uso de los conceptos se debe privilegiar el holismo sobre el atomismo; es decir, el aprendizaje de un concepto significa el aprendizaje de muchos conceptos interrelacionados; 3) Privilegiar en la educación un enfoque inferencialista por encima de un enfoque representacionalista.

Los autores presentan ejemplos empíricos para ilustrar las lecciones del inferencialismo, teniendo como objetivo la enseñanza de conceptos clave como distribución, centros, variación y muestreo. En el presente estudio se aborda el concepto de probabilidad,

cuya enseñanza enfrenta los siguientes aspectos de los desafíos que mencionan Bakker y Derry: 1) Se suele aprender a calcular la probabilidad sin poder hacer ningún tipo de inferencia; 2) La enseñanza de la probabilidad basada sólo en un enfoque (clásico o frecuencial) impide ver la relación fundamental que subyace en la ley de los grandes números; 3) Es necesario encontrar secuencias de enseñanza de la probabilidad que ofrezcan un marco adecuado para el desarrollo de una visión coherente y una operatividad fértil. Las lecciones del inferencialismo, propuestas por Bakker y Derry, orientan el análisis del presente trabajo.

2.2. Dificultades principales en el aprendizaje de la probabilidad

Una de las líneas más desarrolladas de la investigación en la educación matemática ha sido el estudio de errores y dificultades de los estudiantes al enfrentar diferentes conceptos matemáticos. Frecuentemente, los errores sistemáticos y dificultades persistentes no se pueden atribuir a distracciones, a falta de estudio o sólo a la propia complejidad del concepto, sino que responden a concepciones erróneas o teorías personales inconsistentes con el punto de vista normativo.

La construcción del concepto de probabilidad se puede ver como el proceso de cuantificación (o medición) de las nociones subjetivas de azar o incertidumbre: se trata de hacer medibles los acontecimientos que se perciben como impredecibles. Una vez asociada una medida a un evento, se espera que ésta pueda ser utilizada para hacer inferencias. Una de las dificultades para la comprensión de la probabilidad es lo que Konold (1991) llama el *enfoque del resultado aislado*. Este comportamiento puede ser una respuesta a la necesidad de implicar a la probabilidad en una inferencia o afirmación con sentido; bajo esta concepción errónea, los sujetos esperan ver las consecuencias de la probabilidad en un solo ensayo; por ejemplo, unas afirmaciones atribuidas a este enfoque son las siguientes: 75% u 80% de probabilidad de que llueva quiere decir que va a llover; 5% de probabilidad de que no llueva quiere decir que no va a llover.

Otra concepción errónea que tiene un parentesco con la anterior, es la *ley de los pequeños números* (Tversky y Kahneman, 1982). Bajo esta concepción, los sujetos creen que una muestra pequeña es representativa, teniendo una exagerada confianza en que las características de la muestra son una reproducción de las de la población; por ejemplo, se espera que en seis lanzamientos de un dado se presente una vez cada cara, ya que la probabilidad de cualquier cara es 1/6. Esta concepción también responde a la necesidad de implicar a la probabilidad en inferencias cuyas consecuencias sean verificables u observables. Infortunadamente ninguna de las dos concepciones puede satisfacer a la necesidad a la que responden. Por otro lado, en el intento de comprender la relación entre la probabilidad de un evento y la frecuencia con que ocurre el evento en muchas realizaciones del experimento, se presenta la tendencia de los estudiantes a razonar con frecuencias absolutas en lugar de frecuencias relativas. Esto los lleva a percibir como grandes las pequeñas diferencias; esto obstaculiza la comprensión de la LGN.

2.3. Niveles de razonamiento acerca del concepto de probabilidad

En este estudio se propone una jerarquía de razonamiento que es una adaptación del marco sobre la comprensión probabilística propuesto por Jones *et al*. (1997). Se definen, también, cuatro niveles que van de lo subjetivo a lo numérico pero, a diferencia del marco de Jones *et al*., se destacan dos tipos de elementos: a) los enfoques de probabilidad y sus relaciones, y b) el razonamiento con números relativos.

1. En el *nivel subjetivo* no se atribuye significado a la asignación de un número a un evento, significado que reflejaría la propensión de ocurrencia del evento, o se asigna un número de manera subjetiva, con base en la intuición, sin la posibilidad de hacer inferencias.

2. En el *nivel transicional* se asigna un número a un evento de forma subjetiva (reflejando la propensión de ocurrir del evento) con base en el contenido de las urnas o con base en las frecuencias relativas, pero sin relacionarlas adecuadamente.
3. En el *nivel cuantitativo informal* para la asignación de un número se maneja más de un enfoque y se percibe alguna relación entre su valoración subjetiva, el análisis del generador aleatorio (v. gr. Contenido de la urna) y sus frecuencias. De esta manera, se comienzan a formar inferencias; no se razona con números relativos y, por tanto, no se asimila la variabilidad.
4. En el *nivel numérico* para la asignación de un número a un evento se ponen en juego los tres enfoques y se perciben relaciones entre valoración subjetiva, análisis del generador aleatorio y frecuencias relativas. En particular, se razona con números relativos para asimilar adecuadamente la variabilidad y para formar inferencias.

3. Metodología

El presente es un estudio de caso que da seguimiento a la evolución del razonamiento sobre el concepto de probabilidad de un solo estudiante. Éste cursaba su tercer grado de bachillerato (17 años) y tiene buen manejo matemático de aritmética y álgebra, aunque nunca había estudiado tema alguno de probabilidad. El procedimiento para la obtención de datos fue a través de entrevistas en las que el estudiante resolvió varias tareas de probabilidad, una de las cuales consistió en un problema de comparación de probabilidades (Cuadro 1). Con este problema se realizaron dos sesiones de una hora cada una, además de otra en la que el estudiante aprendió elementos básicos del software Fathom y a interpretar resultados de simulaciones con dicho software. Las sesiones fueron filmadas y transcritas antes de ser analizadas.

Cuadro 1. Problema de comparación de probabilidades

En la urna A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la urna B se han metido 6 fichas negras y 2 fichas blancas (Figura 1).



Figura 1

Se gana un premio si se extrae una ficha negra. Juan considera que elegir la urna B es lo más conveniente porque sin importar que son proporcionales hay mayor cantidad de fichas negras.

a) ¿Cuál es tu opinión sobre la explicación de Juan?

b) ¿Cómo medirías la posibilidad de que ocurra el evento "sacar una ficha negra de la urna A"? ¿Qué valor le asignarías?

c) ¿Cómo medirías la posibilidad de que ocurra el evento "sacar una ficha negra de la urna B"? ¿Qué valor le asignarías?

d) ¿De qué forma corroborarías la respuesta dada en a)?

4. Resultados

En lo siguiente se exponen y comentan algunos extractos de las entrevistas llevadas a cabo con el estudiante; se han organizado en cuatro episodios. Tienen un orden secuencial y muestran la evolución del pensamiento del estudiante.

Primer episodio. Miguel cree, erróneamente, que es correcta la afirmación de Juan en el encabezado de la pregunta y responde: "creo que si es mejor [elegir la urna B], por la [mayor] cantidad [de fichas negras respecto a la urna A]". Su creencia se apoya en la mayor cantidad de bolas negras en términos absolutos, ignorando la proporcionalidad. Hay que hacer notar que el enfoque hacia las bolas de un color no obedece a la falta de habilidad para manejar la proporcionalidad, como se pone de manifiesto más adelante.

La respuesta de Miguel a la pregunta ¿Qué valor le asignarías [al evento "sacar ficha negra"]? pone en duda el significado mismo de la asignación: "¿Cómo un valor?... Es lo que no entiendo, qué valor. Son valores de qué o qué…". Después de una breve intervención del entrevistador, el alumno muestra que percibe la igualdad de las proporciones de fichas negras: Responde que hay "75% para que salga [ficha] negra [de la urna A]" y "75% [de que salga ficha negra de la urna B]". A pesar de que aparentemente ha calculado la probabilidad de obtener ficha negra en cada urna y visto que son iguales, mantiene su apreciación subjetiva de la situación: "Creo que tiene razón Juan".

Miguel no tiene problemas para ver que la proporción de fichas negras en ambas urnas es 75%, pero cree que es más fácil obtener ficha negra ¿Qué hace falta para que el sujeto establezca una conexión entre la proporción de fichas negras y su creencia sobre la urna más favorable al evento? Hace falta que conciba que los eventos aleatorios se puedan medir de manera significativa, es decir, de manera que, a partir de la asignación, se puedan llevar a cabo inferencias cuyas conclusiones sean observables o verificables. La experimentación y la simulación con el objetivo de establecer un conocimiento informal de la ley de los grandes números, puede ser la vía para establecer y observar tales consecuencias.

Segundo episodio. Ahora se le pide a Miguel que extraiga aleatoriamente muestras de tamaño 10, con remplazo, una de la urna A (con una blanca y 3 negras) y otra de la urna B (con 2 blancas y 6 negras), que registre lo que obtiene y responda las preguntas del entrevistador. En el primer par de muestras Miguel obtuvo y escribió lo que se presenta en la Tabla 1.

Tabla 1. Resultados de 10 extracciones hechas de cada urna (B = ficha blanca N = ficha negra).

# de extracciones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Urna A	N	N	N	N	N	N	B	B	N	N
Urna B	B	N	N	N	B	N	N	N	N	N

Una vez obtenidas las muestras y registrados los resultados, se le preguntó ¿Qué urna elegirías si quieres obtener bola negra? Miguel responde que elegiría la urna A, y explica que: "las primeras extracciones resultaron bolas negras". Enseguida se le pide que extraiga otras muestras y obtiene muestras en las que predomina ficha negra en la urna A. Se le pide entonces que prediga las frecuencias de bolas blancas y negras en 100 y 1000 posibles experimentos en cada una de las urnas. Sus predicciones (Tablas 2 y 3) muestran su creencia de que hay más posibilidades de obtener bola negra en la Urna A.

Tabla 2. Predicción de la distribución de 100 extracciones

	# de fichas blancas	# de fichas negras
Urna A	25	75
Urna B	35	65
Total	60	140

Tabla 3. Predicción de la distribución de 1000 extracciones

	# de fichas blancas	# de fichas negras
Urna A	250	750
Urna B	380	620
Total	630	1370

En ambas predicciones la cantidad de fichas blancas y negras en la urna A es proporcional al contenido de ésta (1 a 3), mientras que su propuesta acerca de la urna B difiere de la que sería proporcional a su contenido. Su predicción se puede interpretar como el resultado de considerar tanto el contenido de la urna como las observaciones previas en

las que la urna A parece más proclive a producir bolas negras que la B. En esta fase de la entrevista, el sujeto ha puesto en juego los elementos necesarios que constituyen el marco básico de la probabilidad: las proporciones de las fichas en las urnas y las frecuencias relativas, pero aún no articula de manera conveniente esos elementos.

En este episodio se refleja la creencia del estudiante acerca de la conexión entre su apreciación subjetiva del comportamiento de los resultados en las muestra pequeñas (10 repeticiones) con el comportamiento de los resultados en muestras más grandes o a largo plazo. La conexión es incorrecta debido a que percibe propiedades espurias basadas en la ley de los pequeños números: predominio de bolas negras en la urna A.

Tercer episodio. Una vez que Miguel había hecho experimentaciones y tratado de anticipar lo que ocurriría en un gran número de repeticiones del experimento, se le pidió que representara la situación en Fathom e hiciera simulaciones computacionales. En la tabla 4 y 5, se muestran los resultados que obtuvo de la simulación de 100 y 1000 extracciones:

Tabla 4. Resultados de la simulación computacional de 100 extracciones

	# de fichas blancas	# de fichas negras
Urna A	23	77
Urna B	29	71
Total	52	148

Tabla 5. Resultados de la simulación computacional de 1000 extracciones

	# de fichas blancas	# de fichas negras
Urna A	248	752
Urna B	246	754
Total	494	1506

Sobre los resultados de la Tabla 4 (100 extracciones) y al preguntarle qué observa, Miguel enfoca su atención en características circunstanciales: “Entre mayor cantidad de fichas negras haya [en las urnas] […] menos [fichas negras] salen [en la simulación]”. No le es posible aún establecer las conexiones esperadas, ya que se han presentado dos dificultades: considera el contenido absoluto de las fichas negras en las urnas (no en frecuencias relativas, por ejemplo, en fracciones o porcentajes) y considera significativas a las diferencias de las frecuencias absolutas de las urnas.

Más adelante, como resultado de cuestionamientos del entrevistador, Miguel centra su atención en la relación aproximada de los resultados obtenidos con las proporciones de las fichas en las urnas, sin embargo, sigue considerando significativas las diferencias debido a que las realiza con números absolutos: “Salen con mayor frecuencia bolas negras de la urna A que de la urna B. Aquí [Tabla 5] […] salen dos [fichas] menos, pero aquí [Tabla 4] […] salen seis veces más”.

En este episodio se evidencia que se volvió una creencia con relativa fuerza la observación del estudiante de que la urna A produce mayores fichas negras debido a que, en términos absolutos, el acumulado de ambas tablas favorece esta situación.

Cuarto episodio. El entrevistador cuestiona al estudiante buscando que haga comparaciones con números relativos. Se puede observar en el siguiente extracto de la entrevista cómo Miguel acepta despreciar pequeñas diferencias y acepta la relación de las frecuencias con las proporciones de las ficha en la urna:

> *Entrevistador*: [preguntó acerca de la comparación de frecuencias relativas para el caso de 1,000 extracciones]
>
> *Alumno*: Varía un poco.
>
> *Entrevistador*: Y ahora ubiquémonos en el otro caso que hicimos acá [representado en el software] que son de 10,000… ¿Qué observas?
>
> *Alumno*: Que es casi un cuarto de fichas blancas y tres cuartos de fichas negras de 10,000… Son iguales, creo que da igual la urna.
>
> *Entrevistador*: ¿Y si fueran 100,000?

Alumno: [Inaudible]…

Entrevistador: ¿Entonces crees […] que daría igual cuál urna elegir?

Alumno: Creo que sí. Ya viéndolo bien, creo que si da igual la urna.

Entrevistador: Entonces, ¿qué opinarías respecto a estas dos preguntas [b) y c)]? ¿Qué valor le asignarías a la posibilidad de extraer una […] ficha negra?

Alumno: 75%.

En este episodio se muestra cómo el alumno, integra sus observaciones de las frecuencias relativas con las proporciones de fichas en la urna.

5. Discusión y conclusiones

En el curso de las entrevistas, el razonamiento de Miguel acerca de la probabilidad recorre los niveles que llevan de un nivel subjetivo al cuantitativo informal, preparándolo para el numérico. Al comienzo, en un nivel subjetivo, no comprende el significado de asignar un número a un evento aleatorio, pues no prevé la posibilidad de utilizarlo para hacer inferencias. Con ayuda de la experimentación, sus respuestas se pueden ubicar en el nivel transicional, pues utiliza las frecuencias para valorar las probabilidades de obtener ficha negra, sin embargo, sus respuestas están desviadas de las normativas por una concepción errónea: la ley de los pequeños números, en la que cree que pequeñas diferencias son significativas. En este nivel, la asignación de una probabilidad comienza a formar parte de inferencias, a saber, afirmaciones sobre lo que ocurrirá en una siguiente experimentación; esto permite que dicha asignación vaya cobrando significado o, en otras palabras, que vaya formando el concepto. El paso a la simulación de muchos experimentos permite al estudiante buscar la conexión entre la proporción de las fichas en las urnas y las frecuencias de bolas de un color. Dicha conexión no la logra establecer con facilidad debido a que observa los resultados de la simulación en términos de números absolutos, por lo que persiste la presencia de la ley de los pequeños números en su razonamiento. No es sino cuando considera las frecuencias relativas (en forma de porcentajes) que puede ver la tendencia decreciente de las diferencias y prever la convergencia. Es entonces que asigna la probabilidad a un evento con base en las proporciones de fichas en la urna, pero en conexión con la tendencia de las frecuencias relativas; consideramos que en este punto, su razonamiento se puede ubicar en cuantitativo informal. Para llegar al numérico haría falta ver el despliegue de su razonamiento en tareas más complejas.

Con relación a la primera lección del inferencialismo de Backer y Derry se puede decir que un aspecto importante en la evolución del razonamiento de Miguel ha sido la búsqueda de claves para elaborar inferencias, que en este caso se organizan alrededor de afirmaciones relacionadas con las proporciones de fichas de color en las urnas y las frecuencias de fichas de color en las muestras obtenidas, tanto de los experimentos físicos como de las simulaciones con el software. Con relación a la segunda lección, se ha visto que lo que permite hacer conexiones es considerar conjuntamente a los tres enfoques de probabilidad, el contenido de las urnas (que prefigura el concepto de espacio muestral), y el manejo de números relativos. La tarea no se redujo a una pregunta para aplicar una definición de probabilidad, ni a un procedimiento aislado alguno, sino a un problema complejo que permitió establecer diferentes conexiones, en particular, se manifiesta la importancia del razonamiento con números relativos para prever la relación de convergencia de la ley de los grandes números. Con relación a la tercera lección del inferencialismo, consideramos que las secuencias de enseñanza deben estar basadas en actividades que requieran y pongan en juego varios de los conceptos asociados a la probabilidad (espacio muestral, eventos, frecuencias, etc.) y que ofrezcan la posibilidad de integrar los diferentes enfoques de probabilidad.

Referencias

Albert, J.H. (2003). College students' conceptions of probability. *The American Statistician*, 57(1), 37–45.

Bakker, A. y Derry, J. (2011). Lessons from inferentialism for statistics education. *Mathematical thinking and learning*, 13(1-2), 15-26.

Brandom, R.B. (2000). *Articulating reasons: An introduction to inferentialism*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Ireland, S. y Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 339–370.

Jones, G., Langrall, C., Thornton, C. y Mogill, T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 101–125.

Jones, G. (2005). Reflections. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 367–372). New York: Springer.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (139-156). Netherlands: Kluwer.

Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W., Horton, N. J. y Kazak, S. (2011). Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability. *Mathematical Thinking and Learning*, 13, 68–86.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Belief in the law of small numbers. En D. Kahneman, P. Slovic, A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (24-31). New York: Cambridge University Press.

Los fenómenos de cambio

Antonio Estepa Castro

Universidad de Jaén

Resumen

La preocupación de los hombres por los fenómenos de cambio desde los primeros tiempos se ha plasmado en ser un tema fundamental de estudio en Filosofía, desde su fundamentación helénica. Un modo eficaz de estudiar los fenómenos de cambio es la búsqueda de patrones, incluso los patrones que permanecen ocultos. Y una herramienta fundamental es la Matemática; mediante ella podemos: representarlos, comprenderlos, reconocer sus tipos y, algunas veces controlarlos. En este trabajo nos centraremos en los fenómenos de cambio que estudia la Estadística y Probabilidad. El primer problema que nos encontramos es su denominación, discutiremos los términos utilizados, en español, hasta ahora, el más utilizado es dispersión. A continuación, veremos el papel que juega en estas Ciencias, buscaremos sus fuentes (en la medida, en la Naturaleza, inducida y en el muestreo), finalizaremos con la noción de dispersión (siempre olvidada en los curricula oficiales), su consideración en la planificación de la enseñanza y las referencias utilizadas en este trabajo.

1. Introducción

"La habilidad para tratar inteligentemente con la variación y la incertidumbre es el objetivo de la instrucción sobre datos y azar"(Moore, 1990, p. 135)

Es comúnmente aceptado que vivimos en un mundo donde todo cambia, nada permanece idéntico en el tiempo y la mayoría de las acciones que se llevan a cabo son distintas cuando se vuelven a realizar.

La mayoría de los fenómenos naturales, desde los movimientos de partículas en el interior del átomo hasta los movimientos de los cuerpos celestes son manifestaciones del cambio. En la Naturaleza, los cambios están presentes en todas sus manifestaciones desde los fenómenos naturales (tiempo, fenómenos geológicos, mareas,…) hasta los seres vivos: un ser vivo se diferencia de otro, incluso el mismo ser vivo, desde los más pequeños (virus) hasta los más grandes (ballenas, elefantes) cambian con el tiempo; igual ocurre con las mareas, estaciones del año, tiempo atmosférico,…algunos de ellos son simples

Un tipo de cambios más complicados los encontramos en nuestra vida social y económica: evolución económica, la globalización produce cambios sociales de enorme complejidad. En consecuencia, los hombres se han preguntado siempre por la naturaleza de los cambios que han observado en su entorno.

2. Los fenómenos de cambio y la filosofía

Ya los filósofos griegos (Ferrater Mora, 1998) se preocuparon por estos fenómenos de cambio (en la actualidad los filósofos utilizan el término "devenir" para expresar estos fenómenos), destacando en primer lugar Parménides que sostiene que lo que es "todo es" y, en consecuencia, todo está en reposo, todo permanece; mientras que Heráclito basa su

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 47-53). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

filosofía en el principio “nada es todo cambia”, ejemplificado en “nadie se baña dos veces en el mismo rio”. Filósofos posteriores interpretan el cambio diferenciando lo cualitativo de lo cuantitativo, así para Demócrito devenir es desplazamiento de átomos en sí mismos invariables sobre un fondo de no ser o extensión indeterminada (cuantitativo) Empédocles y Anaxágoras entiende el devenir como cambio de cualidades (cualitativo). La distinción entre lo cualitativo y cuantitativo en el devenir ha resultado fundamental en filosofía (también es fundamental en Estadística).

Aristóteles distingue seis clases de fenómenos de cambio (devenir): a) generación o génesis (el hecho de comenzar a ser otra cosa por la adquisición de una nueva forma); b) destrucción (dejar de ser lo que era); c) aumento; d) disminución; e) alteración (adquirir, perder o modificar alguna cualidad); f) traslación, desplazamiento, cambio de lugar o movimiento local.

Santo Tomás de Aquino decía que el cambio es la actualización de la potencia (capacidad de una cosa para producir un cambio en otra o potencialidad de una cosa para pasar a otro estado) en tanto que potencia, y por eso hay devenir cuando una causa eficiente lleva la potencia a la actualidad, y otorga al ser su perfección entitativa.

En algunas direcciones de la filosofía moderna se entiende el devenir como la única explicación plausible de todo cambio. Destacamos la concepción (Bergson) que nos dice que el devenir es una realidad primaria para lo cual el ser existe solamente en la medida en que deviene.

3. Los fenómenos de cambio en matemáticas

Es de enorme importancia que los seres humanos comprendamos e intentemos controlar los cambios que se producen en nuestro mundo. Un modo eficaz de estudiar los fenómenos de cambio es la búsqueda de patrones, incluso los patrones que permanecen ocultos. Para lograr esto, según Steward (1990) se necesita:

- Representar los cambios de una forma comprensible,
- Comprender los tipos fundamentales de cambios,
- Reconocer tipos particulares de cambios, cuando ellos ocurren,
- Aplicar las técnicas anteriores al mundo exterior
- Controlar el universo cambiante para un mejor provecho.

Una herramienta eficaz para realizar estas tareas con eficacia son las Matemáticas, con las que elaboramos modelos para estudiar los cambios.

En general, los fenómenos de cambio pueden ser deterministas (cuando el cambio está completamente determinado, a partir de las condiciones iniciales) y aleatorios (cuando los cambios se los atribuimos al azar). Los primeros son estudiados en matemáticas y los segundos en estadística y probabilidad.

De manera general, la noción de cambio, se suele introducir en Matemáticas con la noción de variable que literalmente significa que varía o puede variar, que cambia de valor. En este contexto, la variación se suele expresar como la diferencia de dos valores y, se suele llamar incremento de la variable. Cuando se ponen en juego los cambios en dos o más variables, aparece el estudio de funciones, rama del análisis matemático. En una función, el límite de la tasa de variación entre la variable independiente y la variable dependiente, cuando esta última tiende a cero es lo que se conoce como derivada de una función. La

extensión del estudio de funciones a variables cualesquiera da origen a la noción de asociación estadística (Hildebrand y cols., 1977).

4. Términos utilizados en estadística y probabilidad para referirse al cambio

En castellano está muy generalizado el uso de la palabra "*dispersión*", generalmente utilizada cuando se refiere a la cuantificación de la misma. La expresión "medidas de dispersión" aparece en los curricula y libros de texto. En la literatura anglosajona aparecen cuatro términos: "*dispersion*" (dispersión), "*variation*" (variación), "*variability*" (variabilidad) y "*spread*", palabra polisémica que significa como nombre: propagación, extensión, proliferación, generalización,…, y como verbo: difundir, propagarse, extenderse, extender, propagar, esparcir, contagiar, expandirse, untar, generalizar, tender, espaciar, ensancharse, explayarse… Debido a su polisemia esta última palabra "*spread*" da ocasión a dificultades cuando se utiliza en el estudio de la estadística en inglés, en los primeros cursos escolares; se recomienda usar en su lugar la palabras "variability" o "*dispersion*", tomadas como sinónimos (Kaplan, Rogness, & Fisher, 2011).

Respecto a los términos "*variation*" y "*variability*" Reading y Shaughnessy (2004) apuntan que, según varios diccionarios consultados "*variation*" es un nombre usado para describir el acto de variar o cambiar una condición y "*variability*" es un nombre derivado del adjetivo "*variable*" y significa que algo es apto o propenso a variar o cambiar, concretando que, aunque muchos autores "*variation*" y "*variability*" los utilizan como términos sinónimos, ellos los utilizan con un sentido diferente, siendo el significado de "*variability*" una característica (propensa a variar) de una entidad observable y el significado de "*variation*" la descripción o medida de esa característica. Más adelante, en una definición que daremos de variación de Makar & Confrey (2005) se puede observar que estos autores entienden por variación lo que Reading y Shaughnessy (2004) entienden por vasriabilidad.

En la mayoría de la literatura estadística en inglés las palabras "*dispersion*", "*variation*", "*variability*" y "*spread*" se toman como sinónimas a lo que en castellano entendemos por dispersión. Aunque en los curricula oficiales del MEC solamente se utiliza la palabra dispersión, se observa que en algunos libros de estadística cada vez aparecen con más frecuencia, quizás por influencia de la literatura inglesa, las palabras variación y variabilidad, en consecuencia, en lo que sigue, tomaremos como sinónimas las palabras dispersión, variación y variabilidad, mientras no se diga lo contrario.

5. Papel de la dispersión en Estadística desde el punto de vista educativo

Moore (1990, p. 135) resume los elementos esenciales del pensamiento estadístico de la siguiente forma:

- La omnipresencia de la variación en los procesos.
- La necesidad de procesar los datos.
- El diseño de la producción de los datos con la variación in mente.
- La cuantificación de la variación
- La explicación de la variación.,

Como vemos en 4 de los 5 puntos cita la variación, en consecuencia, la dispersión es un concepto fundamental en Estadística (Snee, 1990).

Los estadísticos tienen una relación compleja con la variabilidad. Algunas veces intentan minimizarla, otras maximizarla, otras veces estimarla o simplemente analizar la varianza (Gould, 2004).

Para Wild y Pfannkuch (1999), la consideración de la variación también es fundamental en el pensamiento estadístico, entienden que la variación es el punto de partida, ya que está omnipresente en el quehacer estadístico. Distinguen dos fuentes de variación en los datos: Real (características del sistema) e inducida (en la recolección de los datos). En esta última distinguen:

- La medida (medidores y aparatos de medida),
- El muestreo,
- Por accidente (recolección de datos, proceso de datos)

Estos autores dan las siguientes respuestas prácticas a la variación

- Ignorarla
- Tomarla en consideración. (Anticipar. diseño de sistemas/ proceso/producto para ser insensible a la variación – tallas de ropa y número en el calzado-)
- Cambio de patrón ("Control"). Cambio de sistema / proceso para incrementar resultados "deseables".

6. Fuentes de dispersión

Son muchas las fuentes de la dispersión, aquí consideraremos las siguientes: la medida, la naturaleza, dispersión inducida, dispersión en el muestro (Franklin et al., 2005).

Dispersión en la medida. Como nos dice Utss (1999, 49) "*variabilidad es un concepto que se utiliza cuando se habla de dos o más medidas en relación con otra*". Cuando realizamos medidas repetidas sobre un mismo ítem observamos que las diversas medidas no son iguales varían de una vez a otra, esto es debido a varias causas, entre otras, a que el instrumento de medida no es muy fiable o adecuado (medir las dimensiones del aula con un doble decímetro), o bien, que el sistema donde se hace la medida está en constante cambio. Para este segundo caso podemos poner como ejemplo la medida de la presión sanguínea, aunque el instrumento de medida sea preciso, la presión cambia en un instante. Este hecho fue observado por astrónomos babilonios y griegos, varias centurias antes de Cristo (Plackett, 1958). El estudio de este fenómeno dio lugar al desarrollo de las leyes del error, de gran fecundidad en Estadística.

Dispersión en la Naturaleza. La dispersión es inherente a la naturaleza. Si tomamos medidas sobre seres naturales de una misma especie encontramos diferencias, debido a que los individuos son diferentes (los estudiantes de una misma clase no tienen el mismo peso o la misma altura; las semillas de una bolsa no pesan todas los mismo, etc.). Algunas veces encontramos patrones de la variación existente y buscamos maneras de trabajar sobre ella, tal es el caso de las tallas de la ropa o el número del calzado (Wild y Pfannkuch, 1999).

"*Comprender el concepto de la variabilidad natural es crucial para entender los métodos estadísticos modernos.*" (Utts, 1999, 50).

Dispersión inducida. Si plantamos un kilogramo de las mismas semillas en diferentes climas obtendremos resultados diferentes. La variabilidad de los resultados será debida a la variabilidad natural de las semillas, pero también a la variabilidad inducida por el clima, en

un tipo de clima obtendremos mejores o peores resultados que en otro. Si el clima es el mismo y utilizamos distinto fertilizante, se obtendrá variabilidad inducida por el fertilizante. La comparación de la variabilidad natural con la variabilidad inducida por otros factores está en la esencia de la estadística moderna, por ejemplo, es el caso de los estudios de la efectividad de los medicamentos. Estos tipos de problemas se estudian en el diseño y análisis de experimentos, donde es de crucial importancia identificar las principales fuentes de variabilidad que según Cobb (1998, p. 4) son:

1. Variabilidad debida a las condiciones de interés (deseada),
2. Variabilidad en el proceso de medida (no deseada) y,
3. Variabilidad en el material experimental (no deseada).

Dispersión en el muestreo. Si se toman diferentes muestras de una misma población, estas varían entre sí. Si se utiliza una adecuada técnica de muestreo y un tamaño de muestra suficiente la muestra se asemeja a la población.

7. La noción de dispersión

Tradicionalmente la noción de dispersión se ha tomado como un objeto transparente que no necesita ser enseñado. Este fenómeno aparece algunas veces en la enseñanza, como por ejemplo, las nociones de conteo y magnitud que no han aparecido en los curricula escolares hasta hace unos años.

El proceso de conteo requiere una gran cantidad de atención. Para realizar un recuento efectivo se debe proceder así:

1. Distinguir los elementos que se van a contar de los que no.
2. Elegir un elemento cualquiera de los que se van a contar y asignarle el primer elemento de la secuencia numérica, el 1.
3. ¿Es este el último elemento que se va a contar?
4. Sí, el último elemento de la secuencia numérica asignado ese es el cardinal buscado y hemos terminado de contar.
5. No;
6. Separar los elementos contados de los que quedan por contar.
7. Asignar el siguiente número de la secuencia numérica a uno cualquiera de los elementos que quedan por contar.
8. Volver al paso 3).

Como vemos en el algoritmo que acabamos de exponer para el proceso de conteo, no es una noción trivial y simple que se pueda aprender espontáneamente.

Lo mismo ocurre con la noción de magnitud, así no es de extrañar que cuando se le pregunta a un estudiante que acaba de entrar en la universidad, que cuando medimos el agua que cabe en una botella, qué magnitud estamos midiendo, responda que los litros o los centilitros (unidades), en lugar de la capacidad que es el nombre de la magnitud que estamos preguntando.

Antes, por lo visto se creía que las nociones de conteo y magnitud eran tan evidentes que no necesitaban ser enseñadas, afortunadamente en los últimos curricula ya aparecen. El mismo caso es el de dispersión, en los curricula y en los libros de texto aparecen las medidas de dispersión, pero no suele aparecer la noción de dispersión como tal, parece ser que es una

noción tan fácil que no es necesario dedicarle un tiempo a su estudio y clarificación. Muy pocos libros incluyen una definición para la dispersión, parece ser que suponen que es un término que todo el mundo conoce y comprende y, en consecuencia, no hay que definirlo ni enseñarlo, está claro, es un término transparente, su significado es el del sentido común.

No es así, ni mucho menos. La literatura de investigación en Didáctica de la Estadística muestra las grandes dificultades que tienen los estudiantes en el estudio de las nociones elementales de Estadística, muchas de estas dificultades son debidas o están relacionadas con las concepciones o con las interpretaciones que hacen los estudiantes de la dispersión.

La dispersión es la esencia de la Estadística, porque sin dispersión no hay necesidad de investigación estadística (Moore, 1990). La dispersión tiene un significado cercano a los conceptos de variable e incertidumbre, porque si hay variabilidad, vivimos en la incertidumbre y, si algo no está determinado o no es cierto, hay variabilidad (Bakker, 2004). Mañana sabemos que amanece a una hora determinada, pero no estamos seguros si lucirá el sol o no.

Entre las pocas definiciones de dispersión que hemos encontrado en la literatura estadística ofrecemos dos, la primera de un libro de Estadística y la segunda de un artículo de Educación Estadística:

> A la mayor o menor separación de los valores respecto a otro, que se pretende que sea su síntesis, se le llama dispersión o variabilidad (Martín-Guzmán y Martín Pliego, 1985, p. 57).
>
> En palabras sencillas, variación es la cualidad de una entidad (una variable) para variar, incluyendo variación debida a la incertidumbre (Makar & Confrey, 2005, p. 28).

Como vemos, la primera definición es lo que Reading y Shaughnessy (2004) llaman variación y la segunda lo que estos autores llaman variabilidad.

En cuanto al tratamiento de la dispersión en la enseñanza, generalmente en los curricula solo aparecen las medidas de dispersión, pero, aunque la medida de la dispersión es una herramienta muy importante en el análisis de datos, cuando consideramos la dispersión, tanto en el trabajo estadístico como en la enseñanza, debemos tener en cuenta (Makar & Confrey, 2005):

a. El concepto de dispersión, su definición, saber explicar en qué consiste;
b. Su uso, sobre todo cuando se mide, las técnicas matemáticas asociadas a la medida de la dispersión;
c. El propósito que pretendemos con la dispersión, su utilidad dentro de un contexto, las fuentes de dispersión.

Dichos puntos se complementan con las tres perspectivas de (Peters, 2009), necesarias para razonar con competencia sobre variabilidad: una perspectiva de diseño que integra el reconocimiento y la previsión de la variabilidad en el diseño de los estudios cuantitativos, una perspectiva centrada en los datos que integra los procesos de representar, medir y describir la variación en el análisis exploratorio de datos, y la perspectiva de modelización que integra el razonamiento sobre modelos que ajustan patrones de variabilidad en los datos.

Referencias

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. PhD. Utrecht : Utrecht University.

Cobb, G. W. (1998). *Introduction to design and analysis of experiments*. New York: Springer - Verlag

Ferrater Mora, J. (1998). *Diccionario de filosofía* (1ª reimpresión). Barcelona: Ariel

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D.,Moreno, J, Peck, R. Perry, M. & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report. A Pre-K–12 Curriculum Framework.* Alexandria, VA: American Statistical Association.

Gould, R. (2004). Variability: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, 3(2), 7-16.

Hildebrand, D. K., Lang, J. D. y Rosenthal, H. (1977) *Analysis of nominal data*. Londres: Sage University Papero

Makar, K. y Confrey, J. (2005). "Variation-talk": articulating meaning in statistics. *Statistics Education Research Journal, 4(1), 27-54.*

Martín-Guzmán, M. P. y Martín Pliego, F. J. (1985). *Curso básico de estadística económica*. Madrid: Editorial AC.

Moore, D. S. (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (Eds.). *On the shoulders of giants. New approaches to numeracy* (pp. 183-217). Washington, D. C.: National Academy Press.

Pearson, E. S. & M. Kendall, M. (1970). *Studies in the history of statistics and probability*. London: Charles Griffin.

Peters, S. A. (2009). *Developing an understanding of variation: AP statistics teachers' perception and recollections of critical moments.* Ph.D. Pennsylvania State University. USA.

Plackett, R. L. (1958). The principle of the arithmetic mean. *Biometrika, 45,* 130-135. (Reproducido en E. S. Pearson & M. Kendall (1970). *Studies in the History of Statistics and Probability.* (pp. 121-126). London:Charles Griffin.

Snee, R. D. (1990). Statistical thinking and its contributions to total quality. *The American Statistician,* 44(2), pp. 116-121.

Stewart, I. (1990). Change. En L. A. Steen (Eds.). *On the shoulders of giants. New approaches to numeracy* (pp. 183-217). Washington, D. C.: National Academy Press.

Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Staristical Review,* 67,3, 223-265**.**

Sentido estadístico: Componentes y desarrollo

Carmen Batanero

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo sugerimos las siguientes componentes en el sentido estadístico: (a) La comprensión de las ideas estadísticas fundamentales, que han contribuido al desarrollo de la estadística, se requieren en la resolución de problemas estadísticos y pueden ser enseñadas en varios niveles educativos; (b) la competencia de análisis de datos; (c) el razonamiento a partir de los datos, para realizar inferencias de muestras a poblaciones y/ o tomar decisiones acertadas en situaciones inciertas. También se sugiere que el desarrollo efectivo en los estudiantes se favorece especialmente con una enseñanza basada en investigaciones y proyectos, que, permite dotar de sentido a los diversos objetos estadísticos e involucra a los estudiantes en el ciclo de investigación y modos propios de razonamiento estadístico, desarrollando un espíritu crítico e iniciativa personal.

Palabras clave: Sentido estadístico, cultura estadística, razonamiento estadístico

1. Introducción

Aunque la estadística se enseña hoy día en todos los niveles educativos, al ser una herramienta fundamental en la vida personal y profesional, la investigación nos alerta que muchos estudiantes, incluso a nivel universitario, tienen concepciones incorrectas o son incapaces de hacer una adecuada interpretación de los resultados estadísticos (ver, por ejemplo, Shaughnessy, Garfield y Greer, 1996).

Una posible explicación de esta situación paradójica es una enseñanza rutinaria, que enfatiza las fórmulas y definiciones sin prestar la atención que requieren a las actividades de interpretación y al contexto de donde se tomaron los datos. Es decir se transmite una estadística sin sentido, no teniendo en cuenta la naturaleza de la estadística, reflejada en la siguiente definición:

> La estadística estudia el comportamiento de los fenómenos llamados de colectivo. Está caracterizada por una información acerca de un colectivo o universo, lo que constituye su objeto material; un modo propio de razonamiento, el método estadístico, lo que constituye su objeto formal y unas previsiones de cara al futuro, lo que implica un ambiente de incertidumbre, que constituyen su objeto o causa final (Cabriá, 1994, p. 22).

Moore (1991) indicó que la estadística es una disciplina científica autónoma, que tiene sus métodos específicos de razonamiento. Apoya esta afirmación en el hecho de que la estadística no ha surgido de la matemática, sino de una serie de ciencias que se han apoyado en la matemática. Más aún, la relación entre estadística y matemáticas no es biunívoca; la estadística toma conceptos matemáticos para el desarrollo de sus métodos, en cambio la matemática no usa conceptos estadísticos. La estadística tiene también controversias específicas (por ejemplo, sobre el significado de la probabilidad), y la posición que un estadístico toma sobre ellas tiene un impacto inmediato en su práctica.

En lo que sigue presentamos un modelo de sentido estadístico, término que no se encuentra definido en la investigación previa, pero que asumimos engloba otros, como la cultura estadística y el pensamiento o razonamiento estadístico. Más concretamente,

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 55-61). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

concebimos el sentido estadístico como la unión de tres componentes: En primer lugar el estudiante ha de comprender a un nivel adecuado las ideas estadísticas fundamentales (Burrill y Biehler, 2001); dichas ideas aparecen en la mayoría de las situaciones en que hay que aplicar la estadística; pueden ser enseñadas con diversos niveles de formalización y, por tanto, son asequibles en cualquier nivel educativo y son potentes como herramientas de modelización estadística. En segundo lugar, se requiere una cierta competencia de análisis de datos, que se ve hoy día facilitada por la abundancia de software, tanto para el almacenamiento y transmisión de datos, como para el cálculo y graficación. El tercer componente es el razonamiento estadístico, que es el más difícil de transmitir. En lo que sigue ampliamos las anteriores ideas.

2. Cultura estadística

La importancia que actualmente recibe la enseñanza de la estadística se debe a la necesidad, reclamada por la UNESCO y otras instituciones de proporcionar una cultura estadística que permita al ciudadano participar en la sociedad de la información. Dicha cultura incluye dos competencias relacionadas:

> Capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante (Gal, 2002, pp. 2-3).

El término "statistical literacy" ha ido surgiendo de forma espontánea entre los estadísticos y educadores estadísticos, para resaltar el hecho de que la estadística se considera hoy día como parte de la herencia cultural necesaria para el ciudadano educado. Watson (2006) propone la siguiente jerarquía de niveles de cultura estadística útil para evaluar la comprensión de los estudiantes:

- El desarrollo del conocimiento básico de los conceptos estadísticos y probabilísticos.
- La comprensión de los razonamientos y argumentos estadísticos cuando se presentan dentro de un contexto más amplio de algún informe en los medios de comunicación o en el trabajo.
- Una actitud crítica que se asume al cuestionar argumentos que estén basados en evidencia estadística.

3. Ideas estadísticas fundamentales

Los modelos descritos de cultura estadística coinciden en la necesidad de un conocimiento básico. Aunque los documentos oficiales fijan los contenidos curriculares, es importante que los profesores reflexionen sobre cuáles de dichos contenidos son realmente relevantes para sus estudiantes. Burrill y Biehler (2011), basándose en un estudio detallado de diversos marcos teóricos educativos proponen las siguientes para la estadística:

Datos. Moore (1991) definió la estadística como la ciencia de los datos y señaló que el objeto de la estadística es el razonamiento a partir de datos empíricos, subrayando la importancia del contexto. Mientras que en otras ramas de matemáticas con frecuencia los datos y contextos son imaginarios y el interés se centra en los conceptos, el contexto de los datos es esencial en estadística. Además, los estudiantes no están acostumbrados a trabajar con datos de situaciones reales que frecuentemente requieren de interpretaciones y razonamientos de alto nivel. La aleatoriedad de las situaciones hace que los resultados no sean únicos, presentándose mayor variabilidad en los datos que otras áreas de las matemáticas (Sánchez y Batanero, 2012).

Gráficos. Debido a su presencia en los medios de comunicación e Internet, el aprendizaje de los gráficos estadísticos es importante (Arteaga et al., 2011). Por su papel esencial en la organización, descripción y análisis de datos, las tablas y gráficos son un instrumento esencial de transnumeración, uno de los modos esenciales de razonamiento estadístico que consiste en obtener una nueva información de un conjunto de datos al cambiar el sistema de representación (Wild y Pfannkuch, 1999). Sin embargo, los futuros profesores tienen muchas dificultades en su construcción (Batanero, Arteaga y Ruiz, 2009).

Variación. Aunque en otras ramas de matemáticas se usan variables, se supone que los datos se ajustan perfectamente a un modelo y no suele haber estudio de la bondad de ajuste o de los residuos del modelo. El estudio de la variabilidad es característico de la Estadística, estudiándose tanto el modelo como los residuos (Engel y Sedlmeier, 2011). La Estadística permite buscar explicaciones y causas de la variación para poder hacer predicciones, por lo que dos fines importantes de la enseñanza de la Estadística son que los estudiantes perciban la variabilidad y manejen modelos que permitan controlarla y predecirla (Reading y Shaughnessy, 2004).

Distribución. Una característica esencial del análisis estadístico es que trata de describir y predecir propiedades de los agregados de datos y no de cada dato aislado (Bakker y Gravemeijer (2004). Por ello la enseñanza de la Estadística ha de desarrollar la capacidad de leer, analizar, criticar y hacer inferencias a partir de distribuciones de datos (Shaughnessy, 2007). El razonamiento distribucional implica también conectar los datos (distribución de datos), la población de donde se tomaron (distribución de probabilidad) y las posibles muestras de la misma (distribución muestral).

Asociación y correlación. Mientras que en una dependencia funcional a cada valor de una variable X (independiente) corresponde un solo valor de otra variable Y (dependiente), en el estudio de la asociación a cada valor de X corresponde una distribución de valores de Y, por lo que este concepto amplía el de dependencia funcional. La importancia del concepto de asociación en la toma de decisiones en ambiente de incertidumbre es alta, pero la investigación en psicología muestra que los adultos no suelen emplear las reglas matemáticas, sino estrategias intuitivas, con frecuencia incorrectas en los juicios de asociación. Por ejemplo la creencia infundada en la transitividad del coeficiente de correlación es común en muchos estudiantes (Castro-Sotos, Van Hoof, Van den Noortgate y Onghena, 2009).

Probabilidad. La característica principal de la Estadística es hacer uso de modelos aleatorios, a diferencia de otras ramas de la matemática donde se usan modelos deterministas. Pero, al contrario que para otros conceptos matemáticos, no hay una única acepción de la probabilidad. Para la escuela serán relevantes al menos tres aproximaciones diferentes:

- En la concepción clásica, se define la probabilidad de un suceso como el cociente entre el número de casos favorable al suceso y el número de todos los casos posibles, siempre que todos sean equiprobables.
- En el enfoque frecuencial se obtiene una estimación experimental de la probabilidad. Su valor teórico sería el límite de la frecuencia relativa de aparición del suceso al realizar la experiencia un número infinito de veces en las mismas condiciones. Un aspecto importante en este enfoque es comprender la diferencia entre probabilidad (valor teórico constante que nunca alcanzamos) y frecuencia relativa (estimación experimental de la probabilidad, que puede cambiar de una estimación a otra). También hay que entender que los resultados de una experiencia son impredecibles, pero se puede predecir el comportamiento general de un gran número de resultados (Batanero, Henry y Parzysz, 2005).
- En otras situaciones la probabilidad no es una propiedad objetiva de los sucesos, sino una percepción o grado de creencia en la verosimilitud de la persona que asigna la

probabilidad sobre la plausibilidad de ocurrencia del suceso. Muchos problemas de toma de decisión o elaboración de un juicio son abiertos o tienen más de una posible decisión y en su solución intervienen tanto factores matemáticos como extra matemáticos (Contreras, et al., 2011). La concepción subjetiva de la probabilidad sería adecuada para modelizar este tipo de situaciones.

Muestreo e inferencia. Relacionar las características de las muestras con las de la población que representan es el principal fin de la estadística y nos sirve para decidir qué datos recoger y para obtener conclusiones con algún grado de probabilidad (de la Fuente y Díaz, 2004). Varios autores sugieren que es posible una comprensión informal de la inferencia, desde la secundaria, que comenzaría por la discriminación entre la posición central y variabilidad en las distribuciones de datos y el uso de estas dos características para decidir cuándo dos distribuciones son iguales o diferentes (Rubin, Hammerman y Konold, 2006). Más adelante se puede hacer una aproximación al contraste de hipótesis en la forma siguiente (Rossman, 2008; Harradine, Batanero y Rossman, 2011): (a) Comenzar con una hipótesis sobre los datos; (b) usar la simulación para concluir que los datos observados son poco plausibles si la hipótesis es cierta; y (c) rechazar la hipótesis inicial basándose en los resultados.

4. Pensamiento y razonamiento estadístico

Además de la comprensión de las anteriores ideas su uso adecuado en la resolución de problemas estadísticos requiere, además de una competencia mínima de análisis de datos, favorecida hoy día por el software, del desarrollo del razonamiento estadístico. Uno de los modelos para describir este razonamiento es debido a Wild y Pfannkuch (1999), quienes lo conciben como la suma de cuatro dimensiones: (a) El ciclo de investigación, que consiste en la serie cíclica de pasos a seguir desde que se plantea un problema estadístico hasta que se resuelve o bien se modifica y que es bastante similar al proceso general de resolución de problemas; (b) los modos fundamentales de razonamiento estadístico; (c) el ciclo de interrogación, que se aplica constantemente en la solución de problemas estadísticos, tanto a nivel global como en cada posible paso y consiste en la búsqueda y comprobación sucesivas de explicaciones, hipótesis o preguntas, desde los datos, los análisis realizados o los resultados; y (d) una serie de actitudes, como el escepticismo, la mentalidad abierta, la perseverancia, el espíritu crítico o la curiosidad. Los modos fundamentales de razonamiento estadístico son los siguientes:

a) *Reconocer la necesidad de los datos*. Mientras que en otras ramas de las matemáticas los datos son anecdóticos, en estadística juegan un papel esencial. La base de la investigación estadística es la hipótesis de que muchas situaciones de la vida real sólo pueden ser comprendidas a partir del análisis de datos que han sido recogidos en forma adecuada. La experiencia personal o la evidencia de tipo anecdótico no es fiable y puede llevar a confusión en los juicios o toma de decisiones. Se trata de basarse en la evidencia proporcionada por los datos.

b) *Transnumeración*. Este término indica la comprensión que surge al cambiar la representación de los datos. Al contemplar un sistema real desde la perspectiva de modelización, puede haber tres tipos de transnumeración: (1) a partir de la medida que "captura" las cualidades o características del mundo real, (2) al pasar de los datos brutos a una representación tabular o gráfica que permita extraer sentido de los mismos; (3) al comunicar el significado que surge de los datos, en forma que sea comprensible a otros.

c) *Percepción de la variación*. La recogida adecuada de datos y los juicios correctos a partir de los mismos requieren la comprensión de la variación que hay y se transmite en los datos, la determinación de las fuentes de variación (medida, datos, muestreo, análisis, variación debida a factores, variación aleatoria) así como de la incertidumbre originada

por la variación cuyas fuentes no quedan explicadas. La estadística permite hacer predicciones, buscar explicaciones y causas de la variación y aprender del contexto.

d) *Razonamiento con modelos estadísticos.* Al igual que en otras ramas de las matemáticas, la estadística es esencialmente un proceso de modelización; la diferencia es la presencia de aleatoriedad, así como la relevancia que adquieren los modelos probabilísticos. También se utilizan otros modelos, como gráficos, o funciones (por ejemplo, en regresión); todos ellos han de contemplarse como de representar la realidad e instrumentos para comprender la realidad. Lo importante es diferenciar el modelo de la realidad y al tiempo diferenciarlos.

e) *Integración de la estadística y el contexto*. Debido a la importancia que adquiere el contexto, esta capacidad es también un componente esencial del razonamiento estadístico. Aparece especialmente en las fases iniciales (planteamiento del modelo) y finales (interpretación del modelo en la realidad) del ciclo de modelización.

5. Desarrollo del sentido estadístico

El desarrollo del sentido estadístico, como unión de los componentes descritos debe construirse en forma progresiva desde la educación primaria en la educación secundaria y bachillerato, y eventualmente a la universidad. En este sentido, las nuevas propuestas curriculares proporcionan una oportunidad de introducir gradualmente ideas estadísticas desde la educación primaria, aumentando el nivel de formalización progresivamente (Batanero, Contreras y Arteaga, 2011).

El desarrollo del razonamiento y la producción de sentido, como en cualquier clase de matemática es resaltado para el caso de la estadística por Shaughnessy, Chance y Kranendonk (2009), indicando que el desarrollo de estructuras de razonamiento, apoyan una mayor comprensión. Las competencias de razonamiento han de desarrollarse a lo largo del currículo, junto con la comprensión de las ideas fundamentales. Estas competencias incluyen elementos comunes al proceso de una investigación estadística: (a) análisis de problemas, buscando patrones y relaciones en los datos, así como la estructura oculta y planteando conjeturas; (b) eligiendo y evaluando estrategias; por ejemplo, aplicando el ciclo interactivo de investigación estadística; (c) buscar y utilizar conexiones, por ejemplo, entre las conclusiones y el contexto; (d) reflexionar sobre si la solución es razonable y suficiente.

Pensamos que la mejor forma de ayudar al estudiante a desarrollar su sentido estadístico es basar las clases de estadística en el trabajo con proyectos, bien planteados por el profesor o escogidos libremente por los alumnos. En lugar de introducir los conceptos y técnicas descontextualizadas, o aplicadas únicamente a problemas tipo, difíciles de encontrar en la vida real, se trata de presentar las diferentes fases de una investigación estadística: planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recogida y análisis de datos y obtención de conclusiones sobre el problema planteado.

Como señalaron Anderson y Loynes (1987), la estadística es inseparable de sus aplicaciones, y su justificación final es su utilidad en la resolución de problemas externos a la propia estadística. Por otro lado, hay que diferenciar entre conocer y ser capaz de aplicar un conocimiento. La habilidad para aplicar los conocimientos matemáticos es frecuentemente mucho más difícil de lo que se supone, porque requiere no sólo conocimientos técnicos (tales como preparar un gráfico o calcular un promedio), sino también conocimientos estratégicos (saber cuándo hay que usar un concepto o gráfico dado). Los problemas y ejercicios de los libros de texto sólo suelen concentrarse en los conocimientos técnicos, mientras que los proyectos incluyen también conocimientos estratégicos, a la vez que aumentan la motivación del estudiante.

Nosotros hemos presentado ejemplos de cómo es posible desarrollar un currículo de estadística para la educación secundaria o universitaria mediante proyectos debidamente

secuenciados (ver Batanero y Díaz, 2011). En la misma forma sería posible trabajar en la educación primaria, como muestran diversos investigadores.

Reconocimiento:

Proyecto EDU2010-14947 (MCINN-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Anderson, C. W. y Loynes, R. M. (1987). *The teaching of practical statistics*. New York: Wiley.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales, *Números 76,* 55-67.

Bakker, A. y Gravemeijer, K. P. E. (2004). Learning to reason about distribution. En J. Garfield y D. Ben Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp 147-168). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2009). Statistical graphs produced by prospective teachers in comparing two distributions. En *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Lyon: ERME.

Batanero, C., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *EM-TEIA. Revista de Educaçao Matematica e Tecnologica Iberoamericana*, 2(2). Online. http://emteia.gente.eti.br/

Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.). (2011). *Estadística con proyectos.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B., (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in trainingteachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education - A joint ICMI/IASE study* (pp. 57-69). Dordrecht: Springer.

Cabriá, S. (1994). *Filosofía de la estadística.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Valencia.

Castro-Sotos, A. E., Vanhoof, S., Noortgate, W. y Onghena, P. (2007). Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational Research Review, 2* 98–113

Contreras J.M., Batanero, C. Diaz, C, y Fernandes, J. A. (2011). Prospective teachers' common and specialized knowledge in a probability task. En M. Pytlak, T. Rowland, y E, Swoboda. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 766-775). Rzeszow, Polonia: ERME.

De la Fuente, I., y Díaz. C. (2004). controversias en el uso de la inferencia en investigación experimental. *Metodología de las Ciencias del Comportamiento*, número especial, 161-167.

Engel, J. y Sedlmeier (2011). Correlation and regression in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.). *Teaching statistics in school mathematics- challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 247-258). New York: Springer.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review 70*(1), 1-25.

Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education.* (pp. 235-246). Springer.

Moore, D. S. (1991). Teaching statistics as a respectable subject. En F. Gordon y S. Gordon (Eds.), *Statistics for the twenty-first* century (pp. 14-25). Mathematical Association of America.

Reading, C. y Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. En J. Garfield y D. Ben-Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal, 7(2),* 5-19. Online: http://www.stat.auckland.ac.nz/serj.

Rubin, A., Hammerman, J. K. y Konold, C. (2006). Exploring informal inference with interactive visualization software. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town, South Africa: International Association for Statistics Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Sánchez, E. y Batanero, C. (2011). Manejo de la información. En E. Sánchez (Coord.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, Casos y perspectivas* (pp. 64-92). México, D. F.: Secretaría de Educación Pública.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1010). Greenwich, CT: Information Age y NCTM.

Shaughnessy, J. M., Chance, B. y Kranendonk, H. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making in statistics and probability*. Reston, VA: NCTM.

Shaughnessy, J. M., Garfield, J. y Greer, B. (1996). Data handling. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (v.1, pp. 205-237). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: growth and goals.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67* (3), 221-248.

A aprendizagem dos conceitos de população, amostra e amostra representativa no 8.º ano de escolaridade

Roque, Cristina[1], *Ponte, João Pedro*[2]

[1]Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
[2]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Resumo

Na presente comunicação analisamos as aprendizagens dos alunos do 8.º ano na primeira tarefa de uma experiência de ensino baseada na realização de investigações estatísticas e na análise crítica de estudos estatísticos. Esta experiência tinha como objetivo contribuir para o desenvolvimento da capacidade de planeamento estatístico e de análise de dados dos alunos. O estudo realizado tem uma natureza qualitativa e interpretativa, sendo os dados recolhidos pela primeira autora, por observação participante, registo vídeo/áudio e recolha documental. A tarefa em causa pretendia introduzir as noções de população e amostra, bem como a necessidade de ponderar os aspetos que influenciam a representatividade da amostra escolhida. Descrevemos alguns dos episódios mais significativos vividos na aula e as dificuldades sentidas pelos alunos tendo por base as produções escritas dos diferentes grupos de trabalho e excertos de algumas das interações que se verificaram em torno da tarefa. A análise dos dados recolhidos permite concluir que os alunos compreendem os motivos pelos quais, em Estatística, se recorre à utilização de amostras e mostram-se capazes de identificar elementos que afetam a representatividade de uma amostra. Além disso, para uma mesma situação, os alunos recorrem a diferentes elementos para argumentar a não representatividade. Terminamos com o balanço da experiência de realização da tarefa na sala de aula.

Palavras-chave: Planeamento estatístico, População, Amostra, Amostra representativa

1. Introdução

Em muitos estudos, é impraticável recolher dados de todos os elementos de uma população, pelo que se recorrem usualmente a amostras. Para além das questões de economia e de natureza prática, o recurso a uma amostragem em vez de estudar toda a população pode ser necessário porque a dimensão desta é infinita ou porque se pretende preservar o mais possível os elementos da população (Garfield & Gal, 1999). Deste modo, o planeamento de um estudo estatístico envolve a construção de uma amostra, o que requer um certo número de cuidados tendo em vista evitar amostras enviesadas. Os alunos deverão ter em consideração questões como as seguintes: Qual é a população? Como deverá ser selecionada a amostra de modo a ser representativa? Em que condições se deve utilizar uma amostra estratificada? Qual deverá ser a dimensão da amostra? (NCTM, 2007). Nesta comunicação analisamos a compreensão das noções de população, amostra e amostra representativa no quadro da realização de uma experiência de ensino.

2. A noção de amostra no ensino da Estatística

Em Portugal, o presente programa de ensino básico (ME, 2007) considera que os alunos, no final do 3.º ciclo, devem saber distinguir entre população e amostra e ponderar elementos que podem afetar a representatividade de uma amostra em relação à respetiva população (p. 60). Para este nível de escolaridade, pretende-se que os alunos compreendam que a seleção aleatória da amostra constitui o único processo que garante a representatividade.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 65-72). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Martins e Ponte (2010) consideram que os alunos do 3.º ciclo devem compreender que a dimensão a estabelecer para uma amostra depende muito da variabilidade da população subjacente. Além disso, devem ter a perceção que a dimensão da amostra tem de ser tanto maior, quanto maior for a precisão exigida e que a dimensão da amostra a recolher não é diretamente proporcional à dimensão da população a estudar. Outro autor, Garfield (2002) considera que o raciocínio correto sobre amostras assume aspetos como: (i) saber de que modo as amostras estão relacionadas com a população de que foram extraídas; (ii) saber o que se pode inferir a partir de uma amostra; (iii) reconhecer amostras representativas e conhecer aspetos que poderão gerar enviesamentos na escolha de uma amostra; e (iv) ser crítico face a inferências feitas com amostras pequenas ou tendenciosas. Martins e Ponte (2010) defendem que o trabalho a desenvolver com os alunos deve incluir a análise de situações em que é adequado o estudo de toda a população ou apenas de uma amostra, a análise crítica de estudos estatísticos face ao uso de amostras não representativas e a ponderação de elementos que afetam a representatividade de uma amostra.

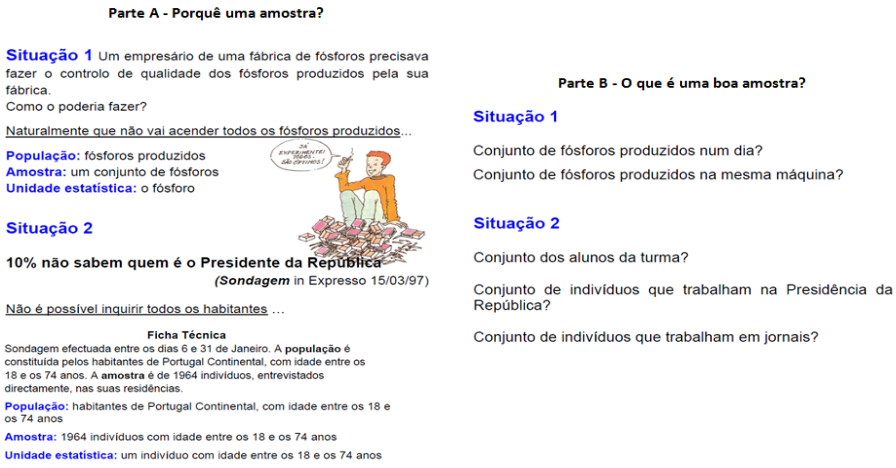
Num estudo desenvolvido com alunos do ensino básico, Jacobs (1999) constata que estes optam por processos de amostragem tendenciosos tais como participação voluntária, dada à perceção de justiça que intuem do fato de permitir aos elementos da população a possibilidade de fazer parte da amostra sem haver a necessidade de "impor" a uns quantos elementos selecionados por processos aleatórios a participação na amostra. Refere também que alguns alunos rejeitam a ideia de amostragem, porque subestimam as dificuldades associada à realização de um censo. Pelo seu lado, Garfield (2002) destaca os seguintes erros no âmbito da utilização de amostras: (i) aceitar, erroneamente que boas amostras devem representar uma percentagem elevada da população e (ii) confiar indevidamente em pequenas amostras e/ou assumir que uma amostra aleatória simples constitui um retrato fiel da população em análise dada incompreensão do processo de amostragem.

Para Rubin, Bruce e Tenney (1991), as duas ideias centrais da recolha de amostras, representatividade e variabilidade da amostragem, são decisivas para compreensão da inferência estatística. A representatividade da amostra está associada à perceção de que uma amostra retirada de uma população tende a ter características semelhantes às da população da qual foi extraída. A variabilidade da amostra está relacionada com a perceção de que várias amostras de uma única população não são necessariamente iguais e não "contradizem" a população. Os autores reconheceram que a maioria dos alunos sente um conflito entre a variabilidade e a necessidade de representatividade da amostra. A dependência excessiva da noção de representatividade da amostra induz a "ideia" de que esta nos diz tudo sobre uma população e o excesso de atenção à variabilidade das amostras leva a assumir que uma amostra não fornece informação útil sobre a população em estudo.

3. Metodologia de investigação

Esta comunicação decorre de um estudo cujo objetivo é contribuir para o desenvolvimento da capacidade de planeamento estatístico e de análise de dados dos alunos. Atendendo ao seu objetivo, a investigação segue um *design* de experiência de ensino numa abordagem de cunho qualitativo e interpretativo. A primeira autora desempenha o duplo papel de professora e investigadora, tendo recolhido os dados por observação participante, registo vídeo/áudio e recolha documental. A turma participante é constituída por vinte e oito alunos, com idades compreendida entre 12 e 13 anos, sendo doze dos alunos do género feminino. A unidade de ensino implementada tem por base o conjunto de tarefas correspondente ao tópico planeamento estatístico proposto pelos professores das turmas-piloto e disponível no sítio da DGIDC, exceto as tarefas 2 e 3 adaptadas de Martins e Ponte (2010). Na presente comunicação discute-se o trabalho realizado em torno da primeira tarefa da unidade.

A primeira das seis tarefas da unidade de ensino procura partir do conhecimento informal e intuitivo dos alunos para os levar a construir conhecimento formal. O seu objetivo é levar os alunos a distinguir população de amostra e a ponderar a representatividade de uma amostra em relação à respetiva população. A tarefa é constituída por três partes, sendo as duas primeiras partes projetadas de modo que em grande grupo os alunos analisem duas situações. Na parte A discute-se a importância das amostras e as razões da sua utilização e a parte B refere a importância da representatividade das amostras (figura 1). Com a discussão destas duas partes da tarefa espera-se que a maioria dos alunos compreenda que no momento da recolha de dados se procura recorrer a amostras representativas e de que modo se pode proceder para a sua obtenção. A parte C (figura 2) é constituída por cinco itens, cada um relativo à análise da representatividade de uma amostra face a uma dada situação, sendo realizada em pequeno grupo.



Parte A - Porquê uma amostra?

Situação 1 Um empresário de uma fábrica de fósforos precisava fazer o controlo de qualidade dos fósforos produzidos pela sua fábrica.
Como o poderia fazer?

Naturalmente que não vai acender todos os fósforos produzidos...

População: fósforos produzidos
Amostra: um conjunto de fósforos
Unidade estatística: o fósforo

Situação 2

10% não sabem quem é o Presidente da República
(Sondagem in Expresso 15/03/97)

Não é possível inquirir todos os habitantes ...

Ficha Técnica
Sondagem efectuada entre os dias 6 e 31 de Janeiro. A **população** é constituída pelos habitantes de Portugal Continental, com idade entre os 18 e os 74 anos. A **amostra** é de 1964 indivíduos, entrevistados directamente, nas suas residências.

População: habitantes de Portugal Continental, com idade entre os 18 e os 74 anos
Amostra: 1964 indivíduos com idade entre os 18 e os 74 anos
Unidade estatística: um indivíduo com idade entre os 18 e os 74 anos

Parte B - O que é uma boa amostra?

Situação 1

Conjunto de fósforos produzidos num dia?
Conjunto de fósforos produzidos na mesma máquina?

Situação 2

Conjunto dos alunos da turma?
Conjunto de indivíduos que trabalham na Presidência da República?
Conjunto de indivíduos que trabalham em jornais?

Figura 1. Tarefa "População e amostra" – Parte A e B.

4. Discussão da tarefa e produções dos alunos

A tarefa foi introduzida com a seguinte frase por parte da professora: "*Até agora trabalhamos sempre com a população, porque esta era de pequena dimensão. Em certos casos trabalhámos com um conjunto de elementos da população, pretendendo apenas descrever o que se passava nesse conjunto. Este ano, vamos procurar trabalhar sempre com o objetivo de tirar conclusões, expandir as nossas considerações relativamente ao estudo estatístico para a população, mesmo quando não nos seja possível trabalhar com todos os elementos dela. Vamos analisar duas situações em que isso acontece…* "

Parte C – Escolha de amostras de uma população

1. Numa escola, para se investigar as preferências musicais dos alunos, entregou-se um questionário aos alunos que frequentam também uma Escola de Música.
   Faz um comentário sobre a representatividade da amostra.

2. Uma empresa de publicidade pretendia perceber quais os anúncios da televisão que mais facilmente eram recordados pelas pessoas, tendo inquirido uma amostra de pessoas à saída de um supermercado num determinado dia.
   Faz um comentário sobre a representatividade da amostra.

3. A Directora de uma escola pretendia saber se os alunos estavam satisfeitos com a alimentação fornecida pela cantina da escola. Inquiriu todos os alunos com número ímpar.
   Faz um comentário sobre a representatividade da amostra.

4. Para se estudar a característica "cor dos olhos" de uma determinada população, escolheu-se uma amostra constituída apenas por médicos que trabalhavam num hospital da zona.
   Faz um comentário sobre a representatividade da amostra.

5. O que terias a dizer sobre a representatividade de uma amostra constituída apenas por médicos para se estudar os conhecimentos de Biologia de uma determinada população?

Figura 2. Tarefa "População e amostra" – Parte C.

Iniciou-se então a discussão da parte A, com apresentação da situação 1 e solicitou aos alunos de que modo iriam proceder para responder à questão, um aluno levantou a hipótese de analisar todos os fósforos de uma caixa, um outro sugeriu testar um fósforo ou um pequeno conjunto de fósforos em cada caixa. Os alunos aperceberam-se que seria impossível indagar cada elemento da população, por que a testagem da qualidade passava pela perda das unidades estatística em estudo.

Na situação 2 a professora leu a frase "10% não sabe quem é o presidente da república (PR)" e, de seguida, colocou a seguinte questão aos alunos, "*De que modo terão* [os autores do estudo] *encontrado o valor de 10%*?". O aluno Rui propõe "*foram a cada localidade perguntar a algumas pessoas se sabiam quem era o PR… a certo número de pessoas e depois fizeram a percentagem das que responderam* [corretamente]." Tal como Rui, a maioria dos alunos aceita o recurso a uma parte da população – amostra – pois afirmam que a população é enorme, num primeiro momento assumem tratar-se de todos os residentes em Portugal.

Da análise do acetato correspondente à parte A, os alunos identificaram que se recorre ao estudo de uma amostra por razões de tempo, de custo e quando a recolha de informação implica a destruição da unidade estatística. Numa aula posterior abordou-se o uso de amostras no caso de a população ser infinita.

Profª – Se eu tivesse que fazer um resumo porquê se usam amostras, alguém me consegue indicar uma razão?… Há três razões principais… Quem é que me indica essas três razões principais?… (…) Nestas duas situações de alguma forma tentaram ilustrar essas razões?
A1 – Havia um grande número de pessoas… Não conseguíamos entrevistar todos (situação 2).
Profª – Não conseguíamos inquirir esse grande número de pessoas, porquê?
A2 – Demorávamos muito…
A3 – Levávamos muito tempo…
Profª – Eram questões de tempo, sim…
A4 – Gastávamos muito dinheiro para ir até cada (pessoa)… (situação 2)
Profª – Por questões financeiras… Custos …
(…)
Profª – Então, estão todos de acordo que se recorre a amostras por questões de tempo e de custo, certo?
Alunos – Sim.
Profª – Qual será a terceira razão… entre a situação 1 e 2, usou-se uma amostra pelas mesmas razões?… O que era diferente?
A5 – Nas duas situações as populações são enormes… O tempo e o custo serve para as duas…
Profª – Sim é verdade… Mas porque é que na [situação] 1 não fazia sentido "riscar" os fósforos todos?
A6 – Ficávamos sem fósforos para vender.
Profª – Exatamente… Enquanto na situação 2 perguntar à pessoa se saber o nome do PR, não tira pedaço, no caso da situação 1, quando se vai analisar a qualidade de um fósforo…
Alunos – Arde, pega fogo, queima-se.
Profª – … Destrói a unidade estatística e essa é a terceira razão importantíssima.

A ideia que uma amostra deve ser representativa de uma população foi trabalhada ao longo da discussão da parte B. Na situação 1, a amostra – conjunto de fósforos produzidos num dia – foi rejeitada pelo primeiro aluno que intervém "*um dia pode ter corrido bem, noutro pode ter corrido mal*". Ao ser questionado porque tal acontece e qual a pertinência deste fato, responde "*por causa das máquinas, umas podem ter problemas… E os fósforos não prestam e noutros são todos bons… "*. Outro aluno acrescenta "*a madeira porque é constituído um fósforo pode ser diferente, num dia a madeira é boa noutro não presta*". Uma aluna aborda as condições climáticas no dia em que se realiza o teste dos fósforos, o que não é aceite por parte dos alunos, nomeadamente um colega que alega numa fábrica deve haver controlo das condições de modo a que o teste ocorra nas mesmas condições. Para outros alunos é possível ter este aspeto em consideração apesar do controlo das condições. Um outro aluno refere a possível avaria do equipamento. Ainda para situação 1, a amostra – conjunto de fósforos produzidos na mesma máquina – foi de imediato refutada por alguns

alunos, com argumentos como "*há mais máquinas e as máquinas podem não produzir todas da mesma forma*", "*a máquina podia ter defeito e pensávamos que estavam todas mal*". Os que consideravam a amostra representativa consideraram que por uma mesma máquina iriam naturalmente passar diferentes condições materiais e que tal aspeto seria suficiente "… *uma caixa de fósforos produzidos na mesma máquina pode ter dois tipos de madeira e outras diferenças pelo que chega…*".

Para a situação 2, o conjunto dos alunos da turma foi inicialmente rejeitado como "boa" amostra, dado não ser um subconjunto da população definida pelos autores do estudo "*uma turma não deveria ter* [pessoas] *entre os 18 e os 74 anos*". Posteriormente, assumindo como população do estudo os residentes em Portugal, a amostra foi novamente rejeitada pela sua pequena dimensão "*normalmente as turmas são pequeninhas, assim é demasiado pequena para tirar conclusões*". Outro argumento que passou pela discussão mas não reuniu consenso foi: "*os alunos são jovens e não têm interesse pela vida política como a maioria das pessoas*". Para muitos deles tal não era verdadeiro, dependia da idade dos alunos e do tipo de turma. O conjunto de indivíduos que trabalham na Presidência da República e o conjunto de indivíduos que trabalham em jornais foram de imediato rejeitados, como amostras, o primeiro porque "*quem trabalha lá sabe o nome do presidente*" e o segundo "*quem trabalha nos jornais está sempre a contactar com o nome ou a pessoa* [do PR]". Deste modo, ambas as amostras seriam pouco representativas do conhecimento do nome no PR na população portuguesa, onde naturalmente também existem pessoas que desconhecem esta informação geral.

Na terceira parte da tarefa, os alunos da turma organizaram-se em sete grupos de trabalho e responderam por escrito aos itens propostos. No item 1, dos sete grupos de trabalho, seis indicaram que a amostra não era "boa". Dois grupos argumentaram que no caso de se questionar alunos de uma escola de música, as preferências musicais iriam ser condicionados pelo que tocam ou aprendem nessa escola, reconhecendo que constitui um contexto muito especial. Eis uma das respostas: "*Não porque em princípio na escola de música só se estuda um tipo de música ou mesmo que se estude vários tipos, vai haver sempre gostos simultâneos. Ou seja, isto não é uma amostra boa*."

Um grupo de alunos argumenta que, se devia ter uma amostra de alunos da escola pois tal como está definida a amostra naturalmente que não teriam respostas negativas face ao gosto pela música. Dois grupos consideram que a amostra não é representativa pois os alunos que a compõem têm conhecimentos de música que os outros não têm. Apenas um grupo considerou a amostra representativa, tendo procedido a uma interpretação errada do item e, por sua vez, também não teve em consideração o fato de escola de música poder dedicar-se a uma tipologia específica de música tal como foi considerado por dois outros grupos: "*É uma boa amostra, pois como se entregou um questionário, tanto aos alunos da escola de Música como aos da escola normal, receberam informações diversificadas*". Durante a discussão final, os alunos manifestam unanimidade no fato desta amostra ser representativa da população de alunos que frequenta a escola de Música.

Relativamente ao item 2., apenas dois dos grupos respondem incorretamente considerando a amostra representativa. Um grupo argumenta a favor da escolha da amostra por se concentrar num determinado dia, pois consideram que, em termos de publicidade, há uma repetição diária das mesmas campanhas, alegando "*pois os anúncios mais frequentes que passaram na televisão ontem são os mesmos que passarão amanha*", argumento que foi refutado na discussão final pois, segundo Ricardo, existem anúncios sazonais "*No Natal é só anúncios de brinquedos e telemóveis …*" o que foi colaborado por outros colegas ao acrescentarem que nessa época também existem muitas campanhas publicitárias a chocolates e a perfumes. O segundo grupo que considerou a amostra representativa salientou o fato que seria necessário garantir que as pessoas inquiridas vissem televisão, pois deste modo considerando os gostos individuais e a frequência de cada campanha publicitaria teríamos garantia da diversidade da amostra ao responder "*desde que essas pessoas vejam televisão, os anúncios são sempre os mesmos se passam muitas vezes são mais fáceis de*

recordar, cada pessoa tem os seus gostos nos anúncios". Na discussão final, outro grupo opõe-se, dado que consideram a amostra não representativa, assumindo que consideram que as pessoas inquiridas à saída do supermercado teriam a tendência de indicar anúncios relativos ao supermercado ou promoções que naturalmente influenciaram a sua ida às compras.

Os argumentos de dois outros grupos também evidenciam ter ponderado a influência que o local de inquérito teria nas respostas dos inquiridos, ao considerarem necessário inquirir também noutros locais. Um grupo argumenta a não representatividade considerando que ao limitar-se a recolha de dados a um local, teríamos menos diversidade social entre os inquiridos, tendo na discussão final fundamentado do seguinte modo "*eles não podem ir a um só local porque…. (…) deveriam ir por exemplo a um bairro pobre, a um bairro rico, e um bairro médio e um assim ficava… Era mais diversificado… Já era mais diversificado as ideias, do que se fores só a um bairro rico ou a bairro pobre*".

No item 3., apenas um grupo considerou a amostra não representativa, respondendo que os gostos variam de pessoa para pessoa. Durante a discussão defenderam que se era viável inquirir todos os alunos com número ímpar então também seria viável inquirir toda a população, o que não foi apoiado pelos outros grupos, pois duplicava-se o tempo e o custo associado. Quatro grupos consideram a amostra representativa, pois recorre-se a um processo aleatório, garantindo a diversidade de opiniões, como é o caso seguinte: "*A nossa opinião é que sim pois os números ímpares foram escolhidos aleatoriamente, e assim a probabilidade de calhar opiniões diferentes é maior*."

Houve dois grupos que, embora tenham considerado a amostra representativa da população, não justificam a sua resposta. Um dos grupos considera que a dimensão da amostra é excessiva "*Achamos que será uma amostra muito grande. Nós faríamos uma amostra menor.*"

Nos itens 4. e 5. três dos sete grupos não apresentaram qualquer resposta a estes itens, por dificuldades associadas à compreensão do item 4 e/ou dificuldades na gestão do tempo de análise para a parte C. Relativamente ao item 4., dos quatro grupos restantes, três evidenciam dificuldades ao nível da compreensão. Eis a resposta de um desses grupos que interpretou que a cada médico da amostra se iria pedir a sua opinião profissional sobre a característica "cor dos olhos" na população em estudo: "*A nossa opinião é que não é uma boa amostra porque a opinião dos médicos não é suficientemente representativa para o estudo da cor dos olhos da população*"

Um grupo solicita os seguintes esclarecimentos sobre o item 4. "*Que população? Que tipo de zona? A sua dimensão? Que relação existe entre a população e o hospital?…*" a professora sugere que assumissem como população os residentes do seu conselho e o respetivo hospital. Face a esta contextualização, o grupo assume que a amostra composta pelos médicos do hospital não seria representativa pois decerto que alguns deles não pertenceriam à população por não serem moradores do conselho: "*Esta não é uma boa amostra porque há muitos médicos que podem nem viver nessa população, e isso pode alterar esse mesmo estudo*".

Posteriormente, na discussão final, um aluno do mesmo grupo ainda acrescentou que a amostra não seria representativa da população para a característica "cor dos olhos" pois, esta característica estaria intimamente relacionada com cada grupo étnico e no conjunto dos médicos do hospital a representatividade dos vários grupos étnicos existentes no conselho não seria satisfeita.

No item 5., os quatro grupos que responderam foram unânimes em considerar a amostra não representativa, dado o evidente desfasamento entre o conhecimento da população em geral e o de uma comunidade médica, na área de biologia (figura 3), o que foi aceite por parte dos restantes alunos da turma.

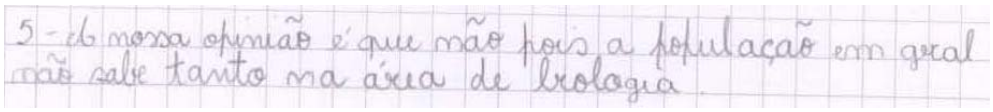


Figura 3. Resposta apresentada por um grupo ao item 5 da Parte C.

5. Conclusão

De forma geral, os alunos conseguiram realizar com sucesso a tarefa proposta, revelam compreender os motivos que implicam a utilização de amostras em estudos estatísticos e reconheceram vantagem em reduzir a quantidade de dados recolhidos (Garfield & Gal, 1999). Em contraponto com os resultados de Jacobs (1999), o fato dos alunos proporem de imediato o recurso a amostragem em detrimento do estudo da população, nas situações 1 e 2, deve-se, no nosso entender, à enorme dimensão das populações em causa, o que torna evidente as dificuldades da realização de um censo. Ao longo da realização e discussão da tarefa, os alunos identificaram vários elementos que afetavam a representatividade da amostra (parte B, itens 1, 2) e mostraram-se capazes de reconhecer amostras representativas (itens 1 e 3), competências que integram o raciocínio correto sobre amostras (Garfield, 2002; Martins & Ponte, 2010) e referidas no presente programa do ensino básico (ME, 2007). Os alunos revelaram ainda sensibilidade quanto à dimensão de uma amostra, considerando que 30 elementos no caso da situação 2 eram insuficientes e que, no item 2, a amostra com metade da dimensão da população seria demasiado grande, não cometendo alguns dos erros indicados por Garfield (2002). A amostra escolhida para os itens 4. e 5. tinha como finalidade levar os alunos a reconhecerem que uma mesma amostra pode ser representativa de uma população face ao estudo de uma determinada característica e não o ser no estudo de uma outra característica, o que se revelou difícil de conseguir, pois os alunos revelaram dificuldades na interpretação do item 4. Posteriormente, face à contextualização sugerida pela professora, apresentaram dois aspetos que colocavam em causa a representatividade da amostra no item 4.

Em conclusão, as situações propostas na tarefa revelaram-se pertinentes e interessantes e permitiram o envolvimento entusiástico dos alunos no trabalho que conduziu à aprendizagem dos conceitos de população, amostra e amostra representativa. O modo como estas situações foram trabalhadas na aula, no quadro da experiencia de ensino contribuiu para o desenvolvimento da noção de representatividade e de variabilidade da amostragem.

Estudo realizado no âmbito do Projeto DSL – *Developing statistical literacy: Student learning and teacher education*, apoiado pela FCT- Fundação para a Ciência e a Tecnologia (contrato PTDC/CPE-CED/117933/2010).

Referências

Garfield, J., (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education* 10(3).

Garfield, J., & Gal, I. (1999). Assessment and statistics education: Current challenges and directions. *International Statistical Review*, *67*(1), 1-12.

Jacobs, V. R. (1999). How do students think about statistical sampling before instruction? *Mathematics Teaching in the Middle School*, 5(4), 240-246, 263.

Martins, M. E. & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: ME-DGIDC.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Rubin, A., Bruce, B., & Tenney, Y. (1991). Learning about sampling: Trouble at the core of statistics. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (Vol. 1, pp. 314-319). Voorburg: International Statistical Institute.

A capacidade de interpretação gráfica dos alunos do 5.º ano na exploração de notícias da comunicação social

Gregório, M.[1]*, Henriques, A.*[2]*, Ponte, J. P.*[2]

[1]E.B. 2, 3 da Pontinha
[2]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Resumo

O uso constante que a comunicação social faz de gráficos para noticiar os mais diversos assuntos impõe a necessidade dos alunos desenvolverem a capacidade de interpretar dados estatísticos e o seu sentido crítico. A escola, através das atividades que promove, tem um papel crucial no desenvolvimento dessas capacidades, criando contextos de ensino em que a interpretação de gráficos tenha propósito e significado para os alunos. Neste trabalho, assumimos que a utilização de gráficos das notícias que surgem na comunicação social pode ser uma boa estratégia para ensinar estatística, motivando e desafiando os alunos a relacionar o uso dos gráficos em contextos escolares e extra-escolares. Nesta comunicação apresentamos os resultados de um estudo cujo objetivo é analisar a capacidade de interpretação gráfica de alunos do 5.º ano, ao longo de uma unidade de ensino que recorre a notícias da comunicação social para trabalhar diversas representações de dados. Os documentos escritos pelos alunos servem de base ao estudo de natureza qualitativa e interpretativa. Os resultados indiciam as potencialidades no uso de gráficos relativos a notícias para desenvolver nos alunos a capacidade de interpretação de dados estatísticos, promovendo, deste modo, a sua literacia estatística.

Palavras chave: Interpretação gráfica; Notícias; Ensino básico; Unidade de ensino

1. Introdução

A constante utilização de gráficos pela comunicação social para noticiar os mais diversos assuntos impõe a necessidade dos alunos desenvolverem a capacidade de interpretar dados representados graficamente e o seu sentido crítico (Monteiro & Ainley, 2004). A escola, através das atividades que promove, tem um papel crucial no desenvolvimento dessas capacidades, criando contextos de ensino em que a interpretação de gráficos tenha propósito e significado para os alunos. Justifica-se, assim, a importância que as atuais orientações curriculares atribuem ao desenvolvimento da literacia estatística desde os primeiros anos de escolaridade e, em particular, à interpretação dos dados estatísticos, de modo a desvincular o frequente caráter tecnicista e processual do ensino da Estatística privilegiando o desenvolvimento do raciocínio e do pensamento estatístico dos alunos (ME, 2007; NCTM, 2007).

A interpretação de gráficos estatísticos não é uma atividade simples pois depende do contexto e os conhecimentos técnicos dos alunos ou a sua familiaridade com as componentes dos gráficos não são suficientes para assegurar a sua compreensão (Gal, 2002; Monteiro, 2002). Os gráficos das notícias que surgem na comunicação social têm sido utilizados como recurso didático, motivando e desafiando os alunos para o estudo da interpretação de gráficos e fornecendo a base para avaliar a aprendizagem sobre este tópico (Ainley, 2000; Watson, 1997). No entanto, os resultados da investigação ainda são insuficientes para implementar, de forma eficiente, o uso de gráficos das notícias nas atividades de sala de aula. Neste estudo analisamos a capacidade de interpretação gráfica dos alunos do 5.º ano ao longo de uma unidade de ensino, no tema da organização e

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 73-81). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

tratamento de dados, quando exploram tarefas onde são utilizadas notícias vinculadas pela comunicação social para trabalhar diversas representações de dados.

2. Interpretação de gráficos estatísticos

A capacidade de interpretar e avaliar criticamente informação estatística representada em gráficos é uma das componentes da literacia estatística que é necessária desenvolver nos alunos porque tem sido reconhecida como um dos aspetos fundamentais da literacia científica que cada cidadão deve ter no Séc. XXI (Gal, 2002).

Os aspetos da literacia estatística na interpretação de gráficos em contextos escolares têm sido foco de numerosas investigações. Um importante contributo para compreender o processo de interpretação de gráficos estatísticos foi dado por Curcio (1987) que defende "ser capaz de ler os dados presentes num gráfico é uma capacidade importante, mas o sujeito só tira o máximo de potencial de um gráfico quando consegue interpretar os dados e generalizar para a realidade a informação nele presente" (p. 1), justificando desta forma a importância do desenvolvimento destas capacidades no trabalho realizado com os alunos. Neste âmbito, a autora definiu três níveis de compreensão de gráficos: (i) Leitura dos dados - atividade que requer apenas uma leitura literal do gráfico; (ii) Leitura entre os dados – atividade que já inclui a interpretação dos gráficos e que requer a capacidade para identificar relações matemáticas; e (iii) Leitura para além dos dados – atividade de realização de previsões e inferências com base na interpretação dos dados.

Shaughnessy (2007) considera que aos três níveis cognitivos definidos por Curcio se deverá juntar um quarto nível – ler por detrás dos dados, no qual se procura aferir a compreensão das conexões entre o contexto e o gráfico e saber se os alunos identificam as causas da variação dos dados do gráfico em análise. No trabalho de Friel, Curcio e Bright (2001) os níveis de compreensão gráfica de Curcio são ampliados e denominados por nível elementar, intermédio e avançado, respetivamente. Além disso, os autores consideram a existência de três tipos de comportamentos que parecem estar relacionados à compreensão dos gráficos, a tradução, a interpretação e a extrapolação/interpolação. Na tradução de gráficos e tabelas, descreve-se o conteúdo da tabela em palavras ou interpreta-se um gráfico a um nível descritivo, comentando sobre a estrutura específica do gráfico. A interpretação requer a reorganização dos dados e a triagem entre os elementos mais e menos importantes. Finalmente, a extrapolação e interpolação são consideradas como sendo extensões da interpretação, observando as tendências dos dados ou especificando implicações, requerendo não só o reconhecimento da essência do que é apresentado, mas também a identificação de algumas das consequências. O facto do processo de interpretação envolver extrapolação a partir de dados apresentados em gráficos sugere que os alunos também se baseiam nos seus conhecimentos anteriores.

Outros autores têm também enfatizado a importância de avaliar o uso do conhecimento estatístico relativo a gráficos em contextos fora da sala de aula, que têm propósitos de análise ou comunicação de informação, por vezes relacionada com o interesse dos alunos que os interpretam (Ainley, 2000; Watson, 1997). Em particular, Watson (1997) considera que os gráficos não usuais e enganosos que surgem nas notícias da comunicação social podem ser bons exemplos para motivar e desafiar os alunos a desenvolver capacidades de interpretação gráfica e propôs um modelo hierárquico de três níveis para analisar essas capacidades: (a) compreensão básica da terminologia estatística; (b) compreensão da linguagem e conceitos estatísticos que estão incorporados no contexto de uma ampla discussão social; e (c) atitude questionadora que permite aplicar conceitos mais sofisticados para contradizer afirmações sem fundamentação estatística apropriada.

Este modelo foi depois ampliado por Watson e Callingham (2003) embora continuem a enfatizar que o nível superior do pensamento estatístico está associado a respostas

baseadas numa atitude questionadora e crítica em relação ao contexto. No entanto, a atividade de interpretação de gráficos pode ser diferente em contextos específicos. Por exemplo, Wild e Pfannkuch (1999) sugerem que em contextos de *enquiry*, as pessoas agem como produtores de dados e geralmente têm que interpretar os seus próprios dados e comunicar os seus resultados usando gráficos.

Gal (2002) refere como contextos de *leitura* as situações do dia-a-dia em que as pessoas se deparam com gráficos e têm que os interpretar (por exemplo, ver televisão, ler jornais, entre outros). Estes contextos estão relacionados com situações em que as pessoas interagem com notícias na comunicação social e requerem um certo nível de literacia estatística que lhes permita interpretar, avaliar criticamente e comentar a informação estatística, os argumentos e a mensagem. Outros importantes contextos onde a interpretação de gráficos é desenvolvida são os *escolares* (Monteiro & Ainley, 2004). Nestes contextos a interpretação de gráficos adquire características específicas que os tornam diferentes dos anteriores. Por exemplo, a interpretação de gráficos que é solicitada os alunos está geralmente associada a objetivos intencionais de ensinar um assunto escolar.

Saber interpretar e compreender a informação estatística presente no dia-a-dia e vinculada pelos vários meios de comunicação social nem sempre é uma tarefa fácil para os alunos pois as ideias fundamentais da Estatística nem sempre estão adaptadas ao seu nível etário, sobretudo se ainda têm capacidades cognitivas pouco desenvolvidas e por vezes podem cair na ilusão de interpretações erróneas ligadas ao 'bom senso'. No entender de Batanero (2001), é desejável que através da proposta de situações didáticas adequadas ao etário dos alunos eles tenham oportunidade de desenvolver aprendizagens significativas. Ao partilharem estas preocupações, Jones, Thornton, Langrall, Mooney, Perry e Putt (2000) desenvolveram um quadro conceptual para caracterizar o pensamento estatístico dos alunos dos níveis mais elementares do ensino básico tendo por base quatro constructos chave: descrição, organização e redução, representação e análise e interpretação de dados.

Para cada um destes constructos, os autores ainda consideram quatro níveis de pensamento mas que representam um contínuo: idiossincrático, transitório, quantitativo e analítico. Na descrição de dados, os autores incorporam o nível 1 de Curcio (1987), denominado por 'leitura de dados' e que se refere à extração explícita de informação do gráfico, reconhecendo as suas convenções e fazendo conexões diretas entre os dados e a representação. Na organização e redução de dados incorporam ações mentais como ordenação, agrupamento e sumarização. Como tal, envolve também usar as noções de centralidade e dispersão. A construção de representações para exibir diferentes organizações de dados é central na representação. A análise e interpretação de dados envolve o reconhecimento de padrões e tendências bem como a realização de inferências e previsões a partir dos dados. Deste modo, incorpora os níveis 2 e 3 de Curcio (1987) denominados por 'ler entre os dados' e 'ler além dos dados' e requer a comparação de quantidades e o uso de conceitos e operações matemáticas para combinar e integrar dados.

3. Metodologia

O estudo que apresentamos, parte de um trabalho de investigação mais alargado, foca-se na capacidade de interpretação gráfica que os alunos do 5.º ano evidenciam ao longo de uma unidade de ensino, no tema da organização e tratamento de dados (OTD), quando exploram tarefas onde são utilizadas notícias vinculadas pela comunicação social para trabalhar diversas representações de dados.

Os participantes são 20 alunos (15 rapazes e 5 raparigas, com idades compreendidas entre os 9 e os 11 anos) do 5.º ano de escolaridade de uma turma de uma escola básica situada no concelho de Odivelas, onde a primeira autora é também professora. As informações referentes ao seu aproveitamento escolar no 1.º ciclo, na área curricular de Matemática, são satisfatórias mas apresentam um comportamento irregular e, por vezes, inadequado em sala de aula, que prejudica visivelmente as suas aprendizagens.

A unidade de ensino realizou-se no ano letivo de 2011/2012, nas aulas de OTD, apoiada na realização de 11 tarefas contextualizadas em notícias retiradas da comunicação social que visam desenvolver a capacidade de leitura e interpretação de gráficos estatísticos, promovendo a aprendizagem dos alunos. A realização de cada tarefa, em sala de aula, contemplou quatro momentos principais (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008): (i) Apresentação da tarefa aos alunos, assegurando a compreensão do seu propósito (implicou processos de descodificação da linguagem utilizada pelos meios de comunicação social, descontextualização e recontextualização) e estimular a participação e empenho dos alunos na realização da mesma; (ii) Trabalho autónomo dos alunos, durante o qual os alunos trabalharam em grupos de 4 elementos; (iii) Discussão coletiva com apresentação das produções dos alunos perante a turma fomentando a discussão da sua validade e a construção de uma compreensão comum sobre várias representações gráficas; e (iv) Síntese final, onde foram sistematizadas as aprendizagens mais relevantes e sintetizados os conceitos envolvidos nas tarefas propostas. O trabalho em sala de aula também incluiu oportunidades para a resolução de problemas e de exercícios de aplicação e consolidação de conhecimentos. A seleção das notícias recaiu sobre contextos próximos da realidade dos alunos e onde foram utilizadas representações já trabalhadas em sala de aula.

As resoluções escritas dos alunos durante a realização das várias tarefas e no teste final foram analisadas de forma descritiva e interpretativa, tendo por base os aspetos teóricos revistos na literatura sobre o tema em estudo, em particular o quadro conceptual de Jones et al. (2000). Nesta comunicação, por limitações de espaço, centramo-nos apenas em 3 tarefas (ver anexo) que foram realizadas no início, a meio e no final da unidade de ensino e que incluem questões relativas aos constructos: descrição e análise e interpretação de dados. Deste modo, é feita uma análise ao percurso dos alunos, no sentido de aferir a sua evolução durante a unidade de ensino.

4. Interpretação gráfica dos alunos na exploração de notícias

Antes da unidade de ensino, os alunos do estudo foram questionados sobre os seus hábitos de leitura de revistas e jornais. Cerca de metade dos alunos (55%) afirmou que lê regularmente revistas e jornais para se manter atualizado sobre os assuntos do quotidiano. As razões apontadas pelos restantes alunos para não o fazerem são os pais não comprarem revistas nem jornais ou as suas preferências por outras atividades (por exemplo, ver televisão). Metade dos alunos ainda atribui importância aos conhecimentos matemáticos na interpretação de notícias porque “às vezes falam de dinheiro e outras coisas e depois precisamos de fazer contas”. No entanto, os outros alunos parecem não reconhecer a aplicação da Matemática escolar no seu dia-a-dia, desvalorizando os conhecimentos matemáticos na interpretação notícias: “não fazem coisas parecidas às da Matemática, são só notícias. Tenho é que saber ler”.

A tarefa ‘Campeonato de futebol’, retirada de um jornal de desporto e realizada no início da unidade de ensino, foi proposta aos alunos com o objetivo de analisar a sua capacidade de leitura e interpretação de tabelas. O entusiasmo dos alunos na realização da tarefa foi evidente quando confirmaram a veracidade dos dados apresentados na notícia com base nos seus conhecimentos sobre o campeonato de futebol. Quando questionados sobre “que informações podemos obter a partir da tabela?”, a generalidade dos alunos (60%)

concentra-se em elementos que podem ser retirados diretamente da tabela, através de uma simples leitura dos títulos, respondendo: " n.º de golos marcados e sofridos, n.º de pontos que cada equipa obteve no final do campeonato, n.º de empates (…)". Estas respostas dos alunos, apesar de corretas, descrevem aspetos irrelevantes e estão limitadas a elementos individuais da tabela, evidenciando um pensamento idiossincrático relativamente à descrição de dados. Os restantes alunos (40%) também incluem, nas suas respostas, descrições quantitativas dos dados, como por exemplo: "O maior número de empates foi a equipa de olhanense com 14 empates, o número de golos marcados da equipa do Sporting teve o mesmo número de golos sofridos do Marítimo (…)". Nestas respostas os alunos já fazem, de forma espontânea, descrições globais dos dados e afirmações que revelam conhecimento das convenções tabelares e que requerem comparações entre os dados apresentados, posicionando-se num nível de pensamento quantitativo.

A tarefa 'Incêndios Florestais', retirada de um jornal diário, foi realizada a meio da unidade de ensino com o objetivo de analisar a capacidade de leitura e interpretação de gráficos de barras. A notícia apresenta dois gráficos de barras, um com dados referentes à área de floresta ardida num determinado período do ano e outro relativo ao número de incêndios no mesmo período. No primeiro item - "Em que mês a área ardida foi menor? E em que mês se registou um maior número de incêndios?", de nível 2 segundo a classificação de Curcio (1987), só um grupo (20% dos alunos) respondeu corretamente às duas questões estabelecendo uma correspondência entre cada uma delas e o gráfico adequado à obtenção da resposta. Estes alunos foram também capazes de fazer comparações entre os dados de cada um dos gráficos, evidenciando pensamento analítico na interpretação de dados. Mais de metade dos grupos (60% dos alunos) responde às duas questões tendo em conta os dados apresentados apenas num dos gráficos, como por exemplo: "A área ardida foi menor em Maio. Registou-se um maior número de incêndios em Agosto". Estes alunos dão uma resposta válida apenas a uma questão de 'leitura entre os dados', realizando comparações corretas dentro de um conjunto de dados mas ignoram a associação da questão com o respetivo gráfico. Deste modo revelam um nível de pensamento transitório. Apenas um grupo (20% dos alunos) aparenta estar num nível de pensamento idiossincrático, respondendo incorretamente às duas questões, como mostra a sua resposta: "Foi menor em Janeiro. O maior em Agosto". Durante a discussão em grande grupo foi percetível que os alunos tinham trocado os gráficos mas que foram capazes de interpretar os dados, fazendo comparações corretas dentro de cada um dos gráficos. No item 2 desta tarefa, também considerado de nível 2 segundo Curcio (1989), os alunos foram solicitados a atribuir um valor lógico à frase "A um maior número de incêndios corresponde uma maior área ardida" e a justificar a sua resposta. Embora todos os alunos tenham afirmado, corretamente, não concordarem com esta questão, apenas dois grupos (40% dos alunos) apresentam uma justificação considerada válida, como mostram as respostas seguintes:

> Não [concordo com a afirmação]. Porque nos números de incêndios no mês de Julho é o maior e no mês de Julho de área ardida não é o maior.
>
> Falsa. Porque no mês de Agosto arderam 3978 fogos e a área [ardida] foi de 16110. No mês de Julho houve 4367 fogos e a área foi de 11391 é menor.

Estes alunos apresentaram um contra-exemplo que invalida a premissa assumida na questão. Deste modo deram uma resposta válida a uma questão de 'leitura entre os dados', fazendo comparações coerentes e compreensivas não só dentro de cada gráfico como entre os dois gráficos para produzirem argumentos válidos e revelaram um nível de pensamento Analítico. Os restantes alunos (60%) não justificam a afirmação ou não apresentam um argumento que a invalide, apresentando um nível de pensamento idiossincrático, como se pode observar pelo exemplo seguinte: "Não, não concordo, porque o número de incêndios e o número de área ardida não são iguais". No entanto, durante a discussão, estes alunos explicaram o raciocínio que esteve na base da sua resposta e apresentaram argumentos que

demonstram terem conseguido interpretar corretamente os gráficos, evidenciando que as dificuldades se situaram ao nível da comunicação: “Se fosse verdade, o mês que tem a barra mais alta no gráfico das ocorrências tinha de ser o mês que tem a barra mais alta no da área ardida e o que tem a barra menor também tinha de ter a barra menor no outro e assim… Mas não, não combinam”.

Na questão 7 do teste de avaliação, realizado no final da unidade de ensino, foram apresentados dois gráficos, um de barras e outro circular, retirados de dois jornais de uma mesma cidade, com informação relativa a consumos médios diários de água. Os alunos foram solicitados a explicar como é que um leitor atento poderia descobrir que os gráficos das duas notícias não foram construídos a partir dos mesmos dados. O objetivo desta questão era analisar a capacidade dos alunos interpretarem diferentes gráficos e reconhecerem quando é que esses gráficos representam os mesmos dados. Apenas 30% dos alunos não responderam à questão ou não apresentaram uma justificação válida, dando respostas focadas em aspetos irrelevantes do gráfico e não nos dados, como se pode observar no exemplo seguinte: “Porque um utilizou em litros e outro em percentagens”. Estes alunos apresentam ainda um nível de pensamento idiossincrático.

Os restantes alunos mostraram um bom desempenho na resolução desta questão, apresentando justificações válidas. Os 70% de alunos cujas respostas foram consideradas corretas focaram a sua argumentação nas inconsistências entre todos ou apenas alguns dos dados apresentados nas duas representações, realizando comparações entre os dados dos dois gráficos e estabelecendo correspondências numéricas ou visuais entre os elementos representados. Por exemplo, um dos alunos cuja resposta pode ser considerada representativa da maioria destes alunos (55%), afirma: “Não utilizaram os mesmos dados para construírem os gráficos porque na percentagem os ‘outros’ e os ‘comida e bebida’ são iguais (5%) e no outro de litros a ‘comida e bebidas’ e os ‘outros’ não são iguais”. Este aluno evidencia conhecer as convenções gráficas e é capaz de reconhecer que os gráficos representam diferentes dados estabelecendo comparações parciais entre os dados, revelando pensamento quantitativo no que diz respeito à descrição e interpretação de dados. Um outro aluno fez uma descrição completa dos dados, demonstrando também conhecer as convenções dos dois gráficos e estabeleceu correspondências numéricas entre os elementos dos dois gráficos, baseando a sua resposta em comparações globais, apresentando um nível de pensamento analítico na interpretação de dados, como mostra o exemplo da figura 1a. Outro aluno, ainda, foi capaz de extrair a informação do gráfico circular e, com base nessa informação construir uma representação diferente, um gráfico de barras, igualmente válida, que lhe permite comparar visualmente e de forma global os dados, como mostra o exemplo da figura 1b. No entanto, este aluno é impreciso em relação às comparações que fez, colocando-o num nível transitório de análise de dados.

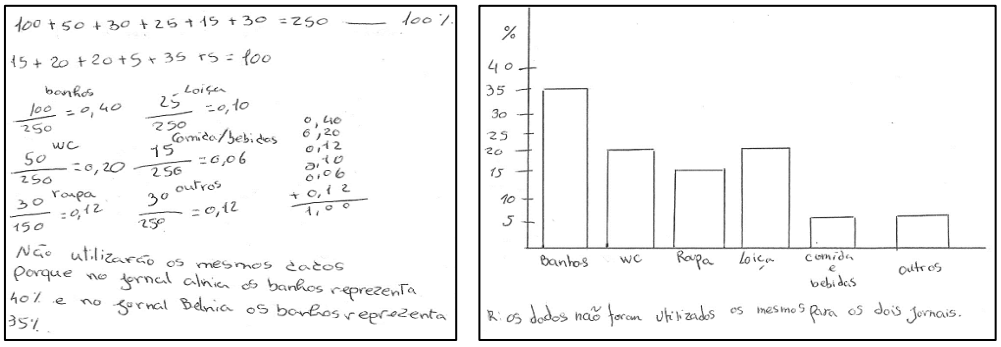


Figura 1a. (esquerda) e 1b (direita)

5. A concluir

Neste estudo analisámos a capacidade de interpretação gráfica dos alunos do 5.º ano ao longo de uma unidade de ensino onde são utilizadas notícias vinculadas pela comunicação social. Não obstante o efeito global do trabalho realizado na unidade de ensino, a análise dos níveis de pensamento dos alunos revelou uma evolução significativa na sua capacidade de descrição e interpretação de dados. No início da unidade de ensino, a maioria dos alunos revelou conhecimento das convenções gráficas mas apresentou um nível de pensamento idiossincrático, no sentido em que focaram as suas descrições em elementos superficiais e irrelevantes da representação. No entanto, com o decorrer da unidade de ensino, os alunos começaram a fazer descrições mais completas dos dados e a basear as suas respostas em comparações parciais ou mesmo globais entre os dados, apresentando níveis de pensamento quantitativo e analítico. Deste modo, existe evidência quantitativa e qualitativa que o número de alunos evidenciando níveis de pensamento quantitativo e analítico foi aumentando ao longo da unidade de ensino, diminuindo, simultaneamente, o número de alunos com nível de pensamento idiossincrático, tanto em relação à descrição como à análise e interpretação de dados.

Os resultados obtidos sugerem que a exploração de notícias, em vez da utilização de gráficos 'intencionalmente elaborados e prontos a usar' pode ser uma boa estratégia para motivar os alunos na aprendizagem dos aspetos de literacia estatística relacionados com a interpretação gráfica, confirmando a ideia de Watson (1997). No entanto, não permitem afirmar com precisão em que condições ocorreu o desenvolvimento destas capacidades dos alunos e o papel do contexto no seu pensamento, sendo necessário realizar mais estudos que desenvolvam e avaliem trajetórias de aprendizagem focadas no pensamento estatístico dos alunos.

Agradecimento

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Desenvolver a literacia estatística: Aprendizagem do aluno e formação do professor* (contrato PTDC/CPE-CED/117933/2010).

Referências

Ainley, J. (2000). Constructing purposeful mathematical activity in primary classrooms. In C. Tikly, & A. Wolf (Eds.), *The maths we need now: Demands, deficits and remedies* (pp. 138-53). London: Institute of Education - University of London.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Branco, J., & Martins, M. E. (2002). Literacia estatística. *Educação e Matemática*, 62, 9-13.

Curcio, F. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(5), 382-393.

Friel, S., Bright, G., & Curcio, F. (1997). Understanding students' understanding of graphs. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(3), 224-227.

Gal, I. (2002). Adult statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-25.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W., Mooney, E. S., Perry, B., & Putt, I. J. (2000). A framework for characterizing students' statistical thinking. *Mathematics Thinking and*

Learning, *2*, 269–307.

Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

Monteiro, C. (2002). Investigating the interpretation of economics graphs. In: A. Cockburn, and Nardi, E. (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 361-368, Vol. 3). Norwich, UK: East Anglia University.

Monteiro, C., & Ainley, J. (2004). Exploring the complexity of the interpretation of media graphs. In O. McNamara, & R. Barwell (Eds.), *Research in Mathematics Education: Papers of the British Society for Research into Learning Mathematics* (Vol. 6, pp. 115-128). London: BSRLM.

Monteiro, C., & Ainley, J. (2010). The Interpretation of Graphs: reflecting on contextual aspects. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, *3*(2), 17-30.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston. VA:NCTM.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. K. Lester (Eds.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1006). Greenwich: NCTM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating produc-tive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate stu-dent thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Watson, J. (1997). Assessing statistical literacy through the use of media surveys, in I. Gal, & J. Garfield (eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 107-121), Amsterdam: IOS Press and International Statistical Institute.

Watson, J., & Callingham, R. (2003). Statistical literacy: A complex hierarchical construct. *Statistical Education Research Journal 2*(2), 3-46.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-65.

ANEXO

Tarefa "Campeonato de futebol"

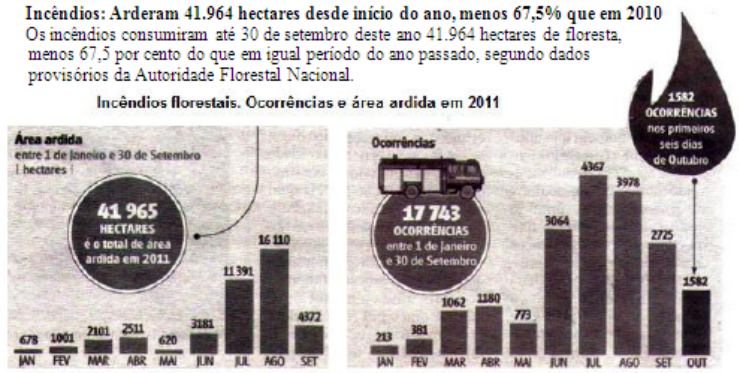
Observa os dados referentes ao campeonato de futebol da época 2009/2010. Que informações podemos obter a partir da tabela?

CLASSIFICAÇAO

Pos.	Equipas	Total P	J	V	E	D	G
1	Benfica	76	30	24	4	2	77-19
2	Sp. Braga	71	30	22	5	3	48-20
3	FC Porto	68	30	21	5	4	70-26
4	Sporting	48	30	13	9	8	42-26
5	Marítimo	41	30	11	8	11	41-42
6	V. Guimarães	41	30	11	8	11	31-34
7	Nacional	39	30	10	9	11	38-46
8	Naval	36	30	10	6	14	20-36
9	U. Leiria	36	30	9	9	13	36-41
10	P. Ferreira	35	30	8	11	11	31-36
11	Académica	33	30	8	9	13	37-42
12	Rio Ave	31	30	6	13	11	22-33
13	Olhanense	29	30	5	14	11	31-46
14	V. Setúbal	25	30	5	10	15	27-56
15	Belenenses	23	30	4	11	15	23-44
16	Leixões	21	30	5	6	19	25-51

Pos. - Posição
P – Pontos
J – Número de jogos
V - Número de vitórias
E - Número de empates
D - Número de derrotas
G – Golos marcados/Golos sofridos

Tarefa "Incêndios florestais"



Fonte. Autoridade Florestal Nacional/Protecção Civil. Infografia JN

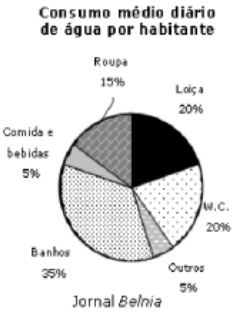
A partir da informação contida nos gráficos, responde às seguintes questões:
1. Em que mês a área ardida foi menor? E em que mês se registou um maior número de incêndios?
2. Considera a seguinte afirmação: "A um maior número de incêndios corresponde uma maior área ardida." Concordas com esta afirmação? Justifica a tua resposta.

Questão 7 do teste final

Dois jornais de uma cidade, Alnia e Belnia, apresentaram, na mesma semana, os seguintes gráficos referentes a um estudo sobre o consumo médio diário de água, por habitante, na cidade.



Jornal *Alnia*



Jornal *Belnia*

Um leitor atento descobriu que os dois jornais não utilizaram os mesmos dados para construírem os seus gráficos. Explica como poderá ter chegado a esta conclusão.

A organização conceptual dos estudantes, dada através das Redes Associativas Pathfinder, do conceito de Probabilidade: Um estudo com alunos do 9.º ano de Escolaridade do Ensino Básico Português

Almeida, Cesário[1], *Casas García, Luis*[2], *Luengo González, Ricardo*[2]

[1]Instituto Politécnico de Beja - Portugal
[2]Universidad de Extremadura

Resumo

A Teoria dos Conceitos Nucleares (TCN), desenvolvida por Casas e Luengo (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2005), postula que à medida que os alunos progridem na escolaridade, o seu conhecimento é estruturado de uma forma cada vez mais simples e em torno de um conjunto limitado de conceitos importantes – os Conceitos Nucleares (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2005; Antunes, 2010). Com este trabalho pretendemos apresentar alguns resultados preliminares sobre a organização conceptual dos alunos em relação ao conceito de Probabilidade. Inicialmente procedeu-se à identificação dos termos, conceitos e exemplos associados ao processo de ensino/aprendizagem da noção de Probabilidade. De seguida, com recurso a representações no plano nas quais os conceitos/termos/exemplos aparecem como pontos no plano e as suas relações como segmentos de reta – Redes Associativas Pathfinder (PFNET) (Schvaneveldt et al, 1988) -, e utilizando o software Goluca (Casas et al, 2011), recolheram-se e trataram-se dados de alunos a frequentarem, no ano letivo 2012/2013, o 9.ºano de escolaridade em Portugal. As PFNET assim obtidas permitiram-nos identificar os conceitos que assumem uma maior relevância na estrutura conceptual dos alunos – os conceitos Nucleares -, aquelas noções que ainda não estão devidamente incorporadas na estrutura cognitiva dos estudantes - os nós Extremidade -, a sua respetiva organização e efetuou-se uma análise comparativa dos indicadores quantitativos destas representações entre discentes de género feminino e masculino.

Palavras-chave: Probabilidade, Matemática, Redes Associativas Pathfinder, Teoria dos Conceitos Nucleares, Estrutura Cognitiva.

1. Introdução

A procura e a compreensão organizativa das ideias associados a um dado conceito, sempre desempenharam um papel relevante no Ensino da Matemática e, nas últimas décadas, têm-se assumido como uma matéria de pesquisa importante entre investigadores educacionais. A Teoria da Probabilidade, pela sua utilidade e proficiência em inúmeros contextos da sociedade, tem conseguido, nas últimas décadas, o reconhecimento da sua importância no ensino, e por estas razões, tem visto a sua inclusão nos currículos dos diferentes níveis de Ensino. Este facto, para além de sugerir o desenvolvimento dos conceitos probabilísticos nos currículos dos diferentes ciclos de estudo (Azcárate et al, 2004; Batanero, 2004, 2005; Gal, 2005), tem vindo a detetar conceitos e significados fundamentais, sobre esta temática, que devem ser estudados. Todavia, os diferentes significados de Probabilidade evidenciam a natureza complexa deste conceito, pelo que a abordagem pedagógica desta noção não se pode limitar a uma única perspetiva (Batanero et al, 2005).

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 83-90). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

1.1. A Toria dos Conceitos Nucleares (TCN)

A Teoria dos Conceitos Nucleares (TCN), proposta por Casas e Luengo (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2005), afirma que à medida que os alunos progridem na escolaridade, o seu conhecimento é estruturado de uma forma cada vez mais simples e em torno de um conjunto limitado de conceitos importantes – os Conceitos Nucleares -, que, no entanto, não são necessariamente os mais gerais nem os mais abstratos. Esta organização cognitiva surgem na forma de Redes Associativas, nas quais aparecem os Conceitos Nucleares que ocupam posições mais destacadas nestas representações, em virtude de apresentarem um maior número de ligações com os restantes conceitos, facto que evidência a relevância destes no modo de organizar o conhecimento de um sujeito sobre um determinado assunto (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2005; Antunes, 2010). Esta teoria oferece uma nova visão sobre a organização da estrutura cognitiva, dando realce, para o processo de ensino e aprendizagem, aos conceitos que se destacam nas redes conceptuais, pelo maior número de ligações que apresentam. Os principais elementos da TCN são a "*organização geográfica do conhecimento*", a "*noção de Conceito Nuclear*" e a ideia de "*caminho de custo mínimo*" (Casas, 2002). De entre as implicações didáticas destas ideias, destaca-se a possibilidade de organizar o ensino em torno destes conceitos nucleares, adequando estratégias e materiais pedagógicos.

1.2 As Redes Associativas Pathfinder (PFNET's)

A TCN faz uso de uma técnica própria, as "Pathfinder Associative Networks - PFNET's" - Redes Associativas Pathfinder (Schvaneveldt et al, 1988). Estas constituem um método já consolidado para comparar e representar a estrutura cognitiva de indivíduos e grupos, e constituem um procedimento quantitativo e gráfico, cuja aplicação, no âmbito de estudos educacionais, apresenta vantagens enquanto ferramenta interpretativa para o estudo e representação da organização conceptual de variados conceitos em grupos de individuos (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2005; Antunes, 2010).

As redes PFNET's são representações no plano, nas quais os conceitos/termos/exemplos aparecem como pontos no plano – nós - e as suas relações como segmentos de recta – ligações ou arestas - que os unem, de maior ou menor comprimento dependendo do maior ou menor peso atribuído à sua proximidade. O modo de atribuir os pesos da proximidade entre os diferentes conceitos é feito com base no seguinte procedimento: após a seleção dos termos a utilizar nas redes, todos os possíveis pares são apresentados de um modo aleatório ao sujeito e pede-se-lhe para atribuir um peso à respetiva proximidade. Quanto maior (menor) for o peso atribuído, maior (menor) será a proximidade entre os conceitos/termos. A matriz seguinte – Figura 1 -representa os pesos da proximidade, dadas por um aluno, em relação à noção de Probabilidade.

Tabela 1 – Matriz de proximidade de um aluno do 9.º ano sobre o conceito de Probabilidade, obtida com o software Goluca

	TCC	EA	CPCF	Pro	Quo	LMD	Acon	VN	LL	Aca
Técnicas de contagem de casos (TCC)										
Experiência Aleatória (EA)	0,216									
Casos Possíveis e casos favoráveis	0,506	0,848								
Probabilidade (Pro)	0,558	0,913	0,923							
Quociente (Quo)	0,535	0,126	0,535	0,535						
Lançamento de moedas/dados (LMD)	0,545	0,565	0,952	0,935	0,148					
Acontecimento (Acon)	0,181	0,906	0,939	0,881	0,252	0,510				
Valor numérico (VN)	0,532	0,548	0,497	0,116	0,835	0,500	0,177			
Lei (ou regra) de Laplace (LL)	0,194	0,929	0,526	0,558	0,506	0,187	0,197	0,168		
Acaso (Aca)	0,926	0,568	0,868	0,490	0,168	0,935	0,542	0,126	0,116	
Lei dos Grandes Números (LGN)	0,219	0,129	0,165	0,506	0,503	0,184	0,148	0,487	0,145	0,226

Posteriormente, estes valores da proximidade são tratados com base na análise de semelhanças (ou dissemelhanças) entre os pares de conceitos, ou termos, usando para tal uma métrica-r de Minkowski, a qual é utilizada para calcular distâncias e construir uma disposição geométrica organizacional – as Redes PFNET. Deste modo, o algoritmo utilizado transforma os dados, que expressam a inter-relação entre os conceitos, em distâncias entre pontos num espaço de dimensões mínimas, de tal modo que se obtém uma representação no plano desses dados (Schvaneveldt et al, 1988; Casas, 2002; Casas e Luengo, 2005). O procedimento básico para encontrar qual o caminho que se incorpora nas várias fases do processo iterativo, é que este só é considerado se não existe um caminho indireto através de outros nós cuja soma de pesos seja menor que o caminho direto referido (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2005; Antunes, 2010). Utilizando esta técnica podemos identificar as relações mais importantes, os conceitos Nucleares (os que apresentam mais de duas ligações) e que, de acordo com a TCN, assumem uma maior relevância na estrutura cognitiva, e como estes vão evoluindo na estrutura cognitiva de um individuo, durante a aprendizagem de um determinado conceito. Para além dos Conceitos Nucleares, é possível identificar os nós extremidade (com uma só ligação) e que à luz da TCN, são aqueles que ainda não estão devidamente incorporados na estrutura cognitiva dos alunos.

Para esta análise e representação das Redes Associativas Pathfinder utilizaremos o Software *Goluca*, desenvolvido por Casas, Luengo e Godinho (2011). O *Goluca*, para além de nos possibilitar a recolha dos dados, tem integrado todos os procedimentos iterativos anteriormente descritos e apresenta, ainda, a representação da respetiva estrutura cognitiva, dada através das PFNET's. Comparativamente com outros programas (KNOT, PATHFINDER) é extremamente fácil de usar, apresenta um interface bastante intuitivo e a possibilidade de utilizar diferentes tipos de dados (imagem, som) alargando, deste modo, a sua utilização a outros temas e indivíduos. (Casas et al, 2011)

A Figura 1 mostra o *Interface* de recolha de dados do *Goluca*.

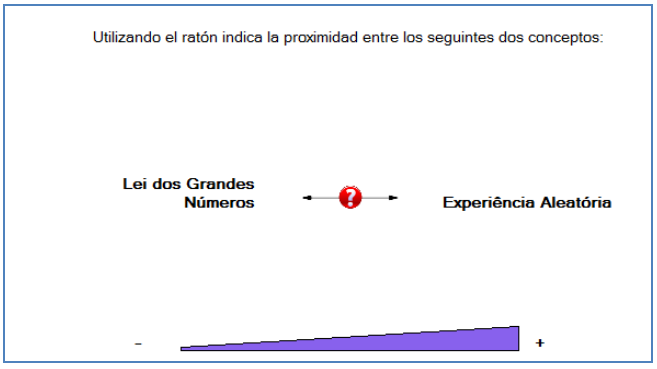


Figura 1 – Interface do *Goluca* para a recolha de dados

Em complemento o *Goluca* calcula alguns indicadores quantitativos que permitem análises estatísticas inferenciais: Densidade da rede, Fator dos nós nucleares, fator do grau dos nós nucleares, Índice de Complexidade da rede.

2. O estudo realizado

2.1. Objetivos do estudo

Com o objetivo geral de compreender a organização conceptual dos alunos do 9.º ano de escolaridade sobre o conceito de Probabilidade, definimos ainda os seguintes objetivos mais específicos:

O_1- *Através das Redes Associativas Pathfinder, identificar os Conceitos Nucleares e os nós extremidade mais frequentes na organização conceptual dos estudantes;*

O_2- *Averiguar se existem diferenças nos vários indicadores quantitativos das Redes PFNET's, entre os alunos do género feminino e masculino*;

O_3- *Conhecer a forma como os alunos, deste nível de ensino, organizam conceptualmente, os conceitos relacionados com a Probabilidade.*

2.2. Amostra

Questionaram-se 214 alunos, de quatro (4) Escolas diferentes do concelho de Beja – Portugal. Os dados foram recolhidos em onze (11) turmas do 9.ºano de escolaridade. Os alunos do género feminino constituem 51,4% do total de estudantes inquiridos, sendo que a escola que mais contribuiu foi a Escola 1, com 59 discentes.

2.3. Os termos/conceitos selecionados

A seleção e identificação dos conceitos/termos/noções/exemplos a serem utilizados na elaboração das Redes Associativas Pathfinder, constituiu uma etapa fundamental do nosso estudo. Para tal inquiriram-se 22 (vinte e dois) professores, analisaram-se seis manuais escolares do 9.º ano de escolaridade e o programa de Matemática do Ensino Básico e levou-se em consideração artigos que clarificam os elementos do significado (Batanero, 2005) e da literacia (Gal, 2005) probabilística.

Aos professores foi-lhes solicitado que referissem alguns conceitos/termos/noções que consideravam serem relevantes no processo de ensino e aprendizagem do conceito da Probabilidade. As referências obtidas, totalizaram 207 unidades de registo, grande parte delas intimamente ligadas à noção de Probabilidade. As unidades de registo mais referenciadas foram: Acontecimento (16), Aleatório (10), Lei dos Grandes Números (7), Casos Possíveis (7), Lei de Laplace (6), Impossível (6), Experiência (6), Certo (6), Casos Favoráveis (6), Possível (4), Percentagem (4), Frequência relativa (4), Fração (4), Contagem (4), Regra de Laplace (3), Incerteza (3), Equiprováveis (3), Conjuntos (3), Combinatória (3), Análise Combinatória (3), Acontecimento impossível (3), Acontecimento certo (3) e Acaso (3). Apesar de estas referências serem, efetivamente, as mais repetidas, notamos que algumas delas apresentam, implicitamente, aspetos comuns, pelo que efetuamos uma categorização mais abrangente. Este estudo permitiu elencar 11 (onze) termos, os quais foram utilizados para construir as redes PFNET's com recurso ao programa *Goluca*. Estes foram: *Acontecimento, Casos possíveis/casos favoráveis, Lei dos Grandes Números, Lei (ou regra) de Laplace, Acaso, Probabilidade, Quociente, Valor numérico, Experiência aleatória, Lançamento de dados/moedas e Técnicas de contagem de casos*.

Seguidamente fomos averiguar se estes onze termos se enquadram nos referenciais teóricos que clarificam os elementos do significado de Probabilidade (Batanero, 2005) - *Campo de problemas, Elementos linguísticos, Procedimentos e Algoritmos, definições e propriedades e os Argumentos e Demonstrações* - e da literacia probabilística (Gal, 2005) - *Grandes ideias, Descobrir probabilidades, Linguagem, Contexto e Questões críticas.*

A análise efetuada aos seis manuais escolares mostrou que todos dedicam, sensivelmente, o mesmo número de páginas à temática da Probabilidade. Em termos da estrutura do conteúdo, os manuais escolares analisados apresentam uma organização semelhante e utilizam com regularidade, na sua exposição, os conceitos/termos referidos.

Em relação ao programa de Matemática (2007) podemos encontrar, neste documento, expressões que corroboram a importância dos conceitos/termos identificados.

2.4. A recolha de dados

As respostas dadas pelos estudantes foram efetuadas em computador e, por esta razão, as mesmas ocorreram em salas de aula de informática, nas últimas três semanas do mês de janeiro de 2013. Optou-se por estas datas, já que este tema foi lecionado no 1.º período do ano letivo de 2012/13. Aos alunos foi-lhes pedido para, na sua opinião, indicarem a maior, ou menor, proximidade, entre os pares de termos que, sucessivamente, iam surgindo no *interface* do *Goluca*, num total de 55 ($C_2^{11} = 55$).

2.5. Análise dos dados

As matrizes de proximidade obtidas, a partir das respostas dos alunos, permitiram quantificar a frequência com que os termos utilizado nas Redes Associativas PFNET surgem como nó extremidade (1 só ligação) e como nó nuclear (3 ou mais ligações). Com maior frequência, surgem como nós extremidade, os termos "Quociente" (p=0,000) e "Lei dos Grandes Números" (p=0,000). De acordo com o mesmo critério, e como Conceitos Nucleares mais reiterados pelos estudantes surgem "Probabilidade" (p=0,000) e "Lançamento de moedas/dados" (p=0,000), o que realça a importância destas ideias na organização conceptual dos alunos. Os conceitos "Experiência aleatória", "Casos possíveis e casos favoráveis" e "Acaso" distribuem-se de um modo semelhante no que concerne a estas duas tipologias de nós (p>0,05).

Os valores médios relativos ao número de nós extremidade, número de nós nucleares, densidade, fator dos nós nucleares, grau dos nós nucleares, fator do grau dos nós nucleares e índice de complexidade das redes PFNET, para a totalidade dos estudantes e para os estudantes do género feminino e masculino, são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Médias e desvios padrões dos indicadores quantitativos, dados pelo Goluca, e p-value do teste de Mann-Whitney

	Feminino (N_1)=110)		Masculino (N_2=104)		Total (N=214)		p-value do teste de Mann-Whitney
	Média	DP	Média	DP	Média	DP	
Número de nós extremidade	4,49	1,578	4,32	1,553	4,41	1,565	0,393
Número de nós nucleares	3,17	1,781	3,20	1,808	3,19	1,790	0,971
Densidade da Rede	0,205	0,045	0,207	0,0533	0,206	0,0491	0,537
Fator dos nós nucleares	0,288	0,162	0,291	0,164	0,290	0,163	0,971
Grau dos nós nucleares	11,364	7,395	11,471	8,224	11,416	7,791	0,856
Fator do grau dos nós nucleares	0,103	0,067	0,104	0,0748	0,104	0,0708	0,856
Índice de Complexidade da rede (× 1000)	10,811	23,220	12,372	32,852	11,569	28,257	0,948

Estes valores, evidenciam a semelhança numérica, nos vários indicadores das PFNET obtidas com o Goluca, entre os alunos do género feminino e masculino. Os valores dos p-value do teste de Mann-Whitney, para todas as variáveis, nos dois grupos, variou entre 0,313 e 0,971 (>0,05), pelo que a variável independente género não é discriminatória relativamente às variáveis quantitativas das redes.

Uma outra potencialidade do *Goluca* é a construção da Rede média PFNET, a qual é obtida tendo como base as matrizes individuais de todos os alunos inquiridos, e que se apresenta na Figura 2.

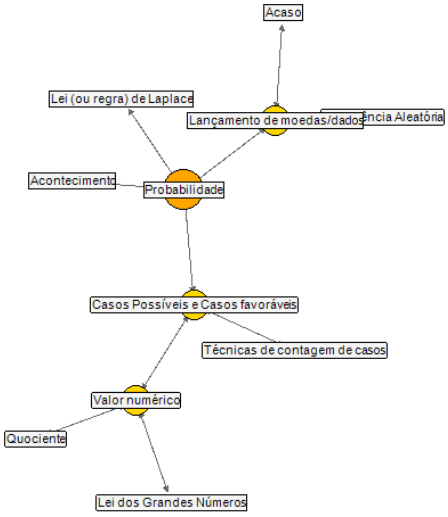


Figura 2 – Rede Associativa Média Pathfinder relativa ao conceito de Probabilidade

Nesta Rede PFNET média identificamos 4 (quatro) Conceitos Nucleares e 7 (sete) nós extremidade. O aparecimento do termo "Probabilidade" como Conceito Nuclear, nesta PFNET, parece-nos natural, na medida em que este conceito constitui o elemento central do presente estudo. Os alunos também atribuem bastante importância na sua organização conceptual aos "Casos possíveis e casos favoráveis", termo que se prende com aspetos específicos da linguagem da Probabilidade. O "Lançamento de moedas/dados" vem confirmar um dos aspetos da TCN (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2005) e que é o facto de os alunos consideram relevante, na sua estrutura cognitiva, os exemplos abordados em contexto de sala de aula. O termo "Valor numérico", que também surge como Conceito Nuclear para os discentes, relaciona-se com o descobrir Probabilidades e, consequentemente, como uma medida quantitativa.

Outro aspeto a salientar diz respeito à própria organização desta rede média PFNET. Assim podemos identificar dois sub-ramos nesta rede. Um primeiro (Figura 3) que contém os Conceitos Nucleares "Casos possíveis e casos favoráveis" e "Valor numérico" e os nós extremidade "Quociente", "Técnica de contagem de casos" e "Lei dos grandes números". Os conceitos incluídos nesta sub-rede estão relacionados com o cálculo de Probabilidades e, alguns, são frequentemente utilizados noutros contextos Matemáticos.

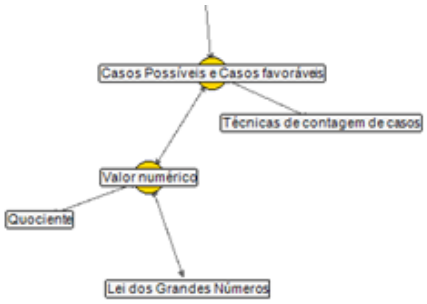


Figura 3 – Sub-rede da rede associativa média

O segundo ramo (Figura 4) desta rede contempla os conceitos nucleares "Probabilidade" e "Lançamento de moedas/dados" e os nós extremidade "Acaso", "Experiência aleatória", "Lei (ou regra) de Laplace" e "Acontecimento", que são exemplos e ideias mais específicas no âmbito da Teoria da Probabilidade.



Figura 4 – Sub-rede da rede associativa média

3. Conclusões

Os resultados obtidos com este estudo, permitiram-nos tirar as seguintes conclusões, relacionadas com os objetivos definidos para este trabalho:

O_1: É estatisticamente significativa a proporção de alunos que consideram a "Probabilidade" e "Lançamento de moedas/dados" como Conceitos Nucleares. Este último conceito, enquanto exemplo utilizado no processo de ensino da Probabilidade, vem corroborar um dos pressupostos da Teoria dos Conceitos Nucleares. É estatisticamente significativa a proporção de alunos que consideram o "Quociente" e "Lei dos Grandes Números", como nós extremidade, o que evidencia a reduzida inclusão destes conceitos na estrutura cognitiva;

O_2: A estrutura cognitiva dos alunos do 9.º ano, avaliada através dos vários indicadores quantitativos das redes PFNET, em torno do conceito de Probabilidade é, estatisticamente semelhante, entre estudantes femininos e masculinos;

O_3: Na rede associativa média existem quatro (4) Conceitos Nucleares: "Probabilidade" (objeto Matemático em estudo), "Casos possíveis e casos favoráveis" (termos próprias da linguagem probabilística), "Lançamento de moedas/dados" (exemplos utilizados no processo de ensino) e "Valor numérico" (descobrir Probabilidades). A existência na rede média associativa de sete (7) nós extremidade: "Lei dos grandes Números", "Quociente", " Técnicas de contagem de casos", "Acontecimento", "Lei (ou regra) de Laplace", "Acaso" e "Experiência aleatória". A identificação de dois sub-ramos nesta rede: 1) Um ramo que contém os conceitos nucleares "Casos possíveis e casos favoráveis" e "Valor numérico" e os nós extremidade "Quociente", "Técnica de contagem de dados" e "Lei dos grandes números", os quais estão relacionados com o cálculo de Probabilidades e, alguns, são frequentemente utilizados noutros contextos Matemáticos; 2) Outro ramo, que contempla os conceitos nucleares "Probabilidade" e "Lançamento de moedas/dados" e os nós extremidade "Acaso", "Experiência aleatória", "Lei (ou regra) de Laplace" e "Acontecimento", que nos parecem ideias mais próximas e específicas da Teoria da Probabilidade.

Referencias

Antunes, A. (2010). *Estructura Cognitiva y Conceptos Nucleares en la Enseñanza/Aprendizaje de la Trigonometría: Estudio Comparativo Realizado con Alumnos del 10.º al 12.º Año de Enseñanza Secundária a Través de la Aplicación de Diferentes Metodologías*. Tese de Doutoramento em Enseñanza de las Ciências Experimentales e de las Matemáticas. Badajoz: Universidade de Extremadura.

Azcárate, P. & Cardeñoso, J. & Serradó, A. (2004). "Hazard's treatment" in secondary school. Actas do *European Research in Mathematics Education III. Itália: University of Pisa.*

Batanero, C. (2004). Ideas estocásticas fundamentales ¿Qué Contenidos se Debe Enseñar en la Clase de Probabilidad**?.** In Fernandes, J., Sousa, M. & Ribeiro, S. (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Atas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*, 9-30. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidade en la educación secundaria. *Relime - Revista Latinoamericana de Investigação en Educación en Matemática Educativa*, Volume 8(3,) 247-263.

Batanero, C. & Henry, M. & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G.A.Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 15-37. New York, USA: Springer.

Casas, L. (2002). *El Estudio de la Estructura Cognitiva de Alumnos a Través de Redes Asociativas Pathfinder. Aplicaciones y Posibilidades en Geometria*. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidade de Extremadura.

Casas, L. & Luengo, R. (2005). Conceptos Nucleares en la Construcción del Concepto de Ángulo. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(2), 201–216.

Casas, L., Luengo, R, & Godinho, V. (2011). Software GOLUCA: Knowledge Representation in Mental Calculation. *US-China Education Review*, 592-600.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemas. Em Jones, G. (eds), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 39-43.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Schvaneveldt, R., Dearholt, D. & Durso, F. (1988). Graph Theoretic Foundations of Pathfinder Networks. *Computer Mathematics Applications*, 15(4), 337-345.

Actitudes, experiencia previa y nivel de logro en Estadística en la carrera de Psicología

Bologna, Eduardo León[1], Vaiman, Marcelo[2]

[1]Universidad Nacional de Córdoba – Universidad Católica de Córdoba
[2]Universidad Nacional de Córdoba – Universidad Blas Pascal

Resumen

Se analiza la relación entre las actitudes hacia la Estadística, la exposición previa a contenidos estadísticos y los resultados en la asignatura, de la carrera de Psicología. La población estuvo formada por 721 alumnos de primer año de la carrera de Psicología, cohorte 2011, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Como instrumentos se utilizaron un cuestionario estructurado que indaga sobre la existencia de cursos de Estadística en la escuela y la Escala de Actitud hacia la Estadística (Auzmendi, 1992), Calificaciones en el primer parcial de Psicoestadística (contenidos: tablas, gráficos y medidas resumen).fue

La administración individual a través de la plataforma Moodle. Se solicitó llenar el cuestionario al momento del primer acceso al aula virtual, durante las dos primeras semanas de clase. Los parciales se administran en el mismo soporte. Se hallan tres componentes para la actitud: agrado, utilidad y uno afectivo que resulta de una mistura de los componentes confianza y ansiedad en la versión de Auzmendi (1992) al que aquí se denomina afinidad. El componente afectivo es el que con más intensidad se asocia al resultado del parcial, en mayor medida que la exposición a Estadística en la escuela media. Se concluye que la sola exposición a Estadística en la escuela no es suficiente para incidir sobre el resultado del parcial, pero sí para modificar positivamente la afinidad con la estadística y, por esta vía, aportar a mejores niveles de logro.

Palabras clave: Actitudes, Educación Estadística, Estadística en Psicología, Componente afectivo.

1. El problema: Expectativas, prejuicios y nivel de logro

La enseñanza de Estadística en carreras universitarias de Ciencias Sociales y Humanas enfrenta desafíos en varios frentes. Muchos alumnos llegan a estas carreras con experiencia negativas en su paso por la Matemática de la escuela media y creen que Estadística demandará habilidades relacionadas con el cálculo o deducciones de fórmulas abstractas. La elección de carreras del área de las sociales a menudo sigue a la percepción de las propias limitaciones para las asignaturas más formalizadas de la escuela media, como Física, Química, Matemática. Esta percepción no necesariamente depende de experiencias negativas personales, sino de creencias de sentido común acerca de la mayor dificultad de las formalizaciones y de la existencia de dotes específicos que algunas personas tienen y otras no. La expresión "no nací para la matemática" ilustra eso; Estrada, Batanero y Fortuna (2004) ofrecen varios ejemplos de estas creencias. El prejuicio sobre la dificultad y la idea de no ser apto para estas disciplinas, conduce a una menor atención a los contenidos, menor compromiso con el estudio y una relación superficial con la materia, que lleva a buscar de aprobarla para ya no volver a encontrarla. Por eso, quienes inician estudios en carreras de las ciencias sociales y humanas no suelen haber retenido contenidos adquiridos en las

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 91-103). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

materias que exigieron formalización en las argumentaciones. Este inicio es una desventaja respecto del resto de las materias que el alumno cursa simultáneamente, a la que se agrega que no siempre se transmite con claridad el valor que Estadística tiene en las carreras de estas áreas.

Las estrategias para mejorar la apropiación de contenidos estadísticos por parte de alumnos de carreras de ciencias sociales y humanas apuntan a reforzar la lógica de los procedimientos, a usar datos reales y a incorporar el uso de software específico, cuyo desarrollo ha sido muy importante en las últimas décadas (Chance, Ben-Zvi, Garfield y Medina, 2007). Sin embargo, la predisposición con que los alumnos inician el cursado parece tener un efecto importante en el nivel de logro que se alcanza.

McLeod (1992, 1994) indica la importancia de las componentes afectivas hacia las Matemáticas. Dependiendo del investigador, encontramos diversos matices en la definición del término "actitud" (Estrada, 2002), porque las actitudes no constituyen entidades observables, sino que son construcciones teóricas que se infieren de ciertos comportamientos externos, generalmente verbales. Gómez Chacón (2000) entiende la actitud como uno de los componentes básicos del dominio afectivo y las define: "Como una predisposición evaluativa (es decir positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento".

Para Auzmendi (1992), las actitudes son "aspectos no directamente observables sino inferidos, compuestos tanto por las creencias como por los sentimientos y las predisposiciones comportamentales hacia el objeto al que se dirigen". Para Gal y Garfield (1997) combinan emociones y sentimientos experimentados durante el aprendizaje de una asignatura. Creemos adecuado tomar en consideración los componentes de las actitudes en general: cognitivo, emocional y conductual. El componente cognitivo incluye las percepciones y creencias hacia el objeto, su intensidad (en dirección positiva o negativa) dependerá del grado de conocimiento sobre el objeto. El componente afectivo, de compone de los sentimientos de atracción o rechazo que produce el objeto. El componente conductual es activo, implica la acción concreta hacia el objeto. En el caso bajo análisis, el componente cognitivo se constituye en la creencia acerca del valor que la materia tiene para la carrera, el afectivo está basado probablemente en experiencias frustrantes en su paso por los contenidos de matemática en la escuela media. El componente conductual se manifiesta en lo que el alumno hace con la materia: postergar su estudio, dedicar más tiempo a otras.

La actitud negativa y las manifestaciones de inseguridad con la que los estudiantes universitarios inician el cursado de asignaturas como estadística, ha cobrado interés en las últimas décadas. El efecto que las actitudes puedan tener sobre el rendimiento en disciplinas como la Matemática o la Estadística, ha sido fuertemente indagado, hallándose resultados controversiales. Gal y Ginsburg (1994) consideran que las creencias y actitudes asociadas a la Matemática pueden jugar un rol importante en respuestas afectivas a la Estadística y que a su vez las reacciones afectivas a las clases de Matemática, pueden afectar su relación con el aprendizaje de la Estadística. Sin embargo, un meta análisis realizado por Ma y Kishor (1997) que utilizó 107 medidas de tamaño del efecto sobre la relación entre las actitudes hacia la matemática y el rendimiento en matemáticas en escuelas secundarias, halló una correlación media de 0,12. Los estudios de Yates (2000) y Hemmings (1996) encontraron que el rendimiento previo en matemática, fue un fuerte predictor del posterior rendimiento

en matemáticas. Asimismo, Carmona Márquez (2004) realizó una revisión de distintos estudios que han utilizado análisis multivariados para evaluar la relación entre la variables como la formación previa, la actitud y la ansiedad hacia la matemática-estadística con el rendimiento en cursos posteriores en estas disciplinas, encontrando que la variable que mayor poder predictivo presenta es la formación previa en estas disciplinas. Aunque también presenta estudios en los que las actitudes o la ansiedad tienen efectos significativos importantes sobre el rendimiento y estudios en los que esos efectos no presentan significación estadística. Se identifican así dos dominios previos, no independientes, de influencia sobre el nivel de logro que se alcanza en Estadística. El primero es la formación anterior, sobre la que hay consenso en considerarla como un adecuado predictor del logro. El segundo es la predisposición del sujeto hacia los contenidos de la materia. Esta predisposición, condensada en el concepto de "actitudes hacia la Estadística" debe comprenderse en el marco de determinadas representaciones sobre la Estadística, como señala Jodelet (1984), en sentido estricto, las actitudes no se orientan directamente hacia objetos externos, sino hacia la representación que el sujeto tiene de esos objetos. Por tanto, no hay actitudes hacia la estadística de manera general, sino hacia lo que cada uno cree que la estadística es y, en particular hacia lo que cree que demandará su aprendizaje. Aunque cada persona conciba a su particular manera la realidad, esto no implica que se trate de procesos individuales.

2. Estadística en una carrera de Psicología masiva

En la carrera de Psicología en la UNC, la materia se encuentra en primer año y la cursan cohortes de aproximadamente 1500 alumnos. La asignatura está en primer año porque es necesaria para el cursado posterior de Técnicas Psicométricas y Metodología de la Investigación, y porque provee de insumos para las asignaturas de las neurociencias en las que es necesario interpretar resultados de investigación expresados en lenguaje estadístico. Entre los problemas que plantea el dictado de la asignatura en nuestro medio, tres se han considerado prioritarios: la masividad, la disparidad de la formación previa y la inseguridad con que los alumnos se predisponen hacia contenidos de alta formalización, cercanos a la Matemática. Para enfrentarlos se han delineado estrategias pedagógicas específicas dirigidas a cada uno, entre las que se cuenta una aproximación gradual a los contenidos y un afianzamiento paulatino de la confianza que los alumnos van ganando en la asignatura. Una acción de esta estrategia consiste en que el primer examen parcial es de escasa dificultad, a fin de reducir el carácter amenazante de la asignatura y valorizar los primeros logros en la apropiación de los contenidos.

La formación previa es dispar; debido a la heterogeneidad en los planes de estudio reales de las escuelas medias, los alumnos ingresan a Psicología con niveles de conocimiento muy diferentes. Aunque esta diversidad afecta a todas las materias de primer año, sus efectos son más acentuados en las que se relacionan de manera menos directa con las expectativas hacia la carrera. Para las asignatura específicas de Psicología, se puede contar con que el interés de los alumnos pudo haberlos llevado a profundizar más allá de lo que la escuela les ofreció, pero esto no sucede en asignaturas como Estadística, ante las que los interesados en Psicología suelen sentirse inseguros y evitativos. La diversidad en la

experiencia previa se ve en la coexistencia en primer año, de alumnos que han aprobado al menos una materia específica de estadística en la escuela, junto a otros que pudieron ver algunos contenidos dentro del programa de matemática y otros que nunca estuvieron expuestos a conceptos básicos de la estadística.

2.1. Objetivo

En este documento se analizan los efectos de las actitudes iniciales hacia la materia y de la exposición previa a contenidos estadísticos, sobre los resultados del primer examen parcial. Se plantea como hipótesis que la exposición a contenidos de estadística incide sobre la representación que los alumnos tienen de la materia y sobre las habilidades requeridas para enfrentarla exitosamente. Habría así, sobre el nivel de logro que el alumno alcanza, un efecto directo de las actitudes y uno indirecto de la exposición previa, mediado por las actitudes.

2.2. Método

Participaron en el estudio los alumnos de la cohorte 2011 de las carreras de Licenciatura y Profesorado en Psicología, de la Universidad Nacional de Córdoba, que cursaron Psicoestadística ese año. Se usan los datos provenientes de un cuestionario de datos sociodemográficos y una escala de actitudes hacia la Estadística. El primero releva: sexo, edad, lugar de procedencia, tipo de gestión de la escuela secundaria a la que concurrió, exposición previa a contenidos de estadística y máximo nivel educativo alcanzado por los padres del alumno. La evaluación de las actitudes hacia la Estadística se realiza con la Escala de Actitud hacia la Estadística (EAE, Auzmendi, 1992) es una escala de tipo Likert de 25 ítems con 5 opciones de respuesta, que indican el grado de acuerdo del sujeto con cada afirmación. Los puntajes de cada reactivo fueron reasignados de tal modo que los puntajes más altos corresponden a actitudes más positivas. Su estructura factorial se analizó nuevamente para la población objetivo del presente estudio, y se hallaron resultados parcialmente coincidentes con los de la autora. La administración de los cuestionarios se realizó en forma individual a través de la plataforma Moodle. A los alumnos se les solicitó que llenaran el cuestionario al momento de su primer acceso al aula virtual de Psicoestadística, esto se realizó durante las dos primeras semanas de clase y se consideró necesario que así fuera para evitar que el desarrollo de las clases y las primeras aproximaciones a los contenidos introdujeran cambios en las ideas previas sobre la Estadística.

3. Exploración inicial de los datos

La escala de actitudes. Siguiendo las sugerencias de Tabachnick y Fidell (2001) para usar procedimientos que involucran análisis multivariados, se realizó en un primer momento una exploración inicial de los datos a los fines de analizar los valores perdidos y los casos atípicos (outliers). En relación a los casos atípicos, se realizó una sumatoria de las puntuaciones de cada uno de los ítems que componen la escala, obteniendo así, un puntaje global de cada individuo. Estos nuevos valores fueron transformados en primer lugar a

puntuaciones estándar y luego se descartaron aquellos que estuvieran fuera del rango +-3,29 (Tabachnick y Fidell, 2001), lo que resultó en un total de 721 casos.

Al observar las respuestas emitidas por los casos que fueron descartados, se observó que éstos alumnos tendían a responder con los mismos valores a casi todas las preguntas que componen a las tres escalas, asimismo, se observó que los tiempos de respuesta del cuestionario eran llamativamente más cortos de lo esperado, de acuerdo a la cantidad de preguntas. En cuanto a los valores ausentes, no se observaron variables que presentaran un porcentaje de valores ausentes superior al 1% a excepción del ítem 24 de la escala de actitud que presentó un 3,3% de valores ausentes. Se evaluó la asimetría de los 25 ítems y se observó que 22 presentan una asimetría dentro del rango ± 0,5, considerada dentro de los valores recomendables (Hair, Anderson, Tatham y Black, 1998; Runyon, Coleman y Pittenger, 2000), 2 dentro del rango ± 1,00, también recomendada por criterios menos conservadores (George y Mallery, 2003) y 1 fuera del rango esperable.

Se hallan 21 ítems con curtosis dentro del rango ± 0,5; 3 dentro del rango ± 1,00 y 1 fuera del rango esperable. Se obtuvo la correlación ítem-total de cada uno de los ítems, encontrándose 1 reactivo que presentó una correlación inferior a 0,30 (Tornimbeni, Pérez y Olaz, 2008). Teniendo en cuenta los criterios de Nunnaly y Bernstein (1995), que las medias de los ítems estén situadas alrededor del punto media de la escala, se encuentra 1 ítem que se aleja del valor medio de la escala. Para verificar la plausibilidad de realizar el análisis factorial, se evaluó que los ítems propuestos estén lo suficientemente intercorrelacionados. Para ello se utilizó el test de esfericidad de Bartlett que mostró resultados significativos que permiten rechazar la hipótesis de ausencia de correlación entre las variables, asimismo se calculó medida de adecuación muestral de Kaiser – Mayer – Olkin (KMO) obteniendo un valor adecuado de 0,922. Se realizó un análisis factorial exploratorio contemplando inicialmente la totalidad de los ítems que integran la escala de actitud hacia la estadística. La extracción de factores se realizó por componentes principales. En relación al número de factores a retener, la regla de Kaiser de los autovalores mayores a 1 sugirió extraer 4 factores, que explican 49,83 % de la varianza de las puntuaciones. Por otro lado, el scree test sugiere la extracción de 3 factores, que explican el 45,20% de la varianza.

De acuerdo a la correlaciones entre los factores se opta por una rotación Promax. La solución factorial obtenida presentó 5 ítems con cargas menores a .40 y saturaciones compartidas. Siguiendo las sugerencias de Costello y Osborne (2005) se volvió a realizar el análisis factorial omitiendo los ítems que presentaron dificultades y se obtuvo una solución con una estructura factorial más clara y consistente teóricamente, que explica un 52,11% de la varianza de las puntuaciones, además, al interior de cada factor la consistencia es aceptable alfa de Cronbach global 0,895). Los ítems de la escala correspondientes a cada factor son los siguientes:

- *Factor 1*
    - Ítem 3: El estudiar o trabajar con la estadística no me asusta en absoluto.
    - Ítem 7: La estadística es una de las asignaturas que más temo.
    - Ítem 8: Tengo confianza en mí mismo/a cuando me enfrento a un problema de Estadística.

- Ítem 12: Cuando me enfrento a un problema de Estadística me siento incapaz de pensar con claridad
- Ítem 13: Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando me enfrento a un problema de estadística.
- Ítem 17: Trabajar con la estadística hace que me sienta muy nervioso/a.
- Ítem 18: No me altero cuando tengo que trabajar en problemas de Estadística.
- Ítem 22: La Estadística hace que me sienta incomodo/a y nervioso/a.

Se trata de reactivos que aluden a un impacto emocional de la disciplina en el sujeto, tales como temores, nervios, incomodidades, confianza, calma. Es parte del componente afectivo de la actitud, cabe denominarlo *afinidad*. En la estructura propuesta por Auzmendi (1992) corresponde a una combinación de ansiedad y confianza.

- *Factor 2*
  - Ítem 2: La asignatura de estadística me cae bastante mal.
  - Ítem 4: El utilizar la Estadística es una diversión para mí.
  - Ítem 9: Me divierte hablar con otros de la estadística.
  - Ítem 14: La estadística es agradable y estimulante para mí.
  - Ítem 19: Me gustaría tener una ocupación en la que tuviera que utilizar la estadística.
  - Ítem 24: Si tuviera la oportunidad me inscribiría en más cursos de Estadística de los que son necesarios.

Son los reactivos que evalúan en mayor grado las actitudes hacia la Estadística, ya que expresan explícitamente la valoración que los alumnos hacen. Salvo por la presencia del ítem 2, que en el análisis de Auzmendi (1992) corresponde a ansiedad, constituye el componente de la actitud que la autora llama *agrado*.

- *Factor 3*
  - Ítem 1:Considero la Estadística como una materia muy necesaria en la carrera.
  - Ítem 5: La estadística es demasiado teórica como para ser de utilidad práctica para el profesional medio.
  - Ítem 6: Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de la Estadística.
  - Ítem 10: La Estadística puede ser útil para el que se dedique a la investigación pero no para el profesional medio.
  - Ítem 16: Para el desarrollo profesional de nuestra carrera considero que existen otras asignaturas más importantes que la Estadística.
  - Ítem 21: Para el desarrollo profesional de mi carrera una de las asignaturas más importantes que ha de estudiarse es la Estadística.

Este conjunto de ítems remite a la evaluación que los alumnos hacen de la *utilidad* de la Estadística. Es muy semejante a la componente que halla Auzmendi (1992), salvo por los ítems 5 y 10, que para la autora corresponden a motivación. Dado que estos tres factores explican el 52,10% de la varianza, que es un valor semejante al obtenido por los autores mencionados, usaremos la escala con esta estructura. A través de estos factores estaríamos

observando dos de los componentes de las actitudes: el cognitivo (utilidad) y el afectivo (afinidad y agrado)

La exposición previa a Estadística. Para dar una aproximación al eventual conocimiento sobre la Estadística que los alumnos podrían tener antes de empezar a cursar la materia en la carrera de Psicología, se incluyó en el cuestionario una pregunta específica. Las categorías de respuesta fueron: nunca, dentro de los contenidos de Matemática, en una materia específica de la escuela, en otra carrera universitaria. La distribución de frecuencias mostró que para el grupo que se observa, las dos primeras categorías son dominantes y son escasos los alumnos que han tenido Estadística en otra carrera universitaria, por lo que se decidió fusionar las dos últimas. Debe destacarse que esta variable no mide el conocimiento previo que los alumnos tienen de Estadística, sino la existencia de algún contenido de la materia en la trayectoria académica de los alumnos; por esa razón la indicamos como exposición. El efecto que se espera no es que provea una base previa de conocimiento, sino que indique si el alumno tuvo la oportunidad de ver sobre qué trata la estadística, qué problemas plantea, cuánta matemática exige.

Los resultados del parcial. La variable que trata de explicarse a través de las actitudes iniciales y la exposición previa, es la nota del primer parcial. Se trata de una evaluación de opciones múltiples, con diez ítems de cuatro opciones cada uno con solo una correcta. El nivel de dificultad es bajo, a fin que sirva como introducción gradual a la evaluación de la materia. La nota es el porcentaje de preguntas respondidas correctamente. Esta variable tiene media de 62,01 y mediana de 60,00 puntos.

4. Análisis

Los componentes hallados luego del análisis factorial miden constructos que pertenecen a diferentes ámbitos: la utilidad se compone de creencias, mientras que el componente afectivo y el agrado señalan la posición subjetiva del alumno. Por esta razón, en lo que sigue se trabaja con los tres componentes de la actitud separadamente[1].

Las correlaciones bivariadas entre las tres componentes de la actitud, la exposición previa a contenidos de Estadística y los resultados del primer parcial aparecen en la tabla 1. La afinidad se encuentra ligada con más intensidad a las otras dos variables que la utilidad o el agrado. El coeficiente de correlación con la nota del primer parcial coincide con el hallado por Ma y Kishor (1997) en la escuela media. El efecto de la existencia previa de contenidos de Estadística sobre el rendimiento se observa con la correlación entre los niveles de exposición y el resultado del parcial; el coeficiente de Spearman encontrado es significativo pero pequeño: 0,10.

En el primer modelo de regresión de las tres componentes de la actitud sobre la nota del parcial, se encuentran efectos significativos de la primera de ellas. El coeficiente del factor afinidad es positivo y es el único significativo de los tres. El signo es el esperado, e indica que los alumnos con niveles menores de ansiedad y mayores de confianza (las componentes de Auzmendi que se integran en la afinidad), tienden a tener mejores

[1] Los componentes se generaron, para cada sujeto, como combinación lineal de los puntajes dados a cada ítem con coeficientes iguales a las cargas del ítem en cada factor.

resultados en este parcial (ver tabla 2). Debido a las escasas categorías de la variable que mide la exposición previa a Estadística, se opta por comparar los valores de nota para sus diferentes niveles (ver tabla 3). Se obtienen diferencias significativas entre el grupo que nunca tuvo Estadística y el que la tuvo como materia específica. La nota promedio del último grupo sería mayor que la del primero. Nuevamente, aunque significativa, la diferencia es pequeña: 59,8 es la nota promedio de los que jamás vieron Estadística antes y 65,1 la de los declaran haber tenido alguna materia específica, el tamaño del efecto es $\eta^2 = 0{,}01$. La inclusión de las dos variables de manera conjunta se realiza según un modelo que supone que los efectos de la exposición estarían mediados por las actitudes (ver tabla 4). Cuando se introduce la afinidad como covariable, la suma de cuadrados explicada por los contenidos de Estadística se reduce a la mitad, mientras que la del error solo lo hace levemente. Como consecuencia, el efecto de la experiencia deja de ser significativo y su tamaño se reduce a la mitad del anterior ($\eta^2 = 0{,}005$). Esto se explica porque la exposición está asociada con la afinidad (r de Spearman de 0,22, p<0,0001). La manera en que sucede esta relación es ilustrada observando cómo cambian las medias de la afinidad para los diferentes niveles de exposición previa (tabla 11). La afinidad es negativa para quienes nunca vieron Estadística en la escuela, casi nula para quienes la tuvieron incluida en el programa de Matemática y positiva entre quienes cursaron una materia específica de Estadística. El tamaño del efecto que tiene la exposición sobre la afinidad es $\eta^2 = 0{,}05$, cinco veces mayor que el que esa misma variable tiene sobre la nota del parcial. Esto también sucede, aunque con menor intensidad con los otros dos componentes de la actitud.

5. Discusión

El resultado está en dirección a mostrar que tanto la exposición previa a contenidos de Estadística como la afinidad con la Estadística, tienen efecto significativo —y en la dirección esperada—, sobre el resultado que se obtiene en el primer parcial. La interacción entre las dos variables explicativas sugiere que el haber visto algún contenido de la materia previamente tiene efecto en la afinidad. Este efecto es menor en la componente agrado y en utilidad, así como lo es la incidencia que estas dos componentes tienen sobre el resultado. El contacto durante la escuela (o en otra carrera universitaria) con Estadística, afecta positivamente la afinidad que se tenga con ella, y lo hace en mayor medida que a los componentes agrado o utilidad. Dicho de manera inversa, no haber tenido ninguna información previa sobre la materia modifica poco las creencias sobre lo grata o útil que ésta puede ser, pero sí la ansiedad que genera o la confianza que se tiene en poder enfrentarla. Además, la incidencia de la actitud sobre el resultado, aparece por la vía de la afinidad y de manera no significativa por las componentes agrado o utilidad. Esto implica que lo que incide en el resultado no es lo que se cree acerca de lo atractiva o valiosa que sea la materia, sino de cómo se siente subjetivamente el alumno frente a ella. La inseguridad, indicada por la falta de confianza o la ansiedad que provoca es lo que afecta en mayor grado el resultado. Si estudios posteriores permiten confirmar esta relación, constituiría un resultado de aplicación, ya que conduce a salir de la creencia sobre lo determinante que es la formación previa.

6. Conclusión

Se encontró una incidencia positiva de la afinidad sobre la nota del primer parcial, las otras componentes de la actitud muestran efectos de menor intensidad, aunque en todos los casos significativos. Por su parte, la exposición a contenidos de Estadística en la escuela media se correlaciona levemente con la nota. La comparación de las notas promedio de los alumnos que estuvieron expuestos en diferente grado, muestra pequeñas diferencias. La debilidad de esta correlación es esperable, dado que para los estudiantes que eligen Psicología, no se supone una marcada persistencia de los aprendizajes en materias ligadas a la Matemática. Además, los contenidos que se evalúan en el primer parcial pertenecen solo en parte a lo que puede verse en la escuela y son de baja dificultad. La afinidad también está afectada por la exposición a contenidos en la escuela, los alumnos expuestos en mayor grado, muestran una mayor afinidad con la materia.

También hay efecto de la exposición sobre los componentes agrado y utilidad, pero de menor magnitud. Cuando se comparan los niveles promedio de afinidad entre los grupos de alumnos que tuvieron diferente exposición a la Estadística es la escuela, las diferencias son significativas y apreciables: la afinidad es negativa para quienes nunca vieron Estadística en la escuela, casi nula para quienes la tuvieron incluida en el programa de Matemática y positiva entre quienes cursaron una materia específica de Estadística. Cuando se analiza el efecto conjunto de las actitudes y la exposición sobre la nota, vemos que el efecto directo de la segunda desaparece.

Este resultado indica que no se trata necesariamente de la mala formación previa lo que explica los rendimientos más bajos en Estadística en primer año de Psicología. Por el contrario, esa formación es escasa y poco perdurable, por lo que su efecto directo sobre el examen ―que es de baja dificultad―, es pequeño. Sin embargo, el recorrido por contenidos de Estadística en la escuela media parece incidir positivamente en la afinidad que los alumnos desarrollan hacia la materia, la cual facilita los aprendizajes y de ese modo impacta sobre el resultado del examen. Así, parecería haber evidencia sobre la importancia de predisponer positivamente a los alumnos, sería posible incidir sobre el desempeño de los alumnos en Estadística, logrando que aparezca como menos amenazante, esto puede conseguirse a través de la inclusión de contenidos de Estadística en la escuela media, pero también a través de una aproximación gradual, que asegure una apropiación pausada de los contenidos y un progresivo aumento de la confianza y reducción de la ansiedad que provoca a quienes encuentran a Estadística por primera vez en su trayectoria educativa.

Referencias

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Mensajero. Bilbao.

Carmona Márquez, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. *Statistics Education Research Journal.*

Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J. y Medina, E. (2007). The role of technology in improving student learning of statistics.*Technology Innovations in Statistics*

*Education.*Center for the Teaching of Statistics.Department of Statistics. UC Los Angeles.

Costello, A. y Osborne, J. (2005). Best practices in exploratory factor analysis: Four Recomendations for Gettin the Most From Your Analysis. *Practical Assesment, Research y Evaluation.*10. 1-9.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Estrada, A., Batanero C. y Fortuna J. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias*, 22 (2), 263-274.

Gal, I. y Garfield J. B. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En: I. Gal y J. B. Garfield (Eds.). *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). IOS Press Voorburg.

Gal, I. y Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: Toward an assessment framework. *Journal of Statistics Education*, 2 (2).

George, D. y Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows step by step: A simple guide and reference.11.0 update*. Boston: Allyny Bacon.

Gómez Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea. Madrid.

Hair, J., Anderson, R., Tatham, R. y Black, W. (1998). *Multivariate data analysis.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Hemmings, B. C. (1996). A longitudinal study of Australian secondary school achievement. *Issues in Educational Research,* 6(1), 13-37

Jodelet. D. (1984). La representación social: fenómenos, conceptos y teoría. En Moscovici, S. *Psicología social II. Pensamiento y vida social. Psicología social y problemas sociales*. Barcelona-Buenos Aires-México: Paidós.

Ma, X. y Kishor, N. (1997). Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: A meta- analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), 26 – 47

Mc Leod, D. B. (1992). Reseach on affect in mathematics education: A reconceptualization. En: D.A. Grows(Ed.). *Hanbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596).Macmillam N.C.T.M. New York.

McLeod, D. B. (1994). Research on affect and mathematics learning in JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 637-647.

Nunnally, J. y Bernstein, I. (1994). *Psychometric theory.* New York: McGraw- Hill.

Runyon, R., Coleman, K. y Pittenger, D. (2000). *Fundamentals of behavioral statistics.* Boston, MA: McGraw Hill

Sánchez-López, C. R. (1996). Validación y análisis ipsativo de la escala de actitudes hacia la estadística. *Análisis y modificación de conducta 86*(22), 799–819.

Tabachnick, B. yFidell, L. (2001). *Using multivariate statistics.* NeedhamHeights, MA: Allyny Bacon.

Tornimbeni, S., Pérez, S. y Olaz, F. (2008). *Introducción a la psicometria.* Buenos Aires: Paidos.

Yates, S. (2000). Task involvement and ego orientation in mathematics achievement: A three-year follow-up. *Issues in Educational Research,* 10(1), 77-91.

Anexo Tablas

Tabla 1. Correlaciones entre las componentes de la actitud, la exposición a contenidos de Estadística en la escuela media y la nota en el primer examen parcial de 2011

		Componentes de la actitud		Exposición a contenidos de Estadística	Nota primer parcial
		Agrado	Utilidad		
Componentes de la actitud	Afinidad	0,47 (p<0,0001)	0,24 (p<0,0001)	0,22 (p<0,0001)	0,12 (p<0,001)
	Agrado		0,41 (p<0,0001)	0,12 (p<0,002)	0,02 (p>0,5)
	Utilidad			0,10 (p<0,01)	0,08 (p<0,05)
Exposición a contenidos de Estadística					0,10 (p<0,01)

Tabla 2: Coeficientes de regresión y estadísticos asociados al modelo

$$nota = \beta_0 + \beta_1 * afinidad + \beta_2 * agrado + \beta_3 * utilidad + \varepsilon$$

Coef	Est.	E.E.	LI(95%)	LS(95%)	t	p-valor
Const	61,45	0,54	60,38	62,51	113	<0,0001
afinidad	2,26	0,62	1,04	3,47	3,65	0,0003
agrado	-1,08	0,67	-2,39	0,23	-1,62	0,1065
utilidad	1,06	0,60	-0,12	2,24	1,77	0,0773

Tabla 3: Análisis de la varianza para el modelo $nota = \mu + \tau_j + \varepsilon$

F.V.	SC	Gl	CM	F	p-valor
ContEst	2556,98	2	1278,49	3,48	0,0313
Error	263626,93	718	367,17		
Total	266183,91	720			

ContEst	Medias	n	E.E.		
Nunca	59,81	257	1,20	A	
enMatematica	62,51	334	1,05	A	B
tuvoEstadistica	65,08	130	1,68		B

Medias con una letra común no son significativamente diferentes(p<= 0,05)

Tabla 4: Análisis de la Varianza para el modelo $nota = \mu + \tau_j + \beta_1 * afinidad + \varepsilon$

F.V.	SC	gl	CM	F	p-valor	Coef
Modelo	6662,15	3	2220,72	6,135	0,0004	
ContEst	1237,92	2	618,96	1,710	0,1816	
afinidad	4105,17	1	4105,17	11,342	0,0008	2,451
Error	259521,76	717	361,95			
Total	266183,91	720				

Tabla 5. Análisis de la Varianza para el modelo $afinidad = \mu + \tau_j + \varepsilon$

F.V.	SC	gl	CM	F	p-valor
ContEst	36,62	2	18,31	19,24	<0,0001
Error	683,38	718	0,95		
Total	720,00	720			

ContEst	Medias	N	E.E.			
nunca	-0,23	257	0,06	A		
enMatematica	0,02	334	0,05		B	
tuvoEstadistica	0,42	130	0,09			C

Medias con una letra común no son significativamente diferentes(p<= 0,05)

Análisis de la presentación de la probabilidad condicionada en libros de texto de 2º de bachillerato

Cantero Tomás, Ángel

Universidad de Murcia

Resumen

Las dificultades en el aprendizaje del concepto de probabilidad condicionada y los sesgos que presentan los estudiantes (comprensión intuitiva, condicionamiento y causación, intercambio de sucesos, confusión entre probabilidad condicional y conjunta, situaciones sincrónicas y diacrónicas, etc.) han sido ampliamente analizadas en la investigación en didáctica de la probabilidad y la estadística. Los estudiantes se enfrentan por primera vez a este contenido en su etapa de Bachillerato y creemos interesante analizar la presentación que se hace en los libros de textos correspondientes de este contenido. El análisis se realiza desde la perspectiva teórica que define el Enfoque Onto Semiótico, atendiendo a las situaciones problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Se concluye que hay bastante unanimidad en el uso de la notación del concepto probabilidad condicional pero el lenguaje utilizado en la definición es equívoco y puede llevar a error o facilitar la aparición de algunos de los sesgos descritos anteriormente. Por otro lado, la gran diversidad de las opciones metodológicas utilizadas para introducir el contenido pone de manifiesto la falta de acuerdo en lo que podría considerarse el marco ideal para presentar este contenido a estudiantes noveles.

Palabras clave: Probabilidad condicionada. Análisis de textos. Sesgos.

1. Introducción.

La probabilidad condicional es un concepto muy importante en la formación básica en Probabilidad y Estadística para un amplio grupo de estudiantes de bachiller, que en sus elecciones formativas postobligatorias optarán por estudios que requieren el uso frecuente y correcto de este contenido (Díaz, 2004; Contreras, 2011), pero su aprendizaje no está exento de importantes problemas. Las dificultades en el aprendizaje del concepto de probabilidad condicionada y los sesgos que presentan los estudiantes (comprensión intuitiva, condicionamiento y causación, intercambio de sucesos, confusión entre probabilidad condicional y conjunta, situaciones sincrónicas y diacrónicas, etc.) han sido ampliamente analizados en la investigación en didáctica de la probabilidad y la estadística tal y como resumen Díaz, Batanero y Contreras (2010).

En el presente trabajo, intentamos analizar si parte de estos sesgos y dificultades no se provocarán, o facilitarán, por la presentación que se hace usualmente del contenido en los libros de texto. Para ello, vamos a estudiar cuándo y cómo se presenta el contenido probabilidad condicional, por primera vez a la mayoría de estudiantes, en el segundo curso de Bachillerato. Completamos con ello el estudio de Batanero y Díaz (2005) con textos universitarios de psicología.

Este tema se introduce en primer curso de Bachillerato. El Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas, (MEC, 2007) en la modalidad de Ciencias de la Naturaleza, la asignatura Matemáticas I presenta en el bloque 4, Estadística y Probabilidad, el contenido: *Estudio de la probabilidad compuesta, condicionada, total y a posteriori.* En la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, la asignatura Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I, se presenta en el bloque

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 105-112). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

3, Probabilidad y Estadística, el contenido: *Asignación de probabilidades a sucesos. Distribuciones de probabilidad binomial y normal.* En el segundo curso de bachiller, solo la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II presenta contenidos sobre probabilidad. En el bloque 3, Probabilidad y Estadística, enuncia: *Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes.*

Vemos, por tanto, que como contenido explícito, la probabilidad condicionada no aparece hasta el primer curso de bachiller en la modalidad de Ciencias de la Naturaleza o en segundo curso de bachiller en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales. Sin embargo, se presentan situaciones en clase en cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria opción B. en las que se hacen problemas utilizando este contenido.

2. Fundamento y Método

El marco de referencia que utilizamos para el análisis de las propuestas didácticas que realizan los libros de texto para la presentación del concepto Probabilidad Condicionada es la aproximación ontosemiótica al conocimiento matemático (Godino, Batanero y Font, 2009) en la que se proponen la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- *Elementos lingüísticos:* consiste en el conjunto de términos, expresiones, notaciones, gráficos presentes en el texto escrito.
- *Situaciones- problemas:* son las aplicaciones externas a las matemáticas, el origen de la actividad, las tareas o ejercicios a los que se pretende dar respuesta.
- *Conceptos – definición:* son los objetos matemáticos introducidos mediante definiciones o descripciones.
- *Proposiciones*: consisten en enunciados que se realizan sobre conceptos.
- *Procedimientos:* consisten en los algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.
- *Argumentos*: son los enunciados utilizados para validar y explicar las proposiciones y los procedimientos que relacionan los conceptos entre sí.

Tabla 1. Libros analizados

	Título	Autores	Editorial	Edición
[1]	*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II.*	Colera, J., Oliveira, M. J. y García, R.	Anaya.	2001
[2]	*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato.*	Deusa, M., Esteve, R., Montesinos, P. Ramírez, A. y Veres, E.	Ecir.	2009
[3]	*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato.*	Monteagudo, Mª. F. y Paz, J.	Luis Vives.	2009
[4]	*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato.*	Escoredo, A., Gómez, M., Lorenzo, J., Machín, P., Pérez, C., Rey, M., Río, J. y Sánchez, D.	Santillana Educación.	2010
[5]	*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato.*	Ortega, P., Serra J., Díez, S. Prieto, J. y Bautista, A.	Pearson Educación.	2010
[6]	*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato.*	González, C., Llorente, J. y Ruiz, M. J.	Editex.	2011

En la Tabla 1 se presentan los libros de texto que hemos analizado. El criterio seguido para elegirlos ha sido que se trata de editoriales de amplia difusión en España y abarcar un periodo de 10 años de publicación.

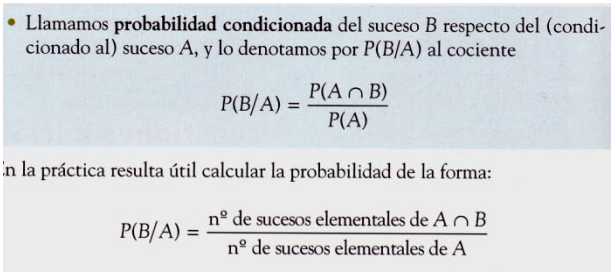
En cada texto se ha leído atentamente el epígrafe que introduce y define explícitamente el concepto probabilidad condicionada. Se ha atendido a la presencia, o ausencia de aspectos tales

como si existe un contexto previo a la definición de probabilidad condicional o se hace la definición directamente. En el caso de presentarse dicho contexto, se analiza la forma de expresión de los datos elegida (valores absolutos, porcentajes, probabilidades), así como el procedimiento metodológico de expresión de la información (árbol, tabla de contingencia, diagrama de áreas).

3. ¿Cómo se presenta la probabilidad condicionada en los textos?

Los libros de texto introducen el concepto de probabilidad condicionada de diferentes formas. El libro de Editex (González, Llorente y Ruiz, 2011) para las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, aprovecha la definición de sucesos dependientes e independientes para hacer una presentación previa. Esta definición de dependencia/independencia, la realiza en el contexto de experimentos compuestos que se presentan con devolución, o sin ella, entre las ejecuciones de las experiencias simples que los componen. Tras dar la fórmula, que realmente supone la definición de sucesos independientes, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ y señalar que en el caso de sucesos dependientes no se verifica esta igualdad, enuncia que para sucesos dependientes, se cumple: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \text{ supuesto que ha ocurrido } A)$.

A la probabilidad de *B* supuesto que ha ocurrido *A*, la denomina probabilidad de B condicionada a *A*, la representa como *P(A/B)* y remite al capítulo siguiente para realizar su estudio. Tras señalar que *"En el cálculo de las probabilidades de ciertos sucesos, el valor de dichas probabilidades varía en función del conocimiento de determinadas informaciones relativas a estos sucesos."*(p. 306) resuelve un ejemplo concreto sobre cómo se distribuye, en %, los tipos de sangre en España según grupos sanguíneos y factores Rhesus, a partir de la correspondiente tabla de contingencia. Se plantea y responde, de forma natural, preguntas sobre probabilidad condicionada (*Si pertenece al grupo B, la probabilidad de tener el factor Rh + es:*), para llegar a enunciar la definición presentada en la Figura 1. No se hace referencia a la necesidad de que los sucesos elementales computados en la segunda fórmula han de ser equiprobables para que sea válida.



- Llamamos **probabilidad condicionada** del suceso B respecto del (condicionado al) suceso A, y lo denotamos por $P(B/A)$ al cociente

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

n la práctica resulta útil calcular la probabilidad de la forma:

$$P(B/A) = \frac{\text{nº de sucesos elementales de } A \cap B}{\text{nº de sucesos elementales de } A}$$

Figura 1. Definición de Probabilidad Condicionada. (González, et al. 2011. pág. 306)

El libro de Ecir (Deusa, et al. 2009) para el mismo curso y nivel, no hace referencia a la dependencia de los sucesos, sino que, tras señalar que *"si el suceso objeto de estudio es un suceso compuesto por dos o más experimentos el cálculo de su probabilidad puede simplificarse mediante el concepto de probabilidad condicionada"* (p. 234). Tras plantear un problema concreto sobre los gustos de un grupo de alumnos respecto al fútbol y a ir al cine, mediante una tabla de contingencia con números absolutos, y enunciar y resolver una pregunta que corresponde a una probabilidad condicionada, (*"Si se selecciona un alumno al azar y resulta que va al cine, ¿cuál es la probabilidad de que también le guste el fútbol?*) presenta la definición de la forma dada en la Figura 2. Como se puede apreciar, tampoco en este caso se hace referencia a la equiprobabilidad de los *n* sucesos elementales, que habrá de suponerse para que sea cierta la expresión.

El libro de Santillana, (Escoredo et al., 2010) tampoco hace referencia a la dependencia de sucesos, ni presenta un ejemplo previo a la definición de probabilidad condicional, sino que la define directamente (Figura 3), donde vuelve a omitirse la necesidad de equiprobabilidad de los casos mencionados en las expresiones.

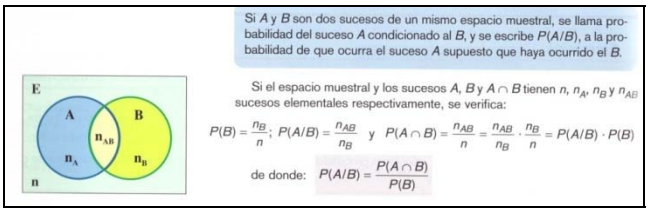


Figura 2. Definición de Probabilidad Condicionada. (Deusa et al. 2009, p, 234)

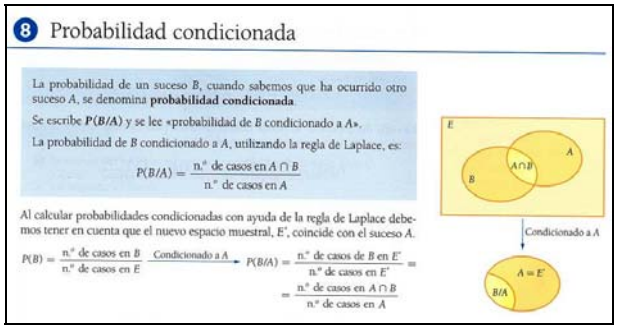


Figura 3. Definición de Probabilidad Condicionada. (Escoredo et al. 2010, p. 265.)

En el libro de Alhambra, (Ortega et al. 2010) se plantea la extracción de una carta de una baraja española y la probabilidad de que sea un rey. Posteriormente, vuelve a hacer la misma pregunta con la información adicional de que en la extracción ha salido una figura. Esto pone de manifiesto cómo cambia la probabilidad de un suceso al disponer de información adicional sobre su ocurrencia. Desde este preámbulo, presenta la definición de la forma siguiente:

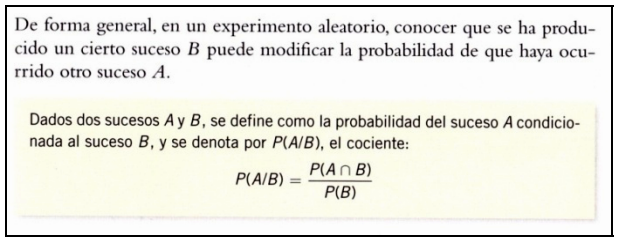


Figura 4. Definición de Probabilidad Condicionada. (Ortega, P. et al. 2010, p, 225).

En el texto de Edelvives, (Monteagudo y Paz, 2009; Figura 5) se parte de un ejemplo en el que se clasifica una población en las categorías hombre/mujer y color de pelo castaño/pelirrojo/rubio, plasmado en la correspondiente tabla de doble entrada. Posteriormente, define y considera una serie de sucesos hasta que plantea el suceso "*B/A = {tener el pelo rubio entre los que son hombres}*", añadiendo que "*este suceso se denomina suceso B condicionado a A y está formado por todos los sucesos elementales de B que verifican a su vez el suceso A*".

A partir de ahí, calcula las frecuencias relativas de los sucesos que ha planteado destacando que en algunos sucesos el número de "*casos posibles*" es el número total de sujetos (hombres más mujeres), mientras que en el caso de la frecuencia relativa del suceso B/A, "*el espacio muestral*" son solo los hombres los que corresponden al los casos posibles. (Los casos posibles son los valores de los denominadores de las frecuencias relativas). Tras esto, compara el análisis

de las frecuencias con el diagrama de árbol correspondiente para el cálculo de las probabilidades del suceso condicionado tal y como se muestra

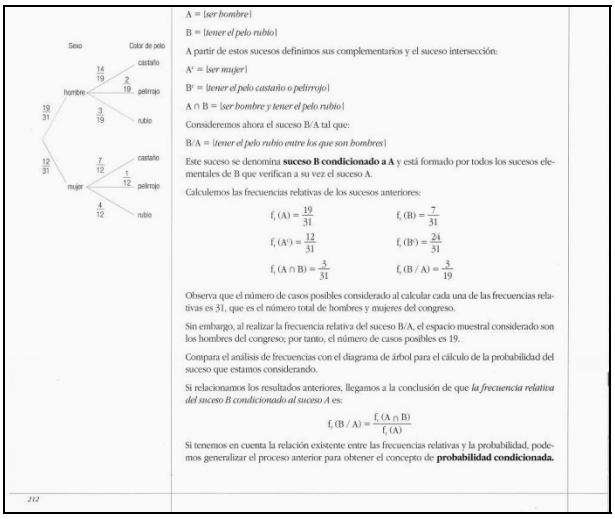


Figura 5. Definición de Probabilidad Condicionada. (Monteagudo y Paz, 2009, p. 212)

En el texto de Anaya, (Colera, Oliveira y García, 2001) se presenta directamente la definición a partir de su fórmula, como muestra la Figura 6.Indica también su interpretación como proporción de casos en los que ocurre un suceso dado otro y añade un gráfico de áreas para representar las probabilidades.

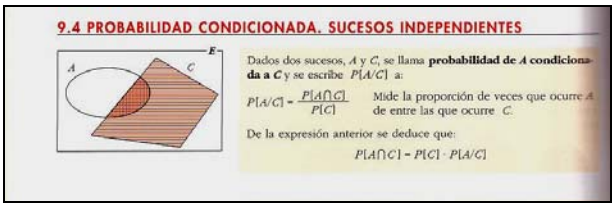


Figura 6. Definición de Probabilidad Condicionada. (Colera, Oliveira y García, 2001, p. 244)

Por otro lado, en la totalidad de los textos, excepto el de la editorial Editex, se presenta y define, tras la probabilidad condicionada, el concepto de dependencia/independencia de sucesos.

4. Notación y representaciones

Tenemos que destacar la unanimidad que hay en todas las propuestas editoriales en cuanto a la notación utilizada para el concepto de probabilidad condicionada*: P(A/B)* aún cuando ésta puede ser confusa para los estudiantes que se enfrentan por primera vez a este concepto (Totohasina, 1994). A pesar de esta coincidencia en la notación, hemos de ser conscientes, como indica Feller (1973, p. 128) "*Aunque el símbolo P(A/B) es práctico en sí mismo, su forma de expresarlo en palabras es difícil de manejar, de manera que en la práctica se usan descripciones menos formales. … Nuestras fórmulas y símbolos no son erróneos, pero la forma de expresarlos en palabras suele ser informal y debe interpretarse apropiadamente*".

Podemos comprobar que en algunas definiciones se explicita que el suceso condicionante ya haya ocurrido cuando ocurra el suceso condicionado; por ejemplo, en el texto de Ecir (Deusa, et al. 2009), "… *se llama probabilidad del suceso A condicionado al B, y se escribe P(A/B), a la*

probabilidad de que ocurra el suceso A supuesto que haya ocurrido el B (p. 234).” También en el texto de Santillana, (Escoredo et al. 2010, p. 265), puede leerse en la definición: *“La probabilidad de un suceso B, cuando sabemos que ha ocurrido otro suceso A, se denomina probabilidad condicionada.”*. Esto puede estar induciendo o, al menos facilitando, al alumno a creer que hay una dirección temporal que relaciona al suceso condicionante (previo) con el suceso condicionado (posterior), es decir la denominada *falacia del eje temporal* (Falk, 1986; Gras y Totohasina, 1995). Esto mismo, podría estar dificultando que el alumno pueda plantearse con igual facilidad *P(A/B)* y *P(B/A)* y no sufrir la denominada *falacia de la condicional transpuesta* (Falk, 1986).

Por otra parte, nos llama la atención la variedad de planteamientos que se dan para introducir la definición de probabilidad condicionada, en los que predomina presentar un ejemplo concreto para acotar el concepto que se va a presentar. No obstante algunos textos optan por definir directamente el concepto, según podemos ver en la Tabla 2

Tabla 2. Forma en que se introduce la probabilidad condicionada

Textos	Con contexto previo	Sin contexto previo
1. ANAYA		X
2. ECIR	X	
3. LUIS VIVES	X	
4. SANTILLANA		X
5. PEARSON	X	
6. EDITEX	X	

Entre los textos que parten de un contexto concreto para presentar el contenido, se produce también una variedad importante en el tipo de ejemplo elegido, en el recurso didáctico con el que se analiza el ejemplo, predominando las tablas de doble entrada frente a los diagramas de árbol o diagramas de áreas (no utilizados en ningún ejemplo) y, así mismo, hay variedad en el formato elegido para la presentación de los datos entre valores absolutos y tantos por ciento, tal y como representamos en la tabla 3. Observamos acá una diferencia con el estudio de Díaz y Batanero (2005), que encontraron pocos los libros de texto que usasen diagramas en árbol, tablas de doble entrada, diagramas de Venn o rectangulares en su estudio.

Tabla 3. Recursos didácticos empleados en el contexto previo a la definición

	Tablas de doble entrada		Arboles	Diagrama ee áreas	Añadiendo información
Textos	Valores absolutos	%	Valores absolutos		
1. ECIR	X				
2. LUIS VIVES	X		X		
3. PEARSON					X
4. EDITEX		X			

Tabla 4. Fórmulas o recursos empleados en la definición

Textos	$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$	$P(A/B) = \frac{n^{\underline{o}}\ suc.\ de A \cap B}{n^{\underline{o}}\ suc.\ de A}$	*Diagrama de áreas*
ANAYA	X		X
ECIR	X	X	X
EDELVIVES	X		
SANTILLANA		X	X
PEARSON	X		

EDITEX	X	X

Todos los textos dan la definición de *Probabilidad Condicional* y la acompañan de la fórmula del cociente de probabilidades o del cociente de número de sucesos elementales de la intersección y número de sucesos del condicionante, o de ambas, y, a veces, se ilustra mediante un diagrama de áreas, según se describe en la Tabla 4.

5. Conclusiones

Esta variedad de presentaciones observadas en los textos nos lleva a pensar que no hay consenso sobre la forma óptima de presentar este concepto a los alumnos. Tampoco se comparte un encuadre teórico lo más simple posible que ponga de manifiesto el contenido sin necesidad de ligarlo a experimentos compuestos.

Hemos visto como en los textos analizados en ningún caso que se presenta la definición haciendo referencia al número de casos del suceso intersección entre el número de casos del suceso condicionante, se ha mencionado la condición imprescindible de que sean sucesos elementales equiprobables.

Creemos adecuado presentar inicialmente la probabilidad condicionada en experimentos simples, donde al calcular la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso A, se ponga de manifiesto cómo esta probabilidad se puede ver alterada, o no, por una información adicional que se aporta tras la realización de la experiencia, pero sin que suponga un experimento compuesto. Por ejemplo, si estudiamos la probabilidad del suceso *A* "extraer una figura de una baraja de 40 cartas", $P(A) = \frac{12}{40}$, si se añade la información de que sabemos que la carta extraída tiene una numeración impar, (suceso B: "el número de la carta es impar"), ello nos altera el valor anterior, puesto que sólo hay cuatro figuras con numeración impar, los caballos, y $P(A/B) = \frac{4}{20}$. En este ejemplo, la probabilidad inicial de sacar una figura ha disminuido, pero cambiando la información añadida, por ejemplo, si sabemos que la carta extraída tiene numeración par, (suceso B: "el número de la carta es par"), puede verse aumentada ya que sería $P(A/B) = \frac{8}{20}$. En ejemplos de este tipo, el alumno puede ver la restricción que produce sobre el espacio muestral inicial, la nueva información aportada sobre el experimento simple ya realizado.

Posteriormente, la secuencia de instrucción debería plantear actividades formativas a los alumnos en las que cada sesgo descrito en la investigación didáctica fuese puesto ante el alumno para su análisis y discusión. La simulación (Fernándes et al. 2009) y el uso de paradojas (Batanero et al., 2012) proporcionan ayuda en este sentido.

REFERENCIAS

Batanero, C., Contreras, J. M., Cañadas, C., y Gea, M. M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. *Novedades educativas, 261*, 78-84.

Colera, J., Oliveira, M. J. y García, R. (2001). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Madrid: Anaya.

Colera, J., Oliveira, M. J., Gaztelu, I. y Martínez, M. (2008). *Matemáticas 4º Educación Secundaria, opción B.* Madrid: Anaya.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Deusa, M. et al. (2009). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato.* Valencia: Ecir.

Díaz, C. (2004). *Elaboración de un instrumento de evaluación del razonamiento condicional. Un estudio preliminar*. Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.

Díaz, C. y Batanero, C. (2005). La probabilidad condicional en los textos de estadística para psicología Trabajo presentado en el *V CIBEM*. Guimaraes, Portugal, Julio 2005.

Díaz, C., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2010). Teaching independence and conditional probability. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa. 26* (2), 149-162.

Escoredo, A et al. (2010). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato.* Madrid: Santillana Educación.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292 – 297). Victoria, Canadá: International Statistical Institute.

Feller, W. (1973). Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones. México: Limusa.

Fernándes, J.A., Batanero, C., Contreras, J.M., y Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante XVIII* (1), 161-183.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions source d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007) Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Revista *Zentralblat für Didaktik der Mathematik 39*, 1-2

González, C., Llorente, J. y Ruiz, M. J. (2011) *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato.* Madrid: Editex.

Monteagudo, Mª. F. y Paz, J. (2009). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato.* Zaragoza: Luis Vives.

Ortega, P. et al. (2010) *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato.* Madrid: Pearson Educación.

Totohasina, A. (1994). L'introduction du concept de probabilité conditionnelle: avantages et inconvénients de l'arborescence. *Repères, 15*, 93-117.

Aplicación de la Encuesta de Estructura Salarial en un grupo de alto rendimiento en Enseñanza Secundaria

López Iñesta, Emilia[1] y Bolufer Costa, Mª Dolores[2]

[1]Universidad Católica de Valencia
[2]IES Rascanya-Antonio Cañuelo

Resumen

Con el trasfondo de la celebración del Año Mundial de la Estadística propuesto por múltiples organizaciones mundiales, y la intención de conseguir alcanzar los objetivos de éste, se realiza una propuesta de incorporar el análisis de datos procedentes de Estadísticas Oficiales en el bloque de Estadística y Probabilidad de la asignatura Matemáticas en Enseñanza Secundaria Obligatoria. La meta es concienciar al alumnado de la importancia de la información Estadística y la labor de las entidades dedicadas a su producción y difusión. En concreto se diseña una serie de actividades para trabajar de manera grupal los datos proporcionados por la Encuesta de Estructura Salarial publicada por el Instituto Nacional de Estadística con un grupo de alto rendimiento académico donde se trabaja para conseguir un aprendizaje motivador, potenciando su capacidad de "aprender a aprender", así como para conseguir que entiendan la asignatura de Matemáticas y en concreto la Estadística, como una herramienta que modeliza su entorno y que genera un importante impacto en nuestra sociedad.

Palabras clave: Estadística, Estadística Oficial, Aprendizaje significativo, alto rendimiento

.

1. Introducción

El año 2013 ha sido declarado el Año mundial de la Estadística, un evento que cuenta con el apoyo de más de 1700 organizaciones internacionales. Así, según los organizadores, los principales objetivos de esta celebración son:

1. Aumentar la conciencia pública sobre el poder y el impacto de las estadísticas sobre todos los aspectos de la sociedad.
2. Dar a conocer la Estadística como una profesión, especialmente entre los jóvenes.
3. Promover la creatividad y el desarrollo de las ciencias de la Probabilidad y la Estadística.

Son estos objetivos los que nos impulsan a crear actividades relacionadas con este acontecimiento, de manera que nuestros alumnos se acerquen a esta disciplina de manera diferente y motivadora, consiguiendo un aprendizaje significativo.

El trabajo se va a realizar con un grupo de segundo de la ESO del Instituto de Educación Secundaria Rascanya-Antonio Cañuelo de Valencia. Este grupo cuenta con unas características especiales ya que se trata de un grupo de alto rendimiento académico. Son 20 alumnos donde se trata de conseguir un aprendizaje motivador, potenciando su capacidad de "aprender a aprender". Es por esto el entorno ideal para realizar la experiencia que expondremos más adelante.

Pasamos pues a analizar las principales características de este alto rendimiento académico, que contextualiza el proyecto que posteriormente desarrollaremos.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 113-120). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

2. Alto rendimiento académico frente a fracaso escolar

El rendimiento académico se ha convertido en uno de los grandes problemas de la sociedad actual. Pese a los esfuerzos realizados por los gobiernos y sus reformas educativas, la tasa de abandono escolar continúa alcanzando niveles preocupantes. Además, el grado de exigencia de formación para desempeñar cualquier trabajo es mucho mayor que en épocas anteriores. Así, en 1945, el 80% de los alumnos de 14 años de Europa Occidental, dejaban la escuela para trabajar (Coleman y Husén, 1985), mientras que en 2000 el 80% de los jóvenes de 17 años seguían estudiando. La consecuencia es clara: alumnos que no fracasaban en 1945 lo harían en el 2000. Es más, el fracaso escolar ha dejado de ser un problema meramente académico, para pasar a ser un problema social, que preocupa en todos los estratos.

Muchos han sido los estudios analizando este fenómeno e intentando señalar sus causas. Para entender mejor el panorama actual, podríamos plantear según el estudio de Casal, García y Planas (1998), cuáles son los modelos educativos que existen en el mundo, según su *arquitectura* del fracaso escolar:

- Modelo unificado en las trayectorias pero con resultados diferentes. En este tipo de sistemas todos los alumnos siguen un currículum prácticamente igual a lo largo de su educación obligatoria. Las diferencias se producen cuando terminan dicha etapa y consiguen o no ciertas certificaciones. Es usado en países como España, Francia, Bélgica, Portugal, grecia e Italia.
- Modelo unificado en las trayectorias y en los resultados. Los alumnos no se diferencian ni en el currículum que estudian, ni en los resultados que obtienen al final del periodo obligatorio de escolarización. Se trata de los países nórdicos y Dinamarca.
- Modelo diversificado en las trayectorias y en los resultados. Conviven varias ramas con contenidos y exigencias diferentes a lo largo de la escolarización obligatoria y existen por tanto, varios momentos de diferenciación y selección en función de los resultados escolares. Destacan dentro de este modelo países como el Reino Unido, Alemania, Austria y Holanda.

Teniendo en cuenta este punto de partida y el modelo educativo en el que nos encontramos, el IES Rascanya Antonio-Cañuelo ha querido crear un grupo donde se potencie su capacidad de aprender a aprender, siguiendo las tesis de autores como Goleman (1996), que relacionan el rendimiento académico con la inteligencia emocional:

"El rendimiento escolar del estudiante depende del más fundamental de todos los conocimientos: aprender a aprender. Los objetivos a reeducar como clave fundamental son los siguientes:

1. *Confianza. La sensación de controlar y dominar el propio cuerpo, la propia conducta y el propio mundo. La sensación de que tiene muchas posibilidades de éxito en lo que emprenda y que los adultos pueden ayudarle en esta tarea.*
2. *Curiosidad. La sensación de que el hecho de descubrir algo es positivo y placentero.*
3. *Intencionalidad. El deseo y la capacidad de lograr algo y de actuar en consecuencia. Esta habilidad está ligada a la sensación y a la capacidad de sentirse competente, de ser eficaz.*
4. *Autocontrol. La capacidad de modular y controlar las propias acciones en una forma apropiada a su edad; sensación de control interno.*
5. *Relación. La capacidad de relacionarse con los demás, una capacidad que se basa en el hecho de comprenderles y de ser comprendidos por ellos.*

6. *Capacidad de comunicar. El deseo y la capacidad de intercambiar verbalmente ideas, sentimientos y conceptos con los demás. Esta capacidad exige la confianza en los demás (incluyendo a los adultos) y el placer de relacionarse con ellos.*
7. *Cooperación. La capacidad de armonizar las propias necesidades con las de los demás en las actividades grupales."*

Es importante remarcar que el grupo no es un grupo de altas capacidades, sino un grupo donde se busca esfuerzo y no únicamente habilidades. El requisito para formar parte de él es contar con una media igual o superior a siete contando todas las asignaturas de segundo de la ESO, de tal manera que nos podemos encontrar con alumnos que no son en absoluto brillantes en nuestra materia. En otras palabras, mientras un estudiante espera ser reconocido por su capacidad, en clase se reconoce su esfuerzo. De acuerdo con esto, se derivan tres tipos de estudiantes según Covington (1984):

- Los orientados al dominio. Sujetos que tienen éxito escolar, se consideran capaces, presentan alta motivación de logro y muestran confianza en sí mismos.
- Los que aceptan el fracaso. Sujetos derrotistas que presentan una imagen propia deteriorada y manifiestan un sentimiento de desesperanza aprendido, es decir que han aprendido que el control sobre el ambiente es sumamente difícil o imposible, por lo tanto renuncian al esfuerzo.
- Los que evitan el fracaso. Aquellos estudiantes que carecen de un firme sentido de aptitud y autoestima y ponen poco esfuerzo en su desempeño; para "proteger" su imagen ante un posible fracaso, recurren a estrategias como la participación mínima en el salón de clases, retraso en la realización de una tarea, trampas en los exámenes, etc.

En este grupo ARA (alto rendimiento académico), se busca formar estudiantes orientados al dominio, potenciando otras formas de involucrar al alumnado en el estudio y comprensión de las asignaturas. Para ello, resulta esencial que los alumnos se sientan estimulados por aquello que estudian, pero si bien la dificultad para motivar a los alumnos es enorme en prácticamente todas las áreas, puede ocurrir que esto sea más complicado en el campo que nos ocupa: las Matemáticas, y en especial, la Estadística.

La Estadística forma parte de un bloque de contenidos específicos junto con la probabilidad en todos los cursos de la Educación Secundaria Obligatoria y debido a su presencia en los medios de comunicación y el uso que de ella hacen las diferentes materias, la Estadística tiene en la actualidad una gran importancia. Su estudio ha de capacitar a las y los estudiantes para analizar de forma crítica las presentaciones falaces, interpretaciones sesgadas y abusos que a veces contiene la información de naturaleza estadística, tal y como apunta el Decreto 112/2007 por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana.

Dado que la Estadística es la parte de las Matemáticas que más encuentran los alumnos a su alrededor, tal y como apunta el citado decreto nos surgen cuestiones como ¿a qué se debe que no se le preste la importancia que merece en los temarios? Es más, si es constante la presencia de dato estadísticos en los medios de comunicación, ¿por qué no recurrir a las fuentes originales que proporcionan estos datos como recurso motivador?

Esta preguntas nos sirvieron para reflexionar a la hora de programar las unidades didácticas del curso tratando de incluir tareas que mostraran aplicaciones reales de las Matemáticas y la Estadística y fomentando la participación del alumnado del grupo ARA en actividades novedosas en la asignatura de Matemáticas. Concretamente, en este grupo se ha potenciado la participación de los alumnos en eventos como las pruebas Canguro Matemático y las Olimpiadas Matemáticas; se han organizado actividades diferentes a las que están acostumbrados en esta materia, como concursos de fotografía matemática; y se han utilizado recursos relacionados con las estadísticas oficiales para fomentar el análisis de datos de actualidad.

3. La Estadística Oficial

La Estadística Oficial es aquella producida por los organismos públicos que se dedica a proporcionar información cuantitativa destinada a los Gobiernos y a la sociedad en general. Así, influye en la toma de decisiones tanto económicas como políticas, y de ahí la importancia de la rigurosidad de ésta. Además, esta rigurosidad se hace más necesaria desde el punto de vista de que la información proporcionada por los organismos oficiales es cada vez más accesible al ciudadano medio, y éste puede hacer uso de ella.

De acuerdo con ello, y citando al INE, a nivel político por ejemplo, las Estadísticas regionales europeas sirven para orientar a la Comisión Europea en la asignación de fondos regionales, mientras que en el ámbito económico, las Estadísticas de precios armonizados juegan un papel clave en la política monetaria de los Bancos Centrales.

Como se puede concluir, las Estadísticas son un elemento fundamental para justificar prácticamente todos los aspectos de los presupuestos y los programas de los organismos públicos.

Los medios de comunicación también hacen uso a diario de datos estadísticos que proceden de estadísticas oficiales. Un ejemplo de encuesta muy utilizada es la Encuesta de Estructura Salarial en la que se basa este trabajo y cuyos detalles se exponen en la siguiente sección.

4. La Encuesta de Estructura Salarial

El Instituto Nacional de Estadística (INE) proporciona información en materia de salarios a través de dos encuestas:

- La Encuesta de Estructura Salarial (EES)
- La Encuesta Anual de Estructura Salarial (EAES)

La EES es una encuesta de periodicidad cuatrienal realizada en los años 1995, 2002, 2006 y 2010. La Encuesta de Estructura Salarial se realiza en el marco de la Unión Europea con criterios comunes de metodología y contenidos, con el fin de obtener unos resultados comparables sobre la estructura y distribución de los salarios entre sus Estados Miembros. Esta encuesta investiga la distribución de los salarios en función de una gran variedad de variables como son el sexo, la ocupación, la rama de actividad, la antigüedad, o el tamaño de la empresa.

La EAES es una operación estadística de periodicidad anual que surge de la necesidad de disponer de información salarial anual clasificada por sexo y su objetivo es obtener estimaciones salariales anuales para aquellos años en que no se realiza la EES.

La información se obtiene de la explotación conjunta de varias fuentes de carácter estadístico y administrativo como el Fichero General de Afiliación de la Seguridad Social (SS) y el Resumen anual de Retenciones e Ingresos a Cuenta del IRPF de la Agencia Estatal de la Administración Tributaria (AEAT) junto con las variables ocupación y tiempo de trabajo provenientes de la Encuesta Trimestral de Coste Laboral del INE.

5. Propuesta de actividad de la utilización de la Encuesta de Estrutura Salarial como herramienta de aprendizaje.

5.1. Motivación de la actividad

La necesidad de información ha crecido de forma considerable en los últimos años. Hoy en día, todos los integrantes de la sociedad (gobernantes, directivos, empresarios, ciudadanos…) demandan información de alta calidad que les reporten datos estadísticos sobre aspectos sociales, económicos, demográficos,…

Los Institutos de Estadística juegan un papel muy importante para proporcionar datos estadísticos a la sociedad. Su trabajo no es fácil: producir datos de alta calidad en un corto espacio de tiempo resulta complicado.

Con esta actividad se persiguen tres objetivos:

1. Analizar y resaltar la importancia de la Estadística Oficial y las fuentes oficiales.
2. Dar a conocer los organismos que se dedican a recoger, elaborar y publicar la información estadística en nuestro país.
3. Trabajar con datos de la Encuesta de Estructura Salarial.

El hecho de elegir la Encuesta de Estructura Salarial está motivado por los múltiples conceptos que permite trabajar en el aula y el establecimiento de cuestiones que continuamente surgen en los medios de comunicación y en el día a día del alumno: brecha salarial entre hombres y mujeres, relación de los salarios con el nivel de estudios, la distribución geográfica de los salarios por Comunidad Autónoma…

5.2. Metodología: Orientaciones didácticas

Esta actividad está pensada para desarrollarse en una sesión en el aula de informática y dos sesiones en el aula habitual por grupos después de haber trabajado los contenidos de Estadística Descriptiva y la finalidad es fomentar el análisis de datos de actualidad y el debate en el aula de la realidad que les rodea.

Durante su realización, se fomenta un aprendizaje significativo, es decir, un aprendizaje no memorístico que exige la implicación del alumno en la tarea a partir de sus conocimientos previos. Se pretende que el alumno aprenda a establecer relaciones entre el nuevo contenido y el anterior.

Se diferencia lo que el alumno puede aprender por sí sólo y lo que puede aprender con ayuda de los demás. El docente sólo intervendrá allí donde el alumno no sea capaz de aprender por sí sólo fomentando un aprendizaje cooperativo.

Será importante dotar a los alumnos de los recursos y medios necesarios para que se puedan desenvolver por sí mismos en un futuro, es decir, insistirles en el principio de aprender a aprender.

5.3. Explicación de la actividad.

La actividad se estructura en cuatro partes. Se detallan a continuación las tres primeras, pues la cuarta corresponde a la puesta en común de los ejercicios y a la realización de un debate en clase.

Primera parte: ¿Qué es el Instituto Nacional de Estadística (INE)?

El Instituto Nacional de Estadística tiene como misión la elaboración y publicación de estadísticas demográficas, económicas y sociales y la coordinación con los servicios estadísticos de las áreas provinciales y municipales.

En esta parte de la actividad se trata de explicar a los alumnos que el INE trabaja en una gran cantidad de estadísticas de distintos temas que se pueden encontrar en la página web www.ine.es

Segunda parte: La Encuesta de Estructura Salarial (EES)

Después de explicar los objetivos de esta encuesta y su metodología, se pasa a proponer a los alumnos el trabajo en grupo con una serie de fichas en las que se van desarrollando distintas tareas en las que se pretende que comprendan la información que está resumida mediante tablas y gráficos y que relacionan los conceptos de tablas de frecuencias, los estadísticos media, mediana y moda con el trasfondo de la distribución salarial. Por otro lado se trabajará en el cálculo de porcentajes y la comprensión de la información que manejan.

Algunos de los gráficos, tablas y preguntas incluídas en las tareas realizadas en clase se muestran a continuación.

Tabla 1. Salario anual medio, mediano, modal, a tiempo completo y a tiempo parcial. 2010 (euros)

Salario anual	Mujeres	Varones	% mujer/ hombre
Salario a tiempo completo	23.932,0	27.335,2	87,6
Salario medio bruto	19.735,2	25.479,7	77,5
Salario mediano	16.536,1	21.207,0	78,0
Salario más frecuente	12.540,3	16.505,3	76,0
Salario a tiempo parcial	10.133,2	10.960,9	92,4

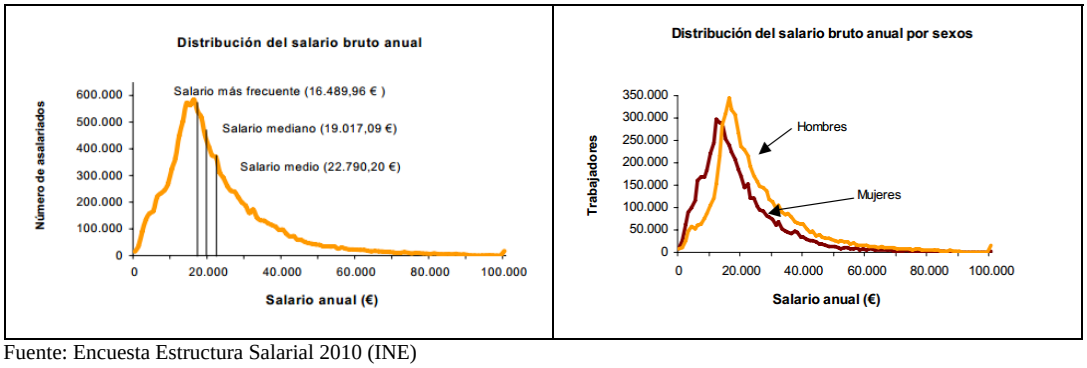
Fuente: Encuesta de Estructura Salarial 2010. INE

Tabla 2. Salario por hora según tipo de jornada. 2010 (euros)

Salario por hora	Mujeres	Varones	% mujer/ hombre
A tiempo completo	10,7	11,9	89,6
Sin diferenciar jornada	10,2	11,8	86,2
A tiempo parcial	8,2	10,0	81,7

Fuente: Encuesta de Estructura Salarial 2010. INE

Figura 2: Distribución salarial. Total bruto anual y clasificado por sexos.



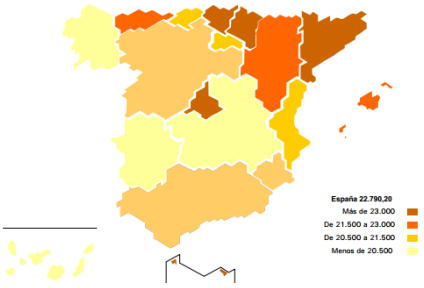
Fuente: Encuesta Estructura Salarial 2010 (INE)

Figura 3: Ganancia media anual por trabajador y distribución salario bruto anual por nivel de estudios.

¿Dónde os iríais a trabajar?

Ganancia media anual por trabajador. 2010

(en euros)



¿Vale la pena estudiar?

Principales resultados por nivel de estudios

	Salario bruto anual
TODOS LOS NIVELES DE ESTUDIOS	22.790,20
I. Sin estudios	15.479,21
II. Educación primaria	17.064,08
III. Educación secundaria I	17.727,22
IV. Educación secundaria II	22.691,68
V. Formación profesional de grado medio	20.385,50
VI. Formación profesional de grado superior	23.676,49
VII. Diplomados universitarios o equivalente	29.104,17
VIII. Licenciados, ingenieros superiores y doctores	35.864,81

Fuente: Encuesta Estructura Salarial 2010 (INE)

Preguntas en las que trabajar

1. ¿Qué significa el salario mediano? Relacionarlo con salario medio y más frecuente.

2. Comparar los salarios de hombres y mujeres. ¿Qué se puede concluir? ¿Cuál es la diferencia en %? ¿Existe alguna razón objetiva para que esto sea así?

3. En el año 2010, el salario anual más frecuente en las mujeres representó el ____% del salario más frecuente en los varones. En el salario mediano este porcentaje fue del ____% y en el salario medio bruto del ____%.

4. ¿Dónde se concentran más los salarios? ¿En valores bajos o altos?

5. ¿Se observan diferencias salariales entre los distintos niveles de estudios? ¿Vale la pena estudiar y formarse?

6. Elegir la Comunidad Autónoma en la que el salario es más alto. ¿Dónde os gustaría trabajar? ¿Cambiaríais de residencia para trabajar?

Tercera parte: ¿Qué información utilizan los medios de comunicación?

Tabla 3. Titulares de prensa con referencias a datos de la Encuesta de Estructura Salarial

El sueldo más frecuente en España se sitúa en torno a los 15.500 euros (Diario Público, 22/11/ 2011)	Las mujeres europeas trabajan “gratis” 59 días al año (El Mundo, 28/02/ 2013)
Las mujeres ganan 5.4774 € menos al año que los hombres por trabajos iguales (El País, 18/02/2013)	Las mujeres cobran 3.400 € brutos menos que los hombres en Baleares (El Mundo, 21/02/ 2013)

6. Conclusiones

La propuesta de trabajo descrita permite trabajar con los alumnos de una forma distinta a la tradicional consiguiendo no sólo hacer referencia a conceptos y procedimientos, sino enfatizando todo el proceso de razonamiento estadístico, y el sentido de los datos.

Uno de los objetivos que se persiguen es mostrar la utilidad de la Estadística aplicada a problemas que se encuentran en la vida real y dar a conocer al alumnado los organismos oficiales que se encargan de la difusión de las estadísticas oficiales y otra manera de encontrar información que les puede servir para futuros trabajos.

Las fichas de actividades diseñadas se podrán a prueba al llegar al bloque de Estadística y probabilidad y se valorará si realmente sirven para que los alumnos adquieran conciencia de la importancia de la Estadística Oficial y comprobar si se fomenta la reflexión y el análisis de los datos estadísticos que se manejan a diario en medios de comunicación.

Nota*: Esta experiencia ha sido desarrollada en el marco de una Red de Innovación Educativa. Los autores agradecen la financiación recibida desde el Vicerrectorado de Convergencia Europea y Calidad de la Universitat de València, a través del proyecto Finestra Oberta con código UV-SFPIE_FO12-80215.*

Referencias

Casal, J., García, M. y Planas, J. (1998). Las reformas en los dispositivos de formación para combatir el fracaso escolar en Europa: Paradojas de un éxito. *Revista de Educación*, 317, 301-317

Coleman, J.S. y Husen, T. (1985). *Beacoming adult in a changing society*. Paris: OECD.

Covington, M. (1984). The motive for self-worth. En R. Ames y C. Ames (Eds.). *Research on Motivation in Education. Student Motivation.* Vol.I. New York: Academic Press.

Generalitat Valenciana. Conselleria de Educación. *Decreto 112/2007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana*. DOCV 24-07-2007 (5.562)

Goleman, D. (1996). *Emotional Intelligence: Why it can matter more than IQ.* NewYork: Bantam Books Psychology.

Instituto Nacional de Estadística. Encuesta de Estructura Salarial, 2010.

Atividades de interpretação de gráficos de barras e linhas: o que sabem os alunos do 5º ano?

Maria Betânia Evangelista
UFPE – EDUMATEC - Brasil

Resumo

Esse estudo teve como objetivo analisar o desempenho de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental ao realizarem atividades de interpretação de gráficos de barras e linhas. Participaram do mesmo 60 alunos de três escolas públicas de cidade de Recife e Olinda –Brasil. Os alunos responderam um teste, contendo 4 questões com gráficos de barras e 4 de linhas, buscando: localizar frequência/categoria, localizar moda e compor união de dois valores. Os resultados apontaram que 51% dos alunos acertaram as questões do teste. Observamos que os alunos tiveram mais facilidade para responde as questões com gráficos de barras (59%) do que nos gráficos de linhas (43%), principalmente quando as barras eram simples. Ao verificarmos o desempenho dos alunos nas questões com gráficos de dupla entrada, observamos que o desempenho dos alunos foi inferior em comparação aos das questões que apresentavam gráficos com uma entrada, principalmente quando se tratava de gráfico de linha. Tais resultados colaboram com a ideia de que interpretar dados em gráficos com barras e linhas simples são mais fácies para os alunos compreender. Diante dos resultados, salientamos a necessidade de avançar com pesquisas que busquem investigar o desempenho dos alunos aos realizarem atividades de interpretação de diferentes tipos de gráficos, tendo em vista que, ainda encontramos alunos com dificuldades para ler e interpretar informações em gráficos, bem como, pelo importante papel social que o tema vem assumindo.

Palavras - chaves: Interpretação, gráficos, alunos, ensino fundamental.

1. Introdução

A crescente necessidade de se discutir as questões relacionadas à Estatística, principalmente nos meios educacionais, se justifica pela constante utilização de dados estatísticos em nosso cotidiano. Desse modo, é de extrema importância saber ler, interpretar e fazer inferências de informações que aparecem em gráficos, tabelas, dentre outros recursos.

Para Barros, Martins e Pires (2009), o uso de ferramentas estatísticas contribui de forma significativa para que o cidadão se aproprie das informações apresentadas, e partir daí, possa tomar decisões de forma consciente. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), a Estatística exerce um papel essencial na educação para a cidadania. Pode se considerada uma importante ferramenta para a realização de projetos e investigações em diversos campos, sendo usada no planejamento, na coleta e análise de dados, e nas realizações de inferências para se tomar decisões, com o intuito de apoiar afirmações em diversas áreas, como saúde, educação, ciência e política.

O que se justifica a inclusão do Ensino da Estatística no currículo brasileiro nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental I – 1ª à 4ª série – (Brasil, 1997), cujos objetivos apontam que o aluno deve construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente em seu cotidiano. Assim, nossos alunos

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 121-128). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

devem ser levados a interpretar, avaliar e inferir sobre as informações contidas em diferentes recursos estatísticos que aparecem diariamente em jornais, revista e outdoor, por exemplo.

Dessa forma, a Estatística permeia a vida dos cidadãos como, por exemplo, a inflação mensal, a popularidade dos políticos, tendência do mercado de produto de consumo, e outros eventos. Ciente disso, os meios de comunicações de massa frequentemente exploram dados estatísticos com o intuito de repassar informações de forma resumida e rápida.

No entanto, Monteiro e Ainley (2007) chamam a atenção para o fato de que a imprensa com frequência faz uso de gráficos estatísticos com intuito de ilustrar os argumentos jornalísticos em público. Entretanto, nem sempre tais informações apresentadas pela mídia são repassadas de forma imparcial. Os gráficos podem ser empregados para enfatizar e/ou disfarçar alguns aspectos fundamental da informação. Desse modo, torna-se fundamental que as pessoas sejam capazes que interpretar adequadamente as informações que aparecem em seu dia-a-dia, para que não sejam levados a acreditar em dados equivocados.

No entanto, várias pesquisas apontam que alunos e professores apresentam dificuldades para realizar atividades de interpretação e construção de gráficos (Lemos, 2002; Magina, Cazorla, Leite e Pagan, 2009; Albuquerque, 2010, entre outros). As dificuldades para lidar com essa representação estão relacionadas aos aspectos relevantes que a compõem: nomeação dos eixos, títulos, descrição das variáveis e, principalmente, a escala.

A escala, por exemplo, se constitui um componente fundamental para o entendimento dos dados apresentados em uma representação gráfica. Como argumenta Guimarães (2002), onde explica que a elaboração de um gráfico exige a compreensão da escala ou da unidade a qual esta é organizada, uma vez que ela é uma das questões relevantes para entender as representações gráficas.

Ao pesquisar 107 alunos de aproximadamente 9, estudantes do 4º ano de Ensino Fundamental, Guimarães, (2002), percebeu que nas atividades de leitura/interpretação de gráficos, apenas 42% dos alunos acertaram a questão referente à localização de uma categoria em função de uma frequência. A autora acredita que esse baixo rendimento dos alunos deu-se pelo fato de que o valor solicitado na frequência não estava explícito na escala e não em função da dificuldade em localizar ponto no gráfico, pois quando solicitados a encontrar valores explícitos os alunos não apresentaram problemas. Dessa forma, verifica-se que a escala dos gráficos é um fator que pode influenciar na compreensão das informações representadas.

Rego (2004) acredita que existem alguns fatores que podem interferir nos processos que conduzir à compreensão gráfica. Muitas vezes, esses fatores podem está associados a problemas conceituais em outras áreas da Matemática. Os obstáculos que podem interferir na leitura e construção gráficas são: conceituação do cálculo de porcentagem, conceituação de frações, compreensão dos números racionais e sua representação na reta, percepção da natureza das grandezas, compreensão do processo de medir, compreensão do sistema métrico decimal, uso de escalas e execução de operações geométricas complexas, tal como subdividir uma unidade de escala.

O tipo de gráfico é outro aspecto que pode influenciar na compreensão das informações representadas. Conforme Albuquerque (2010), ao pesquisar crianças dos anos iniciais (3º e 5º anos) e adultos desses mesmos anos que frequentavam turmas de EJA (Módulos I e II), observou que os alunos tiveram maior dificuldade para interpretar informações representadas em gráficos de linhas do que de barras. Essa maior familiaridade por parte dos alunos com relação aos gráficos de barras, se justifica por esse tipo de gráfico ser bastante explorado tanto nos livros didático e pela mídia impressa.

Como foi visto no estudo realizado por Cavalcanti, Natrielli e Guimarães (2010), que analisaram gráficos veiculados na mídia impressa considerando três tipos de suporte (jornal diário, revista semanal e mensal), perceberam que o gráfico de barras é mais utilizado pela mídia impressa. Guimarães, Gitirana, Cavalcanti e Marques (2007) e Silva e Guimarães (2013), analisando coleções de livros didáticos de matemática, verificaram que os gráficos de barras são mais utilizados pelas coleções. Fazendo com que o estudo de outros tipos de representações (linhas, setor, pictograma e outros) fica prejudicado, visto que os alunos acabam, apenas, vendo mais profundamente um tipo de representação.

Diante do exposto, o presente estudo teve como objetivo analisar o desempenho de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental ao realizarem atividades que requerem a habilidade de interpretação em diferentes tipos de gráficos.

2. Método

Participaram de nossa pesquisa 60 alunos de três turmas de 5º ano (10 a 11 anos de idade) de algumas escolas públicas dos municípios de Recife e Olinda – Brasil. O procedimento desenvolvido para a coleta dos dados ocorreu em uma única sessão, em cada turma. Claudia Costa dos Santos participou dessa coleta. Os alunos foram convidados, individualmente, a responderem um teste que explorava as competências de leitura e interpretação de informações representadas em diferentes tipos de gráfico.

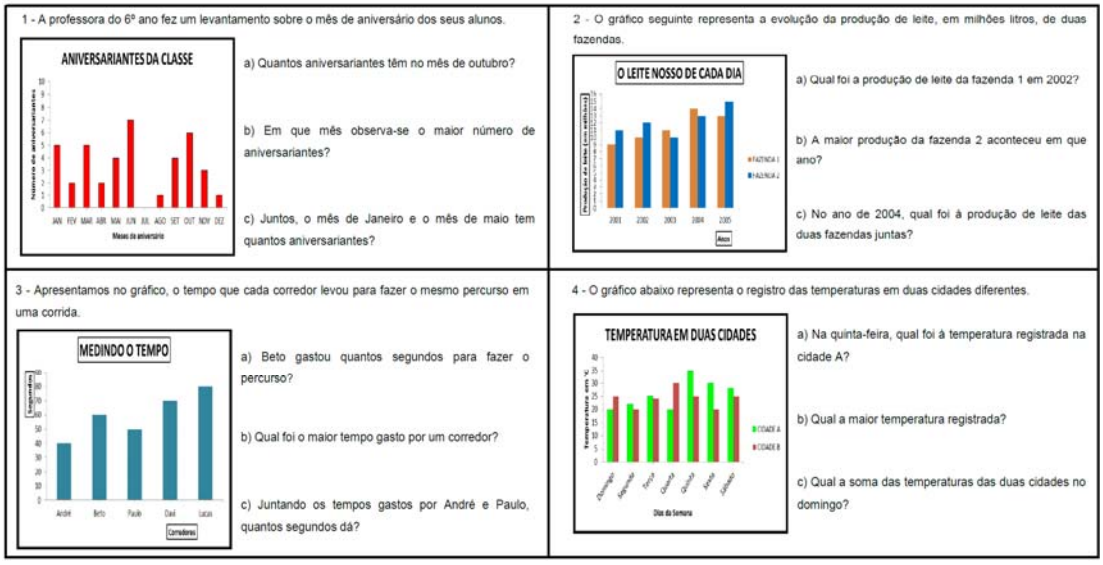


Figura 1. Questões do teste - gráficos de barras.

O teste era composto por 8 questões, sendo que 4 delas tínhamos gráficos de barras, como mostra a figura 1, e as outros 4 apresentavam gráficos de linhas, como é visto na figura 2. Além disso, metade dessas representações exibiam barras e linhas simples e a outra metade apresentava barras e linhas duplas. Para cada gráfico estavam relacionadas três perguntas, que foram organizadas de acordo com um tipo de situação-problema: na primeira situação, solicitamos aos alunos que localizar uma frequência ou categoria; na segunda, os mesmos tinham que localizar a moda; e na terceira, solicitamos que, a partir da localização de dois valores, fizessem a composição dos mesmos.

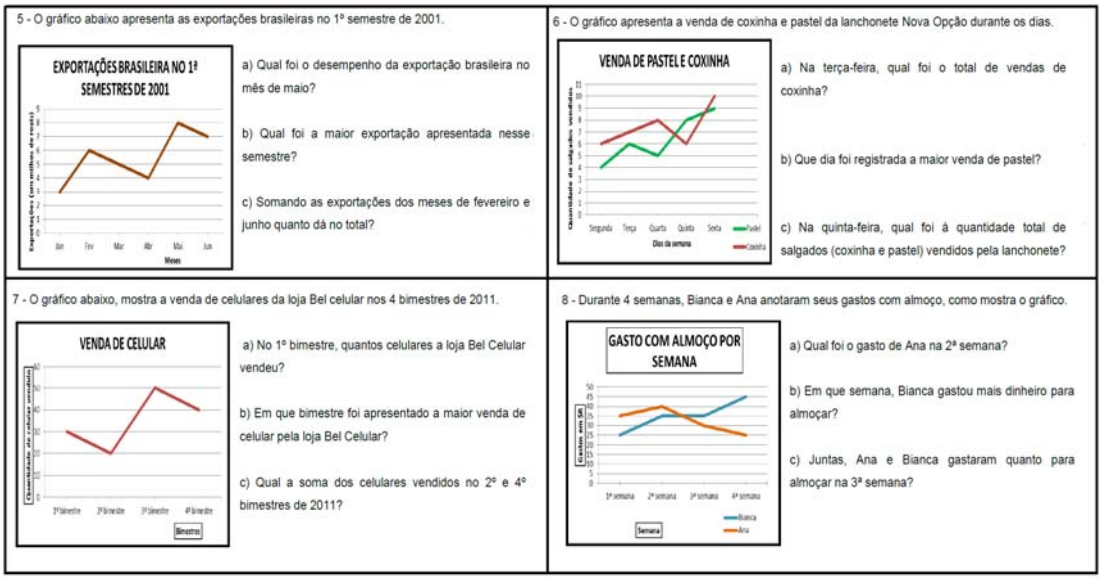


Figura 2. Questões do teste – gráfico de linhas.

3. Resultados

De acordo com a análise dos dados pesquisados, constatamos que os alunos apresentaram um desempenho regular, visto que, os mesmos conseguiram responder corretamente, apenas 51% das questões que fizeram parte do estudo. Assim, embora, a leitura e interpretação de diferentes tipos de gráficos seja um conteúdo trabalhado desse os primeiros anos de escolaridade dos alunos, como é recomendado pelos PCNs de Matemática (1997), ainda encontram-se estudantes com dificuldades para responder questões que requerem a habilidade de interpretar informações presentes em gráficos.

Ao analisarmos o desempenho dos alunos em cada questão, como mostra o Gráfico 1, verificamos que a 1ª, 3ª e 4ª questões, foram as que apresentaram maiores percentuais de acertos, com 63,89%, 66,11% e 66,22% respectivamente. Ambas as questões apresentavam gráficos de barras, sendo que a 1ª e a 2ª as barras eram simples, e a 3ª as barras eram de dupla entrada ou barras múltiplas. O pior desempenho dos alunos foi visto na 6ª questão, com 31,11% de acertos. Essa questão apresentava um gráfico de linhas duplas. O resultado encontrado corrobora com a ideia de que os alunos sentem mais facilidade para compreender os dados representados em gráficos de barras. A mesma situação foi visto no estudo de Albuquerque (2010), que pesquisou alunos do 3º e 5º anos do Ensino Fundamental e da Educação de Jovens e Adultos – correspondente à mesma escolaridade.

Ao comparamos os resultados dos alunos em função dos gráficos existentes no teste (barras e linhas), constatamos que o desempenho dos participantes foi melhor nas representações de barras, tendo os mesmos obtidos 59% de acertos nesse tipo de gráfico. Com relação ao resultado dos alunos nos gráficos de linha, verificamos que o percentual de acerto foi de 43% apenas.

Para verificar se houve diferença significativa entre as médias de acertos dos gráficos de barras e linhas, realizamos o teste de médias em pares (Paired Samples Test). Através dele, verificou-se que existe diferença estatística significativa entre as médias dos dois tipos de gráficos, [t (59) = 4,790; p = 0,000]. Isso comprova que interpretar informações em gráficos de barras foi uma atividade mais fácil para os alunos do que quando as informações estavam representadas em gráficos de linhas.

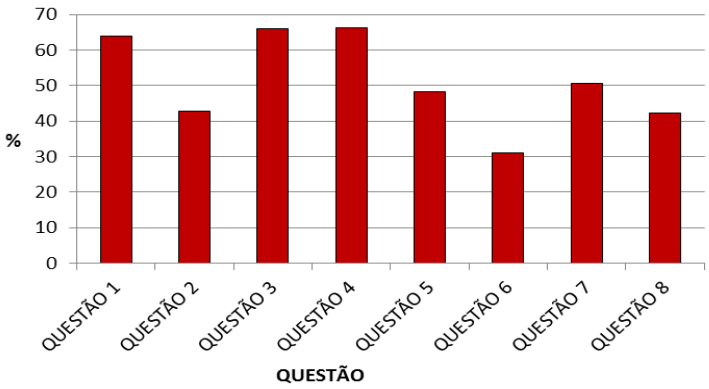


Figura 3. Desempenho dos alunos por questão

Para Albuquerque (2010), interpretação de dados em gráficos de barras se torna mais fácil para os alunos do que nos gráficos de linhas, pois esse tipo de representação aparece com mais frequência no dia-a-dia dos alunos. Esse tipo de gráficos também aparece com maior assiduidade nos livros didáticos, como foi observado nos estudos realizados por Guimarães, Gitirana, Cavalcanti e Marques (2007); e Silva e Guimarães (2013), bem como são utilizado com maior destaque pela mídia impressa, como foi visto no estudo de Cavalcanti, Natrielli e Cavalcanti (2010).

Ao analisarmos os resultados obtidos pelos alunos, considerando-se os gráficos de barras simples; barras duplas; linhas simples; e linhas duplas, como é visto no gráfico 2, verificamos que nas questões 1ª e 3ª, em que os gráficos tinham barras simples, os participantes tiveram mais sucessos em suas repostas, apresentando 65% de acerto. Já as questões 2ª e 4ª em que os gráficos apresentavam barras de duplas entradas, o desempenho dos alunos foi inferior ao de barras simples, e o percentual de acertos dos alunos nesses gráficos foi de 52%.

Com a realização do teste de média em pares (Paired Samples Test), verificamos que há diferença estatística [t (59) = 4,086; p = 0,000] entre as médias dos alunos nas questões que apresentavam gráficos de barras simples e de barras duplas.

Assim, é possível perceber que embora os alunos tenham uma maior facilidade para interpretar informações em gráficos de barras, como é visto na literatura, essa compreensão sofre uma influência negativa se os gráficos forem de barras com dupla entrada. Esse tipo de gráfico exige dos alunos um conhecimento mais aprofundado.

Em relação ao desempenho dos alunos nos gráficos de linhas simples e duplas, verificamos que o melhor desempenho dos alunos foi apresentado nas questões 5ª e 7ª, em que os gráficos dessas questões apresentavam linhas simples, tendo os participantes obtidos 49% de acerto. Nas questões 6ª e 8ª, em que os gráficos eram de linhas duplas, os alunos apresentaram maior dificuldade para interpretar as informações que estavam presentes nesses gráficos, e o percentual de acerto obtido foi de 36% somente.

A partir do teste de média em pares (Paired Samples Test), encontramos uma diferença significativa entre as médias dos gráficos de linhas simples e duplas [t (59) = 3,691; p = 0,000], o que indica que os gráficos de linha simples são mais fáceis para os alunos compreenderem as informações representadas do que nos gráficos de linhas duplas.

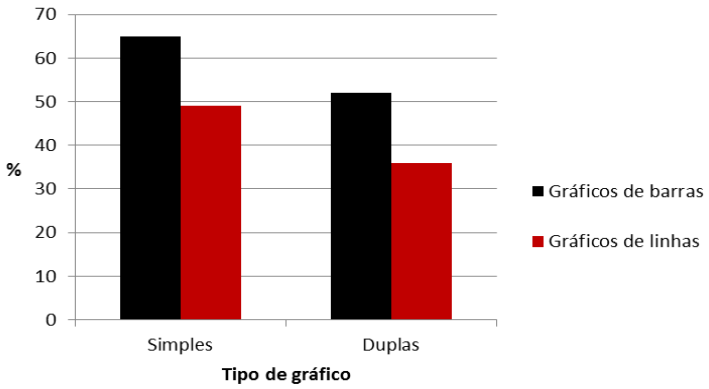


Figura 4. Desempenho dos alunos por tipo de gráfico

Em comparação com os demais tipos de gráfico, esse se mostrou ser mais difícil, por se tratar de uma representação que exige dos alunos maior conhecimento. Além disso, pode-se acreditar que, por ter pouca familiaridade com esse tipo de representação, os alunos sentem dificuldades para entender as informações presentes os mesmos. De certa forma, essa situação pode está associada a pouca ou falta de atividades nos livros didáticos que explorem esse tipo de gráfico, como foi visto no estudo realizado por Guimarães, Gitirana, Cavalcanti e Marques (2007). Diante disso, cabe ao professor suprir esse déficit apresentado pelos livros didáticos, de forma que possa possibilitar ao seu aluno o pleno conhecimento sobre gráficos.

Outro aspecto analisado em nossa pesquisa foi o tipo de questão trabalhada no teste. Todos os gráficos continham três perguntas que solicitavam: localizar frequência/categoria; localizar moda; e compor união de dois valores.

Localizar uma frequência ou categoria foi o tipo de pergunta que mais os alunos acertaram, tendo os mesmos obtidos 60% de acertos. Acreditamos que esse bom desempenho apresentado pelos participantes esteja associado ao fato de que todos os valores a serem localizados estavam explícitos na escala adotada, independentemente do tipo de escala (unitária e não unitária). Segundo Guimarães (2002) a localização de valores explícitos na escala não é uma atividade que os alunos não apresentam problemas.

Conforme Albuquerque (2010), o tipo de valor representado na escala, podendo ser implícitos ou explícitos, é um fator que pode influenciar no desempenho dos alunos nas atividades de leitura e interpretação de gráficos.

Nas perguntas relacionadas a localizar moda, verificamos que o desempenho dos alunos foi um pouco inferior ao da pergunta anterior, visto que os participantes tiveram 51% de acertos. Embora os alunos tenham sido solicitados a localizar o valor que aparece mais amiúde na representação gráfica. Nas questões em que os gráficos apresentavam duplas entradas, os participantes tinham que está atento ao fato de que era preciso localizar a categoria especifica da questão para localizar a moda, mas vimos que muitos alunos davam como resposta o valor da maior barra ou o maior pico representado pela linha do gráfico, essa necessariamente não correspondia à resposta correta. Esse foi um erro bastante comum entre os alunos.

Com relação a compor união, vimos que essa foi o tipo de pergunta que os alunos tiveram menor percentual de acerto com relação às demais perguntas, visto que apenas 41% dos alunos tiveram sucesso. Acreditamos que essa dificuldade apresentada pelos alunos pode estar associada ao fato de que os mesmos precisam localizar os valores no gráfico e fazer a soma dos mesmos. No entanto, observamos que vários alunos, apenas representaram os valores solicitados, porém não realizavam a composição. Assim, percebem que os

participantes não entendiam que era necessário fazer uma adição com os números localizados.

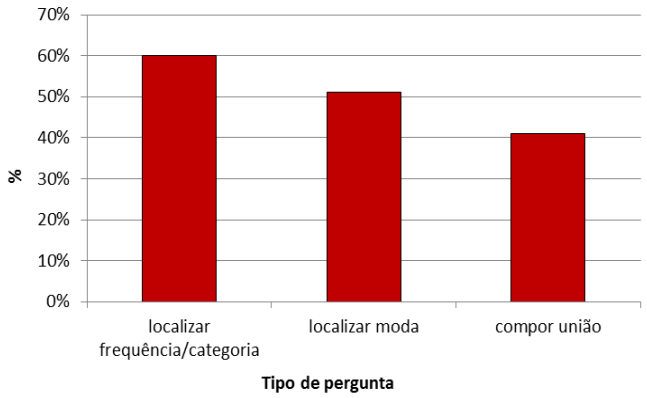


Figura 5. Desempenho dos alunos em função dos tipos de perguntas

4. Considerações

Diante dos resultados apresentados, salientamos a necessidade de avançar com pesquisas que busquem investigar o desempenho dos alunos aos realizarem atividades de interpretação de gráficos, tendo em vista que o tema assume um importante papel social, uma vez que o seu uso é constantemente explorado pela mídia, que por sua vez nem sempre apresenta informações com imparcialidade.

Verificamos também que o desempenho dos alunos foi melhor quando às informações estavam representadas nos gráficos com barras simples do que quando as informações estavam representadas em gráficos com barras duplas, com linha simples e/ou com linhas duplas.

Da mesma forma, percebemos também que, independentemente do gráfico, ser de barras ou de linhas, os alunos tiveram maior facilidade para responder as questões quando as mesmas estavam em gráficos de barras ou linhas simples. Diante disso, ressaltamos a necessidade de se explorar igualmente os diferentes tipos de representações para que os alunos tenham condições de inferir sobre as informações representadas nos diversos tipos de gráficos.

A partir desses resultados, que apresentam apenas a compreensão de alguns alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, torna-se importante sugerir que se realizem outros estudos com alunos de diferentes anos escolares, com o intuito de verificar o desempenho dos alunos em função dos anos de escolaridades.

Assim, entendemos que é de fundamental importância promover as discussões a respeito da temática, por acreditar que a partir dessas, possamos contribuir para um direcionamento das práticas educativas, tendo em vista que tal conteúdo é tão presente e importante em nosso dia-a-dia.

Referencias

Albuquerque, R. G. C. (2010). *Como adultos e crianças compreendem a escala representada em gráficos.* Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e tecnológica - Universidade Federal de Pernambuco.

Barros, P., Martins, C., & Pires, M. (2009). Moda, média e mediana: perspectivas dos alunos vs trabalho dos professores. *In: ProfMat, Anais...*Viana do Castelo.

Cavalcanti, M. R. G., Natrielli, K. R. B. & Guimarães, G. L. (2010). Gráficos na Mídia Impressa. *Bolema*, 23 (36), 733 a 751.

Guimarães, G. L. (2002). *Interpretando e construindo gráficos de barras*. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva). Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

Guimarães, G. L., Gitirana, V. G. F., Cavalcanti, M., & Marques, M. (2007). Livros didáticos de matemática nos anos iniciais: análise das atividades sobre gráficos e tabelas. *In IX Encontro Nacional de Educação Matemática, Anais...* Belo Horizonte, 2007.

Lemos, M. P. (2002). *Professorandos analisando atividades de interpretação de gráficos de barra*s. Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Educação – Universidade Federal de Pernambuco.

Magina, S., Cazorla, I., Leite, A. P., & Pagan, A. (2009). Conversão de registros na construção de tabelas e gráficos: estudo comparativo entre alunos do ensino básico. *In: VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, (Vol. 1. pp. 475-476). Puerto Montt. Sociedad Chilena de Educación Matemática.

Ministério da Educação e Desposto, Secretaria de Educação Fundamental, Brasil. (1997). *Parâmetro Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental I – 1ª à 4ª série*. Brasilia.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2009) *Investigações matemática na sala de aula. 2ª edição*. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

Monteiro, C., & Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education 2* (3), 188-207.

Rego, A. L. B. (2004). A representação gráfica no cotidiano e na sala de aula. *In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Anais...* Recife, 2004.

Silva, M. B. E. & Guimarães, G. L. (2013). *O conceito de escala em livros didáticos de matemática do 4º e 5º ano do ensino fundamental*. (Trabalho ainda não publicado).

Auxiliando alunos do 4º ano do Ensino Fundamental no desenvolvimento do pensamento estatístico

Keli Cristina Conti[1], Eduardo L. Pereira[2], Dione L. de Carvalho[1], Carolina Carvalho[3]

[1]Universidade Estadual de Campinas – Unicamp
[2]Escola Municipal de Ensino Fundamental Prefeito Takao Ono
[3]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Resumo

Tendo em vista os apontamentos dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1997) sobre a importância do Tratamento da Informação na sociedade atual, e os objetivos apresentados com relação à construção de procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando gráficos (representação que aparece frequentemente em nosso dia-a-dia), propusemos a sequência de atividades "Comemorando aniversários e construindo um gráfico" aos 31 alunos de um 4º ano do Ensino Fundamental (alunos de 9 anos), da cidade de Atibaia (Estado de São Paulo - Brasil). O trabalho desenvolvido com os alunos pode ser descrito como obedecendo as fases da investigação: problematização, planejamento e execução da pesquisa, detalhamento da escolha do tema, coleta de dados, construção de um gráfico de colunas, interpretação dos resultados encontrados e produção de texto, utilizando o gênero carta, a partir da atividade, buscando caminhar para a literacia estatística. Acreditamos que pudemos propiciar, atendendo aos limites da idade e ano escolar dos alunos envolvidos, momentos para que pudessem interpretar e explicar o comportamento dos dados estatísticos, num contexto de sala de aula, buscando o significado dessa informação e a oportunidade de comunicar os resultados a outra pessoa, evidenciando, desta forma, sua importância em função de seu uso atual, buscando instrumentalizar os alunos para exercerem sua cidadania no mundo que nos cerca.

Palabras clave: Ensino Fundamental; Educação Estatística; Literacia Estatística.

.

1. Introdução

A Estatística, de acordo com Cazorla e Utsumi (2010), estava relacionada, em seus primórdios, à organização de informações do Estado, objetivando subsidiar a tomada de decisões políticas, econômicas e sociais. A partir da década de 1970, segundo as mesmas autoras, surgiu mundialmente um movimento que reconheceu a importância do desenvolvimento do raciocínio estatístico e probabilístico e, devido a isso, muitos países passaram a inserir a Estatística na Educação Básica. No Brasil, devido aos reflexos desse movimento, no final da década de 1990, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, Brasil, 1997), foi incorporada oficialmente como um dos blocos de conteúdos da estrutura curricular de Matemática, com o nome de "Tratamento da Informação".

Os PCN (Brasil, 1997, p. 56) destacam que a demanda social é que dá importância ao tema Tratamento da Informação como um bloco de conteúdo escolar, considerando que "a finalidade do destaque é evidenciar sua importância, em função de seu uso atual na sociedade". O documento aponta também que a finalidade do trabalho é "fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente em seu

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 129-135). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

dia-a-dia". O documento pontua ainda como "conteúdos conceituais e procedimentais" sobre o tema, o trabalho com:

- Leitura e interpretação de informações contidas em imagens;
- Coleta e organização de informações;
- Interpretação e elaboração de listas, tabelas simples, de dupla entrada e gráficos de barra para comunicar a informação obtida;
- Produção de textos escritos, a partir da interpretação de gráficos e tabelas (BRASIL, 1997, p. 74-75).

E sobre os "conteúdos atitudinais" (Brasil, 1997, p. 75), o despertar do "interesse por conhecer, interpretar e produzir mensagens, que utilizam formas gráficas para apresentar informações".

Consideramos que um dos grandes objetivos de um trabalho nesse sentido, proposto pelos PCN, é tornar os cidadãos letrados estatisticamente..De acordo com Cazorla e Utsumi (2010), ter esta capacidade corresponde a compreender as informações estatísticas apresentadas na forma de texto (oral ou escrito), símbolos, números e também na forma de gráficos e tabelas, quando assistem televisão, analisam anúncios, quando vão realizar suas compras, examinam um debate político ou uma propaganda eleitoral para realizar suas escolhas.

Em nossos estudos encontramos em Gal (2002, apud Cazorla e Utsumi, 2010) o que pode ajudar a sintetizar o que entendemos por Estatística numa perspectiva de letramento, ou letramento estatístico:

> [...] um adulto que vive numa sociedade industrializada passa a ser considerado letrado em Estatística quando consegue interpretar e avaliar criticamente informações estatísticas, levando em consideração os argumentos relacionados aos dados ou aos fenômenos apresentados em qualquer contexto. (Gal, 2002, apud Cazorla e Utsumi, 2010, p. 11).

Tendo em vista o objetivo citado e que o conteúdo relativo à construção e interpretação de gráficos que deveria ser trabalhado nos anos inicias do Ensino Fundamental, planejamos conjuntamente e propusemos a uma classe de 4º ano do Ensino Fundamental (alunos de 9 anos) uma sequência de atividades a respeito de sua "data de aniversário". O planejamento conjunto teve como pano de fundo um grupo colaborativo do qual participamos1. Passaremos, neste momento, a detalhar a experiência que teve várias etapas, iniciando com o que eles entendiam por "Estatística", passando pela construção e interpretação de um gráfico e, posteriormente, escrevendo uma produção escrita sobre o mesmo.

2. Construindo uma sequência de ensino com os alunos

O trabalho foi realizado na Rede Municipal da cidade de Atibaia (Estado de São Paulo, Brasil), em Maio de 2012 (1.º semestre), numa sala de 31 alunos de 9 anos, em que um dos investigadores do presente trabalho atuava como professor.

Segundo Cazorla e Utsumi (2010, p. 14), o termo "sequência de ensino" caracteriza "o tipo de atividade em que o professor conduz todas as etapas propostas em conjunto com os alunos". Durante o desenvolvimento dessa sequência de ensino, buscamos desenvolver um

[1] Objetivado a estudar Estatística numa perspectiva de letramento, foi criado em setembro de 2010, nas Faculdades de Atibaia (FAAT), um grupo de estudos, coordenado pela Prof.ª Keli, do qual fazem parte professores da Educação Básica e alunos do curso de Pedagogia da instituição.

ciclo de investigação científica, inspirados em Cazorla e Utsumi (2010). Esse ciclo de investigação dividiu-se em três fases: problematização, planejamento e execução.

Ao longo da problematização, contextualizamos as situações-problema e formulamos a primeira questão de pesquisa "O que é Estatística?". Na fase de planejamento, definimos a população a ser investigada (alunos do 4.º ano), utilizado para a coleta de dados um pequeno cartão. Para o momento da execução da pesquisa, houve a coleta de dados, o tratamento dos dados num trabalho conjunto do professor (que montou os eixos) e dos alunos participantes de nosso estudo, que auxiliaram na construção das colunas e de outros elementos do gráfico, como o título. Depois disso, foi realizada a análise e interpretação dos resultados (oralmente) e sua comunicação, através de texto (escrito), além da própria imagem na lousa.

Podemos sintetizar essas etapas no seguinte esquema (Figura 1). Passaremos, então, a detalhar a maneira como foi desenvolvida cada etapa.

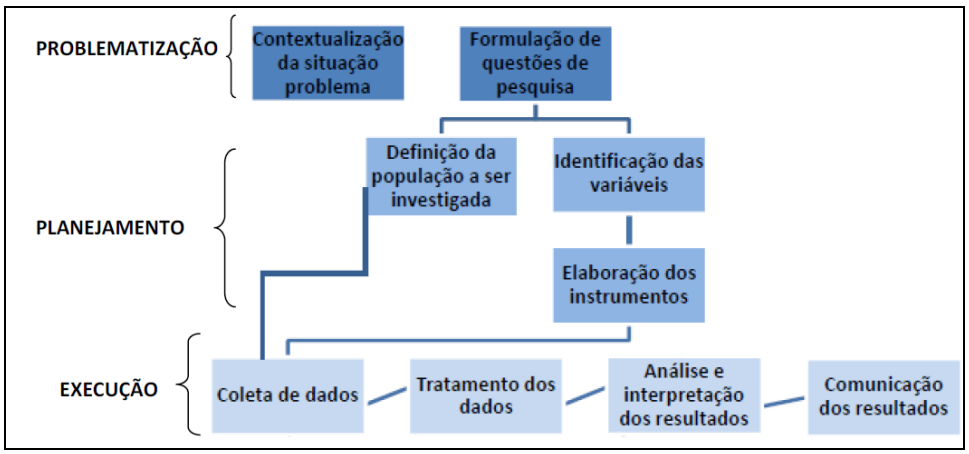


Figura 1: Fases da sequência de ensino desenvolvida com os alunos

3. Detalhando o trabalho realizado

Antes de iniciar a atividade propriamente dita, foi entregue a cada um dos alunos uma folha. Nesta folha, foi pedido para que eles se identificassem e respondessem a seguinte pergunta: "O que é Estatística?", sistematizando o momento em que estávamos desenvolvendo a fase da problematização. Dos 29 alunos presentes nesse dia, 9 relataram que "não sabiam do que se tratava", 12 responderam que "nunca ouviram falar nessa palavra", e 4 deles, segundo nossa interpretação, ousaram apresentar suas ideias, ainda que revelando sentidos distantes dos que próprios da área de conhecimento:

"é um tipo de ginástica" (K.S.L. 9 anos)
"é alguém que preserva as coisas" (J. 9 anos)
"é uma tática" (C.R. 9 anos)
"aritmética" (G.T.R.F. 9 anos)

Das respostas recebidas, consideramos que 4, de alguma forma, se aproximaram das ideias da Estatística ou até mesmo de programas televisivos em que costuma aparecer:

"Estatística quer dizer opinião" (M.H.R.A. 9 anos)
"Estatística é quando você pensa que não vai acontecer nada com você, mas pode acontecer" (Y.S.S. 9 anos)
"Eu acho que é uma coisa destacada e que chama muito a atenção" (B.L.F.D.9 anos)

> “Eu vou dar um exemplo, antes de começar o jogo o técnico dá uma estatística para cada jogador, como ele vai jogar e também suas posições” (R.A.M. 9 anos)

Esta questão introdutória no desenvolvimento da atividade foi intencional, pois, apesar de os alunos já terem contato com tabelas e gráficos, não sabiam que estavam trabalhando com Estatística, afinal, como alguns relataram, “nunca ouviram falar deste termo”.

Para a continuação da aula, foi levada uma folha de papel do tipo cartolina, com os eixos x e y traçados e trinta e dois quadrados cortados em cartolina amarela. Nessa fase, estávamos preparando o material para que os dados fossem coletados e sistematizados em um gráfico.

Para iniciar a atividade, a folha de papel foi colada na lousa e nem foi preciso questionar os alunos sobre o que achavam que seria feito. De imediato eles disseram que se tratava da construção de um gráfico. Foi uma grata surpresa essa constatação, de que já haviam tido contato com gráficos, pois em experiências com outras turmas isso não havia ocorrido, mesmo em anos posteriores.

Foi confirmado que seria construído um gráfico e anunciado que o tema seria ”os aniversários dos aluno da sala”. Foi explicitado também e que isso é uma das funções da Estatística: se constituir em um conjunto de técnicas para descrever e resumir dados, no caso os aniversários, a fim de que possamos analisar os dados resumidos e tirar conclusões. Em seguida, foi entregue um quadrado de cartolina (nosso instrumento de coleta de informações) a cada aluno (nossa população investigada), solicitando que escrevessem seu nome e o dia do seu aniversário. Surgiu o questionamento do porque não deveriam colocar o mês e o ano. Sobre o ano, chegou-se à conclusão de que não era necessário, pois não se tratava de saber a data de nascimento; a respeito do mês, pediu-se que aguardassem para verem se realmente seria necessário colocar esta informação.

Depois que todos já haviam escrito, foi construído com os alunos o eixo x, no qual foram anotados os meses do ano. Foi uma oportunidade de relembrar a ordem dos meses, cada um foi representado com a inicial de seu nome. A partir deste momento, eles compreenderam rapidamente o motivo de não ter sido colocado o mês no papel que preencheram, estaria escrito no gráfico.

Desejávamos construir o gráfico com os alunos, assim, cada um deles foi chamado até a lousa para colar seu papel no mês no qual estava aniversário. Neste momento, algumas questões foram tratadas com relação à organização dos dados e à estética exigida no trabalho com Estatística, como a largura das colunas, o espaçamento entre elas, quem deveria colar primeiro em cada mês e como poderia ser feito quando tivéssemos duas crianças que fizessem aniversário no mesmo dia. As respostas não demoraram a surgir: para a primeira questão, prontamente entenderam que a coluna de cada mês deveria ser confeccionada em ordem crescente de dia de aniversário; sobre a segunda, chegou-se rapidamente ao entendimento de que, quando tivéssemos duas pessoas que fizessem aniversário no mesmo dia, deveríamos levar em conta a ordem alfabética dos nomes.

Após todos terem colado os quadrados com os dias de seu aniversário, registrou-se, com a ajuda dos alunos, quantos aniversariantes havia em cada mês, anotando cada quantidade acima da respectiva coluna. Em seguida, construiu-se também o eixo y, que apontava a quantidade de alunos em cada mês.

Depois de os eixos do gráfico ter sido construídos, os alunos foram questionados sobre a falta de mais algum elemento no gráfico. Imediatamente um deles apontou que faltava o título, iniciando uma discussão sobre porque deveríamos colocá-lo. Após a dsicussão, os alunos expressaram ter concluído que, como nas produções de texto, o título é

que indicava do que se tratava o gráfico, facilitando o entendimento e a compreensão dos eventuais leitores, principalmente os alunos de outro período que utilizam a mesma sala. Sugeriu-se, então, o seguinte título: “Mês de aniversário dos alunos do 4° ano D da E.M.E.F. “xxx””.

Avaliou-se ser necessário colocar a data no grádico pois, apesar de todos os 31 alunos da classe estarem presentes naquele dia, se realizássemos esta atividade em outro dia, provavelmente teríamos dados diferentes, por conta de eventuais faltas.Buscamos trabalhar na perspectiva desenvolvida por Lopes (2004, p. 195), na qual é desejável que “os estudantes coletem dados genuínos e também de fontes diferenciadas, que possam realizar experimentações e elaborar conclusões”, ou seja, trabalhem com situações reais.

A partir da observação do gráfico construído, fizemos uma interpretação oral, na qual os alunos puderam apontar algumas conclusões, como meses nos quais não haviam aniversariantes, o mês no qual havia menos e o no qual havia mais e, principalmente, a função deste gráfico. Considerando que o gráfico ficaria exposto na sala até o fim do ano letivo, discutiu-se a importância de lembrar do aniversário de cada aluno e como ficamos contentes quando as pessoas lembram desta data tão especial. Compreenderam, portanto, um dos objetivos da construção deste gráfico: comemorar o aniversário dos alunos da sala.

Concordamos com Coutinho, Silva e Almouloud (2011, p. 498), quando destacam que “a leitura e interpretação da linguagem gráfica é uma habilidade altamente complexa, que não se adquire espontaneamente”. Ao interpretar um gráfico também desenvolvemos um processo dinâmico, pois estabelecemos interações entre os aspectos visuais e os aspectos conceituais, mobilizamos os conhecimentos matemáticos e do cotidiano e construímos novos significados para a interpretação (Carvalho, Monteiro e Campos, 2010).

4. Produzindo uma carta sobre a atividade

Depois de realizar a construção e interpretação oral do gráfico, foi pedido que os alunos produzissem um texto, mais especificamente uma carta (gênero textual também indicado pelos PCN, Brasil, 1997). Nesta carta, eles deveriam contar a uma outra professora, que não participara do desenvolvimento daquela aula, como havia sido a atividade, o que aprenderam e o que acharam interessante, comunicando os resultados e buscando retomar todas as etapas do que foi desenvolvido. Acreditamos que oferecemos aos alunos a oportunidade de praticar Estatística, numa aula de Matemática, de uma forma não muito usual, embora indicados nos PCN: escrevendo um texto como sistematização das atividades.

A maioria dos alunos mostrou, com relação ao gênero escolhido – carta –, seus conhecimentos prévios, como a utilização da data, saudação e despedida. Na Figura 1 podemos notar alguns desses elementos, na carta produzida por E.C.S.M. (9 anos): a preocupação em contextualizar o ocorrido, explicando o que haviam feito, a apresentando o gráfico produzido e avaliando a atividade.

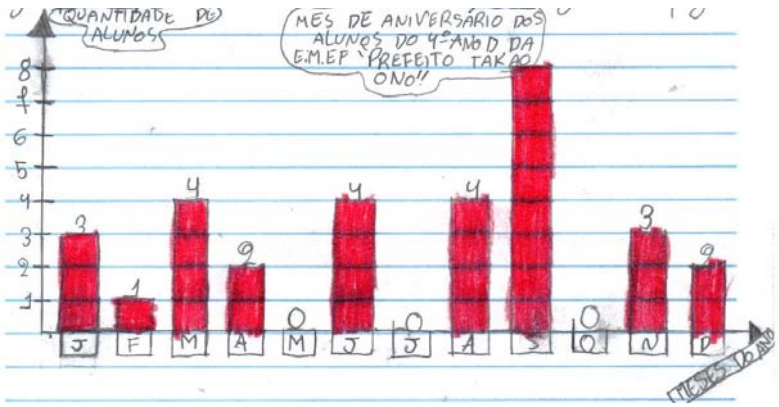
Apenas cinco alunos, entre os 25 que participaram dessa parte da atividade, não reproduziram o gráfico, mas foram bem detalhistas com relação ao que foi desenvolvido, como no caso de M.(9 anos) - (Figura 2), que inclusive incorporou termos como “vertical”, “horizontal” e “eixos” à sua carta.

Embora não tenha havido tempo, no calendário letivo, para um retorno por parte da professora aos alunos, bem como a reescrita, auxiliando alunos com mais dificuldades e corrigindo alguns erros de escrita, por parte do professor da turma, consideramos as produções muito significativas do ponto de vista do que os alunos compreenderam da atividade. De acordo com Pontes (2009, p. 159), levamos em conta que “os alunos

aprendem lendo e escrevendo sobre os conhecimentos que realmente produziram". Além disso, a atividade foi avaliada de forma positiva pelos alunos.

Atibaia, 02 de maio de 2012.

Querida professora nós do 4º ano D fizemos um gráfico de aniversário com o nosso professor, ele explicou como si faz um gráfico invés dele colocar os nomes do mês do aniversário ele colocou a primeira letra do dia que começa o dia do aniversário deixa eu fazer o gráfico para mostrar como o gente fez



Eu gostei muito dessa atividade porque antes eu não sabia o que era um gráfico nem o que significava, agora eu aprendi.

Beijo professora e Chau!!!!

Figura 1. Carta produzida pela aluna E.C.S.M.(*sic*)

Atibaia, 02 de maio de 2012

Querida Professora

O nosso professor ensinou pra gente tudo sobre um gráfico, a gente observou bem o gráfico. O gráfico se tratava dos aniversariantes da nossa sala.

A primeira coisa que o professor fez no gráfico foi desenhar os eixos na vertical e na horizontal. A segunda foi colocar os meses. A terceira coisa foram os alunos que fizeram, a gente colou no gráfico o dia que fazemos aniversário. A quarta coisa foi fazer a quantidade de alunos. A quinta foi colocar o título do gráfico e a última coisa foi colocar a data em que começamos a construir o gráfic

Foi muito legal aprender a fazer um.

Um abraço do aluno M.

Figura 2. Carta produzida pelo aluno M.*(sic)*

5. Considerações finais

Essa não foi a primeira experiência dos alunos dessa turma de 4º ano do Ensino Fundamental com atividades que contribuem para o letramento estatístico. Devido a isso, consideramos que pudemos desenvolver a proposta mais dinamicamente, com maior participação dos estudantes e também pudemos avançar nas formas de interpretação do que foi produzido.

Acreditamos que pudemos propiciar, dentro dos limites da idade e escolaridade dos alunos envolvidos, momentos para que pudessem problematizar, planejar e executar uma pesquisa e momentos que pudessem avaliar as informações estatísticas, num contexto de

sala de aula, participando na geração dos dados, buscando entendimento de conceitos básicos de Estatística, construindo um gráfico de colunas, tentando discutir e comunicar conclusões a partir de dados encontrados, buscando o significado dessa informação, ou seja, os aspectos destacados por Gal (2002). Além disso, os estudantes tiveram também a oportunidade de comunicar os resultados a outra pessoa, através da escrita, em consonância com os PCN (Brasil, 1997), evidenciando, desta forma, sua importância em função de uso atual desta área de conhecimento.

As atividades nesse sentido não se esgotaram com essa proposta. Temos estudado, preparando outras atividades para que possamos cada vez mais desenvolver o pensamento estatístico, instrumentalizando os alunos para exercerem sua cidadania no mundo que cada vez mais é dependente da estatística para tomar e justificar decisões sociais, políticas e pessoais.

Referências

Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. (1997). *Parâmetros curriculares nacionais:Mmatemática.* Brasil: Brasília: MEC/SEF.

Carvalho, L.M.; Monteiro, C. E.; Campos, T. M. (2010). Refletindo sobre a interpretação de gráficos como uma atividade de resolução de problemas. In: C. E. Lopes, C. Q. S. Coutinho, e S. A. Almouloud *Estudos e reflexões em educação estatística. Campinas: Mercado de letras.*

Cazorla, I. e Utsumi, M. C. (2010). Reflexões sobre o ensino de estatística na educação básica. In: Cazorla, I; Santana, E. (Org.). *Do tratamento da informação ao letramento estatístico.* Itabuna: Via Litterarum.

Coutinho, C. Q., Silva, M. J. e Almouloud, S. A. (2011). Desenvolvimento do pensamento estatístico e sua articulação com a mobilização de registros de representação semiótica. *Bolema*, *24*,39, 495-514.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: meanings, components, responsabilities. *International Statistical Review,70*, 1-25.

Lopes, C. A. E. (2004). Literacia estatística e o INAF 2002. In: M. C. F. R. Fonseca (Org.). *Letramento no Brasil:* habilidades matemáticas: reflexões a partir do INAF 2002. São Paulo: Global; Ação Educativa Assessoria, Pesquisa e Informação. Instituto Paulo Montenegro, pp. 187-197.

Lopes, C. A. E. (2003). *O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil.* Tese (Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Pontes, R. C. M. (2009). O potencial da escrita discursiva em aulas de matemática. In: Carvalho, D. L. (Org.); Conti, K. C. (Org.*). Histórias de colaboração e investigação na prática pedagógica em Matemática***.** 1. ed. Campinas: Alínea.

Comparación entre los contenidos del currículo chileno y español en el área de estadística y probabilidad

Morales Merino, Rodolfo, Ruiz Reyes, Karen

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo presentamos una descripción sobre los objetivos de aprendizaje del Eje temático de Datos y Probabilidad del currículum chileno, y del Bloque Tratamiento de la Información, Azar y Probabilidad del currículo español de la enseñanza primaria. Se pretende comparar las directrices curriculares en el área de la estadística y la probabilidad con la finalidad de poder entender cuál es el énfasis otorgado a este tema por cada uno de estos currículos.

Este trabajo se estructura en base a tres apartados. En el primero a modo de introducción trataremos de justificar la importancia de incorporar la educación estadística y la probabilidad en los primeros niveles escolares. En el segundo trataremos de explicar la estructura de ambos currículos y mostraremos una tabla comparativa de los objetivos de aprendizajes de los currículos chileno y español en el área de la estadística y la probabilidad. Finalmente mostraremos algunas discusiones que obtuvimos de la comparación de ambos currículos en el área señalada.

Palabras clave: currículo, eje temático, bloque de contenidos, estadística, datos y probabilidad.

1. Introducción

Diversas investigaciones señalan la importancia de la incorporación de la estadística y la probabilidad, en los niveles educacionales de primaria, para fomentar el desarrollo de la cultura estadística en la sociedad actual. (Batanero, 2002; Franklin et. al, 2007; Cuevas e Ibáñez, 2008; Batanero, Arteaga y Contreras, 2011)

El proyecto GAISE (Franklin et. al, 2007), destaca que la enseñanza actual tiene como objetivo la alfabetización estadística, lo cual implica formar ciudadanos que empleen la información estadística proveniente de diferentes medios, para su participación ciudadana, la toma de decisiones personales, su profesión y trabajo.

Siguiendo estas ideas, consideramos que se hace necesario realizar una comparación curricular de los aprendizajes que son tratados en diferentes países en el área de la estadística y la probabilidad, los que en los últimos años ha tenido un gran desarrollo en los programas curriculares. Por tal motivo, nos centraremos en los cambios curriculares recientes que afectan al currículo chileno, en enseñanza básica, los cuales compararemos con la estructura de contenidos del currículo español.

Son dos razones las que nos orientan a realizar esta comparación, una de ellas es saber cuáles son los objetivos de aprendizaje presentes en el currículum en el área de estadística y probabilidad, y mostrar evidencia, para que en un futuro, este trabajo sirva de referente para reflexiones en torno a esta área, sobre todo en la formación de futuros profesores.

Actualmente, se considera pertinente que cualquier estudiante sea capaz de descifrar,

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 137-142). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

representar en términos matemáticos y predecir resultados en situaciones que implican el manejo de datos de distinta naturaleza. (Cuevas y Hernández, aceptado). Siguiendo esta idea, nos surge la siguiente pregunta: ¿Qué proponen los currículos (chileno y español) para que se puedan lograr estas habilidades en los estudiantes? Esta es la interrogante que queremos responder mediante la descripción y comparación curricular de estos dos países.

2. El currículo de Estadística y Probabilidad en Chile y España

El currículo es una fuente fundamental para incorporar el análisis estadístico de datos para que los estudiantes puedan desarrollar la alfabetización y el pensamiento estadístico, ya que para el ciudadano común el saber estadística se ha convertido en una necesidad y una obligación de su educación integral porque implica más que su uso como herramienta, técnica o método. (Cuevas e Ibáñez, 2008)

Batanero, Arteaga y Contreras (2011), señalan que aunque la enseñanza de la estadística ha estado presente en la escuela en los últimos 20 años, encontramos una tendencia reciente a introducirla a niños cada vez más pequeños y a renovar su enseñanza, haciéndola más experimental, en forma que se pueda proporcionar a los alumnos una experiencia en estadística y probabilidad desde su infancia.

Diversos autores dan énfasis a lo que los estudiantes deben conocer para fomentar el desarrollo de la cultura estadística y proponen ciertas recomendaciones de objetivos que deben incluir los currículos, es así como lo resumen Cuevas y Hernández (aceptada) señalando las seis recomendaciones fundamentales del proyecto GAISE: (1) Énfasis en la alfabetización estadística y el desarrollo del pensamiento estadístico, (2) Usar datos reales, (3) Enfocarse en el entendimiento conceptual en lugar del mero conocimiento de procedimientos, (4) Fomentar el aprendizaje activo en el aula, (5) Utilizar la tecnología para el desarrollo del entendimiento conceptual y el análisis de datos y (6) Emplear la evaluación como mecanismo de mejora del aprendizaje estudiantil. Estos autores, también señalan que el documento incluye sugerencias detalladas respecto de como puede el profesorado llevar a la práctica estas recomendaciones con el nivel de exigencia deseado.

A continuación describiremos en forma general los lineamientos que conforman cada uno de estos currículos. La Educación Básica en Chile, de acuerdo a las actuales Bases Curriculares (Ministerio de Educación, 2012), tiene una duración de seis años, de carácter obligatorio. Se debe destacar que en el currículo chileno para la Enseñanza Básica (primaria), de primero a sexto año, los objetivos de aprendizaje se estructuran en cinco ejes temáticos: Números y Operaciones; Patrones y Álgebra, Geometría, Medición; Datos y Probabilidades.

Por otro lado, la Educación Primaria en España, tiene carácter obligatorio y gratuito, con una duración de seis cursos académicos, de los seis a los doce años de edad. El currículo español se organiza en tres ciclos de dos años cada uno, y en cuatro bloques de contenidos para cada ciclo: Números y operaciones; Medida; Geometría; Tratamiento de la información, azar y probabilidad (MEC, 2007).

Tabla 1. Comparación de los contenidos de Estadística y Probabilidad del currículo español y chileno

Bloque 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad.	Eje Datos y Probabilidades
Primer Ciclo *Gráficos estadísticos:* - Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos.	**Primero básico** - Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas.

- Utilización de técnicas elementales para la recogida, clasificación, ordenación y registro de datos de datos en contextos familiares y cercanos. - Representación gráfica: diagramas de barras. - Disposición favorable para interpretar y producir información que utiliza una forma gráfica de representación. *Carácter aleatorio de algunas experiencias:* - Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad. - Participación y colaboración activa en el trabajo en equipo y el aprendizaje organizado a partir de la investigación sobre situaciones reales. Respeto por el trabajo de los demás.	- Construir, leer e interpretar pictogramas. **Segundo básico** - Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas. - Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas. - Construir, leer e interpretar pictogramas con escala y gráficos de barra simple.
Segundo Ciclo *Gráficos y tablas:* - Tablas de datos. Iniciación al uso de estrategias eficaces de recuento y análisis de datos. - Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. - Lectura e interpretación de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana. - Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares. - La representación gráfica: diagramas de barras y pictogramas. - Disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara. *Carácter aleatorio de algunas experiencias:* - Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. *Introducción al lenguaje del azar:* - Constatación del carácter aleatorio de algunas experiencias. - Confianza en las propias posibilidades, y curiosidad, interés y constancia en la interpretación de datos presentados de forma gráfica.	**Tercero básico** - Realizar encuestas, clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas y visualizarlos en gráficos de barra. - Registrar y ordenar datos obtenidos de juegos aleatorios con dados y monedas, encontrando el menor, el mayor y estimando el punto medio entre ambos. - Construir, leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, de acuerdo a información recolectada o dada. - Representar datos usando diagramas de puntos. **Cuarto básico** - Realizar encuestas, analizar los datos y comparar con los resultados de muestras aleatorias, usando tablas y gráficos. - Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo. - Leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala y comunicar sus conclusiones.

Tabla 2. Comparación de los contenidos de Estadística y Probabilidad del currículo español y chileno

Bloque 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad.	Eje Datos y Probabilidades
Tercer Ciclo *Gráficos y parámetros estadísticos:* - Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares, utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. - Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos: diagramas de barras, pictogramas, polígonos de frecuencias y diagramas de sectores. - Valoración de la expresividad del lenguaje gráfico para la representación de datos. - Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos. - La media aritmética, la moda y el rango, aplicación a situaciones familiares. - Disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara. - Obtención y utilización de información para la realización de gráficos.	**Quinto básico** - Calcular el promedio de datos e interpretarlo en su contexto. - Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento por sobre la base de un experimento aleatorio, empleando los términos seguro – posible - poco posible - imposible. - Comparar probabilidades de distintos eventos sin calcularlas. - Leer, interpretar y completar tablas, gráficos de barra simple y gráficos de línea y comunicar sus conclusiones. - Utilizar diagramas de tallo y hojas para representar datos provenientes de muestras aleatorias. **Sexto básico** - Comparar distribuciones de dos grupos, provenientes de muestras aleatorias, usando diagramas de puntos y de tallo y hojas.

El eje Datos y Probabilidades, del currículo chileno, tiene como principal objetivo que todos los estudiantes registren, clasifiquen y lean información dispuesta en tablas y gráficos, y que se inicien en temas relacionados con las probabilidades. Estos conocimientos les permitirán reconocer gráficos y tablas en su vida cotidiana. Para lograr este aprendizaje, es necesario que conozcan y apliquen encuestas y cuestionarios por medio de la formulación de preguntas relevantes, basadas en sus experiencias e intereses, y después registren lo obtenido y hagan predicciones a partir de ellos. (Ministerio de Educación, 2012, pp. 5)

En el currículo español, los contenidos del bloque 4, Tratamiento de la Información, Azar y Probabilidad, adquieren su pleno significado cuando se presentan en conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento. Igualmente el trabajo ha de incidir de forma significativa en la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación, para suscitar el interés por los temas y ayudar a valorar el beneficio que los conocimientos estadísticos proporcionan ante la toma de decisiones, normalmente sobre cuestiones que estudian otras áreas. Tienen especial importancia en el bloque los contenidos actitudinales, que favorecen la presentación de los datos de forma ordenada y gráfica, y permiten descubrir que las matemáticas facilitan la resolución de problemas de la vida diaria. A su vez, los contenidos de este bloque deben iniciar en el uso crítico de la información recibida por diferentes medios. (MEC, 2007, pp. 70)

Para poder visualizar la estructura de los objetivos de aprendizaje y contenidos de los currículos chileno y español, presentamos una tabla comparativa (Tabla N°1) en el área de Estadística y Probabilidad.

3. Algunas Discusiones

En ambos países las directrices curriculares incluyen los temas de estadística y probabilidad a partir de los primeros niveles de la enseñanza primaria. La estructura de los contenidos es gradual, y busca fomentar el desarrollo de competencias o habilidades que lleven a los estudiantes a registrar, clasificar, leer e interpretar datos provenientes de diversas fuentes de información presentadas en tablas y gráficos, como también, la utilización de nociones de azar y probabilidad, realización de experimentos aleatorios y el cálculo de la probabilidad de un suceso. Además, se sugiere la incorporación del uso herramientas tecnológicas como apoyo para fomentar la comprensión de los contenidos propuestos.

Al revisar la Tabla 1, podemos observar que en los dos primeros años de educación primaria, en el currículo chileno, se fomenta el estudio de datos, tablas y gráficos, presentado los experimentos aleatorios como una fuente para obtener información. En cambio, en el primer ciclo del currículo español, se comienza a introducir el lenguaje que se utiliza para describir conceptos probabilísticos como: imposible, seguro y aquello que es posible pero no seguro. Además, de la interpretación y construcción de gráficos sencillos. Sin embargo, en ambos coinciden en la recolección de datos reales para su posterior representación en tablas de información, pictogramas o gráficos de barras.

En el segundo ciclo de enseñanza primaria, como en los niveles de tercero y cuarto de educación básica, en el área de estadística, se da énfasis a los procesos de recolección y tabulación de datos, a la comunicación y justificación por parte de los elementos que se han basado para la construcción de gráficos, además, de formular y comunicar conclusiones de éstos. Se distinguen ya que en el curriculum chileno aparecen nuevas formas de representar la información como diagramas de puntos. En el área de probabilidad se incluye la realización de experimentos aleatorios y el uso de los términos relacionados con el azar y la probabilidad.

Siguiendo con lo expuesto en la Tabla 1, los dos últimos años de la enseñanza primaria en ambos currículos, se introducen las medidas de tendencia central, se amplía el trabajo con diferentes tipos de gráficas estadísticas y se aplica la estimación de la probabilidad. Sin embargo existen algunas diferencias, por ejemplo en el currículo español se introduce la técnica de la encuesta para la recogida de los datos. En el currículo de chileno para comparar distribuciones de dos grupos de muestras aleatorias se propone el diagrama de puntos y el diagrama de tallo y hojas.

Referencias

Batanero, C. (2002) Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística.*. Buenos Aires. Argentina.

Batanero, C., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *EM-TEIA. Revista de Educaçao Matematica e Tecnologica Iberoamericana, 2*(2).

Cuevas, J. H. e Ibáñez, C. (2008). Estándares en educación estadística: Necesidad de conocer la base teórica y empírica que los sustentan. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática 15*, pp. 33-45.

Cuevas, J. H. y Hernández, S. (aceptada). Propuesta didáctica para caracterizar variables y datos. *Revista Investigación Operacional*.

Franklin, C., Kader, G., Newborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007) *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) Report: a pre-k–12 curriculum framework.* American Statistical Association.

Ministerio de Educación y Ciencia. (2007). *Boletín oficial del Estado. ORDEN ECI/2211/2007, del 20 de julio, por la que se establece el currículo y regula la ordenación de la Educación Primaria.* Madrid, España.

Ministerio de Educación. (2012). *bases curriculares: matemática, educación básica.* Santiago, Chile.

Compreensão de escalas representadas em gráficos por alunos adultos pouco escolarizados

Bezerra, Lucicleide[1]; Guimarães, Gilda[2]

UFPE

Resumo

Este estudo investigou a compreensão de alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) referente à interpretação de gráficos. Participaram 37 alunos da EJA de duas escolas da Região Metropolitana do Recife, sendo uma do Ensino Fundamental II (equivalente ao 8º ano) e outra do Ensino Médio (equivalente ao 2º ano). Os participantes responderam individualmente um teste com 5 questões que envolviam a localização de valores implícitos ou explícitos representados na escala de gráficos de barras e de linha. Os resultados apontam que os alunos apresentaram um desempenho aquém do esperado para o nível de escolaridade para ambos os tipos de representação (aproximadamente 64%). Além disso, localizar um valor implícito na escala se mostrou mais difícil para o aluno do que localizar um valor explícito (47% e 78% respectivamente). Finalmente, observou-se que alunos do Ensino Fundamental II apesar de serem mais jovens (média de idade de 17 anos) e com menos escolaridade apresentaram um desempenho melhor que os alunos do Ensino Médio e mais velhos (média acima dos 28 anos). A partir dessas informações, podemos constatar que, os alunos ainda apresentam um desempenho insatisfatório quanto à interpretação de gráficos.

Palavras-chaves: Estatística, Escala, Educação de Jovens e Adultos (EJA), Gráficos.

1. Introdução

Para D´Ambrósio (2004) a escolaridade é de fato o principal fator para desenvolver a capacidade do indivíduo para observar situações do dia a dia compará-las e classificá-las, e assim dar sentido a elas na sua vida, o que entendemos que deva ser o papel da escolaridade.

No Brasil temos ainda muitos adultos pouco escolarizados. Para tal, a Educação de Jovens e Adultos (EJA) segundo a Lei de Diretrizes e Bases Brasileira (LDB) nº 9.394 é uma modalidade da educação destinada aos jovens e adultos que não tiveram acesso ou continuidade de estudos na idade própria.

Em Pernambuco – Brasil, o governo estadual criou o Programa de Aceleração de Estudos de Pernambuco (Projeto Travessia) o qual busca atender estudantes da rede pública estadual para os anos finais do Ensino Fundamental (11 a 14 anos de idade) e do Ensino Médio (15 a 17 anos) que apresentam distorção idade/série, com dois anos ou mais de defasagem escolar. A Secretaria de Educação de Pernambuco em parceria com a Fundação Roberto Marinho realiza o programa por meio da metodologia do Telecurso, em telessalas, onde os alunos assistem às aulas em vídeo com a presença de um professor e realiza avaliações ao término de cada módulo.

O Instituto Paulo Montenegro, organização vinculada ao Instituto Brasileiro de Opinião Pública e Estatística (IBOPE) através do Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional (INAF) mede o nível de alfabetismo da população adulta em nível nacional, seu objetivo é oferecer à sociedade informações sobre habilidades e práticas de leitura, escrita e matemática da população adulta brasileira.

O INAF é baseado em entrevistas e testes cognitivos aplicados em amostras nacionais de 2.000 pessoas representativas dos brasileiros e brasileiras entre 15 e 64 anos de idade,

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 143-148). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

residentes em zonas urbanas e rurais de todas as regiões do país, que estejam ou não estudando. O teste de alfabetismo envolvem a leitura e interpretação de textos do cotidiano (bilhetes, notícias, instruções, textos narrativos, gráficos, tabelas, mapas, anúncios etc.). Além do teste, aplica- se um questionário que aborda as características sócio-demográficas e as práticas de leitura, escrita e cálculo que os sujeitos realizam em seu dia a dia.

O INAF (2009), revelou que apenas 27% da população brasileira com idade de 15 a 64 anos, atingem o Alfabetismo Pleno. Por alfabetismo pleno definem: pessoas que resolvem problemas que exigem maior planejamento e controle, envolvendo percentuais, proporções e cálculo de área, além de interpretar tabelas de dupla entrada, mapas e gráficos.

Educadores matemáticos vêm desenvolvendo pesquisas que evidenciam também algumas dificuldades de adultos pouco escolarizados compreenderem representações em gráficos e, mais especificamente, as escalas representadas nos mesmos. A compreensão de escalas vem sendo considerada como um marcador das dificuldades enfrentadas pelos estudantes.

Lima (2010) investigou a construção e interpretação de gráficos por alunos da Educação de Jovens e Adultos em diferentes fases de escolarização, analisando os desempenhos dos estudantes em questões de leitura pontual, comparação, combinação, extrapolação e análise geral para cada gráfico, sendo um gráfico de linhas e dois de barras (um de categorias e outro com série de tempo).

Na construção dos gráficos várias dificuldades foram observadas. A maioria dos gráficos construídos não apresentou informações necessárias para a compreensão do mesmo (título, nomeação dos eixos, descrição das variáveis). A dificuldade com a escala foi um dos aspectos mais evidentes entre os estudantes. Apenas 12,1% dos gráficos construídos apresentaram a escala proporcionalmente adequada. Dois tipos de dificuldades foram observados no momento da construção da escala: a proporcionalidade da escala e a linha de base.

Silva (2012) investigou a transformação entre gráficos e tabelas por estudantes do Ensino Fundamental I. As atividades de construção de tabela foram duas partindo da língua natural e duas partindo de um gráfico de barras; e as atividades de construção de gráfico foram duas partindo de tabela e duas tendo como ponto de partida a língua natural. Nas atividades de construção de gráfico de barras tendo como ponto de partida a tabela ou a língua natural, observou que a ausência do descritor e dificuldades relativas à construção da escala estiveram presentes entre os estudantes. Na construção de tabela a partir do gráfico de barras várias dificuldades foram observadas relacionadas ao descritor, a escala, ao título, entre outras.

Cavalcanti (2010) investigou como adultos dos Módulos I-II e III da Educação de Jovens e Adultos compreendem a escala representada em gráficos de barras e de linha. Foram realizados testes, com o objetivo de investigar quatro variáveis: o tipo de gráfico; o valor da escala; a necessidade de o aluno localizar um valor implícito ou explícito na escala, ou de localizar uma frequência ou uma categoria a partir da escala.

O gráfico de barras com escala unitária foi o que apresentou maior percentual de acertos. Em relação à natureza das questões, as de localização de categoria a partir de frequência e principalmente de valor explícito foram considerados mais simples para os estudantes. Esse estudo mostrou que a compreensão dos alunos a respeito da escala não é algo simples, que depende de um trabalho escolar sistematizado que leve em conta tanto os aspectos estruturais da representação, como o tipo de gráfico, intervalo escalar, quanto os relacionados à estrutura das questões, como a localização de uma categoria a partir de uma frequência e vice-versa, bem como a localização de valores implícitos e explícitos.

Dentre esse escopo, selecionamos investigar como adultos da EJA do Ensino Fundamental II (idade) e do Ensino Médio (idade) compreendem a localização de valores implícitos ou explícitos representados na escala em gráficos de barras e de linha.

2. Metodologia

Participaram dessa pesquisa 37 alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) do turno da noite de 2 escolas públicas da Região Metropolitana do Recife (RMR), sendo 15 alunos do Ensino Fundamental II Fase IV (equivalente ao 8º ano do Ensino Fundamental) e 22 alunos do Ensino Médio Módulo III (equivalente ao 2º ano do Ensino Médio).

Solicitamos que os alunos respondessem individualmente um teste com 5 (cinco) questões que envolviam a localização de dados em escalas representadas em gráficos de barras e de linhas com valores apresentados explicitamente ou não. O teste proposto aos alunos foi elaborado por Cavalcanti (2010).

3. Resultados

3.1. Perfil dos participantes

Iniciamos as análises traçando um perfil dos alunos investigados apresentando a média de idade, sexo e profissão dos alunos por nível de escolaridade. A idade média dos alunos do Ensino Fundamental II é menor que 17 anos e dos alunos do Ensino Médio é acima dos 28 anos. Quanto ao sexo dos participantes, 24 são do feminino e 13 do sexo masculino.

Em relação à profissão exercida pelos alunos temos que nenhum dos alunos do Ensino Fundamental II trabalhava e no Ensino Médio dos 22 investigados, 18 realizam algum tipo de atividade remunerada. Quais sejam: auxiliar de costureira, auxiliar de cozinha, auxiliar de equoterapia, auxiliar de serralharia, auxiliar de produção, auxiliar de impressão, cabeleireira, doméstica, serviços gerais, balconista, pasteleira, vendedora, secretária, atendente (passador de jogo do bicho), logista, vendedor autônomo, atendente e auxiliar administrativo.

3.2. Análise do desempenho geral

O percentual de acertos em cada uma das questões foi obtido analisando cada questão individualmente nos itens “a”, “b” e “c”. Dessa forma, o percentual total de acertos corresponde ao percentual de alunos que acertaram cada um dos itens de cada questão.

Levando em consideração todos os níveis de escolaridade, tipos de gráfico e leitura dos valores explícitos e implícitos na escala os alunos tiveram em média 64% de acerto. NaTabela 1 é possível ver o percentual de acerto por item. Partimos do pressuposto que o desempenho dos alunos de uma mesma escolaridade pode sofrer influência de diversos fatores, tais como sexo, profissão e, principalmente, idade. Assim, nossa primeira análise foi investigar se haviam diferenças de desempenho em função da idade de alunos do mesmo nível de escolaridade.

Tabela 1. Percentual de acertos por questão e por item.

Questão	Acertos (%)
1A	49%
1B	92%
2A	85%
2B	83%

3A	56%
3B	62%
4A	20%
4B	74%
5A	23%
5B	81%
5C	83%

3.3. Análise do desempenho por faixa etária e escolaridade

Os alunos do Ensino Médio na faixa etária dos 15 aos 24 anos obtiveram um percentual de acerto de 75% enquanto os alunos da mesma faixa etária do Ensino Fundamental II de 66%. Mostrando que a escolaridade é o principal fator para desenvolver a habilidade dos indivíduos.

Todos os alunos do Ensino Fundamental II investigados tinham entre 15 e 24 anos de idade, não sendo assim possível estabelecer relação por faixa etária para esse nível de ensino. No entanto no Ensino Médio foi possível observar que quanto menor a faixa etária do aluno, maior o percentual de acerto. Esses dados ratificam as conclusões do INAF (2009) que revela que quanto menor a faixa-etária dos alunos maior o número de pessoas dentro no nível de alfabetismo pleno. Segundo o INAF (2009) 33% da população entre 15-24 são alfabetizados plenos, 32% na faixa etária de 25-34, 23% entre 35-49 e apenas 10% entre 50-64. O que mostra a importância da aprendizagem nos anos iniciais da vida dos cidadãos, a importância das pessoas serem alfabetizadas na idade correta. Ver Tabela 2.

Tabela 2. Percentual de acertos por faixa etária e nível de escolaridade

Faixa etária	E. Médio (%)	E.Fundamental II (%)
15-24	75	66
25-34	53	-
35-49	61	-
50-64	36	-
Total	56,25	66

3.4. Análise do desempenho por sexo e escolaridade

Quando analisamos o desempenho geral por sexo, observamos as mulheres tiveram um leve melhor desempenho (68%) e os homens de (63%).

3.5. Análise do desempenho por profissão e escolaridade

Os alunos investigados foram agrupados por nível de escolaridade e por serem estudantes e profissionais. Os estudantes são aqueles que apenas estudam e os profissionais são aqueles que têm um trabalho remunerado. Entretanto, não diferenciamos as profissões dos mesmos uma vez que poucas delas exigiam um trabalho mais relacionado à leitura de gráficos. As profissões de nossos participantes eram de auxiliar de costureira, auxiliar de cozinha, auxiliar de equoterapia, auxiliar de serralheria, cabeleireira, entre outros.

Verificamos que nenhum aluno do Ensino Fundamental II trabalhava, dessa forma esta relação não foi possível de ser estabelecida para esse nível de ensino. Já para os alunos do Ensino Médio, observou-se que os alunos que trabalhavam tiveram um percentual de acerto em média de 63% e os alunos que só estudavam tiveram desempenho em média de 59%.

3.6. Desempenho dos alunos em relação ao tipo de gráfico e escolaridade

Nesta pesquisa foram trabalhados dois tipos de gráficos: o de barras e o de linha. Sendo as questões 1, 2 e 5 gráficos de barras e nas questões 3 e 4 gráficos de linha. Percebemos que nos dois níveis de escolaridade o tipo barras apresentou melhor desempenho (67%) do que os de linha (61%). (Gráfico 1)

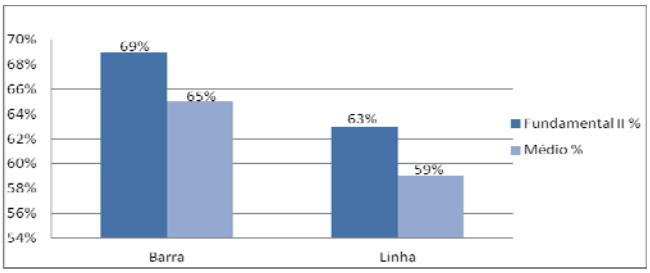


Gráfico 1. Desempenho dos alunos em relação ao tipo de gráfico e escolaridade (%)

3.7. Leitura de valores implícitos ou explícitos na escala nos gráficos de barras e de linhas por escolaridade

Ao analisar sob o aspecto da localização de um valor implícito na escala, ou seja, aquele que precisa ser deduzido, entendido com raciocínio lógico, e do valor explícito, o valor que está na escala, o que se vê, o que se lê. Localizar um valor implícito na escala se mostrou mais difícil para o aluno do que localizar um valor explícito (Gráfico 2). Com um percentual de acerto de 47% para o valor implícito e 78% para o valor explícito.

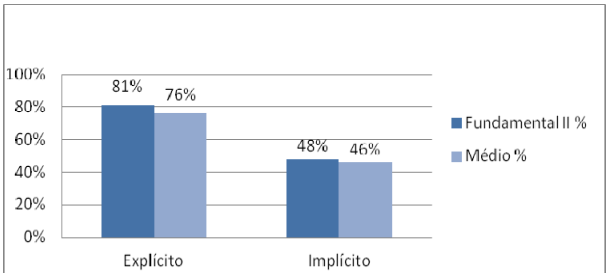


Gráfico 2 – Desempenho dos alunos em relação à localização de um valor explícito ou implícito na escala e por escolaridade

4. Nossas considerações

Este estudo tomou como estudo base a pesquisa de Cavalcanti (2010) que tinha como objetivo investigar como crianças e adultos da EJA do Ensino Fundamental II, dos anos iniciais de escolarização, compreendiam a escala representada em gráficos de barras e de linha. Nosso estudo comparou o desempenho de alunos da EJA do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio, considerando a quantidade de acertos na leitura dos gráficos de barras e de linha em função dos valores estarem ou não explícitos na escala alteram o desempenho dos alunos;

Ao analisarmos a profissão por nível de escolaridade, não foi possível fazermos comparações uma vez que todos os alunos do Ensino Fundamental II não trabalhavam. No Ensino Médio os alunos que trabalhavam tiveram um desempenho de 63% dentre os que só estudavam um desempenho de 59%. Esses resultados confirma o que afirma Oliveira (1990) sobre as experiências e conhecimentos acumulados pelos adultos em decorrência deles estarem inseridos no mundo do trabalho e das relações interpessoais.

Quanto à profissão desempenhada pelos alunos, não pudemos fazer comparações por estarem envolvidos em profissões que pouco exige conhecimento a despeito de leitura de gráficos para execução da sua profissão. Quanto ao tipo de gráfico percebemos que, como já constatado por outros estudos, os alunos nos dois níveis de escolaridade tiveram um desempenho melhor quando interpretaram gráficos de barras do que de linha.

Guimarães, Gitirana, Cavalcanti e Marques (2007), percebem que a maioria dos gráficos trabalhados em todos os anos de escolarização é o gráfico de barras (56%) (apresentados em seus diversos tipos: barras, barras múltiplas, colunas) e apenas 8% era o gráfico de linhas. Dessa forma, assim como no estudo de Cavalcanti (2010) acreditamos que a familiaridade que os alunos têm com esse tipo de gráfico pode ter influenciado no desempenho melhor no gráfico de barras em relação ao gráfico de linha.

Na análise da localização de um valor implícito ou explícito na escala é possível considerar que a localização de um valor explícito os alunos apresentam um melhor desempenho do que no valor implícito, percebemos nos alunos dos dois níveis de ensino dificuldades em compreender que existe uma continuidade numérica entre os intervalos escalados.

A partir dessas informações, assim como no estudo de Cavalcanti (2010), podemos constatar que, os alunos ainda apresentam um desempenho insatisfatório quanto à interpretação de gráficos.

Referências

Brasil, Secretaria de Educação Fundamental (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática, ensino de 1a à 4a série.* Brasília, MEC/ SEF.

Cavalcanti, M. R. G. (2010). Como adultos e crianças compreendem a escala representada em gráficos. Recife.

Cavalcanti, M. R. G., Natrielli, K. R. y Guimarães, G. (2008). *Gráficos na mídia impressa*. Trabalho de conclusão do Curso de Pedagogia da UFPE, Recife.

D'Ambrósio, U. A (2004). Relevância do projeto indicador nacional de alfabetismo funcional – INAF como critério de avaliação da qualidade do ensino de matemática. In Fonseca, M. C. F. R. (org). *Letramento no Brasil: Habilidades matemáticas*. São Paulo, Global Editora.

INAF. Encontro nacional reúne instituições que combatem o analfabetismo funcional (2011). *Boletim INAF*.

Lima, I B. (2010). Investigando o desempenho de jovens e adultos na construção e interpretação de gráficos. Recife.

MEC (1999). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática.* Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

Oliveira, M. K. (1999). Jovens e adultos como sujeitos de conhecimento e aprendizagem. *Revista Brasileira de Educação*,12, 59-73.

Silva, D. (2012). *Analisando a transformação entre gráficos e tabelas por alunos do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental*. Recife.

Suzuki, J.T. (2009). Tecnologias em educação: pedagogia. São Paulo. Pearson Education do Brasil.

Concepción de una competencia estadística para el estudiante de doctorado en Ciencias Pedagógicas

Gorina Sánchez, Alexander y Alonso Berenguer, Isabel

Universidad de Oriente, Cuba

Resumen

En el presente trabajo fue conceptualizada y explicada una competencia estadística para el estudiante de doctorado en Ciencias Pedagógicas, como competencia investigativa necesaria y deseable para favorecer su eficiente desempeño profesional. Además se argumenta la relación que existe entre dicha competencia y otras competencias investigativas.

Palabras clave: competencia, estadística, doctorado, Ciencias Pedagógicas.

1. Introducción

La sociedad contemporánea se caracteriza por estar inmersa en grandes y rápidas transformaciones tecnológicas, económicas y sociales, es por ello que las universidades tienen el encargo de formar hombres capaces de hacer frente a las mismas, lo que constituye un desafío para las instituciones educacionales. Es por ello que la formación de los profesionales se debe orientar hacia una mayor solidez en el desarrollo de sus competencias, que posibiliten desafiar los retos actuales y futuros que se imponen a su práctica profesional, así como continuar aprendiendo de manera independiente a lo largo de toda su vida.

Tales pretensiones requieren que la concepción de la formación de los profesionales se oriente hacia una mayor solidez de la formación científico-profesional. Todo ello con el objetivo de desarrollar competencias investigativas como expresión del dominio de la lógica de la investigación, cuya apropiación capacite al alumno para indagar, contrastar, representar y reinterpretar el objeto de trabajo profesional, sobre la base de unos conocimientos que se renuevan cada vez con mayor rapidez (Duzú, R., 2003).

En el ámbito de formación profesional adquiere relevancia el proceso de formación de doctores en Ciencias Pedagógicas, el que debe ser competente en la formación de otros investigadores y en la realización de investigaciones científicas significativas y trascendentes, que den solución adecuada a un conjunto variado de problemas.

Consecuentemente, la formación del estudiante de doctorado debe sustentarse en un enfoque integral que exija del desarrollo pensado de sus competencias, pues debe desarrollar una actitud investigativa que permita que pueda afrontar su práctica doctoral desde una perspectiva científica; por lo que es imprescindible el análisis crítico y reflexivo de sus competencias, de los conocimientos científicos y de la postura ética y epistemológica que guiará su quehacer.

Es apropiado que las competencias de dicho estudiante sean concebidas en el sentido de la definición de Duzú R. (2003), es decir, como una configuración psicológica que integra diversos componentes cognitivos, metacognitivos, motivacionales y cualidades de personalidad, en estrecha unidad funcional, autorregulando el desempeño real y eficiente en una esfera específica de la actividad; en correspondencia con un modelo construido en un contexto histórico-concreto.

Una vez asumida la definición de competencia que se utilizará en el presente trabajo, es de interés señalar que en su formación han trabajado numerosos autores, destacándose los resultados de H. Fuentes y otros (2004), quienes consideran la formación de competencias

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 149-156). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

como un proceso constructivo, socializado, que sólo es posible en un espacio interdisciplinar; partiendo de una concepción participativa y no directiva del proceso, con el convencimiento de que el contenido es socialmente construido e históricamente desarrollado. Estos autores han propuesto como las competencias investigativas más relevantes en la formación de doctores en Ciencias Pedagógicas las siguientes: indagativa, argumentativa, innovativa, gerencial y tecnológica (Fuentes, H. y otros, 2004).

Realmente estas competencias son imprescindibles para la formación científico investigativa de estudiantes de doctorado, pero a partir de la tendencia que caracteriza los retos del actual desarrollo científico, surgen problemas que demandan de nuevas exigencias formativas en los mismos, en especial en lo relacionado con el aprendizaje de nuevos conocimientos, tratamiento de la información y formas de razonamientos crítico, que posibiliten una actuación y toma de decisiones éticas, acorde a la dinámica y complejidad del mundo contemporáneo.

Tales exigencias requieren de la formación de nuevas competencias investigativas que complementen y dinamicen las propuestas por dichos autores. De aquí que el presente trabajo se trace como objetivo conceptualizar y fundamentar una competencia estadística para el estudiante de doctorado en Ciencias Pedagógicas (CP), que favorezca su desempeño profesional eficiente y potencie la formación de otras competencias investigativas como la indagativa, argumentativa, innovativa, gerencial y tecnológica. Tal competencia estadística debe ser concebida además como una alternativa interdisciplinar que sustente el tratamiento y la solución de problemas a lo largo de todo el ciclo investigativo.

2. La necesidad de una educación estadística en el estudiante de doctorado en CP

El uso de la Estadística en la formación de investigadores constituye en la actualidad un problema abordado por diversos educadores e investigadores a nivel mundial. Tal como señala C. Batanero (2004), la preocupación por la educación estadística no acaba con la etapa universitaria, sino que hoy en día es imprescindible una formación básica estadística para los investigadores en diversas ciencias, en aras de poder valorar y tomar decisiones sobre los diseños de su investigación, leer la literatura científica de su especialidad y comunicarse con los estadísticos profesionales a propósito del análisis de sus datos.

Esto se refuerza con la perspectiva que brinda Holmes, P. (1980), al considerar que la educación estadística es indispensable en el estudio fenómenos complejos, en los que hay que comenzar por definir el objeto de estudio y las variables relevantes, tomar datos de las mismas, interpretarlos y analizarlos. Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico basado en la valoración de la evidencia objetiva, de aquí la importancia de usar los datos para controlar los juicios propios e interpretar los de los demás.

En el caso particular del estudiante de doctorado en Ciencias Pedagógicas, ha de ser capaz de manejar la Estadística con el discernimiento de quien conoce sus limitaciones y a la vez con la eficacia de quien sabe sacar de ella la máxima utilidad en la resolución de sus problemas. Para lograr lo anterior, dicho estudiante debe conocer los fundamentos de este instrumento multidisciplinar y no limitarse a su aplicación (Holmes, P., 1980).

Por otro lado, debe puntualizarse que en los últimos años se ha incrementado la incorporación de la enseñanza de la Estadística al currículo de escuelas, carreras universitarias y programas de maestrías y doctorados en muchos países. Sin embargo, a partir del estudio Gorina, A., Alonso, I. y Zamora, L. (2007), se ha podido constatar que en Cuba no todos los programas doctorales en Ciencias Pedagógicas incluyen contenidos de Estadística, situación que influye en las insuficiencias existentes al aplicar herramientas de esta ciencia en las investigaciones desarrolladas por los estudiantes de dichos programas.

Entre las insuficiencias que se han diagnosticado por este estudio al revisar tesis doctorales defendidas en diversos programas nacionales, se destacan: limitado uso de las potencialidades de las técnicas descriptivas, inadecuada selección y aplicación de pruebas estadísticas, violación de los supuestos al aplicar las técnicas de inferencia estadística, ausencia de un diseño experimental adecuado, aplicación inapropiada de los diseños muestrales, insuficiente contextualización e interpretación de los resultados de las técnicas estadísticas utilizadas y dificultades con el uso de los software profesionales estadísticos. Estas insuficiencias observadas coinciden con algunas de las reportadas por otros estudios a nivel internacional, por ejemplo el realizado por Vallecillos, A. y Batanero, C. (1994), en el que ya se reflejaba la preocupación por el empleo de las técnicas de Inferencia Estadística en la investigación experimental y se sintetizaban algunos de los errores más frecuentes en el campo educativo.

Todo lo analizado pone de manifiesto la existencia de una contradicción en el proceso de formación científico-investigativa del citado estudiante de doctorado, en tanto que, por un lado requiere de una competencia estadística para su desempeño exitoso y por otro, no se le proporciona una adecuada formación para obtener la misma. De aquí el interés por definir las componentes que deben integrar una competencia estadística para dicho estudiante.

3. Definición de una competencia estadística para el estudiante de doctorado en CP

Para definir las componentes de la competencia estadística a establecer, se tomará como punto de partida el informe Cockcroft (1985), que hace una valoración de los requerimientos que debe contemplar una competencia estadística para la formación general, asegurando que la Estadística es una materia cultural imprescindible en la formación del individuo y que la competencia estadística requiere, competencia de los números, reconocimiento de los niveles de precisión apropiados, elaboración de las estimaciones sensatas, sentido común en el uso de los datos para apoyar un argumento, conciencia de la variedad de interpretaciones posibles de los resultados y exacta comprensión de los conceptos de amplio uso, tales como promedios y porcentajes.

Un análisis de los requerimientos anteriores permitió desechar el referido a la competencia de los números, que ha perdido actualidad debido a que los software estadísticos lo suplen en gran medida, así como redefinir y precisar otros a tener en cuentas para una futura definición de la competencia estadística del doctor en Ciencias Pedagógicas.

En esta dirección, tres conceptos que han servido de guía al perfeccionamiento de la didáctica de la Estadística en los últimos años y que por su relevancia también deben ser analizados y utilizados para llegar a precisar las componentes de una competencia estadística para el mencionado doctor, son los correspondientes a *cultura estadística*, *razonamiento estadístico* y *pensamiento estadístico*, a pesar de que a menudo se utilizan de forma indiferente. Para dicho análisis se tomarán aquellas definiciones brindadas en Assessment Resource Tools for Improving Statistical Thinking, es decir:

Cultura Estadística, implica comprender y utilizar el idioma y los instrumentos básicos de la estadística, es decir, conocer lo que significan los términos estadísticos, utilizar apropiadamente los símbolos estadísticos, conocer e interpretar las representaciones de datos (Batanero, C, 2002; Gal, I., 2002).

Razonamiento estadístico, es la forma en que las personas argumentan sobre las ideas estadísticas y el sentido que le dan a la información estadística. El razonamiento estadístico implica conectar un concepto a otro o combinar ideas acerca de los datos y la probabilidad. Significa entender y estar en capacidad de explicar los procesos estadísticos y de interpretar completamente los resultados estadísticos (Pfannkuch, M. y Wild, C., 2002; Wild, C. J., y Pfannkuch, M. 1998, 1999).

Pensamiento estadístico, implica la comprensión del por qué y de cómo se realizan las investigaciones estadísticas. Esto incluye reconocer y comprender el proceso investigativo completo (desde la pregunta de investigación a la recolección de datos, así como la selección de la técnica para analizarlos, probar las suposiciones, etc.), entendiendo cómo se utilizan los modelos para simular los fenómenos aleatorios, cómo los datos se producen para estimar las probabilidades, reconocimiento de cómo, cuándo, y por qué los instrumentos deductivos existentes se pueden utilizar, y ser capaz de entender y utilizar el contexto de un problema para emitir conclusiones y planear investigaciones (Pfannkuch, M. y Wild, C., 2002; Wild, C. J., y Pfannkuch, M. 1998, 1999).

Una vez analizadas las definiciones anteriores, y teniendo en cuenta los requerimientos del doctor en Ciencias Pedagógicas, se concluyó que deben ser considerados para una definición de competencia estadística todos aquellos elementos que conforman la definición de cultura estadística y de razonamiento estadístico, aplicando estos a aquellas herramientas de utilidad para las investigaciones pedagógicas. En el caso del pensamiento estadístico, se considera que su formación debe concebirse al nivel de reconocer y comprender el proceso investigativo completo, así como utilizar el contexto de un problema para emitir conclusiones y planear investigaciones.

Sobre la base de este análisis, se precisaron elementos esenciales que deben aparecer en la competencia estadística, como son: utilizar apropiadamente los símbolos estadísticos, comprender los conceptos y herramientas de utilidad, entender y explicar los procesos estadísticos y los resultados estadísticos, reconocer y seleccionar adecuadamente los niveles de precisión y estimadores, tener conciencia de la variedad de interpretaciones posibles de los resultados al procesar los datos para sustentar o rechazar un argumento, reconocer y comprender el proceso estadístico investigativo, completo, saber formular la hipótesis estadística, ser capaz de seleccionar la técnica estadística apropiada para la recolección y procesamiento de los datos, saber verificar los supuestos de las técnicas estadísticas que se empleen, utilizar el contexto de un problema para emitir conclusiones y planear investigaciones.

Teniendo en cuenta la definición de competencia asumida, y sobre la base de la experiencia de los autores y otros especialistas consultados, se concluyó que a los elementos anteriores se deben adicionar otros relacionados con: tener conciencia de la utilidad del empleo de la Estadística para validar sus investigaciones y poseer honradez científica en el manejo e interpretación de los resultados de sus investigaciones.

A partir de todo lo cual, se definió la competencia estadística para el estudiante de doctorado en Ciencias Pedagógicas como *la posibilidad de reconocer, en cada etapa de la investigación pedagógica, cuándo se necesita hacer uso de la Estadística, teniendo conciencia de la variedad de interpretaciones posibles de los resultados al procesar los datos para sustentar o rechazar un argumento, siendo capaz de formular hipótesis estadísticas, seleccionar y aplicar la técnica apropiada para la recolección y procesamiento de los datos, verificar los supuestos de las técnicas que se empleen, seleccionar adecuadamente los estimadores y niveles de precisión, emplear apropiadamente ciertos software estadísticos existentes, así como explicar la lógica de los procesos estadísticos empleados y los resultados alcanzados, con la suficiente honradez científica*.

4. Relación entre la competencia estadística y otras competencias investigativas

Cabe destacar que los autores del presente trabajo conciben esta competencia estadística en estrecha relación con las restantes competencias investigativas definidas por Fuentes, H. y otros (2004), es decir, con la indagativa, argumentativa, innovativa, gerencial y tecnológica; dado que le aporta recursos a las mismas, potenciando su desarrollo,

cumpliendo así las funciones de ampliación del espectro de actuación de éstas y de dinamización del proceso de investigación en Ciencias Pedagógicas.

A continuación se precisan los principales elementos que dan cuenta de la relación que se establece entre cada una de las citadas competencias investigativas y la competencia estadística, relación que se manifiesta bidireccionalmente.

Relación con la competencia indagativa

La competencia indagativa ha sido definida como la posibilidad de que el estudiante de doctorado se apropie de la cultura científica necesaria para resolver los problemas de investigación que se presentan en la rama del saber correspondiente, vinculada a la posibilidad de fundamentar adecuadamente esos problemas de investigación y la caracterización del objeto que se investiga, revelando los rasgos esenciales del mismo, a través del procesamiento y análisis crítico de la información recopilada con exhaustividad, tanto fáctica como de la literatura consultada, emitiendo juicios acerca de la misma y relacionándola convenientemente con el objetivo de la investigación que se desarrolla, a fin de poder dominar la temática de estudio, nutrirse de las experiencias anteriores y establecer los nexos entre el tema investigado y sus antecedentes (Fuentes, H. y otros, 2004).

Del análisis de ambas competencias se puede concluir que un sujeto estadísticamente competente tendrá conciencia de que generalmente las experiencias personales y la evidencia basada en anécdotas, por sí solas, no son suficientes para la toma de decisiones y la emisión de conclusiones y estará convencido de que los datos recopilados de manera intencional son necesarios para tener evidencia empírica, así como que su cuantificación le posibilitará la obtención de medidas o clasificaciones que capturen los elementos significativos de los mismos.

Otra ventaja que aporta la competencia estadística es que permite comprender mejor la información suministrada en la literatura científica que aparezca en términos de estadígrafos, tablas y gráficos, empleados para sintetizar información, así como en términos de otros modelos más complejos para describir relaciones. Además, si el investigador debe obtener información fáctica, la competencia estadística le facilitará planear y llevar a cabo de forma óptima el proceso de recolección de los datos, de manera que los resultados alcanzados tengan validez y representatividad, es decir, que sean fiables. También le ayudará en la selección y aplicación de técnicas estadísticas apropiadas para obtener resultados confiables, a partir de los cuales podrá fundamentar adecuadamente el problema de investigación y caracterizar el objeto que se investiga revelando sus rasgos esenciales.

Por otro lado, la competencia indagativa potencia el desarrollo de la competencia estadística, dado que al apropiarse el sujeto de la cultura científica necesaria para resolver los problemas de investigación que se presentan en la rama pedagógica, estará más preparado para seleccionar y aplicar las técnicas estadísticas adecuadas para dar solución a dichos problemas, así como evaluar de manera más científica los resultados que obtenga.

Relación con la competencia argumentativa

La competencia argumentativa ha sido definida como las cualidades del investigador de expresar de forma oral y escrita argumentos con base científica y uso de conceptos que permitan fundamentar y construir juicios y valoraciones, demostrando con seguridad el dominio de la cultura que se tiene acerca de la temática de estudio y la capacidad para la síntesis y la concreción, además de la cohesión y coherencia con que se brindan los nuevos fundamentos científicos en los que se sustentan las consideraciones a las que se llegan como consecuencia del proceso investigativo (Fuentes, H. y otros, 2004).

La competencia estadística garantiza la apropiación de un método de investigación que permite al doctor orientarse ante una nueva situación, aún sin necesidad de emplear

contenidos propiamente estadísticos para abordarla, condicionando su actuar a la necesidad de argumentar cada aseveración que haga a través de todo el proceso investigativo, desde una base científica. También desarrolla un gran poder de síntesis debido a que la mayoría de las técnicas estadísticas llevan implícitas la reducción de grandes volúmenes de información. Además desarrolla una actitud de inconformidad en cuanto a la aceptación de los resultados, no aprobándose los primeros que se obtienen, sino que lleva a la profundización de la situación y a acudir a la aplicación de otros conceptos y procedimientos en busca de mayor precisión y confiabilidad, con lo cual se logra que las argumentaciones sean más críticas y científicas.

Por otro lado, la competencia argumentativa contribuye al desarrollo de la competencia estadística, pues facilita la forma de explicar y fundamentar el problema de investigación. Crea una disposición hacia la búsqueda de significado y sentido lógico a las conclusiones estadísticas obtenidas, en términos del problema originalmente formulado.

Relación con la competencia innovativa

La competencia innovativa se entiende como la posibilidad de que el estudiante de doctorado sea capaz de revelar los aspectos novedosos de una investigación, relacione aspectos significativos del objeto y se represente, a través de la abstracción, la forma en que se puede incidir en el objeto de investigación con vistas a transformarlo (capacidad para la anticipación), regulando a través de los resultados parciales, el alcance de los resultados finales de la investigación y demostrando cómo modelar el objeto de investigación y el campo de acción para revelar los aspectos esenciales de su concepción, con lo cual estará en posibilidad de realizar aportes teóricos (Fuentes, H. y otros, 2004).

Una persona estadísticamente competente tiene la capacidad de abstraerse de aquellos aspectos no esenciales que están presentes en el objeto de su investigación, así como de relacionar los que resulten significativos a los efectos del objetivo que se persigue, conduciendo esto a un modelo que brinde una interpretación y representación del objeto de investigación, sobre el cual debe incidirse para transformarlo, regulando los resultados finales de la investigación. De aquí se deriva que la competencia estadística potencia el desarrollo de la innovativa.

Por otro lado, la competencia innovativa puede contribuir a fomentar la competencia estadística, en tanto garantiza la selección de los aspectos significativos del objeto bajo estudio. Al tener desarrollada la capacidad para la anticipación, es capaz de valorar si los resultados que va obteniendo se corresponden con los estimados y así puede ir regulando el proceso de solución y los resultados a obtener. Además, facilita el establecimiento de hipótesis estadísticas y la modelación del objeto.

Relación con la competencia tecnológica

La competencia tecnológica ha sido definida como la posibilidad del estudiante de doctorado al acceso y uso consecuente de los medios tecnológicos en provecho de los propósitos más trascendentes de la ciencia (Fuentes, H. y otros, 2004).

A juicio de los autores del presente trabajo, la principal tecnología a emplear por un doctor en Ciencias Pedagógicas es la relacionada con la Computación, por el papel que desempeña ésta en las investigaciones que dicho doctor tendrá que desarrollar. Por tanto, ser competente estadísticamente implica también el dominio de algunos sistemas computacionales especializados, lo cual contribuye a que dicho estudiante adquiera una competencia tecnológica. La competencia estadística facilitará que puedan manejarse con mayor eficiencia y eficacia los sistemas especializados e interpretar correctamente los resultados que se obtengan de su empleo a la solución de problemas investigativos, y que sean capaces de seleccionar entre las técnicas estadísticas que aporta el software, aquellas que más se adecuen a las condiciones del problema a resolver.

Por otro lado, a partir de esta competencia se desarrolla la capacidad de asimilar y dominar, con mayor rapidez, los nuevos sistemas especializados de estadística, y se acorta la etapa de familiarización con otros sistemas computacionales, como resultado de la experiencia adquirida mediante su manejo.

Ahora bien, si se ha logrado una competencia tecnológica por parte del investigador, éste debe haberse apropiado de la lógica interna del pensamiento computacional, que le facilitará adaptarse al manejo de diversos entornos computacionales y en particular del software estadístico, influyendo positivamente en la competencia estadística.

Relación con la competencia gerencial

La competencia gerencial se asocia a la posibilidad del estudiante de doctorado de elaborar, presentar a concursos, implementar y evaluar proyectos de investigación (Fuentes, H. y otros, 2004).

La competencia estadística hace que el individuo disponga de una metodología que lo orienta en la elaboración y presentación de proyectos a concursos, así como en la implementación y evaluación de los mismos. De manera especial le ayuda a la formulación de las hipótesis de la investigación y a la toma de decisiones, facilitándole la argumentación de las propuestas y haciéndolas más precisas.

A su vez la competencia gerencial contribuye a crear un esquema de trabajo por etapas, compatible con algunos elementos de la metodología estadística. La exigencia de argumentar y justificar, implícita en la elaboración de un proyecto de investigación, forman en el investigador la necesidad de cumplir con estas exigencias al abordar una situación estadística.

5. Conclusiones

Se conceptualizó y fundamentó una competencia estadística para el estudiante de doctorado en Ciencias Pedagógicas, como competencia investigativa necesaria y deseable, que potencia su eficiente desempeño profesional. Además, se fundamentó la relación existente entre la citada competencia y las competencias investigativas: indagativa, argumentativa, innovativa, tecnológica y gerencial. Se evidenció que dicha relación se manifiesta bidireccionalmente, es decir, que la estadística potencia el desarrollo de cada una de las otras y, a su vez, ellas individualmente potencian a la competencia estadística.

La competencia estadística aporta una metodología investigativa, perseverancia en la búsqueda de resultados más precisos, necesidad de fundamentar las aseveraciones, razonamiento crítico basado en evidencias objetivas y un gran poder de síntesis y abstracción, lo que contribuye a potenciar el desarrollo de las demás competencias investigativas. Mientras que las competencias investigativas valoradas contribuyen a desarrollar la capacidad de selección y aplicación de técnicas estadísticas adecuadas, la búsqueda de significado y sentido lógico a las conclusiones estadísticas obtenidas, así como la selección de los aspectos significativos del objeto bajo estudio y la capacidad de adaptarse al manejo de diversos software estadísticos, potenciando de esta manera la formación de la competencia estadística.

Referencias

Assessment Resource Tools for Improving Statistical Thinking. Disponible en Mayo de 2007 en: http://data.gen.umn.edu/artist/index.html

Batanero, C. (2004). ¿Hacia dónde va la educación estadística? Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. España. Disponible en Mayo de 2007 en: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/BLAIX.htm

Batanero, C. (2002). Los Retos de la Cultura Estadística. Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires. Conferencia inaugural.

Cockroft, Informe (1985). Las matemátcas sí cuentan. MEC:. Madrid.

Duzú, R. (2003). La formación de Competencias Investigativas en los estudiantes de Psicología. Tesis Doctoral. CeeS. "Manuel f. Gran". Universidad de Oriente. Cuba.

Fuentes, H., Matos, E. y Cruz, S. (2004). El Proceso de Investigación Científica desde un Pensamiento Dialéctico Hermenéutico. Reto actual en la formación de doctores. Universidad de Oriente. CeeS "Manuel F. Gran". Santiago de Cuba. Cuba.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: meaning, components, responsibility. International Statistical Review.

Gorina, A., Alonso, I. y Zamora, L (2007). La formación integral de los doctores en Ciencias Pedagógicas. Una mirada desde la educación estadística. V Taller Internacional "Innovación Educativa - Siglo XXI" Univ. Tunas, Cuba.

Holmes, P. (1980). Teaching Statistics 11 -16. Sloug: Foulsham Educational.

Pfannkuch, M. y Wild, C. (2002). Statistical Thinking Models.The University of Auckland. NewZealand. ICOTS6.

Tejada, J. (1999). Acerca de las competencias profesionales (I, II). Revista Herramientas, Números 56 y 57.

Vallecillos, A. y Batanero, C. (1994). La Inferencia Estadística en la Investigación Experimental en el Campo Educativo. Rev. Educ. Univ. Gr., Vol.8, pags. 5-16.

Wild, C. J., y Pfannkuch, M. (1998). What is statistical thinking? Proceedings of the 5th International Conference on Teaching Statistic. Volume 1-3. Singapore.

Wild, C. J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review.

Conocimiento de contenido estadístico de los maestros

Sanoja de Ramírez, Julia[1] *y Ortíz Buitrago, José*[2]

[1]UPEL-Maracay
[2]FACES-UCNA

Resumen

La Estadística es parte de la formación general en todo ciudadano, que debe iniciarse desde la escuela primaria, según lo contemplado en los currículos de la escuela venezolana. Por ello se planteó como objetivo "Estudiar el conocimiento de contenido estadístico de los maestros". La investigación se sustentó en las teorías: del pensamiento estadístico propuestas por Wild y Pfannkuch, que expresan las diferentes maneras de pensar para explorar y analizar debidamente los datos y entender su entorno; del conocimiento profesional del maestro (Shulman, 1986), considerándolo como la mejor base de conocimientos para la enseñanza por la integración e interrelación entre lo didáctico y el contenido específico de una materia. La investigación se enmarcó en el paradigma interpretativo-fenomenológico, bajo el enfoque cualitativo, cuyos informantes clave fueron: maestros de una escuela estadal ubicada en Maracay, Aragua, Venezuela. Se empleó: Observación Participante, Entrevistas conversacionales y encuesta y como técnicas de análisis: la inducción analítica y teoría fundamentada. Los hallazgos perecieran indicar la necesidad de reforzar los conceptos básicos de estadística en los maestros; esto al mostrar que existen indicios de la presencia de concepciones erróneas y dificultades en los aspectos de: visualización de datos (conceptos básicos y organización de datos); medidas de tendencia central (moda, mediana y media aritmética) y en probabilidades.

Palabras clave: Didáctica de la Estadística, Pensamiento estadístico, Conocimiento didáctico del contenido, conocimiento de contenido

.

1. Introducción

La dinámica del mundo moderno exige que todo ciudadano, para comprender su entorno requiera de una cierta alfabetización estadística, como expresa Batanero (2002) "La Estadística se considera hoy día como parte de la herencia cultural necesaria para el ciudadano educado" (p.2). Siendo así, no cabe duda que la influencia de la Estadística en la concepción del mundo actual ha sido de gran importancia, por lo tanto ha llegado a ocupar un amplio escenario en las más diversas esferas de la vida y áreas del saber. Al respecto, Tanur (1992) manifiesta que la Estadística está incorporada en las diferentes áreas del saber al verse involucrada en la solución de una variedad de problemas en los campos del quehacer humano. Esto debido a que proporciona un lenguaje formal y común para comunicar los hallazgos científicos de diversas disciplinas, donde se describe explícitamente la incertidumbre inherente a los resultados de las investigaciones

Por ello, vemos como la Estadística ha sido incorporada en los currículos de matemática en la enseñanza primaria y secundaria y como un curso propio en las diferentes carreras universitarias. Batanero (2002), León (1998) y Sanoja (2007), señalan que la Estadística está presente en forma generalizada en los diferentes niveles educativos debido a su carácter instrumental. No escapa a este hecho la educación venezolana, donde en todos los niveles del sector educativo se ha incluido la Estadística, específicamente desde 1980 se incluye como tema dentro del programa de matemática en toda la escuela primaria.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 157-164). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Sin embargo, a pesar de estar presente tópicos de Estadística en el currículo de la escuela primaria y bachillerato, en función a la experiencia de la autora como profesora de Estadística a nivel universitario en Venezuela, se percibe que los estudiantes que ingresan a la universidad llegan a los cursos iniciales de estadística con escasos o nulos conocimientos básicos de la misma, argumentando que: (a) Los maestros en el liceo y en la escuela primaria no dictaban los contenidos de Estadística y (b) los maestros cubren los temas de Estadística asignando a sus estudiantes un trabajo escrito. Con relación a esto último, León (1998) señala que los maestros de la primera y segunda etapa de Educación Básica (actual educación primaria), no desarrollan estos temas en clase o lo hacen de manera superficial por diversas razones, entre las cuales menciona las siguientes: (a) desconocimiento de estrategias metodológicas apropiadas; (b) bajo nivel de conocimientos sobre el tema; y (c) La ubicación del tema al final del programa.

Todo lo anteriormente expuesto indica que el maestro debe estar preparado para enseñar los contenidos de Estadística en la escuela y por tanto promover el proceso de aprendizaje en sus alumnos. Es por ello que esta investigación buscó dar respuesta a la siguiente interrogante: ¿qué conocimiento de contenido estadístico posee el maestro?, y para ello nos planteamos como Objetivo de investigación: Estudiar el conocimiento de contenido estadístico de los maestros

2. Marco de referencia conceptual

El conocimiento de contenido, también se conoce como conocimiento de la materia o el conocimiento de la disciplina a enseñar, es la comprensión de los hechos, conceptos, principios y marcos de una disciplina, así como las reglas de evidencia y la prueba dentro de esa disciplina. Para Shulman (1986) el conocimiento de contenido se “refiere a la cantidad y organización del conocimiento per se en la mente del profesor” (p. 9). Para pensar correctamente sobre el conocimiento de contenido requiere ir más allá del conocimiento de los hechos o conceptos de una materia.

Sin duda los profesores que enseñan una materia deben tener un buen conocimiento de las materias objeto de enseñanza, ya que nadie puede enseñar lo que no sabe. Cuando el profesor conoce la materia, se siente más seguro y motivado para impartirla. Para Shulman (1986) el profesor no sólo debe ser capaz de definir a los estudiantes las verdades aceptadas en una materia, también debe ser capaz de explicar porqué una proposición particular se considera justificada, por lo que vale la pena conocer y cómo se relaciona con otras proposiciones, tanto dentro de la disciplina y por fuera, tanto en la teoría y la práctica

El conocimiento de contenido también es esencial para diagnosticar las dificultades de aprendizaje, para valorar la calidad de los materiales de enseñanza y para desplegar una variedad de estilos de enseñanza (Shulman, 1986). Es por ello que el conocer bien el contenido de Estadística a enseñar ayuda al profesor en la implementación de actividades diferentes a emplear en el aula, profundizar en el porqué y para qué de la Estadística, su vinculación con otras áreas del saber.

Es así como vemos, que los reportes de investigación de Cabral y Vieira (2011), Jacobbe (2007), Estrada, Batanero y Fortuny (2003), Batanero, Díaz y Navas (1997) y Marques, Guimarães y Gitirana (2011), centrados en el conocimiento estadístico de profesores y futuros profesores, expresan las carencias y dificultades en referencia a los conceptos de variables y su asociación con las representaciones gráficas, como consecuencia confunden histogramas con gráficos de barras; las dificultades con respecto a los conocimientos que implican la interpretación gráfica, cometen errores relacionados con la simetría, los valores atípicos y las frecuencias acumuladas como no diferencian entre la media y la mediana. Estos investigadores señalan que la probabilidad es un área complicada

para los profesores y futuros profesores, entre los conceptos de mayor dificultad sobresale la aplicación de la regla del producto de probabilidades en contexto de reemplazo, la regla de la suma de probabilidades en eventos no mutuamente excluyentes y la interpretación de probabilidades desde un enfoque frecuencial, además de observar poco uso y dominio de representaciones como diagramas de árbol y diagramas de Venn.

Estas investigaciones desarrolladas en diferentes países alrededor del mundo presentaron un interés en común, como es el conocer si los profesores o futuros profesores tienen el conocimiento y la comprensión suficiente acerca de los conceptos fundamentales de estadística necesarios para afrontar su praxis educativa. Además, se encuentra que la Estadística es un campo poco o nada explorado en Venezuela, siendo esta una de las razones que motivó a la autora a realizar esta investigación y en función a ello estos antecedentes aportan orientaciones metodológicas en cuanto a la construcción de instrumentos de recogida de información, el enfoque al momento de los análisis y ofrecer fuentes referenciales en cuanto al conocimiento estadístico.

3. Metódica

Esta investigación se desarrolló bajo el paradigma interpretativo-fenomenológico, con un enfoque cualitativo debido a que permitió la observación e interpretación de una realidad educativa concreta y compleja, como es el conocimiento de contenido estadístico de los maestros y nos acerca a la comprensión de las exigencias que la sociedad y el sistema educativo nos plantean. En este orden de ideas, Rodríguez, Gil y García (1996) señalan que "los investigadores cualitativos estudian la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar, los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas". (p.32).

Se trabajó con los (48) maestros de dos escuelas estadales, como informantes clave. Según Rodríguez, Gil y García (1996) "la investigación cualitativa propone estrategias de selección de informantes que supone una selección deliberada e intencional" (p. 135).

La recolección de la información se realizó en dos momentos: Momento 1: a través de un taller de discusión y reflexión donde se emplearon como instrumentos: hojas de trabajo, hojas de notas y entrevistas conversacionales; y el Momento 2: se empleó la técnica de la encuesta cuyo instrumento fue un cuestionario de conocimiento de contenido estadístico (CCCE), en el cual las situaciones planteadas son similares a las empleadas en los libros de texto de Matemática desde 1° hasta 6° grado así como en el manual del maestro, en los aspectos del contenido referido en el currículo. Estos fueron validados por juicio de expertos.

4. Análisis de los resultados

El análisis se realizó a través de una comparación o contraste entre las categorías emergentes en el momento 1: Categorías del conocimiento de contenido estadístico y las concepciones detectadas en el momentos 2: Hallazgos del cuestionario de conocimiento de contenido estadístico, con el objeto de buscar coincidencias o nuevas categorías que pudiesen emerger (figura 1). Seguidamente se buscan explicaciones de acuerdo con los antecedentes, con los referentes del marco conceptual y con las reflexiones de la investigadora referidas a los propios resultados, para presentar una visión en conjunto y dar respuesta al objetivo: Estudiar el conocimiento de contenido estadístico del maestro. Sobre este tema se puntualiza que en ningún momento se pretende ni fue planteado el calificar el conocimiento estadístico per se del maestro. En todo caso, el fin que perseguimos es conocer el estado de este conocimiento de contenido estadístico que maneja el maestro y el cual debe enseñar en la primaria.

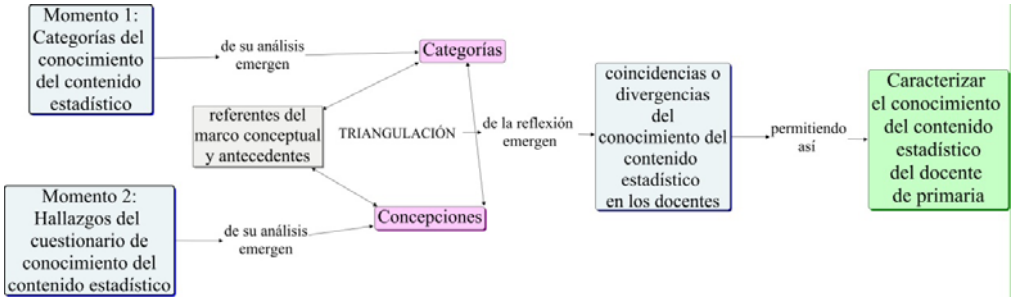


Figura 1. Proceso de análisis del conocimiento de contenido estadístico

4.1. Visualización de datos

Basándonos en las evidencias, existen algunos indicios que podrían indicar que los maestros poseen una concepción del concepto de variable como objeto estadístico, al verlo como "esa característica observable o medible", igualmente apreciamos como los maestros parecieran tener una concepción acertada sobre los conceptos de variable cualitativa y variable cuantitativa. El dominio y comprensión de estos conceptos es fundamental y de gran importancia para el momento en que el maestro tiene que poner en juego la capacidad de establecer la relación tipo de variable con las gráficas estadísticas a representar, así como la relación entre el tipo de variable con las medidas de tendencia central.

Sin embargo, no todos los maestros poseen una concepción adecuada acerca de estos conceptos, en función a las evidencias emerge, entre los maestros, una concepción matemática de los conceptos variable y dato, al asociarlos con aspectos puramente matemáticos; tal como se evidenció en el caso de variable, al descubrir respuestas como: "son términos que se utilizan en matemáticas para identificar datos"; así como en el caso de dato: " es un número que permite resolver una ecuación"; esto podría indicar que los maestros presentan dificultades en la comprensión de estos conceptos básicos estadísticos. Al respecto Hulsizer y Woolf (2009) plantean que los profesores deben estar conscientes que requieren de un dominio de los conceptos fundamentales de Estadística, conocimientos básicos e importantes para la cultura estadística, que pueden ser usados en la comprensión de la información estadística.

4.2. Organización de datos

Las tablas de frecuencias y los gráficos estadísticos son herramientas necesarias y de gran utilidad para comunicar de manera sencilla y organizada la información, permiten y facilitan la comprensión de la realidad. Dentro de esta perspectiva, Hulsizer y Woolf (2009) señalan que "las tablas y gráficas son herramientas potentes debido a que permiten transmitir y presentar información, hacen comprensibles los hechos" (p.106). En la figura 2 se presenta un resumen gráfico de las fortalezas y debilidades de los maestros en cuanto al conocimiento de contenido organización de datos.

Con relación al conocimiento de los maestros acerca de las tablas de frecuencia y los conceptos involucrados en la elaboración de las mismas, a saber: frecuencia absoluta, y frecuencia relativa; las evidencias parecen revelar que los maestros presentan fortaleza en el dominio de estos conceptos; desde el momento en que, en las entrevistas conversacionales, los maestros dejan ver el dominio conceptual y procedimental, que tienen cuando construyen tablas de frecuencia. A tal efecto, se presenta un extracto de la entrevista conversacional:

"yo también trabajo con los niños esos temas de estadística, construimos tablas de frecuencia y gráfico de barras, con unos datos. (La maestra pasó a la pizarra y construyó la tabla y el gráfico)"

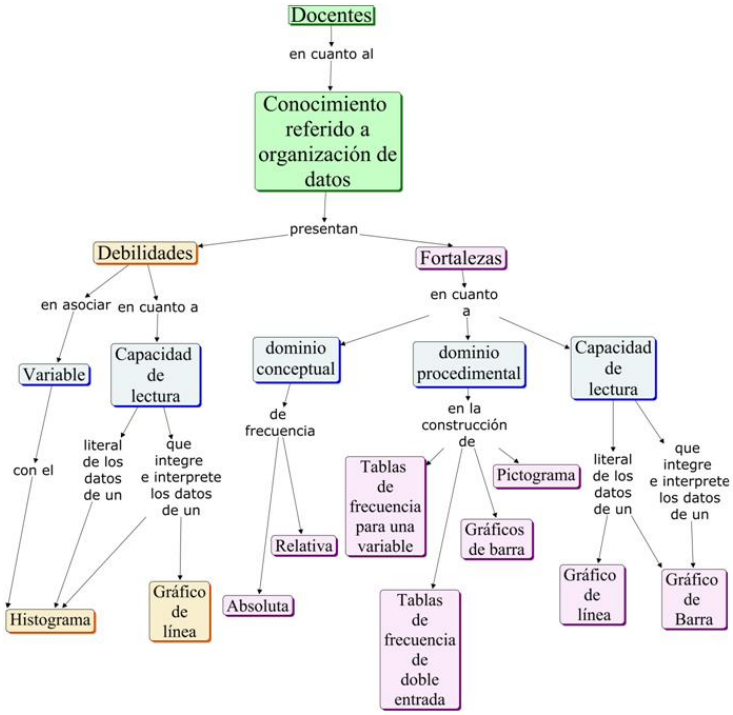


Figura 2. Caracterización del conocimiento de contenido de organización de datos

Sobre el particular, en función a las evidencias, podríamos inferir que los maestros comprenden con cierto nivel de profundidad el proceso de construcción de tablas de frecuencia, desde el primer momento que dejan ver cómo ellos construyen desde una tabla de frecuencia para una sola variable presentando la frecuencia absoluta y/o frecuencia relativa hasta tablas de doble entrada con frecuencia absolutas, además pareciera que hubiese un dominio del concepto de frecuencia relativa. A tal efecto, se presentan unos extractos de la entrevista conversacional:

Investigador: ¿a qué se refieren con tablas cruzadas?
D1: bueno, profesora, se lo hacemos en la pizarra. (Pasan dos maestros a la pizarra, realizaron un ejemplo con el color y la fruta)" [EC3 L67] el maestro de 6° responde acerca de la frecuencia relativa
D6: pero bueno,…, si eso es una regla de tres
(D6 pasó a la pizarra, hizo un ejemplo, colocó unos datos, hizo la tabla y luego explico la frecuencia relativa)" [EC3 L62]

Respecto a las representaciones gráficas, su identificación, lectura e interpretación; podemos resumir (Figura 2) que los maestros parecieran tener un dominio en la construcción de gráficos de barras y pictogramas, al poner en evidencia dicho proceso, tal como se muestra en el extracto de la entrevista conversacional:

"D9: y con esa construcción le preguntamos ¿cuál fruta de color rojo que más se repite? Y así les enseñamos a leer la tabla.
(Luego pasó un maestro a la pizarra y construyó un gráfico de barras con una de las variables de la tabla)." [EC3 L70]

Sin embargo, los maestros presentan dificultad de asociar las gráficas estadísticas con el tipo de variable, esto podría estar indicando poco dominio de los conceptos estadísticos vinculados con las gráficas estadísticas, específicamente en lo referido a asociar el histograma con los datos a analizar. Resultado similar obtuvieron Espinel, Bruno y

Plasencia (2008), al descubrir que los profesores realizaban asociaciones incorrectas entre variables y gráficos.

En cuanto a lectura de gráficos, los maestros: (a) podrían tener la capacidad de leer literalmente los gráficos de barras y de líneas, a lo que Curcio (1987) denomina leer los datos, sugiriendo esto un dominio de conocimiento procedimental; (b) parecieran ser capaces de utilizar la información presente en gráficos de barras para combinar, integrar y/o comparar los datos y así poder dar respuesta a preguntas concretas, a lo que Curcio (1987) denomina leer entre los datos. Más no así con el gráfico de línea, en este tipo de gráfico los maestros presenta dificultades en la lectura, integración e interpretación; (c) el histograma pareciera ser un gráfico difícil de comprender, al no poder leer literalmente ni interpretar los datos del gráfico, en este sentido podría ser que los maestros no posean el conocimiento procedimental para comprender el histograma, no logran ni leer los datos, ni leer entre los datos, Curcio (1987). Para Jacobbe (2007) los profesores carecen de un conocimiento avanzado necesario para entender la complejidad de un histograma. Se podría presumir que la razón por la cual a los maestros se les facilita el trabajar con gráficos de barras y no así con histograma, es porque los gráficos de barras son de uso más frecuente en la cotidianidad del maestro.

4.3. Conocimiento sobre las medidas de tendencia central

En lo relativo a la media aritmética, algunos maestros reflejan, concepciones que indican un razonamiento adecuado acerca de lo que es media, al asociarlo como valor representativo de la distribución, por ser aquel valor que representa aspectos del conjunto de datos como un todo.

Sin embargo no deja de ser preocupante como, en función a las respuestas de los maestros, aflora una concepción algorítmica de la media aritmética, centrándose en su procedimiento en lugar de la comprensión de su significado, siendo un razonamiento donde el concepto de media aritmética pierde su sentido y valor. Este es un razonamiento que es muy típico y es en su mayoría el enfoque que los maestros le atribuyen a la media aritmética.

En lo que respecta a la definición de la mediana, los maestros tienen poco dominio del concepto o no comprenden el concepto de mediana, al reflejar una concepción incompleta del mismo, esto se evidencia cuando emerge una concepción de la mediana haciendo alusión principalmente a un valor central de un conjunto de datos, donde no hay un razonamiento adecuado, al no considerar el orden en los datos.

En cuanto al concepto de moda se refiere, podría inferirse que los maestros presentan un dominio del concepto, esto en función a las respuestas dadas por los maestros, donde hacen referencia al valor de máxima frecuencia.

En lo referido al cálculo de las medidas de tendencia central, aún cuando hay maestros que mostraron tener claro el procedimiento, una gran mayoría manifestaron no tener conocimiento del algoritmo que permite determinar el valor de la medida de tendencia central, más específicamente la media y la mediana, confundiendo una con otra, pudiéndose inferir que al no comprender el concepto se les dificulta su cálculo. Es de hacer notar la exclusión de la moda debido a que todos los maestros manifestaron conocer como determinar la moda

En lo relativo a lo que representan cada una de las medidas de tendencia central, emerge una única categoría “desconocimiento del significado” referido a la dificultad de los maestros en dar respuesta al significado de la media o de la mediana. Estos indicios concuerdan con los hallazgos de otras investigaciones que estudian la comprensión de las

medidas de tendencia central, en las que predominan una debilidad y dificultad, por parte de profesores en servicio y en formación, en la comprensión del significado integral del concepto de la media y/o la mediana. (Jacobbe, 2008 y Marques, Guimarães y Gitirana, 2011).

Conocimiento sobre probabilidades

En cuanto a los conocimientos de probabilidades, se ve con preocupación la dificultad que presentan algunos maestros acerca de la comprensión de los conceptos de eventos "poco probable" y "muy poco probable"; por tanto podríamos decir que no hay una concepción clara de evento posible. En virtud de ello, se ve con preocupación la presencia de concepciones erróneas y dificultades en relación a la probabilidad por parte del maestro, desde el hecho que vemos al maestro como agente multiplicador de estos conocimientos, y así como el los ve y comprende se los enseñará al niño. Aún cuando en algunos maestros se evidencia un dominio del enfoque clásico de probabilidad, desde el momento en que son capaces de interpretar probabilidades por medio de los casos favorables.

5. Conclusiones

Los hallazgos perecieran indicar la necesidad de reforzar los conceptos básicos de estadística en los maestros; esto al mostrar que existen indicios de la presencia de concepciones erróneas y dificultades en los aspectos de: visualización de datos (conceptos básicos y organización de datos); medidas de tendencia central (moda, mediana y media aritmética) y en probabilidades. Estas deficiencias se manifestaron en lo relativo a: (a) error en la concepción del concepto de variable; (b) errores al asociar el tipo de gráfico con la variable; (c) dificultad en la comprensión de los gráficos de línea e histograma, al no tener la capacidad de lectura de estos gráficos, tanto en lectura literal del gráfico como en la interpretación del mismo, este tipo de lectura es a lo que Curcio (1987) denominó "leer los datos y leer entre los datos". Algunos maestros no comprenden el significado de la media aritmética, aún cuando conocen el procedimiento para su cálculo; en lo que respecta a la mediana, los maestros no tienen conocimiento del procedimiento para su determinación. No se evidenció dominio de concepto de evento posible.

Sin embargo, hay que destacar que así como los maestros presentaron deficiencias en algunos conceptos también tiene algunas fortalezas, tales como: (a) dominio procedimental en la construcción de tablas de frecuencia simples y de doble entrada; (b) dominio del gráfico de barras en lo relativo a su construcción, lectura e interpretación; (c) dominio en la construcción de pictogramas. Cabe destacar que el conocimiento de las reglas de cálculo por parte de los maestros no implica una comprensión real de los conceptos subyacente.

En atención a lo antes expuesto, se evidencia una necesidad de capacitación a los maestros en cuanto a conocimiento de contenido estadístico, ya que es fundamental que estos tengan una sólida comprensión de los conceptos que deben enseñar al niño.

Referencias

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. Conferencia en *las Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*, Buenos Aires. Disponible en http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS /CULTURA.PDF.

Burril, G. (2008). Fundamental ideas in teaching and how they affect the training of teachers. En C. Batanero, G. Burril, C. Reading y A. Rossman (eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Theaching and Teachers Education. Proceedings of the ICMI Study 18 y 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: ICMI/IASE.

Cabral, K. y Vieira, A. (2011) Interpretação de gráficos: explorando a concepção de profesores. Trabajo presentado en la *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, Recife, Brasil. Disponible en http://www.cimm.ucr.ac.cr/ ciaem/ind [Consulta: 2012, Enero, 15]

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*, 382–393.

Espinel, M.; Bruno, A. y Plasencia, I. (2008). Statistical graphics in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burril, C. Reading y A. Rossman (eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Theaching and Teachers Education. Proceedings of the ICMI Study 18 y 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: ICMI/IASE

Estrada, Mª. A., Batanero, C. y Fortuny, J. (2003). Dificultades de los profesores en formación en conceptos estadísticos elementales. En E. Castro (ed.), *Investigación en Educación Matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* (pp. 201-212). Granada: España: Universidad de Granada.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-K-12 curriculum framework.* Alexandria, VA: American Statistical Association. Disponible en www.amstat.org/education/gaise/.

Hulsizer, M. y Woolf, L. (2009). *A guide to teaching statistics. Innovations and best practices.* Massachusetts, USA: Wiley-Blackwell.

Jacobe, T. (2007) *Elementary school teachers´ understanding of essential topics in statistics and the influence of assessment instruments and a reform curriculum upon their understanding.* Tesis doctoral, Clemson University, South Carolina, USA Disponible en http://www.stat.auckland .ac.nz/~iase/publications/dissertations/dissertations.php [Consulta: 2010, Julio 10].

León, N. (1998). Explorando las nociones básicas de probabilidad a nivel superior. *Paradigma*. Disponible en http://www.revistaparadigma. org.ve/Doc/Paradigma982/Art7.htm [Consulta: 2007, marzo 17].

Marques, M., Guimarães, G. y Gitirana, V. (2011). Compreensões de alunos e profesores sobre média aritmética. *Bolema* 24(40), 725-745.

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Granada, España: Aljibe.

Sanoja, J. (2007). *Análisis de las actitudes hacia la estadística en los futuros profesores de educación integral.* Trabajo de ascenso no publicado, Universidad de Pedagógica Libertador. Maracay.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15,* 4-14.

Tanur, J. (1992). *La Estadística una guía de lo desconocido.* Madrid: Alianza editorial

Conocimiento matemático y didáctico en profesores de primaria para la enseñanza de las probabilidades

Vásquez, Claudia[1] *y Alsina, Angel*[2]

[1]Pontificia Universidad Católica de Chile
[2]Universidad de Girona

Resumen

Durante los últimos años el estudio de las probabilidades se ha incorporado fuertemente a lo largo de todo el currículo escolar en muchos países. Esto debido a su aplicabilidad y presencia en numerosas situaciones de la vida diaria en las cuales es necesario disponer de un razonamiento crítico que permita interpretar y comunicar distintos tipos de información. Lo anterior representa un gran desafío tanto para las instituciones formadoras como para el profesorado, pues no hay que olvidar que finalmente son ellos quienes ponen en marcha tales currículos, más aún en el caso de los profesores de primaria, pues muchos de éstos no han contado con una formación inicial apropiada que les permita responder a las nuevas exigencias.

Es en este escenario de cambios y desafíos que surge este estudio, a través del cual se busca aportar evidencias sobre los conocimientos matemáticos y didácticos que poseen los profesores de primaria en el tema probabilidades, y así responder el interrogante de ¿Cómo mejorar el conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de la probabilidades en profesores de primaria?, pues los estudios existentes son todavía escasos, sobre todo en lo que se refiere a profesores de primaria. Para ello hemos utilizado como referente teórico de la Didáctica de la Matemática el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, pues éste nos otorga las herramientas necesarias para analizar con detalle todos aquellos aspectos que se relacionan tanto con el conocimiento matemático como con el conocimiento didáctico de los profesores.

Palabras clave: conocimiento matemático y didáctico, probabilidades, profesorado, enseñanza.

1. Introducción

No es desconocido que los requerimientos de la sociedad varían muy rápidamente, cambiando al mismo tiempo lo que los alumnos necesitan aprender en la escuela. Estos cambios exigen, cada vez, una mayor preparación por parte de los profesores para ejercer la enseñanza en los distintos ciclos educacionales que conforman el sistema escolar. Tal es el caso de la probabilidad, que durante los últimos veinticinco años aproximadamente se ha ido incorporando fuertemente en los currículos de matemática tanto a nivel parvulario, básico, medio y superior en gran parte de los países desarrollados. Algunos de los principales motivos son su utilidad y presencia en numerosas situaciones de la vida diaria en las que es necesario disponer de un razonamiento crítico que permita interpretar y comunicar distintos tipos de información, además de su estrecho vínculo con distintas disciplinas. Esta iniciativa ha contado, desde 1989, con el apoyo del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) al ser este organismo el primero en incluir "Datos y Azar" como una área temática en el currículo de matemáticas en *Currículum and Evaluation Standard for School Mathematics* (NCTM, 1989). Esta iniciativa ha ido cobrando fuerza con el transcurso de los años, generando una verdadera reforma en los currículos de matemática de diversos países

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 165-172). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

que se ha plasmado, en la última década, en los *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2000) que buscan proveer de una visión y dirección necesarias para una Educación Matemática de alta calidad para todos los alumnos.

Así, dada esta situación de cambios, se hace necesario contar con profesores preparados que logren que sus alumnos alcancen estos nuevos requerimientos y que utilicen enfoques adecuados para enseñar los contenidos recientemente incorporados, como es el caso de las probabilidades. Otorgar una mejor preparación a los profesores que enseñan matemática representa un verdadero desafío, ya que en su gran mayoría no han contado durante su formación inicial con asignaturas que les permitan alcanzar una enseñanza eficaz de la probabilidad.

Bajo esta perspectiva, es necesario contar con estudios relacionados con la enseñanza de las probabilidades en la educación primaria, y más específicamente con los conocimientos matemáticos y didácticos que los profesores de primaria deben poner en juego a la hora de enseñar estos contenidos, sobre todo en países como Chile en el que tales estudios son aún muy escasos. Es en este escenario que surge esta investigación, a través de la cual se busca vislumbrar y analizar el conocimiento matemático y didáctico de los profesores de primaria para la enseñanza de las probabilidades.

En este trabajo se da a conocer de manera muy sucinta parte de nuestro estudio. Para ello se expone en primer lugar un acercamiento al estado de la cuestión, por medio de las principales investigaciones relacionadas con la problemática de estudio; en segundo lugar, la situación curricular actual de Chile en relación a la enseñanza de las probabilidades; y por último se dan a conocer algunas directrices que guiarán el estudio.

2. Las probabilidades y la formación del profesorado

Actualmente las investigaciones sobre el conocimiento matemático y didáctico de los profesores en probabilidad y su enseñanza son escasas, sobre todo en lo que se refiere a profesores de primaria en ejercicio, pues la mayoría se centra en profesores en formación y sobre todo en profesores de secundaria. Sin embargo, es posible distinguir claramente dos líneas de estudio dentro de este campo: las relacionadas con las actitudes y creencias de los profesores frente a las probabilidades y su enseñanza, y las vinculadas con el conocimiento disciplinar y didáctico. Es en esta última en la cual nuestro estudio busca profundizar, puesto que de acuerdo a investigaciones recientes se ha podido evidenciar que los profesores en formación presentan concepciones erróneas y dificultades en relación a la probabilidad y conceptos vinculados a ella (Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez, 2006; Ortiz, Serrano y Mohamed, 2009) mientras que un grupo importante evita su enseñanza debido a que lo consideran un contenido de menor importancia que podría representar dificultades para los alumnos, o bien por falta de información y preparación (Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006). Esto se debería a que los programas de formación inicial, en gran parte, no incluyen dentro de sus mallas curriculares asignaturas relacionadas con las probabilidades y su enseñanza, ya que éstas hasta hace un par de años formaban parte, casi únicamente, de la formación secundaria y no de la educación primaria como ocurre hoy (Batanero, Godino y Roa, 2004; Franklin y Mewborn, 2006).

Una de las primeras investigaciones sobre el conocimiento probabilístico de los profesores, realizada por Azcárate (1995), evidenció una baja comprensión de la noción de aleatoriedad y por ende en la comprensión del conocimiento probabilístico por parte de futuros profesores, pues su razonamiento en relación a la noción de probabilidad se encontraba elaborado más bien a partir de experiencias vinculadas a lo cotidiano que en un conocimiento formal. Situación que se ve reforzada por Begg y Edwards (1999) quienes al solicitar a un grupo de profesores de primaria dar respuesta a tres situaciones relacionadas con ideas básicas de aleatoriedad, sucesos equiprobables e independencia, detectaron una

débil comprensión de la probabilidad y de las nociones que subyacen a ella. Con ello no se quiere decir que sea necesario que los profesores cuenten con conocimientos matemáticos acabados de la probabilidad, como teoría de la medida, pero si se requiere que tengan un conocimiento profundo y acabado del contenido a enseñar y de cómo enseñarlo, en nuestro caso un conocimiento y una comprensión profunda de la probabilidad y de ciertos aspectos básicos vinculados a ella, entendiendo por *comprensión profunda* "los conocimientos que debería poseer un profesor para ejercer en plenitud su tarea de enseñar matemáticas" (Ma, 1999, pág. 13), lo que concuerda con las ideas de Schulman (1986) quien expone que es necesario que los profesores conozcan y comprendan en profundidad la matemática que deben enseñar, así como los tipos de conocimientos pedagógicos y didácticos necesarios para lograr una enseñanza eficaz: Conocimiento de los Contenidos, Conocimiento Pedagógico y Conocimiento Pedagógico de los Contenidos o Conocimiento Didáctico de los Contenidos, al reconocer la necesidad de que los profesores deben aprender y manejar otros tipos de contenidos además del conocimiento matemático para una enseñanza eficaz de las matemáticas. Según este autor, el Conocimiento Pedagógico o Didáctico de los Contenidos se relaciona con las formas de enseñar el contenido, por lo tanto va más allá del contenido en cuestión, considerando sus representaciones, ejemplos, demostraciones, etc., enfatizando en cómo hacerlo comprensible para los alumnos, para así enseñarlo mejor. Posteriormente Schulman (1987) amplía y profundiza las categorías del conocimiento base que un profesor necesita para enseñar un determinado contenido, considerando como mínimo las siguientes: Conocimiento del Contenido; Conocimiento Pedagógico General, con énfasis en los principios generales y estrategias de gestión de aula y organización; Conocimiento del Currículo, especialmente en lo referido a la comprensión de materiales y programas que sirven como "herramientas del oficio" para los profesores; Conocimiento Pedagógico del Contenido; Conocimiento de los Estudiantes y sus Características; Conocimiento de los Contextos Educativos, que va desde el trabajo del grupo o clase hasta la administración y financiamiento escolar en distintas comunidades y culturas; y Conocimiento de los Fines, Propósitos y Valores de la Educación, así como de sus fundamentos históricos y filosóficos (Schulman, 1987). Estas categorías pueden ser alcanzadas a través de la formación académica en el contenido disciplinar a enseñar; el contexto del proceso educativo y materiales relacionados; investigaciones sobre educación, relacionadas con organizaciones sociales, aprendizaje humano, enseñanza y desarrollo y otros fenómenos sociales y culturales que influyen en la labor de los profesores; y por último, la sabiduría que otorga la propia práctica. Hoy la propuesta de Schulman continua vigente, y ha sido abordada y desarrollada por variados autores, destacando el trabajo de Ball, Lubienski y Mewborn (2001) quienes introducen la noción de *"Mathematical knowledge for Teaching"*, que se define como el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno (Hill, Ball y Schilling, 2008). Estos autores, basándose en las ideas de Schulman, proponen un modelo de conocimiento matemático para la enseñanza en el que se caracteriza el conocimiento matemático necesario para la enseñanza de la matemática escolar, estableciendo, además, la existencia de una correlación positiva entre el conocimiento matemático para la enseñanza y el logro de aprendizaje matemático en los alumnos.

Es importante destacar que si bien los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza han ganado su espacio en la investigación y formación de profesores, aún son muy generales y no permiten contar con un análisis minucioso de los tipos de conocimientos que deberían poseer los profesores para lograr una enseñanza efectiva de las matemáticas, y más aún en el caso de las probabilidades. Godino (2009) realiza un análisis de los principales modelos de conocimiento matemático para la enseñanza, identificando en ellos ciertas limitaciones, por lo que propone un modelo teórico sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesor. Este modelo comprende algunas de las categorías de los modelos anteriormente descritos, que se complementan y desarrollan con elementos del Enfoque

Ontosemiótico (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Este enfoque plantea un sistema de categorías de análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor compuesto por un conjunto de facetas y niveles que interactúan entre sí para el análisis de la idoneidad didáctica, sistema que tendremos en cuenta para el caso de la probabilidad. Godino y su equipo exponen que la idoneidad didáctica de un método para la enseñanza de las matemáticas se define en función del grado con el que resulta adecuado para su puesta en práctica en el aula. La idoneidad se estudia a través de la reflexión sobre sus diferentes componentes: epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, afectivo y ecológico (Godino, Batanero y Font, 2007). Tales criterios ofrecen un marco adecuado para valorar cualquier proceso de estudio de las matemáticas (Godino, Font, Wilhelmi y de Castro, 2009). Por ello, en esta investigación se usan dichos parámetros para dilucidar el conocimiento matemático-didáctico que debe poseer un profesor para la enseñanza de las probabilidades en la educación primaria; y así alcanzar los objetivos propuestos para este estudio.

3. La probabilidad en el currículo escolar chileno

Chile no se encuentra ajeno al mayor protagonismo que ha ido adquiriendo la enseñanza de la probabilidad a nivel curricular, lo cual se ve reflejado en el proceso de actualización, ajuste y revisión que ha sufrido su currículo escolar, que busca acercarlo a las tendencias internacionales. Es así como el Ministerio de Educación (Mineduc) mediante la actualización 2009 del Marco Curricular de Educación General Básica y Media incorporó y adelantó el tratamiento de muchos contenidos en el sector de matemática, siendo "Tratamiento de la Información" el contenido con mayores modificaciones. Este bloque de contenidos se integró dentro del currículo como un nuevo eje temático, llamado "Datos y Azar", ya que de acuerdo con este ajuste curricular, los contenidos referidos a estadística deben ser abordados desde el Primer Ciclo de Educación General Básica a lo largo de los doce años de escolaridad, mientras que los contenidos de probabilidades a partir del Segundo Ciclo de Educación General Básica (Mineduc, 2009a). No obstante, este proceso de ajuste curricular ha sido recientemente sustituido por la introducción de las nuevas Bases Curriculares de Educación Básica 2012 para la asignatura de matemática, observándose nuevas exigencias para este nivel educativo, siendo una de ellas la incorporación del eje temático de "Datos y Probabilidades" como un continuo en la educación básica. Con ello, el Mineduc busca "responder a la necesidad de que todos los estudiantes se inicien en temas relacionados con las probabilidades" (Mineduc, 2012, pág. 5) y a la vez aminorar los desfases existentes entre el currículo nacional e internacionales. Desfases que han quedado de manifiesto, principalmente, con el análisis de los resultados obtenidos por los alumnos chilenos en mediciones tales como *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) y *Programme for International Student Assessment* (PISA). Si bien es cierto que los resultados de las últimas aplicaciones han experimentado una cierta mejoría, en ambas mediciones nuestro país se ubica muy por debajo del promedio internacional en el área de matemáticas. Estos bajos resultados y niveles de logros obtenidos han sido una de las principales razones por las que el Mineduc ha decidido dar un vuelco a la antigua tendencia de posponer el tratamiento de temas más desafiantes hacia los grados superiores, con un menor nivel de exigencia en los grados iniciales de la educación básica. Por el contrario, en las directrices curriculares vigentes se ha incorporado el tratamiento de las probabilidades de manera temprana y continua a lo largo de los doce años del currículo nacional (Mineduc, 2009b)

Esta iniciativa representa un avance en materia de formación ciudadana dada su aplicabilidad en situaciones cotidianas, tales como: para la comprensión de noticias, hechos, etc. y para la toma de decisiones; como conocimiento base de distintas disciplinas científicas y tecnológicas; y finalmente como herramienta para el desarrollo del razonamiento crítico.

No hay que olvidar que dada la complejidad de muchos de los conceptos vinculados al estudio de las probabilidades y la conexión de éstos con otras áreas de las matemáticas y de distintas disciplinas, es finalmente la escuela quien debe asumir, ineludiblemente, el deber de preparar a los alumnos en este ámbito. Preparación que se debe desarrollar de manera progresiva desde los primeros años de escolaridad, para así lograr capacitar a todos los alumnos para "comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad" (NCTM, 2003, pág. 54).

De este modo, dada la actual situación de cambios por la cual atraviesa el país, se hace necesario mejorar tanto los programas de formación inicial y continua del profesorado, sobre todo en lo que se refiere a la probabilidad y los aspectos vinculados a su enseñanza. Este aspecto cobra aún más relevancia si consideramos que para Chile las cifras internacionales no son alentadoras, puesto que revelan severas carencias en la calidad educativa en general y de manera particular en matemáticas. De hecho, según el Reporte de Competitividad Global 2011-2012 del *World Economic Forum*, en un ranking de 142 países, Chile se encuentra en el número 87 en calidad general de la educación, y en el número 124 en calidad de la educación de matemáticas/ciencias. Información que se ve reforzada con el informe 2010 de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), de acuerdo al cual nuestro país debe encauzar sus esfuerzos hacia la mejora de la formación de profesores en todo los niveles educativos, sobre todo en lo que se refiere a los profesores de educación básica, ya que éstos "reciben una formación general, y los conocimientos que adquieren sobre las materias no resultan suficientes ni siquiera para los cursos iniciales" (OCDE, 2010, pág.10). Otra investigación que avala lo antes expuesto y que otorga más evidencia sobre la enseñanza eficaz de la matemática es el estudio comparativo internacional *Teacher Education and Development Study in Mathematics* (TEDS-M), el cual en su informe de resultados *Breaking the Cycle, An Internacional Comparison of U.S. Mathematics Teacher Preparation* (Babcock *et al.*, 2010), da a conocer resultados bastante preocupantes, en especial para nuestro país, ya que sitúa al desempeño de nuestros futuros profesores de enseñanza básica entre los peores del mundo, incluso muy por debajo de los resultados obtenidos por países con niveles de desarrollo iguales e inferiores al chileno.

Esta necesidad de mejora no tan solo se ve avalada por cifras internacionales, sino también por estudios nacionales que, al igual que los anteriores, reflejan serias carencias en los programas de formación inicial docente de los profesores de educación básica. Así, por ejemplo, en una encuesta aplicada el 2011 a un grupo de 220 profesores que enseñan matemática en el 2º ciclo de educación básica reveló que "un 45% de ellos declara no sentirse preparado para enseñar los contenidos del eje de Datos y Azar a sus estudiantes, sobre todo aquellos vinculados a las probabilidades" (Vásquez, 2011). Resultados que se complementan con los de la Prueba Inicia que se aplica desde el año 2008 a los alumnos recién egresados de Pedagogía en Educación Básica, y cuyo objetivo es el de verificar la calidad de la formación inicial docente. Los resultados en la última aplicación de la Prueba Inicia 2011 son preocupantes puesto que "un 69% de los recién egresados de Pedagogía en Educación Básica tienen conocimientos insufici entes en lenguaje, matemática, ciencia y ciencias sociales, es decir, no demuestra conocimientos y habilidades necesarios para iniciar el ejercicio de la profesión docente" (Mineduc, 2012).

4. Metodología

Dado que la finalidad de este estudio es el de aportar evidencias con sustento teórico, orientadas al cambio y a la mejora de la práctica educativa, que permitan, finalmente, contribuir a mejorar los procesos de formación inicial y continua del profesorado en probabilidades, y por ende contribuir a mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las probabilidades en alumnos de primaria, se ha diseñado un cuestionario que considera las categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas propuestas por

Godino, Batanero y Font (2007). Como se ha indicado, la idoneidad se estudia a través de la reflexión sobre sus diferentes componentes: epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, afectivo y ecológico:

- La idoneidad epistémica se mide a partir del grado de representatividad que tienen los significados institucionales implementados o pretendidos respecto a un significado de referencia. Desde el punto de vista de las matemáticas y su aprendizaje es necesario analizar qué contenidos matemáticos aparecen y con qué frecuencia; asimismo, cuál es el modelo implícito que se asume en una actividad o pequeño grupo de actividades.
- La idoneidad cognitiva expresa el grado en que los significados pretendidos o implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.
- La idoneidad interaccional parte de la base que un proceso de enseñanza-aprendizaje tiene mayor idoneidad si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar *a priori*); por otra, resolver los problemas que surgen durante el proceso de instrucción.
- La idoneidad mediacional alude al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- La idoneidad emocional concierne al grado de implicación (interés o motivación) del alumnado en el proceso de estudio. Está relacionada con los factores que dependen de la institución y con los que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
- La idoneidad ecológica pone de manifiesto el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad, así como a los condicionamientos del entorno donde se desarrolla. En términos generales, alude al grado en que un método para aprender matemáticas resulta adecuado en el entorno donde se utiliza; el entorno incluye a todos los factores -tanto los de dentro como los de fuera del aula- que determinan la actividad que allí se lleva a cabo.

De este modo, la aplicación de este cuestionario a un grupo de profesores de primaria en ejercicio va a permitir identificar las debilidades y necesidades formativas de los profesores, así como un análisis en profundidad del conocimiento matemático y didáctico sobre probabilidades que éstos poseen. Permitiéndonos contar con evidencia suficiente para establecer directrices sobre las necesidades de formación de estos profesores. Tales directrices se verán reflejadas en el diseño de un curso de formación continua a través del aprendizaje realista y reflexivo, al tratarse de una metodología de enseñanza centrada en la realidad que permite dar sentido a la relación dialéctica entre la teoría y la práctica, y que se ha revelado como un método eficaz para la transformación de las creencias sobre la práctica docente de los estudiantes y profesores y, en definitiva, para la innovación metodológica (Alsina, 2007, 2010).

Referencias

Alsina, A. (2007). El aprendizaje reflexivo en la formación permanente del profesorado: un análisis desde la didáctica de la matemática. *Educación Matemática, 19* (1), 99-126.

Alsina, A. (2010). El aprendizaje reflexivo en la formación inicial del profesorado: un modelo para aprender a enseñar matemáticas. *Educación Matemática, 22*(1), 149-166.

Azcárate, P. (1995). El conocimiento profesional de los profesores sobre nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria. Tesis doctoral inédita. Universidad de Cádiz.

Babcock, J., Babcock, P., Buhler, J., Cady, J., Cogan, L., Houang, R., Kher, N., Patrick, J., Rosolova, K., Schmind, W.H. y Wight, K. (2010). *Breaking the cycle: An international comparison of U.S. mathematics teacher preparation.* Michigan: The Center for Research in Math and Science Education Michigan State University.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers` mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teacher to teach probability. Journal of Statistics Education, 12 (1), www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html

Begg, A. y Edwards, R. (1999). Teachers' ideas about teaching statistics. *Proceedings of the 1999 combined conference of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education.* Melbourne: AARE & NZARE. Recuperado el 23 de Agosto de 2012 en http://www.aare.edu.au/99pap/beg99082.htm.

Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM.

Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 22* (2/3), 237-284.

Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J.D., Font, V., Wilhelmi, M.R. y de Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias 27* (1), 59-76.

Hill, H. C., Ball, D.L. y Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39,* 372-400.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

MINEDUC (2009a). *Propuesta ajuste curricular: Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios*. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

MINEDUC (2009b). *Fundamentos del ajuste curricular en el sector de matemática.* Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

MINEDUC (2012). *Bases curriculares 2012: Educación básica matemática.* Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

OECD (2010). Síntesis estudio económico de Chile, 2010. Recuperado el 15 de Julio de 2012 de http://www.oecd.org/dataoecd/7/38/44493040.pdf

Ortiz, J., Serrano, L. y Mohamed, N. (2009). Competencias de los futuros profesores de primaria sobre la probabilidad. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 95-116). España: Universidad de Granada.

Ortiz, J.J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L., y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en profesores en formación. En P. Bolea, M.J. González y M Moreno (Eds,), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM.

Schulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57* (1), 1-22.

Schulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4-14.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J.M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador de Bahía, Brasil.

Vásquez, C. (2011). Estudio de las percepciones de los profesores de educación básica sobre sus necesidades de fortalecimiento para la enseñanza de la estadística y probabilidad Tesis de magister no publicada. Universidad de la Frontera.

Desafíos de la enseñanza de la estadística basada en proyectos

Juan D. Godino[1], Pedro Arteaga[1], Antonio Estepa[2], y Hernán Rivas[3]

[1]Universidad de Granada
[2]Universidad de Jaén
[4]Pontificia Universidad Católica de Chile

Resumen

Escriba aquí el resumen del trabajo. Se describen los resultados de un proceso formativo de futuros maestros sobre el tema de estadística y probabilidad desarrollado mediante una metodología didáctica basada en el uso de proyectos de análisis de datos. Aunque los proyectos permitieron dar sentido práctico a las técnicas estadísticas, la evaluación final reveló dificultades conceptuales y procedimentales que reclaman una mayor atención por parte del profesor en los momentos de institucionalización y ejercitación de los conocimientos.

Palabras clave: formación de profesores, estadística, probabilidad, métodos de proyectos, evaluación Escriba aquí las palabras clave

.

1. Introducción

El estudio de las matemáticas basado en la resolución de problemas se puede considerar actualmente como un postulado de la didáctica de las matemáticas. En el marco del "Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2012) se atribuye a las situaciones problemas un papel central, ya que se asume una concepción antropológica de la matemática, de modo que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de los sujetos al enfrentarse a determinados problemas. Esta posición es concordante con la "Teoría de situaciones didácticas" (Brousseu, 1997) y también con la "Educación matemática realista" (EMR) (Van den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005), basada en la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983; 1991). En estas teorías, y en diversas propuestas curriculares, se propone el uso de situaciones - problemas como medio de contextualizar las ideas matemáticas y generarlas a partir de la actividad de resolución, comunicación y generalización de las soluciones.

Para el caso de la estadística estos problemas adoptan la modalidad de proyectos de análisis de datos mediante los cuales los estudiantes se involucran en la resolución de un caso práctico con el que se pretende dar sentido al discurso teórico de la estadística. De esta manera se enfatizan los significados situacionales mientras que pasan a un segundo plano los restantes elementos de las configuraciones de objetos y procesos que intervienen en la práctica matemática (elementos lingüísticos, conceptuales, procedimentales, proposicionales y argumentativos). En este trabajo describimos algunos resultados de un proceso de enseñanza de nociones estocásticas elementales, desarrollado con dos grupos de estudiantes de magisterio, basado en el uso de proyectos de análisis de datos. La prueba de evaluación final revela índices de dificultad elevados para las cuestiones relacionadas con la comprensión de conceptos, la comparación de frecuencias relativas y probabilidades mediante diagramas de barras adosadas y la comprensión de la ley de los grandes números. Se infiere de estos resultados que un enfoque de la enseñanza mediante el uso de proyectos no puede desatender la comprensión conceptual y el desarrollo de destrezas procedimentales, lo que supone un desafío para el profesor de matemáticas. Este desafío se añade a otros como son el reconocimiento de la complejidad del razonamiento estadístico y la implementación de procesos de estudio que contemplen, no solo momentos de

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 173-180). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

exploración de soluciones por los propios estudiantes, sino también momentos de institucionalización, ejercitación y evaluación.

2. Enseñanza basada en proyectos

El desarrollo del razonamiento estadístico, incluye según Wild y Pfannkuch (1999, p. 227) cinco componentes fundamentales:

1. *Reconocimiento de la necesidad de los datos:* El reconocimiento de las carencias de las experiencias personales y la evidencia anecdótica lleva al deseo de basar las decisiones sobre la recogida deliberada de datos.
2. *Transnumeración:* La idea más importante en el aprendizaje de la estadística es la de formar y cambiar las representaciones de los datos relativos a un sistemas para llegar a una mejor comprensión de ese sistema, esto es, el proceso dinámico de cambiar las representaciones de los datos numéricos para facilitar la compresión.
3. *Variación:* El pensamiento estadístico moderno se refiere al aprendizaje y la toma de decisiones bajo incertidumbre, la cual surge de la omnipresente variación.
4. *Uso de un conjunto de modelos:* La principal contribución de la estadística al pensamiento ha sido su propio conjunto de modelos específicos, esto es, marcos para pensar sobre determinados fenómenos que incluyen componentes aleatorios.
5. *Conocimiento estadístico relacionado con el contexto*. El material de base del pensamiento estadístico son el conocimiento estadístico, el conocimiento del contexto y la información contenida en los datos. El pensamiento en sí mismo es la síntesis de estos elementos para producir implicaciones, comprensiones y conjeturas.

Para desarrollar este razonamiento estadístico diversos autores (Batanero, Burrill y Reading, 2011; MacGillivray y Pereira-Mendoza, 2011) indican que la mejor forma es introducir en las clases de estadística el trabajo con proyectos. “En lugar de introducir los conceptos y técnicas descontextualizadas, o aplicadas únicamente a problemas tipo, difíciles de encontrar en la vida real, se trata de presentar las diferentes fases de una investigación estadística: planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recogida y análisis de datos y obtención de conclusiones sobre el problema planteado” (Batanero y cols, 2011, p. 15).

Estos antecedentes son los que nos han llevado a aplicar una metodología didáctica basada en el uso de proyectos de análisis de datos en la formación estadística de futuros profesores de primaria; de este modo los futuros maestros participan de una metodología que ellos pueden aplicar en su práctica docente. En este trabajo describimos una experiencia formativa realizada en la Universidad de Granada que nos permite reflexionar sobre los desafíos que plantea al formador la enseñanza basada en proyectos.

3. Formación de maestros sobre nociones estocásticas elementales

El proceso formativo sobre el contenido de Estadística descriptiva y probabilidad se realizó en el contexto de la asignatura del plan de formación de maestros titulada, “Bases matemáticas para la educación primaria”, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Se aplicó a dos grupos de estudiantes en dos cursos diferentes, uno con 56 estudiantes y otro con 71. Como ya hemos señalado, el estudio se organizó en base al desarrollo de tres proyectos, los cuales describimos brevemente.

Proyecto 1: Alumno típico

Se trata de la elaboración de un perfil de los alumnos de la clase, identificando al alumno típico y analizando si hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de las características. Este proyecto se describe con detalle en Batanero y Díaz (2011, págs. 73-93)). Las variables estadísticas consideradas en nuestra implementación fueron las siguientes: Variable 1: Género (hombre, mujer); Variable 2: ¿Haces deporte? (Nada, poco, mucho); Variable 3: Número de hermanos (incluyendo al propio estudiante, o sea, número de hijos en la familia); Variable 4: Peso (Kg.); Variable 5: Dinero que llevas en el bolsillo (Cantidad de euros).

En este proyecto se proponen las siguientes cuestiones iniciales:

- ¿Cuáles son las características de un estudiante típico o representativo de la clase? ¿Cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase?
- ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de dichas características?

Proyecto 2: Lanzamiento de dos dados

El proyecto consiste en decidir la preferencia de ser uno u otro jugador al lanzar dos dados, teniendo en cuenta determinadas condiciones que refieren a la probabilidad de que gane uno u otro jugador. El planteamiento se recoge en la Figura 1.

Raquel es una maestra de Primaria y lleva unos días trabajando algunas nociones de probabilidad en su clase de 6º. Sus alumnos asignan sin dificultad probabilidades a ciertos sucesos simples, como los resultados de lanzar un dado o una moneda o de girar una ruleta con todos los sectores iguales. Para hoy decide plantear la siguiente actividad:

Actividad 1. Suma de puntos al lanzar dos dados:

Vamos a jugar con dos dados por parejas. Lanzamos los dados y sumamos los puntos obtenidos. Si resulta una suma de 6, 7, 8, ó 9 entonces gana A una ficha; si la suma es distinta de esos números gana B una ficha.

a. ¿Qué prefieres ser jugador A o B? Razona la respuesta.

b. ¿Es equitativo este juego? ¿Tiene ventaja un jugador sobre el otro según estas reglas del juego?¿Quién tiene más probabilidades de ganar? Razona las respuestas.

c. Simula el lanzamiento de dos dados. Juega con un compañero 10 veces y anota los resultados de las sumas que obtienes.

Tabla de recogida de datos para el lanzamiento de dos dados

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gana A										
Gana B										

d. ¿Quién ha ganado más veces A o B?

e. ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué? Razona las respuestas.

Figura 1. Planteamiento del proyecto

Una vez recogidos los datos para el conjunto de las parejas formadas en la clase se plantean las siguientes cuestiones:

a. ¿Quién ha ganado más veces los jugadores A o los B? ¿Qué ha ocurrido? ¿Por qué no ha ganado más veces A como era de esperar? ¿Qué puede hacer un profesor en esta situación para explicar el resultado a sus alumnos?

b. Construir un diagrama de barras adosadas en el que se represente la distribución de frecuencias relativas de la tabla 1 y la distribución de probabilidad de la variable aleatoria "suma de puntos al lanzar dos dados". ¿Cómo piensas que cambiará este diagrama si en lugar de representar las frecuencias relativas al lanzar 100 veces los dados se hubieran lanzado 10000 veces?

Proyecto 3: Eficacia de un entrenamiento deportivo

Se plantea en el modo siguiente:

Un profesor de Educación Física prepara a un grupo de 60 alumnos de 12 años para participar en una competición. Transcurridos 3 meses del entrenamiento (Septiembre a Diciembre) quiere comprobar si el entrenamiento ha sido efectivo. Para ello decide comparar el tiempo en segundos que los alumnos tardan en recorrer 30 metros en Septiembre y en Diciembre, y también quiere conocer si hay diferencias entre los chicos y las chicas.

Trabajando en equipo, elabora un informe respondiendo razonadamente a las cuestiones 1) a 5) siguientes, incluyendo los cálculos y gráficos que consideréis pertinentes:

1. ¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?
2. ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 25 metros inicialmente en Septiembre?
3. ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 25 metros después del entrenamiento en Diciembre?
4. ¿Quién ha mejorado más, los chicos o las chicas?
5. ¿Hay algún alumno (chico o chica) que se pueda considerar como "atípico" en su capacidad de correr (por su velocidad excesivamente baja)? ¿Qué se debe hacer con los sujetos atípicos desde el punto de vista estadístico?

El proceso de estudio implementado contempla, además de la realización de los proyectos, los siguientes recursos instruccionales:

- Colección de ejercicios resueltos
- Texto de estudio. Se trata de la monografía de Batanero y Godino (2003), *Estocástica para maestros*, donde se desarrollan los contenidos básicos de estadística y probabilidad.
- Tablón de docencia, el cual se utiliza como repositorio de información y como un espacio de comunicación sincrónica y asincrónica entre estudiantes y entre los estudiantes y el profesor.

4. Prueba de evaluación final

La tarea usada como evaluación final solicita responder a seis cuestiones que se presentan en la Figura 2.

Como sabes el dodecaedro tiene 12 caras. Hemos numerado las caras de un dodecaedro de la siguiente manera: una cara con el número 1, dos caras con el número 2, tres caras con e número 3, cuatro caras con el número 4, una cara con el número 5, y una cara con el 6 (Se supone que este cuerpo es perfectamente simétrico y que todas las caras pesan igual).

1. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio, "Lanzar el dado dodecaédrico descrito y observar el número mostrado por la cara situada más arriba".
2. Calcula la probabilidad de obtener cada uno de los resultados elementales posibles y escribe dichas probabilidades en la tabla siguiente:

Valor	1	2	3	4	5	6

Probabilidad						

Hemos simulado el lanzamiento de ese dado 30 veces y hemos obtenido los siguientes resultados:

3, 1, 5, 3, 6, 1, 2, 2, 5, 4, 6, 4, 4, 6, 3, 6, 5, 5, 3, 6, 6, 1, 4, 3, 5, 3, 6, 5, 4, 6.

3. Construye una tabla de frecuencias relativas de esta serie de datos estadísticos
4. Representa esta distribución de frecuencias mediante un diagrama de barras.
5. Representa sobre la misma gráfica anterior (barras adosadas) la distribución de probabilidad calculada en el apartado 2).
6. Si en lugar de lanzar 30 veces el "dado" lo hiciéramos 10.000 veces, ¿Qué esperas observar respecto de los diagramas de barras representados.

Figura 2. Cuestionario

5. Resultados e interpretación

Describimos en esta sección los resultados de la aplicación de la prueba a los dos grupos de estudiantes a los cuales hemos aplicado el proceso formativo descrito. Para realizar una evaluación global de los conocimientos logrados por los estudiantes y estudiar si ambas muestras se pueden considerar como obtenidas de una misma población hemos definido una variable cuantitativa, grado de corrección de las respuestas en cada una de las seis cuestiones. En algunas de las cuestiones tiene sentido considerar que la respuesta es parcialmente correcta, en cuyo caso hemos asignado una puntuación de 1, para distinguirla del caso en que es plenamente correcta (puntuación 2); en el caso de respuesta incorrecta, o si el estudiante no la ha respondido hemos asignado 0 puntos. Con este criterio la puntuación máxima obtenible es de 12. En la Figura 3 mostramos los gráficos de cajas de la variable puntuación total en ambos grupos.

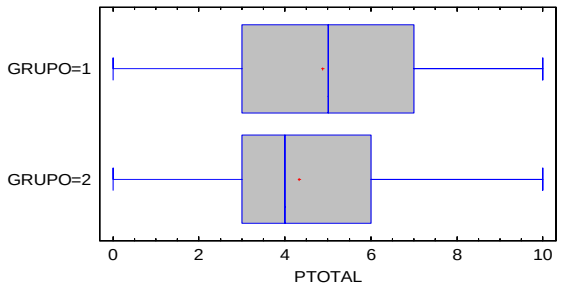


Figura 3. Gráfico de cajas de la distribución de la puntuación total en la prueba

Realizado un contraste de diferencias de medias no resulta significativo al nivel del 5% por lo que podemos analizar ambos grupos como formando una única muestra de 127 sujetos. En la tabla 1 presentamos los tipos de respuestas dadas a los seis ítems, distinguiendo las respuestas correctas (y parcialmente correctas) y las respuestas erróneas (y en blanco).

Tabla 1. Frecuencias y porcentajes de los tipos de respuestas a los ítems (n= 127)

ITEM:	Correctas y parc. correctas		Erróneas y no responde	
	Frec.	%	Frec.	%
1. Espacio muestral	44	34.6	83	65,4
2. Asignación de probabilidades	100	78,7	27	21,3
3. Construcción tabla de frecuencias relativas	88	69,3	39	30,7

4. Represent. diagrama de barras de frecuencias relativas	42	33,1	85	66,9
5. Represent. diagrama de barrasdistribución probabilidad	20	15,7	107	84,3
6. Reconocimiento de la ley de los grandes números	60	47,2	67	52,8

La cuestión más difícil ha sido la representación del diagrama de barras de la distribución de probabilidad sobre el mismo gráfico de frecuencias relativas previamente construido. Ha habido un conflicto no previsto en cuanto a usar la misma expresión de las frecuencias relativas y probabilidades, bien como decimales menores que la unidad o como porcentajes. La construcción de las escalas en los ejes cartesianos para representar las frecuencias y probabilidades ha resultado bastante conflictiva. Otra cuestión conflictiva ha sido la identificación de los sucesos elementales en el experimento aleatorio (construcción del espacio muestral). Describimos a continuación los principales tipos de respuestas erróneas, o parcialmente erróneas, dadas por los estudiantes para cada ítem.

Ítem 1: De un total de 83 respuestas entre erróneas (90,6%) y que no responden (9,4%) en este ítem hemos encontrado 53 (lo que representa el 63,9% del total de respuestas erróneas en este ítem y el 41,7% del total de los estudiantes) en las cuales el error consiste en señalar que el espacio muestral del experimento está formado por el conjunto {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6 }; los estudiantes no reconocen que, en las condiciones de numeración de las caras del dado, no es posible distinguir las caras numeradas con el mismo número, por lo que los sucesos elementales posibles son obtener uno de los números del 1 al 6. Zimmermann (2002) también encontró dificultades de los estudiantes de los primeros cursos universitarios en el reconocimiento de espacios muestrales válidos.

Ítem 2. Este ítem ha resultado fácil. En el total de los 127 estudiantes sólo 9 (7,1%) han dejado en blanco esta cuestión; no destaca ningún tipo de respuesta errónea en este ítem.

Ítem 3. En la construcción de la tabla de frecuencias relativas 32 estudiantes (25,2%) no calcula dichas frecuencias o lo hace incorrectamente; 37 estudiantes (29,1%) incluyen cálculos no requeridos (frecuencias acumuladas) que dificultan la representación gráfica de los datos.

Ítem 4. La principal dificultad en este ítem ha consistido en la incorrecta asignación de títulos al gráfico y las etiquetas de los ejes. Prácticamente la totalidad de los estudiantes (96,9%) han manifestado esta dificultad. El 46,5% de los estudiantes han tenido dificultades para construir la escala correcta al eje de ordenadas.

Ítem 5. Este ítem no fue respondido por 25 estudiantes (19,7%), mientras que solo 20 (15,7%) lo hicieron correctamente. Las principales dificultades han consistido en el problema ya mencionado del uso de una escala inapropiada en el eje de ordenadas, así como la expresión de la probabilidad mediante el uso de notación fraccionaria, la cual tenía que ser transformada a notación decimal o porcentual para la comparación con las frecuencias relativas.

Ítem 6. Esta cuestión no la han respondido 22 estudiantes (17,3%), mientras que 44 (34,6%) manifiestan errores de muy diverso tipo. Este ítem evalúa un conocimiento avanzado del contenido de la estocástica, convergencia en probabilidad de las frecuencias relativas a la probabilidad del suceso correspondiente. Este contenido es de interés para el maestro, ya que le permite clarificar las relaciones entre las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad (regla de Laplace). Prácticamente la mitad de los estudiantes han manifestado un nivel de comprensión aceptable de este contenido. A resultados similares, aunque un poco mejores, (67,6%) llega Noll (2007), quien encontró que los maestros en ejercicio tienen problemas con la ley de los grandes números.

5. Observaciones finales

Como conclusión de este estudio resaltamos que la enseñanza de las matemáticas, y en particular la estadística, debe partir y centrarse en el uso de situaciones - problemas (proyectos de análisis de datos), como una estrategia de dar sentido a las técnicas y teorías matemáticas. De

esta manera, además, se hacen posibles los momentos exploratorios de la actividad matemática por parte de los estudiantes. Sin embargo, en la práctica matemática intervienen configuraciones de objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) (Font, Godino y Gallardo, 2013), los cuales deben ser reconocidos por el profesor para planificar su estudio. Tales objetos deben ser progresivamente dominados por los estudiantes si se desea que progresen hacia sucesivos niveles avanzados de conocimiento y competencia. El estudio de tales objetos matemáticos y sus respectivos procesos asociados debe ser planificado por el docente organizando los correspondientes momentos didácticos de validación, institucionalización y ejercitación.

Nuestro análisis ha revelado varios desafíos del profesor de matemáticas/ estadística para el logro de una enseñanza idónea de los contenidos estadístico: 1) tomar conciencia de la naturaleza compleja del razonamiento estadístico, lo que requiere el uso de proyectos de análisis de datos; 2) reconocer las configuraciones de objetos y procesos estadísticos que se ponen en juego en la resolución de los proyectos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos); 3) implementar procesos de estudio que contemplen momentos de exploración, formulación/comunicación, validación, ejercitación y evaluación (Brousseau, 1997). Es necesario, no obstante, tener en cuenta que el diseño e implementación de procesos de estudio con alta idoneidad didáctica (Godino, 2011) requiere el concurso de factores sobre los cuales el docente no tiene control, como es el caso del factor tiempo asignado al estudio. El proceso de estudio analizado en este trabajo tuvo lugar en tres semanas (a razón de 5 horas presenciales semanales), durante las cuales se supone que los estudiantes deberán dedicar un tiempo adicional de estudio personal (aproximadamente, 30 horas de trabajo individual y en equipo). Un cuarto desafío se presenta al profesor referido a cómo motivar a los estudiantes para que se comprometan en el estudio de las fuentes documentales proporcionadas y utilicen los espacios (virtuales y presenciales) puestos a su disposición.

Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), y EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MEC).

Referencias

Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.). (2011). *Estadística con proyectos*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada.

Batanero, C., Burrill, G., y Reading, C. (2011) (Eds). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE Study*. Berlin: Springer.

Batanero, C. y Godino, J. D. (2003). *Estocástica y su didáctica para maestros.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/.

Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

MacGillivray, H. y Pereira-Mendoza, L. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp. 109-120). New York: Springer.

Noll, J. A. (2007). *Graduate teaching assistants' statistical knowledge for teaching*. PhD. Porland State University. USA

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(4), 287-307.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

Zimmermann, G. (2002). *Students' reasoning about probability simulations during instruction*. PhD. Illinois State University. USA.

Desarrollo teórico del tema de combinatoria presente en algunos libros de texto de matemática de educación secundaria en España

Espinoza González Jonathan[1], *Roa Guzmán Rafael*[2]

[1]Universidad Nacional de Costa Rica
[2]Universidad de Granada

Resumen

La Combinatoria es un contenido que presenta bastante dificultad para estudiantes de los diferentes niveles educativos (Navarro-Pelayo, 1994 y Roa, 2000), es un contenido que suele enseñarse de forma aislada de los demás temas que componen el currículo y eso ha provocado, en ocasiones, que el tema no se enseñe y, cuando se enseña, que se enfatice solo en aspectos de tipo algorítmico (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994).

En esta comunicación nos vamos a centrar en el tratamiento que se le da al tema de Combinatoria en los libros de texto de Matemáticas de Educación Secundaria en España; nos basamos en la teoría de los significados personales e institucionales de los objetos matemáticos propuesta por Godino y Batanero (1994) para considerar el libro de texto como una institución y, en ese contexto, el problema de investigación abordado es la caracterización del significado institucional del objeto matemático "Combinatoria" presente en los citados libros de texto y, para ello, se describirá el desarrollo teórico del tema de Combinatoria presente en algunos de los libros de texto que conforman la muestra. Las implicaciones didácticas y las expectativas que se abren para futuros trabajos de investigación, en el campo de la Educación matemática, dan una relevancia especial a los resultados que aquí se exponen.

Palabras clave: Educación, Combinatoria, Probabilidad, Libros de texto.

1. Introducción

Esta comunicación forma parte de un estudio más extenso que se realizó en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada en España, específicamente en el grupo de investigación "Didáctica de la Probabilidad, Estadística y Combinatoria", en la línea de investigación "Análisis de libros de texto y el currículo".

En el trabajo descrito se caracterizó el significado institucional del objeto matemático "Combinatoria" en la institución de los libros de texto de Matemática utilizados en la Educación Secundaria en España. Para ello se realizó una descripción del capítulo sobre Combinatoria presente en los libros de texto seleccionados y además se identificaron y analizaron las tareas donde es posible aplicar un contenido combinatorio para su resolución a lo largo de todo el texto y de cada uno de los textos seleccionados del estudio.

En esta comunicación nos limitaremos a presentar los resultados obtenidos al describir el desarrollo teórico del tema de Combinatoria presente en los libros que conforman la muestra, según las variables y categorías consideradas.

Según Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994), debido a que la Combinatoria se encuentra aislada del currículo español; a la dificultad propia del tema de Combinatoria y que por lo general su enseñanza se presenta sin conexión con los demás temas del currículo, provoca que en algunos casos se omita su enseñanza y cuando se enseña el tema, se basa principalmente en el aprendizaje de las fórmulas de combinatoria y en la realización de ejercicios estereotipados. Precisamente esta problemática nos motivó a escoger el tema de

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 181-188). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Combinatoria concentrándonos en su tratamiento en libros de texto de Educación Secundaria, principalmente porque el libro de texto es considerado por diversos autores como uno de los recursos didácticos más utilizados por los profesores y alumnos en los procesos de Enseñanza y Aprendizaje.

Esta comunicación se divide en cinco secciones. En la primera se describe el problema de investigación, en la segunda sección presentamos los fundamentos teóricos que sirven de base para el estudio. En la tercera sección se encuentra la metodología del estudio, seguidamente se presentan los resultados obtenidos a partir del análisis realizado a los capítulos sobre Combinatoria presente en algunos libros de texto que conforman la muestra y por último en la quinta sección se incluyen las conclusiones obtenidas y sus posibles implicaciones.

Es importante indicar que con este estudio no pretendemos realizar una evaluación de dichos textos para enaltecerlos o devaluarlos, sino que se pretende analizarlos y discutirlos desde un punto de vista crítico y con objetivos meramente investigativos.

2. Problema de investigación

Esta investigación se enmarca dentro de la agenda de investigación en Didáctica de la Matemática propuesta por Godino y Batanero (1994), basada en la noción de significado de los objetos matemáticos. Estos autores señalan que un problema fundamental de investigación es la caracterización de los significados institucionales de los objetos matemáticos en las diversas instituciones. Al ser la noción de institución muy amplia, para efectos de este trabajo hemos considerado el libro de texto de Matemática como una institución.

Investigadores como Piaget e inhelder (1951) y Kapur (1970) destacan la importancia de la Combinatoria. Por ejemplo una escasa capacidad de análisis combinatorio reduce la aplicación del concepto de probabilidad a casos muy sencillos o de fácil enumeración (Piaget e Inhelder, 1951), mientras que Kapur (1970) menciona que la Combinatoria brinda oportunidades a los alumnos de realizar actividades características de la Matemática como hacer conjeturas, generalizar, indagar la existencia de soluciones, cuestiones de optimización, entre otras.

Aunque la Combinatoria es un tema de importancia en la literatura, en el currículo actual de Educación Secundaria en España (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007) y en el correspondiente a la Comunidad Autónoma de Andalucía (Junta de Andalucía, 2007), el papel de la Combinatoria es poco significativo dado que en estos documentos no aparecen, de forma explícita, contenidos relacionados con la Combinatoria en ninguno de los cursos y bloques de contenido que lo componen, solo se puede encontrar, de modo indirecto y de forma implícita, referencias a recuentos de casos y a la construcción del espacio muestral de un experimento, principalmente aplicadas al cálculo de probabilidades.

Sumado a lo anterior, el tema de Combinatoria es considerado difícil por los propios profesores que lo enseñan (Navarro-Pelayo, 1994). Por su parte Roa (2000) en un estudio sobre el razonamiento combinatorio de estudiantes con preparación matemática avanzada, encontró que los problemas combinatorios son difíciles incluso para este tipo de estudiantes.

Según Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994), debido a que la Combinatoria se encuentra aislada del currículo español; a la dificultad propia del tema de Combinatoria y que por lo general su enseñanza se presente sin conexión con los demás temas del currículo, provoca que en algunos casos se omita su enseñanza y cuando se enseña el tema, se basa principalmente en el aprendizaje de las fórmulas de combinatoria y en la realización de ejercicios estereotipados.

En resumen existe una problemática sobre el tema de Combinatoria caracterizada principalmente por la dificultad de este objeto de estudio, su inclusión implícita en el currículo actual de Educación Secundaria de España. Además por ser un contenido que suele enseñarse de forma aislada de los demás temas descritos en el currículo, provocando, en ocasiones, que el tema de Combinatoria no se enseñe o bien cuando se enseña se enfatiza solo en aspectos de cálculo y aplicación de fórmulas. Considerando que el libro de texto es de gran uso entre los profesores y estudiantes, decidimos acercarnos a dicha problemática realizando un análisis de algunos libros de texto utilizados en la Educación Secundaria de España.

Nos basamos en la teoría de los significados personales e instituciones de los objetos matemáticos propuesta por Godino y Batanero (1994) para considerar el libro de texto como una institución. Así el problema que pretendemos abordar es la caracterización del significado institucional del objeto matemático "Combinatoria" presente en la institución de los libros de texto de Matemática utilizados en la Educación Secundaria en España. Para ello se describirá el desarrollo teórico del tema de Combinatoria en una muestra de libros de texto de Matemática utilizados en la Educación Secundaria en España, según variables y categorías consideradas.

3. Fundamentación teórica del estudio

En nuestra investigación se aplican algunas nociones teóricas desarrolladas por Godino y Batanero (1994) sobre el significado personal e institucional de los objetos matemáticos. Para Godino y Batanero (1994) el concepto de institución es muy amplio. Una institución especial es la Matemática (M) formada por los productores del saber matemático. Otras, posibles, son las instituciones de enseñanza en los diversos niveles. En un sentido amplio, podemos considerar los libros de texto como instituciones, ya que en ellos se proponen problemas matemáticos y se describen prácticas específicas para resolverlos, usando medios expresivos con frecuencia propios de la Matemática.

En cada institución se realizan ciertos tipos de prácticas asociadas a un campo de problemas, los autores mencionados llaman a este tipo de prácticas, institucionales y están constituidas por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I. Su carácter social indica que son observables. Como tipos de tales prácticas sociales se citan: descripciones de problemas o situaciones, representaciones simbólicas, definiciones de objetos, enunciados de proposiciones, procedimientos que son invariantes característicos del campo de problemas, argumentaciones, etc.

Además de las prácticas institucionales, hay que considerar también las prácticas realizadas por las personas en su intento de resolver situaciones-problema (prácticas personales).

De esta forma en cada campo de problemas e institución (persona) hay un sistema de prácticas institucionales (personales) significativas asociadas al campo de problemas. Los objetos institucionales (personales) son los emergentes de este sistema de prácticas que son indicadores empíricos que nos permiten caracterizar estos objetos. El sistema de prácticas de donde emerge un objeto institucional (personal), se define como el significado institucional (personal) del objeto dado.

Así por ejemplo, a la pregunta qué es el objeto matemático "Combinatoria" se propone como respuesta: El sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal) compartidas en el seno de una institución (Significado institucional) para resolver situaciones-problemas en los cuales interviene dicho objeto.

"Los currículos y los libros de texto presentan siempre muestras del significado de los

conocimientos matemáticos, con frecuencia no representativas y a veces con sesgos difíciles de eliminar" (Godino y batanero, 1994, p.21), por lo que el análisis del entorno de significación que se ofrece al alumno en la clase de Matemática se revela como esencial para interpretar correctamente las respuestas de éste.

4. Metodología

El enfoque de nuestro estudio se enmarca en el paradigma cualitativo, dado que no se probarán hipótesis, ni se generalizan de manera probabilística los resultados a poblaciones más amplias, tampoco se buscan obtener muestras representativas y las variables no se definen con el propósito de manipularse ni controlarlas experimentalmente, los cuales son algunos elementos que según Hernández, Fernández y Baptista (2006) caracterizan una investigación cualitativa.

Por otro lado, los datos se analizan desde el punto de vista descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2006) dado que nuestro objetivo es describir el desarrollo teórico del tema de Combinatoria presente en algunos libros de texto de Matemática de Educación Secundaria en España.

La observación es una de las principales técnicas de recolección de datos en la investigación descriptiva. En nuestra investigación los datos se obtuvieron al observar libros de texto de Matemática, utilizando para ello la metodología de análisis de contenido la cual se basa en la lectura (textual o visual) como instrumento de recogida de información (Andréu, 2000). Los libros de texto que conforman la muestra son los de primero, segundo, tercero y cuarto curso (Opción A y B) de Educación Secundaria en España, de las editoriales SM, Anaya y Santillana publicados en los años 2007 o 2008.

Como se mencionó en la fundamentación teórica para describir el desarrollo teórico del tema de Combinatoria se debe centrar la atención en las prácticas asociadas al campo de problemas que llamamos problemas combinatorios y compartidas en la institución de los libros de texto de Matemática utilizados en la Educación Secundaria en España. Entre las prácticas institucionales descritas por Godino y Batanero (1994) asociadas a un campo de problemas y en las cuales nos enfocaremos se encuentran las representaciones simbólicas, las definiciones de objetos y el enunciado de proposiciones, entre otras.

Para buscar variables asociadas a algunas de las prácticas descritas por Godino y Batanero (1994) que nos permitieran caracterizar el desarrollo teórico del tema de Combinatoria recurrimos a investigaciones previas relacionadas con nuestra temática. Tres investigaciones llamaron nuestra atención, las realizadas por Navarro-Pelayo (1991, 1994) y la elaborada por Ortiz (1999), ya que algunas de las variables utilizadas por estos autores se relacionan con las prácticas descritas por Godino y Batanero (1994). Así, las variables empleadas en este estudio son:

- Ubicación del capítulo de Combinatoria en el libro de texto.
- Contenidos incluidos, notación empleada y orden de presentación.
- Tratamiento dado a las definiciones.
- Modelo combinatorio considerado en el enunciado del concepto combinatorio.
- Utilización de recursos didácticos.
- Presencia de consideraciones históricas.
- Ejemplos/ejercicios introductorios y posteriores a los contenidos sobre Combinatoria.

5. Resultados

Respecto a los resultados del estudio encontramos que de los libros que conforman la muestra seleccionada únicamente el manual de Matemática de cuarto curso opción A de la editorial Anaya no contiene un capítulo dedicado al estudio de la Combinatoria. Además los capítulos sobre Combinatoria presentes en los libros de texto de cuarto curso opción A y B de la editorial Santillana son exactamente iguales. De esta forma los resultados obtenidos corresponden al análisis del tema de Combinatoria de cuatro manuales de Matemática de Educación Secundaria diferentes: el del cuarto curso opción A de la editorial SM; cuarto curso opción B de SM; cuarto curso opción B de Anaya y cuarto curso opción A de Santillana.

Para simplificar la presentación de los resultados, en adelante se utilizará la siguiente notación: [A]: Cuarto curso opción A SM, [B]: Cuarto curso opción B SM, [C]: Cuarto curso opción B Anaya y [D]: Cuarto curso opción A Santillana.

Con relación a la ubicación del capítulo sobre Combinatoria presente en los manuales mencionados se observó que en tres de ellos ([A], [B] y [D]) el capítulo anterior al tema de Combinatoria es Estadística y el posterior Probabilidad, únicamente el texto [C] presenta el tema de Combinatoria después del de Probabilidad y como último capítulo del libro.

Respecto a los contenidos sobre Combinatoria que presentan los textos mencionados todos contienen las variaciones ordinarias o con repetición, las permutaciones ordinarias, las combinaciones ordinarias y el diagrama en árbol. De los cuatro manuales, solo el [B] no contiene la regla del producto. Además ninguno incluye la regla de la suma o las combinaciones con repetición. Las permutaciones con repetición solo se encontraron en el manual [A] y las permutaciones circulares solo en el [B]. El libro de texto con mayor cantidad de contenidos es el [D], presentándose 10 de los contenidos descritos, seguido por [B] y [A] y el que presenta la menor cantidad de contenidos es [C] con 6.

Dos de los textos hacen referencia al concepto de Combinatoria, por ejemplo el manual [C] menciona "La Combinatoria se ocupa de contar agrupaciones realizadas con distintos criterios" (p. 228) y el manual [D] "Los métodos de conteo son estrategias utilizadas para determinar el número de posibles resultados que existen al realizar un experimento" (p. 230).

La notación empleada paras las operaciones combinatorias es similar en todos los manuales. Se utiliza: $V_{m,n}$ para las variaciones ordinarias, $VR_{m,n}$ en las variaciones con repetición, P_n para las permutaciones, $C_{m,n}$ en las combinaciones. Solo uno de los textos utiliza dos notaciones diferentes para algunos contenidos combinatorios llegando incluso a mezclar ambas notaciones en el desarrollo teórico del tema.

En tres de los manuales ([A], [C] y [D]) las operaciones combinatorias se presentan en el siguiente orden: variaciones (ordinarias o con repetición), permutaciones (ordinarias o con repetición) y por último combinaciones.

El tratamiento dado a las definiciones de las operaciones combinatorias básicas es equivalente en todos los manuales, con frecuencia se inicia la definición con la frase "distintos grupos o agrupaciones que se pueden formar", "formar agrupaciones ordenadas" o "distintas formas que se pueden ordenar", por lo que está implícita en todos los casos la noción de muestra (ordenada o no).

Por ejemplo, en los manuales [A] y [B] definen las variaciones ordinarias de la siguiente forma:

> "Variaciones ordinarias o sin repetición de *m* elementos tomados de *n* en *n* (de orden *n*) son los distintos grupos que se pueden formar con los *m* elementos, de manera que en cada grupo entren *n* elementos distintos, dos grupos son distintos

si difieren en algún elemento o en el orden de colocación" ([A], p. 252 y [B], p. 282).

Los resultados sobre el modelo considerado en el enunciado de las definiciones de las operaciones combinatorias, muestran que todas las definiciones de los textos analizados utilizan al menos el modelo de selección. En el caso de las variaciones ordinarias o con repetición se emplean los modelos de selección y colocación. La mayoría de las definiciones presentan el modelo de selección de forma explícita, pues el enunciado menciona que los elementos se toman o eligen, sin embargo en algunas definiciones la noción de muestra aparece de forma implícita.

Respecto a los recursos didácticos que promueven los manuales analizados, los textos [A], [B] y [D] promueven el uso de la calculadora, principalmente como un recurso para facilitar los cálculos. Solo el texto [C] propone, para introducir el tema, el uso de material manipulativo.

Con relación a las consideraciones históricas, solo en el texto [D] introduce el tema con un breve relato histórico sobre el matemático Blaise Pascal y la máquina que inventó para contar; sin embargo no se relaciona con la construcción de los conceptos combinatorios. Ninguno de los manuales menciona como surge la Combinatoria, qué tipos de problemas motivaron su estudio o quiénes son sus principales precursores, por nombrar algunos aspectos relevantes.

Una de las variables de este estudio es analizar los ejemplos y ejercicios[1] que se presentan antes o después de un contenido sobre Combinatoria, los resultados muestran que todos los manuales incluyen ejercicios posteriores a la definición y solo [D] no presenta ejemplos introductorios. También se encontró que únicamente [C] no incluye ejemplos después de las definiciones y ninguno contiene ejercicios introductorios para las operaciones combinatorias.

En general la estructura de los ejemplos y ejercicios presentes en [A] y [B] es similar: ejemplos introductorios-ejemplos posteriores a la definición-ejercicios posteriores a la definición. En el manual [C] ejemplos introductorios-ejercicios posteriores a la definición y en [D]: ejemplos posteriores a la definición-ejercicios posteriores a la definición.

6. Conclusiones e implicaciones

El tema de Combinatoria se ubica en los libros de textos analizados, principalmente después del tema de Estadística y antes del capítulo de Probabilidad, esto puede llevar a que los estudiantes utilicen técnicas de recuento propias de la Combinatoria para el cálculo de probabilidades, sin embargo en los capítulos sobre Probabilidad de los manuales seleccionados no observamos tareas en las cuales se promueva el uso de algún contenido combinatorio, por lo que el estudio del tema de Combinatoria se realiza de forma aislada en los textos analizados.

Los libros de texto de Matemática seleccionados que contienen un capítulo sobre Combinatoria incluyen, al menos, los siguientes contenidos combinatorios: variaciones ordinarias o con repetición, combinaciones ordinarias, permutaciones ordinarias y el diagrama en árbol. Ninguno de los textos analizados incluye, de forma explícita, las combinaciones con repetición o la regla de la suma.

Las operaciones combinatorias se presentan en los capítulos sobre Combinatoria, principalmente en el siguiente orden: primero el diagrama en árbol o la regla del producto, luego las variaciones, seguido por las permutaciones y por último las combinaciones. Esto

[1] Los ejemplos y ejercicios son tareas que se distinguen en que las primeras se presenta una solución, mientras que los segundos son tareas que el estudiante tiene que resolver

coincide con los resultados obtenidos por Navarro-Pelayo (1991). Solo uno de los manuales sigue las recomendaciones de Fischbein y Gazit (1988) quienes consideran que la primera operación combinatoria que se debe estudiar cuando se utiliza el diagrama en árbol es la de variaciones con repetición, seguido por las permutaciones y por último las combinaciones que ofrecen mayor dificultad a los alumnos.

Todas las definiciones de las operaciones combinatorias básicas, emplean el modelo de selección. Este hallazgo se considera de gran importancia dado que en un análisis realizado a las tareas propuestas en uno de los libros de texto seleccionados que contienen el capítulo de Combinatoria, se observó que también consideran el modelo de selección en su enunciado. Lo cual evitará posibles dificultades a los estudiantes al no tener que pasar de un modelo combinatorio a otro.

En el capítulo sobre Combinatoria presente en los libros de texto analizados se usan notaciones similares para las operaciones combinatorias básicas. No obstante uno de los textos presenta dos notaciones diferentes para algunas operaciones combinatorias mezclando ambas notaciones en el desarrollo teórico del tema. Hadar y Hadass (1981) mencionan que la dificultad que poseen los estudiantes de elegir una notación que represente de forma adecuada la información y condiciones dadas en las tareas aumenta debido a que algunos textos emplean diferentes notaciones para las operaciones combinatorias, resultado que hemos obtenido en uno de los textos analizados.

Las expresiones algebraicas (fórmulas) que aparecen en los capítulos sobre Combinatoria de los textos seleccionados para calcular las operaciones combinatorias son similares en todos los textos analizados, sin embargo dos de los textos estudiados emplean expresiones más simplificadas respecto a los otros dos textos que contienen el capítulo sobre Combinatoria. Consideramos que dichas expresiones más simplificadas facilitan su aplicación por parte del estudiante.

El único recurso didáctico que promueven los libros de texto analizados es el uso de la calculadora y se utiliza principalmente como recurso para simplificar los cálculos. Sin embargo el currículo de Educación Secundaria para Andalucía recomienda que las calculadoras no deban suponer solo un apoyo para la realización de cálculos complejos, sino mucho más que eso, deben convertirse en herramientas para la construcción del pensamiento matemático y facilitar la comprensión de los conceptos, ya que permiten liberar de una parte considerable de carga algorítmica. Por otra parte no se promueve por ejemplo la metodología basada en juegos. Engel, Varga y Walser (1976) proponen usar, para la enseñanza de la Combinatoria, una metodología basada en juegos, el uso de diagrama en árbol y los materiales manipulativos para evitar sesgos en el razonamiento combinatorio de los estudiantes, sin embargo en los textos estas orientaciones no son reflejadas.

En cuanto a la distribución de las tareas en el capítulo sobre Combinatoria se obtuvo que en general los contenidos combinatorios son presentados primero con un ejemplo introductorio, luego con uno o varios ejemplos después de la definición y por último, diversos ejercicios posteriores a la definición. Ninguno de los manuales analizados incluye ejercicios introductorios.

No se encontraron consideraciones históricas que se relacionen con la construcción de los conceptos combinatorios. Por lo tanto no se consideran los lineamientos del currículo de Educación Secundaria para Andalucía donde se destaca que el conocimiento histórico de la Matemática debe entenderse como eje transversal en la enseñanza de las Matemáticas, ha de estar siempre presente en la construcción del conocimiento matemático durante la Educación Secundaria.

Referencias

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio.* Madrid: Síntesis.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1951). *La génèse de l´idée de hasard chez l´enfant.* Paris: Presses Universitaires de France.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación Matemática avanzada. Tesis Doctoral.* Universidad de Granada, España.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). Metodología de la investigación. (4 ed.). México: McGraw-Hill.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics Education, 3*(1), 111-127.

Andréu, J. (2000). *Las técnicas de análisis de contenido; una revisión actualizada.* Recuperado el 22 de julio, 2011 de http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf.

Hadar, N. y Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problema is strew with pitfalls. Educational Studies in Mathematics, 12(1), 435-443.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 5*(1), 193-198.

Engel, A., Varga, T. y Walser, W. (1976). *Hasard ou strategie? Jeux de combinatoire, de probabilités et de statistique*. París: O.C.D.L

Descripción de la variabilidad estadística de datos en el contexto de una situación de tratamientos médicos

Orta Amaro, José Antonio y Fernández Delgado, Gilberto

Cinvestav-México

Resumen

En este artículo presentamos las respuestas de estudiantes mexicanos de tercer año de secundaria (14-15 años) a través de las cuales mostramos sus diferentes percepciones de la variabilidad estadística a un problema de comparación de conjuntos de datos. La situación propuesta se refiere al efecto de tres tratamientos médicos y en ella se pregunta a los estudiantes sobre el tratamiento que preferían y en cuál de ellos había más variabilidad. Las justificaciones de los alumnos fueron agrupadas en categorías relacionadas con diferentes características o elementos que los estudiantes perciben en los datos y que se relacionan con la variabilidad estadística. En particular, se consideraron para analizar sus respuestas elementos como observar el arreglo general de la distribución de los datos, los valores extremos o interiores y la percepción del cambio que sugieren los datos. Estos elementos permitieron elaborar una jerarquía basada en la taxonomía SOLO. De acuerdo con el análisis de las explicaciones de los estudiantes, se observó que perciben distintas características de los datos y de la variabilidad cuando la pregunta es de toma de decisiones (v. gr. ¿Qué tratamiento preferirías? Explica tu respuesta) o si la pregunta es acerca de la variabilidad de los datos (¿En cuál de los tratamientos hay más variabilidad?); a pesar, de que en algunos casos la característica de la variabilidad para responder ambas preguntas puede ser la misma.

Palabras clave: Variabilidad estadística, percepciones de la variabilidad estadística, comparación de conjuntos de datos, SOLO.

1. Introducción

La variabilidad es el corazón de la estadística (Moore, 1990), indispensable para su existencia (Watson, Kelly, Callingham y Shaughnessy, 2003). Wild y Pfannkuch (1999) la proponen como uno de los tipos de pensamiento estadístico relacionado con el aprendizaje y la toma de decisiones, lo cual deriva de su omnipresencia. Este concepto está relacionado con muchas ideas estadísticas fundamentales, Garfield y Ben-Zvi (2008) observan que "la comprensión de las ideas de dispersión y variabilidad en los datos es una componente clave en la comprensión del concepto de distribución y es esencial para hacer inferencias estadísticas" (p. 203). Konold y Pollatsek (2004) recomiendan que en el análisis de datos se consideren conjuntamente centro (señal) y la variabilidad (ruido), porque ambas ideas son necesarias para darle sentido a los datos. Para Watson, Callingham y Kelly (2007) la comprensión de la variabilidad se relaciona con la percepción de la incertidumbre, con cambios previstos e imprevistos y con valores atípicos en las situaciones o en los datos. A pesar de su relevancia, el estudio de la variabilidad no se incluye en el currículo de los niveles básicos (y medios) de muchos países, aunque los resultados de la investigación sugieren la posibilidad de desarrollar nociones intuitivas de ésta desde edades muy tempranas. En el currículo mexicano de secundaria hay una mención a la "dispersión" (SEP, 2006, p. 61) y se han realizado varios estudios sobre el tema (una reseña se realiza en Sánchez, Borim y Coutinho, 2011).

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 189-195). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

En este trabajo se muestran las descripciones y representaciones de la variabilidad estadística que realizan estudiantes de secundaria cuando dan respuesta a dos preguntas en una situación de comparación de conjuntos de datos. Para hacerlo se trata de responder a la pregunta: ¿Cómo perciben y describen los estudiantes de secundaria (14- 15 años) la variabilidad estadística en datos que se refieren a un tratamiento médico?

2. Marco conceptual

Comprensión y aprendizaje. Garfield y Ben-Zvi (2005) plantean un marco de 7 categorías o "componentes de un modelo epistemológico" con los cuales organizan el conjunto de ideas y acciones necesarias para una comprensión profunda de la variabilidad. Las siguientes 3 primeras categorías son las más convenientes para analizar el nivel escolar y cognitivo de los alumnos de secundaria: 1) Desarrollar ideas intuitivas de la variabilidad, las cuales se refieren a ésta como una característica omni-presente en los fenómenos y en los datos que se derivan de ellos; asimismo, existen fenómenos y conjuntos de datos que tienen más variabilidad que otros y, finalmente, la variabilidad es una característica de un conjunto de datos y no de elementos aislados. 2) Describir y representar la variabilidad: Al restringirse a un conjunto de datos, la variabilidad es la *dispersión* de estos, los cuales pueden graficarse para mostrar aspectos de ella. La variabilidad puede medirse de diferentes maneras y expresarse mediante un número (rango, desviación media o desviación estándar). 3) Utilizar la variabilidad para hacer comparaciones, donde las medidas de tendencia central y las de dispersión permiten la interpretación de los datos y con ello la *toma de decisiones.*

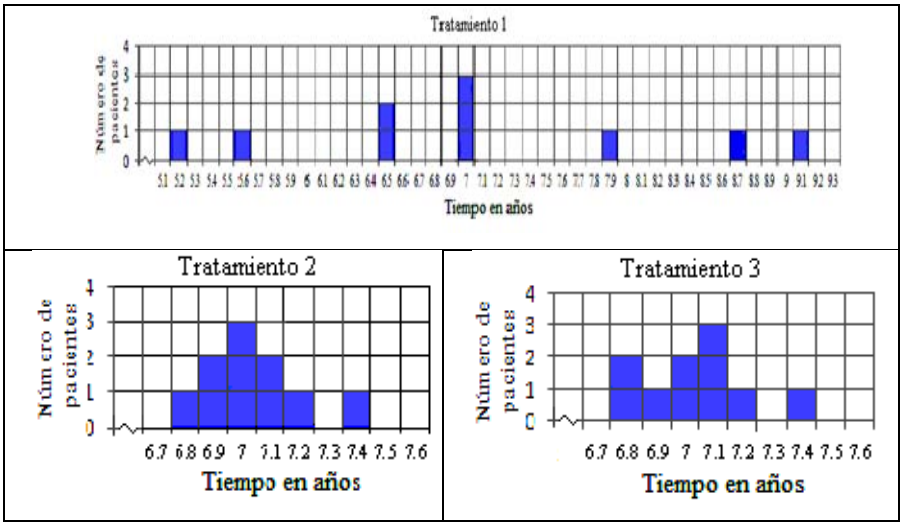
3. Metodología

Participantes. En esta investigación participaron 65 estudiantes, un profesor y los autores. Los estudiantes estaban distribuidos en dos grupos de tercer año de secundaria (catorce años) de una escuela pública de la Ciudad de México.

Instrumentos. En el estudio se diseñó un cuestionario para obtener datos sobre las ideas de variabilidad de los alumnos. Éste contenía tres problemas sobre comparaciones de conjuntos de datos. Dos de los problemas correspondían a contextos de juegos de apuestas, y uno a tratamientos médicos (problema 3). Algunas respuestas a los incisos a) y b) del problema número tres (Figura1) las presentamos en este artículo. Los datos de los problemas se planearon de modo que sean iguales las medias, medianas y el número de elementos en cada conjunto de datos. Aunque esto omite el uso de datos reales, tiene la intención de dirigir la atención de los estudiantes hacia la variabilidad.

Procedimientos de análisis. Las respuestas de los estudiantes se clasificaron en una jerarquía SOLO (*Structure of the Observed Learning Outcome*) de Biggs y Collis (1991). Este método propone definir cuatro categorías que dan cuenta de los niveles de comprensión de los estudiantes definidos de la siguiente manera: *Pre-estructural*, el problema es resuelto; no obstante, las respuestas nos sugieren que el estudiante se distrajo o confundió con un aspecto irrelevante y no llegó a la solución del problema. *Uni- estructural*, los argumentos del alumno se enfocan en un sólo un aspecto del problema. *Multi-estructural*, las justificaciones del escolar toman en cuenta más características relevantes o correctas del problema, pero las trata de manera separada. *Relacional*, las respuestas del estudiante muestran un tratamiento global del problema en una estructura coherente y significativa.

Considera que debes aconsejar a una persona que padece una enfermedad grave, la cual es tratable con medicamentos que pueden extender la vida por varios años. Es posible elegir entre tres opciones, dependiendo del tratamiento. Según el tipo de medicina, las personas tienen diferentes reacciones a las sustancias, para algunas, éstas tienen el mismo resultado, mientras que para otras, puede ser mayor o menor. A continuación se muestra la representación gráfica de los distintos tratamientos.



a. ¿Qué tratamiento preferirías (1,2 0 3? ¿Por qué?

b. ¿En cuál de los tratamientos hay más variabilidad? Explica tu respuesta

Figura 1. Problema de los tratamientos médicos.

4. Resultados preliminares

A continuación mostramos diferentes respuestas de los estudiantes las cuales fueron jerarquizadas de acuerdo con el modelo SOLO. Cabe mencionar que dicha jerarquía fue diseñada para describir y representar la variabilidad en relación con un conjunto de datos de una situación dada (categoría 2 de Garfield & Ben-Zvi, 2005). De acuerdo con el análisis de las respuestas, encontramos que existen diferentes niveles para clasificarlas. Aquí, consideramos los siguientes:

Nivel pre-estructural. Estas respuestas, pueden mostrar una idea fuera del contexto del problema o asociada con experiencias de los estudiantes que no responden a las preguntas planteadas. Un ejemplo de este tipo de argumentos se muestra a continuación:

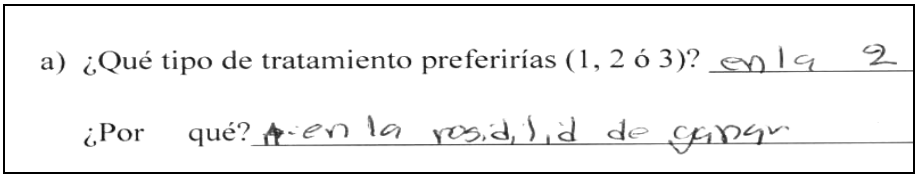


Figura 2. Ejemplo de respuesta *pre-estructural*.

En el ejemplo anterior podemos observar que la respuesta refleja que el estudiante posiblemente se distrajo y justificó su elección con argumentos fuera del contexto del problema.

Nivel uni-estructural. Las respuestas que se clasifican en este nivel contienen un aspecto relevante, aunque elemental, para describir la variabilidad de los datos. Las respuestas de los estudiantes pueden referirse a algunos de los siguientes componentes propuestos y que adaptamos de Reading (2004): Sugerir cambios, observar características del arreglo, expresar un límite global, basarse en un valor extremo y basarse en valores interiores. A continuación mostramos ejemplos de algunos de estos componentes:

- Sugerir cambios, dan una descripción de la variabilidad para resumir una impresión de ésta relacionada con la magnitud del cambio. Algunos términos sugieren poco cambio mientras otros sugieren más cambio (Figura 3)**.**

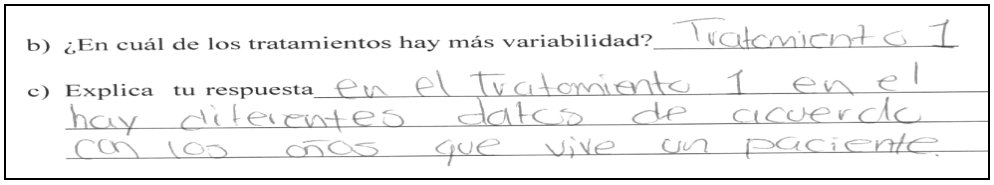


Figura 3. Ejemplo de respuesta uni-estructural que sugiere cambio

- Observan alguna característica del arreglo de los datos, como el orden ascendente o la dispersión de los elementos oposiciones relativas de dos o más valores. En la Figura 4, un escolar presenta la explicación.

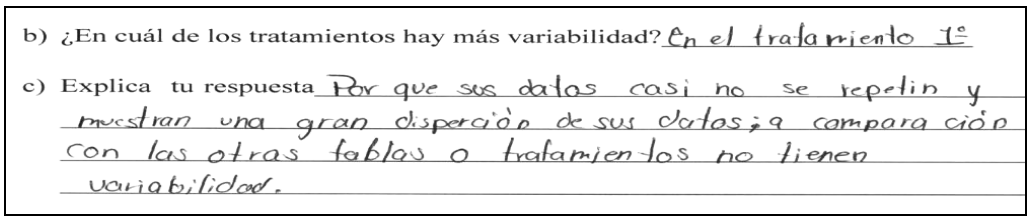


Figura 4. Ejemplo de una respuesta uni-estructural basada en el arreglo de los datos.

- De manera intuitiva perciben ciertos límites de la variabilidad de los datos de los conjuntos, sin especificar los datos u operaciones que llevan a ellos (Figura 5).

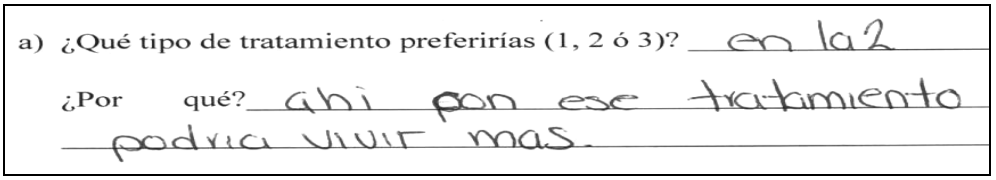


Figura 5. Ejemplo de una respuesta que expresa un límite global.

- Al igual que en el punto anterior, se refieren a la variabilidad pensando en un límite, pero aquí se basan, en algunos casos, en el valor máximo de los datos y, en otros casos, en el valor mínimo. En la Figura 6, se muestra un ejemplo de este tipo de respuesta.

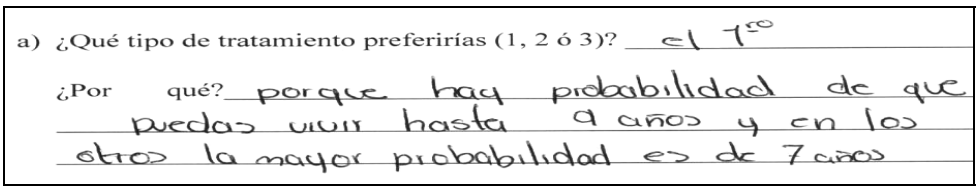


Figura 6. Ejemplo de una respuesta uni-estructural basada en uno de los valores extremos.

- En las respuestas en esta categoría se observan características del arreglo, pero lo especifican o determinan explícitamente con valores interiores del conjunto de datos. Por ejemplo la respuesta mostrada en la Figura 7.

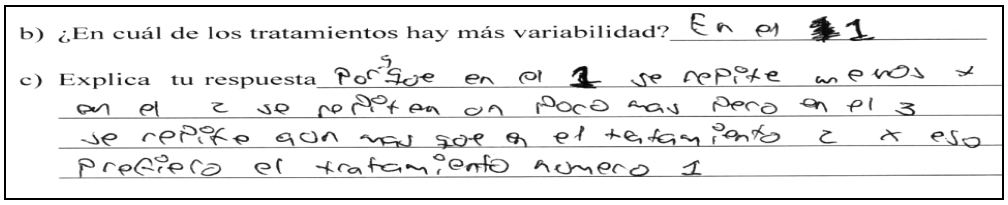


Figura 7. Ejemplo de una respuesta uni-estructural basada en los valores interiores.

Nivel multi-estructural. En este nivel las respuestas de los estudiantes tienen en cuenta dos o más de las componentes del *nivel uni-estructural*, por ejemplo, cuando su respuesta considera ambos extremos del conjunto de datos, o implícitamente, consideran un valor de referencia y la variabilidad del conjunto de datos (Figura 8).

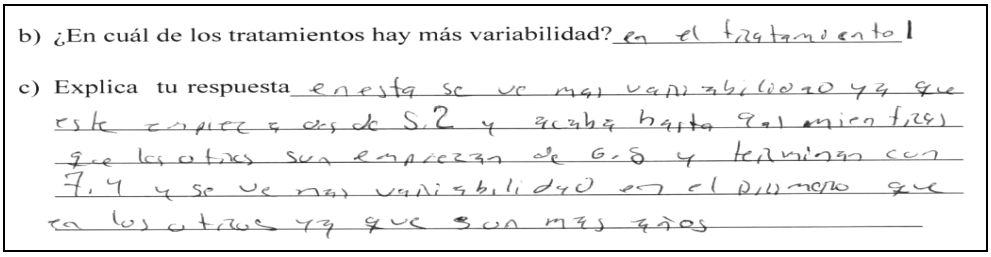


Figura 8. Ejemplo de una respuesta multi-estructural.

Nivel relacional. Utilizan la media o mediana y la desviación media o estándar de las distribuciones de datos para compararlas. Ningún estudiante ofreció respuestas a este nivel.

Resultados globales. A partir del análisis de las respuestas surgieron cinco sub-niveles del *nivel uni-estructural* y dos, del *nivel multi-estructural* de la jerarquía SOLO (Tabla 1) que permiten analizar la manera en que los estudiantes describen y representan la variabilidad. A continuación se muestran las frecuencias obtenidas.

De acuerdo con la Tabla 1, advertimos gran cantidad de respuestas y justificaciones al problema, vistas globalmente, pueden agruparse en "sugieren cambio" (29), "expresan un límite global" (36) y "observan características del arreglo" (26). En menor medida, hay varias respuestas agrupadas en las categorías "se basan en valores interiores" (13), "se basan en un valor extremo" (4), "basada en ambos extremos" (5) y "considerando centro y dispersión" (5). Esto nos indica que hay una tendencia a justificar las respuestas de manera cualitativa, es decir, de forma subjetiva.

Tabla 1. Frecuencia de respuestas a) y b), por categoría del problema 3 (P3).

	Nivel uni-estructural					Nivel multi-estructural	
	Sugiriendo Cambio	Decidido sobre el arreglo	Sugiere un límite global	Basada en un extremo	Basada en valores interiores	Basada en ambos extremos	Considerando centro y dispersión
P3a)	14	10	24	4	3	2	5
P3b)	15	16	12	0	10	3	0
Total	29	26	36	4	13	5	5

Al analizar los argumentos para justificar 3 a), hallamos que la mayoría de las respuestas es de tipo cualitativo, en cambio, en 3 b) los alumnos observan características cuantitativas (basadas en la forma del arreglo y en la variabilidad de los datos -valores interiores-) para tomar una decisión (elegir uno de los juegos). El patrón de las frecuencias

llevan a observar que cuando se les pregunta ¿dónde hay más variabilidad? , los alumnos tienden a dar respuestas cuantitativas. (Tabla 1).

Por una parte, la forma adecuada de describir y representar la variabilidad de un conjunto de datos es mediante una medida global que tome en cuenta todos los datos; así, las respuestas de los estudiantes, sobre todo en las preguntas de toma de decisiones, es una apreciación global ('sugiriendo cambio' o 'expresan un límite global'), pero no están basadas en los datos de manera explícita. Por otra parte, en las justificaciones a las preguntas directas de variabilidad, los alumnos sólo tomaron parcialmente en cuenta los datos.

5. Resultados preliminares

El grado de comprensión de los alumnos acerca de la variabilidad dependió de las formas en que percibieron la distribución de los datos; sin embargo, la situación propuesta también fue importante. En este estudio, advertimos la dificultad de los estudiantes para manejar una distribución como un todo (Bakker y Gravemeijer, 2004). Sus respuestas, por un lado, se enfocaron en una característica de las distribuciones como las percepciones de cambio, la reducción de la variabilidad y el basarse en un extremo o en repeticiones de datos; por otro lado, la situación influyó en sus descripciones, pues al responder *¿qué tipo de tratamiento preferirías?,* hacen descripciones en las que limitan la variabilidad; mientras que si las preguntas se dirigen a la variabilidad de los datos sin incluir el escenario, por ejemplo, *¿en cuál de los tratamientos hay más variabilidad?, s*us descripciones se encauzaron hacia el arreglo de los datos, a los valores interiores y a los dos extremos de la distribución.

Estos hechos nos sugieren que en la enseñanza del tema de variabilidad con estudiantes de tercer grado de secundaria deben considerarse actividades que refuercen las propuestas curriculares (análisis de distintos conjuntos de datos, gráficas y medidas de tendencia central y de dispersión), todo ello para promover que los estudiantes busquen patrones en las distribuciones (centro y dispersión) como lo señalan Konold y Pollatsek, (2004). Además, se deben considerar las medidas de tendencia central y dispersión como números en una situación determinada, dichas medidas deberán ser comprensibles e interpretables (Moore, 1990). Hallamos, a través de las respuestas, que los estudiantes cuentan con las nociones adecuadas de centro y dispersión, puesto que mencionan en sus explicaciones palabras como centro, dispersión, extensión. Finalmente, consideramos, que falta tratar con mayor amplitud estos temas para que los estudiantes comprendan el concepto correspondiente y efectúen un análisis reflexivo de los datos.

Referencias

Bakker, A. y Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. In D. Ben-Zvi& J.Garfield (Ed**s**.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking***,** (pp.147-168). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Biggs, J.B. y Collis, K.F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behaviour. En H. A. H. Rowe (Ed.), *Intelligence. Reconceptualization and measurement* (57-76). Hilsdale, NJ., USA: Erlbaum.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2005).A framework for teaching and assessing reasoning about variability.*Statistics Education Research Journal, 4*(1), 92-99.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students´ statistical reasoning: Connecting research and teaching*. New York: Springer.

Konold, C. y Pollatsek, A. (2004). Conceptualizing an average as a stable feature of a noisy

process. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy reasoning and thinking* (pp.169-199). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Moore, D. (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 95–137). Washington, DC: National Academy Press.

Sánchez, E., Borim, C. y Coutinho, C. (2011) Teachers understanding of variation. En C. Batanero, G. Burril, y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics Challenges for Teaching and Teacher Education). A Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study*. *(pp.* 211-*222).* The Netherlands: Springer.

SEP (2006). *Planes y Programas de Estudio. Educación Básica. Secundaria.* México, D. F.: Secretaría de Educación Pública.

Watson, J., Kelly, B., Callingham, R. y Shaughnessy, M. (2003). The measurement of school students´ understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34* (1), 1-29.

Watson, J. M., Callingham, R. A. y Kelly, B. A. (2007). Students' appreciation of expectation and variation as a foundation for statistical understanding. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(2), 83-130.

Wild, D.J. yPfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*, 223-265.

Dificultades de estudiantes de psicología en relación al contraste de hipótesis

Vera, Osmar[1] y Díaz, Carmen[2]

[1]Universidad Nacional de Quilmes
[2]Universidad de Huelva

Resumen

El contraste de hipótesis es una herramienta fundamental en la inferencia estadística, aunque su mal uso en la investigación ha sido criticado extensamente. Debido a ese mal uso es que consideramos que la formación de los profesionales de las Ciencias Sociales en general y de la Psicología en particular, se debe profundizar en las dificultades que los estudiantes encuentran en los conceptos relacionados con el contraste de hipótesis.

En este trabajo presentamos un estudio de evaluación en relación al contraste de hipótesis, describimos las dificultades en una muestra de 93 estudiantes de segundo año de Psicología. Los estudiantes completaron los ítems como parte de la evaluación final de una asignatura, para asegurar que hubieran estudiado previamente. Los ítems evalúan conceptos tales como: asignación de hipótesis estadísticas, diferenciación entre hipótesis nula y alternativa, entre contraste unilateral y bilateral, asignación del valor p y nivel de significación, determinación de la zona de rechazo y aceptación y regla de decisión.

Los resultados son en general buenos, encontrando en todos los ítems un porcentaje de respuestas correctas superiores al 50%, salvo en el ítem que evalúa la diferenciación entre contraste unilateral derecho e izquierdo, confundiendo un 46% de los estudiantes el signo del valor crítico correspondiente para un nivel de significación específico. Otros errores encontrados están relacionados con la confusión entre hipótesis nula y alternativa, errores tipo 1 y 2 y la regla de decisión en el contraste de hipótesis. Los resultados se comparan con la investigación de Vallecillos (1994).

Palabras clave: contraste de hipótesis, dificultades, estudiantes universitarios, psicología.

1. Introducción

La inferencia estadística juega un papel destacado en diversas ciencias humanas, entre otras la Psicología, que basa sus investigaciones en datos recogidos en muestras de poblaciones, a las que necesita extender sus conclusiones. Sin embargo, el uso e interpretación de la estadística en las publicaciones en Psicología no es siempre adecuado, como se muestra en diversas revisiones (Harlow, Mulaik y Steiger, 1997; Borges, San Luis, Sánchez, y Cañadas, 2001; Díaz y de la Fuente, 2004; Batanero y Díaz, 2006). Múltiples autores dedican su investigación al tema de la inferencia estadística y las dificultades que este tema suscita, ganando día a día gran impacto a nivel internacional (Haller & Krauss, 2002).

Estos errores también se producen en investigadores y estudiantes universitarios, como muestran muchas investigaciones (Birnbaum, 1982). En España, la investigación didáctica en el tema fue iniciada por Vallecillos con su tesis doctoral (Vallecillos, 1994) y ésta ha sentado bases de una amplia investigación posterior (Díaz, 2007; Alvarado, 2007; Olivo, 2008). La mayoría de las investigaciones llevadas a cabo hasta ahora se limitan a en

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 197-203). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

la comprensión del concepto de nivel de significación. Sin embargo son muchos los conceptos que se deben comprender para llevar a cabo con éxito un contraste de hipótesis.

Vallecillos (1994) describe diversos errores relacionados con la inferencia estadística en una muestra de 436 estudiantes de magisterio, clasificándolos en varias categorías:

- *Parámetro y distribuciones muestrales*: Los estudiantes no dan cuenta de la variabilidad de la distribución muestral del estadístico, ni reconocen su relación con el parámetro poblacional.
- *Confusión entre las hipótesis*: Los estudiantes confunden la hipótesis nula con la hipótesis alternativa. Definen como hipótesis nula aquella que se desea probar. Por otro lado, aunque la teoría estadística se ocupa del último nivel de hipótesis (de las hipótesis estadísticas), alumnos e investigadores confunden los diferentes niveles de abstracción de las hipótesis y cuando encuentran un resultado significativo, lo interpretan en relación a la hipótesis de investigación (aunque el resultado solo se refiere a las hipótesis nula y alternativa) (Chow, 1996, Batanero, 2000).
- *Interpretación de las probabilidades de error y sus relaciones*: Los estudiantes confunden las dos probabilidades condicionales que intervienen en la definición del nivel de significación, interpretando α como $P(H_0 \text{ cierta} / \text{se ha rechazado } H_0)$ lo cual sería una interpretación bayesiana; en otros casos suprimen la condición en la probabilidad ó la confunden con su probabilidad complementaria. Este error fue también descrito por Birnbaum (1982) y Falk (1986), quien lo denominó "falacia de la condicional transpuesta". Este error también se extiende a la confusión entre errores tipo I y tipo II.
- *Nivel de significación*: Se confunde el nivel de significación con la probabilidad de obtener un resultado correcto, y suelen pensar que está probabilidad está predeterminados por el tamaño de la muestra. Cohen (1994) indica que la interpretación errónea del valor-p como probabilidad de que la hipótesis nula sea falsa es casi universal y que, además, esta interpretación viene acompañada del error de suponer que su complementario es la probabilidad de que la siguiente replicación del experimento tendrá éxito.
- *Criterio de decisión*: Confusión entre región de rechazo y de aceptación.
- *Interpretación de resultados:* Confunden significación estadística con significación práctica, así como un resultado significativo lo ven como el resultado que corrobora la hipótesis nula y en particular al efecto de la variable manipulada por el investigador (Falk, 1986; Granaas, 2002).

En cuanto a los estudiantes de Psicología se refiere, la enseñanza de los conceptos ligados al contraste de hipótesis plantea especiales problemas didácticos, al no poseer una base matemática tan amplia como estudiantes de otras carreras científicas. Al mismo tiempo, la inferencia estadística, resulta un instrumento importante en la investigación en Psicología, y su necesidad e importancia han ido aumentando durante los últimos años. Mientras la realización de los cálculos asociados a los contraste de hipótesis es hoy día muy sencilla gracias al software estadístico, la enseñanza de los conceptos y el razonamiento inferencial es mucho más compleja, lo que explica las muchas dificultades descritas en el uso de la inferencia (Brewer, 1985).

En nuestro trabajo queremos contribuir a este tema, analizando las dificultades que persisten en los estudiantes españoles de psicología con la administración de algunos ítems de evaluación.

2. Método

La muestra estuvo formada por un total de 93 alumnos de segundo año de la Licenciatura en Psicología en la Universidad de Huelva, que cursaban una asignatura de Análisis de Datos II. Esta asignatura (60 horas lectivas) se enmarca dentro del área de Metodología de las Ciencias del Comportamiento y ofrece a los alumnos un cuerpo de conocimientos sobre inferencia, regresión y análisis de varianza. Estos alumnos habían cursado el año anterior Análisis de Datos en Psicología I, que incluye la estadística descriptiva univariante y bivariante. En los dos cursos incluyeron actividades prácticas de análisis de datos, utilizando el software SPSS.

Cabe señalar también que al final del curso el alumno elabora un informe de un trabajo desarrollado en forma de una pequeña investigación. Con los datos recogidos por toda la clase, los alumnos por grupos plantean una serie de hipótesis a comprobar, elijen la prueba estadística más acorde para la resolución del problema, y extraen sus conclusiones. El profesor los guía en cuestiones relativas a la formulación de hipótesis, construcción de la base de datos, tratamiento y análisis de los mismos. Finalmente el alumno debe presentar sus resultados en forma de artículo según las normas APA. Por todo ello es que tanto la elección, lectura y análisis de resultados de las pruebas de hipótesis son fundamentarles para aprobar el curso.

Sobre los conceptos descritos en la introducción nos propusimos elaborar un conjunto de ítems que reflejaran de manera exploratoria las dificultades de los alumnos de Psicología en los conceptos relacionados con la inferencia estadística. Para redactar los ítems se partieron de los ítems propuestos en la investigación de Vallecillos (1994) y Olivo (2008), de los que se procedió a revisar en redacción y contexto (se redactaron con ejemplos familiares para los estudiantes de Psicología). Los contenidos evaluados se recogen en la Tabla 1.

Tabla 1. Contenidos evaluados en el cuestionario

Contenido evaluado	I1	I2	I3	I4	I5	I6
Asignación de hipótesis	x					
Diferenciar hipótesis nula y alternativa	x					
Valor p, nivel de significación					x	
Diferenciar potencia, nivel de significación, probabilidad de error II		x	x			x
Región crítica y de aceptación				x	x	x
Contraste unilateral y bilateral				x		
Regla de decisión					x	x

Los estudiantes completaron los ítems como parte del examen final de la asignatura. Dado que no eran los únicos contenidos evaluados en la asignatura algunos ítems se redactaron para explorar más de un contenido, para no sobrecargar a los alumnos con más ítems (solo disponen de dos horas para completar el examen). Para evitar que respondieran al azar se les advirtió que se penalizaría las respuestas incorrectas. Los ítems aplicados se recogen en la Figura 1.

Ítem 1. Queremos conocer si los sujetos extrovertidos e introvertidos difieren en la puntuación media en autoestima y no disponemos de ninguna información previa. El tipo de hipótesis nula razonable que debo plantear es:

a) $\mu_I \leq \mu_E$ **b) $\mu_I = \mu_E$** c) $\mu_I \geq \mu_E$

Ítem 2. Supongamos un contraste bilateral sobre la media, siendo la variable estudiada la inteligencia. Para H_0: $\mu = 100$, H_1: $\mu = 110$, $\alpha = 0{,}05$ y $\beta = 0{,}4406$. ¿Cuál es la

probabilidad de rechazar la H_0 cuando no es 'cierta'?

a) 0,05 b) 0,4406 **c) 0,5594**

Ítem 3. Supongamos que conocemos la 'verdad absoluta' sobre la eficacia de dos tratamientos (A y B), y sabemos que existen diferencias en la efectividad de ambos para curar la depresión. Un investigador que realice un estudio y parta de la hipótesis '*no existen diferencias en la efectividad de los tratamientos A y B para curar la depresión*' cometerá un *error tipo II* cuando:

a) Concluya que A y B no son efectivos para curar la depresión

b) Concluya que A y B no difieren en su efectividad para curar la depresión

c) Concluya que A y B difieren en su efectividad para curar la depresión

Ítem 4. La puntuación típica correspondiente a una $\alpha = 0,01$ en un contraste unilateral derecho es:

a) 2,33 b) -2,33 c) 3,10

Ítem 5. ¿Cuál de las siguientes hipótesis está **bien** formulada?:

a) Ho: $\mu = 3$; Hi: $\mu \neq 4$, b) Ho: $\mu = 3$; Hi: $\mu \geq 3$, **c) Ho: $\mu = 3$; Hi: $\mu \neq 3$**

Ítem 6. Cuando realizamos un contraste, la regla de decisión nos lleva a rechazar la hipótesis nula siempre que:

a) El estadístico de contraste caiga en la región de rechazo

b) La probabilidad asociada al estadístico de contraste (el valor de significación) sea menor que el valor de alfa

c) a) y b) son correctas

Figura 1. Ítems aplicados

3. Resultados y discusión

Como vemos en la Tabla 2, los ítems en general, no fueron excesivamente difíciles, excepto en el ítem 4 (para el cual no se tiene una referencia en investigaciones previas) más de la mitad de los alumnos responden correctamente. Nuestros resultados son en general mejores que los de Vallecillos (1994) quien obtiene respectivamente 68,6%, 22,9%, 22,9%, 56% y 33,7% % en su muestra global y algo más con alumnos de psicología (78,6%, 20%, 20%, 77,1% y 42,9%) en los ítems 1, 2, 3, 5 y 6. Los principales resultados encontrados son:

- En el ítem 1, que evalúa la asignación de hipótesis, es decir la traducción de hipótesis de investigación a hipótesis estadísticas, muestra un 90,9% de respuestas correctas (tabla 3), por lo que ha resultado fácil para los estudiantes, quienes parecen comprender el planteamiento de las hipótesis en un contraste estadístico. Un 4,3% de los estudiantes elige el distractor a) confundiendo las hipótesis nula y alternativa, confusión encontrada también en Vallecillos (1994) aunque sólo en un 2%.

Tabla 2. Porcentajes de respuestas por Ítem (n=93)

Respuesta	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Ítem 6
a	4,3%	10,9%	1,1%	**34,8%**	3,3%	26,1%
b	**93,5%**	6,5%	**65,2%**	46,7%	1,1%	2,2%
c	2,2%	**76,1%**	18,5%	5,4%	**94,6%**	**59,8%**

sin contestar	1,1%	7,6%	16,3%	14,1%	2,2%	13,0%

- En el ítem 2 un 10,9% confunde los errores tipo I y tipo II (distractor a) y el 6,5% de nuestros estudiantes confunde β y 1- β (distractor b). El porcentaje en Vallecillos con este último error fue el 30%. Ella dio los distractores mediante símbolos; por ello puede ser más difícil que en nuestro caso, en que están dados en valor numérico.

- En el ítem 3, evalúa primordialmente si el alumno es capaz de diferenciar entre los errores tipo 1 y tipo 2 al plantear un test de hipótesis. El error tipo 2 se define como mantener una hipótesis nula que es falsa. En el caso que nos ocupa la hipótesis nula que se plantea es que las medias son iguales y se dice en el enunciado, que ésta hipótesis es falsa. De esta manera, si un investigador llega a la conclusión de mantener la hipótesis nula o que las medias no difieren, estará cometiendo un error tipo 2 (alternativa b, es la correcta). Por otro lado, si el investigador llegara a la conclusión de que las medias difieren y por tanto rechaza la hipótesis nula, no estará cometiendo ningún tipo de error, puesto que sabemos que la hipótesis nula es falsa (distractor c). En cuanto al distractor a, no es correcto, puesto que se habla de efectividad de los tratamientos, algo que no podemos inferir de las premisas que parte el enunciado, se puede decir que el alumno que elije está alternativa está confundiendo hipótesis estadística e hipótesis de investigación (Chow, 1996). Otra explicación es que está suponiendo que un resultado estadísticamente significativo es ya un apoyo a la significación práctica (Pollard y Richardson, 1987; Abelson, 1997; Lecoutre, Lecoutre y Poitevineau, 2001, Díaz y Batanero, 2006).

  Un 18,5% de nuestros alumnos elige el distractor c, (7,1% en Vallecillos). Hay un alto porcentaje y un 16,3%, de alumnos que no responden al ítem, lo que conlleva el desconocimiento entre Error Tipo I y Tipo II (20% en Vallecillos). De nuevo la autora da el enunciado en formato simbólico.

- En el ítem 4 se evalúa la comprensión del nivel de significación y el cálculo del valor crítico, así como la diferencia entre test unilateral y bilateral. La mayoría de los alumnos (46,7%) escoge el distractor b), lo que hacen es tomar el test unilateral izquierdo o lo que es lo mismo confunde hipótesis nula y alternativa o bien la región crítica y de aceptación en un contraste unilateral. Un elige 5,4% elige el distractor del mismo lado del contraste que se da en el enunciado, pero hace un error de lectura de tablas. Este ítem es de elaboración propia, aunque Tauber (2001) en su investigación sobre la distribución Normal muestra ítems de contenido similar, donde observa las dificultades que estudiantes de universitarios de primeros cursos tienen con el manejo de la distribución normal.

- En el ítem 5 evalúa el conocimiento del planteamiento de las hipótesis nula y alternativa, pero se centra más en la diferencia entre hipótesis estadística nula y alternativa y la propiedad que la hipótesis nula es siempre la de no diferencia. Un 3,3% de estudiantes de nuestro estudio no considera las hipótesis como complementarias. Vallecillos usa un ítem parecido, pero sólo presenta en cada distractor la hipótesis nula, por lo que no considera este tipo de error.

- En el ítem 6 evalúa el conocimiento de las condiciones en las que se tomará la decisión de rechazar la hipótesis nula. Un 2,2% elige el distractor b), correcto y un 26,1% el a), también correcto; pero no asocian que los dos enunciados responden a la misma pregunta. Un muy bajo porcentaje (13%) que no da una respuesta sobre la regla de decisión. Vallecillos usa un ítem parecido, pero plantea un ejemplo particular y no el caso general. Aún así sus resultados son peores.

4. Conclusiones

En cuanto al contenido referido al contraste de hipótesis nuestros resultados son bastante similares a los conseguidos por Vallecillos (1994) en su muestra de estudiantes de Psicología, incluso algo mejores. En líneas generales podemos considerar que los resultados han sido satisfactorios en la mayor parte de los ítems, con porcentajes de respuestas correctas bastante aceptables. Podemos afirmar que los alumnos son de asignar hipótesis estadística, dada una hipótesis de investigación y que éstos discriminan bien entre hipótesis nula y alternativa. La mayor parte de los participantes son capaces de hacer una asignación correcta de valor crítico y tienen un buen conocimiento de la regla de decisión.

Aun así, se conservan en nuestra muestra errores que tienen que ver con la confusión del nivel de significación, nivel de confianza, error tipo 1, error tipo 2 y potencia, y estas dificultades pueden ser tal vez explicado en parte a la al intercambio de sucesos que intervienen en la probabilidad condicional, tal y como apuntan Cohen, (1994); Falk y Greenbaum, (1995); Chow, (1996).

En este sentido apuntamos como idea la estrategia de incluir en el tema de inferencia estadística una clase en la que los alumnos exploren con mayor profundidad la idea de probabilidad condicional, pero desde el punto de vista "manipulativo" a través de applet disponibles en Internet. Por un lado, el uso de applet son atractivos para los alumnos, más que realizar problemas o cálculos y por otro lado permite que los alumnos experimenten diferentes posibilidades de forma más visual (Batanero, Contreras y Díaz, 2012).

Otra de las dificultades más relevantes encontradas tiene que ver con la elección del punto crítico para un nivel de significación especificado, confundiendo el procedimiento de hallar valores críticos en el contraste unilateral y bilateral, error no detectado por Vallecillos (1994). No queda claro si la confusión está entre contraste unilateral izquierda o derecha o tal vez en el manejo de las tablas de distribución normal tipificada. Sería interesante explorar mejor estas dificultades en investigaciones futuras.

Por otro lado, las variaciones que hemos introducido en los ítems confirman que estos errores no dependen del enunciado particular del ítem, sino de la falta de conocimiento de los estudiantes en estos conceptos. El enunciado verbal en varios de los ítems en lugar de simbólicos lleva a un mayor porcentaje confirmando la opinión de Falk (1986).

Referencias

Alvarado, H. (2007). *Significados institucionales y personales del teorema central del límite en la enseñanza de estadística en ingeniería.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Batanero, C. (2000). Controversies around significance tests. *Journal of Mathematics Thinking and Learning, 2*(1-2), 75-98.

Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza *Revista digital Matemática, Educación e Internet 12(2).*

Batanero, C. y Díaz, C. (2006). Methodological and didactical controversies around statistical inference. *Actes du 36iémes Journées de la Societé Française de Statistique.* CD ROM. Paris: Societé Française de Statistique.

Birnbaum, I. (1982). Interpreting statistical significance. *Teaching statistics. 4*, 24 – 27.

Borges, A., San Luis, C., Sánchez, J. A. y Cañadas, I. (2001). El juicio contra la hipótesis nula: muchos testigos y una sentencia virtuosa. *Psicothema, 13 (1),* 174- 178.

Chow, L. S. (1996). *Statistical significance: Rationale, validity and utility*. London: Sage.

Cohen, J. (1994). The earth is round (p<.05). *American Psychologist, 49(12),* 997 – 1003.

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2004). Controversias en el uso de la inferencia en la investigación experimental. *Metodología de las Ciencias del Comportamiento,* Volumen especial 2004, 161-167.

Díaz, C. y Batanero, C. (2006). ¿Cómo puede el método bayesiano contribuir a la investigación en psicología y educación? *Paradigma, 27*(2), 35-53.

Falk, R. (1986). Misconceptions of statistical significance. *Journal of StructuralvLearning, 9,* 83 – 96.

Falk, R. y Greenbaum, C. W. (1995). Significance tests die hard: The amazing persistence of a probabilistic misconception. *Theory and Psychology, 5 (1),* 75 – 98.

Granaas, M. (2002). Hypothesis testing in psychology: throwing the baby out with the bathwater? En B. Phillips (Ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics.* Ciudad del Cabo: International Association for Statistical Education. CD ROM.

Haller, H. y Krauss, S. (2002). Misinterpretations of signifi cance: A problem students share with their teachers? *Methods of Psychological Research*, 7 (1), 1–20.

Harlow, L. L., Mulaik, S. A. y Steiger, J. H. (1997). *What if there were no significance tests?* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lecoutre, B. (1999). Beyond the significance test controversy: Prime time for Bayes? *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-second Session of the International Statistical Institute* (Tome 58, Book 2) (pp. 205 – 208). Helsinki: International Statistical Institute.

Lecoutre, B., Lecoutre M. P., y Poitevineau J. (2001). Uses, abuses and misuses of significance tests in the scientific community: Won't the Bayesian choice be unavoidable? *International Statistical Review*, *69,* 399-418.

Pollard, P., y Richardson, J. T. E. (1987). On the probability of making type I errors. *Psychological Bulletin, 10,* 159 – 163.

Tauber, L. (2001). *Significado y comprensión de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos.* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

Vallecillos, A (1994). *Estudio teórico experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Dificultades de estudiantes mexicanos que concluyeron el bachillerato para resolver problemas ternarios de probabilidad condicional

Inzunsa Cazares Santiago[1], Huerta Palau Pedro[2]

[1]Universidad Autónoma de Sinaloa
[2]Universitat de València

Resumen

En el presente artículo se reportan resultados sobre las dificultades que tuvieron al resolver problemas ternarios de probabilidad condicional con diferente estructura y contexto, una muestra de estudiantes mexicanos que recién concluyeron el bachillerato (18 a 19 años). Los resultados muestran que los problemas resultaron muy complicados para los estudiantes, y dicha dificultad se acrecentó con el incremento del nivel en la estructura del problema. Sus estrategias de solución fueron principalmente aritméticas. El uso de diagramas de árbol y diagramas de Venn fue casi inexistente, y en los casos que fueron utilizados, se cometieron errores en su construcción. Las tablas de contingencia no aparecieron en las soluciones de los estudiantes.

Palabras clave: Probabilidad condicional, resolución de problemas.

1. Introducción

El estudio de aspectos sobre la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad condicional ha venido cobrando cada vez mayor importancia en los años recientes, dada la multiplicidad de sus aplicaciones en diversas áreas de interés para el ser humano; como consecuencia de ello, la probabilidad condicional ha pasado de ser un tópico reservado principalmente a cursos universitarios, para convertirse en un tema de estudio desde el nivel medio en los currículos de muchos países. En la investigación sobre las dificultades que entraña la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad condicional había predominado hasta hace poco tiempo el enfoque psicológico, caracterizado por el análisis del razonamiento y las concepciones que las personas muestran ante determinadas tareas o situaciones que involucran al azar y la incertidumbre. En este enfoque se ubican trabajos pioneros en la investigación sobre el tema como los realizados por Tversky y Kahneman (1982), Pollatsek et al, (1987) y Falk (1986). Sin embargo, con el propósito de influir en el desarrollo de razonamientos y concepciones correctas a través de la enseñanza, ha cobrado fuerza lo que Shaughnessy (1992) denomina enfoque de los educadores matemáticos, dentro del cual se ubica la mayor parte de los trabajos de investigación en los años recientes. En particular, en lo que concierne al estudio de la probabilidad condicional, muy recientemente se ha prestado atención al enfoque de resolución de problemas dentro de una matemática realista, como una línea de investigación que permite generar conocimiento sobre la forma en que influyen diversas variables en el proceso de solución y los resultados obtenidos. Como ejemplo de estos trabajos se pueden mencionar los realizados por Huerta y Lonjedo (2006), Lonjedo (2007), Edo y Huerta (2010).

En este contexto, el objetivo general del presente trabajo ha sido investigar sobre las dificultades que tienen para resolver problemas ternarios de probabilidad condicional, estudiantes que recién han concluido sus estudios de bachillerato (18-19 años). En específico, nos interesa ver el efecto de la estructura y el contexto en la dificultad para producir un resultado del problema.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 205-212). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

2. Marco Teórico

Identificar la tipología de problemas de probabilidad condicional resulta de particular importancia tanto para el diseño de estudios de investigación como para el diseño de secuencias de enseñanza en los diferentes niveles escolares. Yañez (2000) realiza una clasificación de los problemas de probabilidad condicional teniendo en cuenta los datos explícitamente mencionados en el problema. En trabajos posteriores, Lonjedo y Huerta (2004) y Cerdán y Huerta (2007) amplían dicha clasificación considerando los componentes que tienen que ver con la estructura de los datos y la relación que guardan con la pregunta del problema. En particular, dados dos sucesos A y B, con $P(B) \neq 0$, se define la probabilidad condicional del suceso A (condicionado) dado que el suceso B (condicionante) ha ocurrido, mediante la expresión matemática $P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Considerando además de los eventos A y B, a sus complementarios $\bar{A}$ y $\bar{B}$, se pueden establecer relaciones de probabilidad condicional entre estos sucesos, probabilidades de intersección y probabilidades marginales; de tal forma, toda la información que se puede presentar en un problema de probabilidad condicional se resume en 4 probabilidades marginales, 4 probabilidades de intersección y 8 probabilidades condicionales. Con tres datos convenientemente elegidos entre probabilidades marginales, probabilidades de intersección y probabilidades condicionales se puede resolver cualquier problema escolar de probabilidad condicional.

Huerta (2009) caracteriza a los problemas de probabilidad condicional como *problemas ternarios* siempre que cumplan con las siguientes condiciones:

- En el enunciado del problema hay, al menos, una probabilidad condicional implicada, ya sea como probabilidad conocida o como probabilidad preguntada, o las dos.
- Al menos se conocen tres probabilidades, no directamente relacionadas.
- Todas las probabilidades, tanto conocidas como desconocidas, están relacionadas mediante relaciones ternarias de los tipos: complementariedad $P(A) + P(\bar{A})=1$, aditivas, $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$ y multiplicativas $P(A \setminus B) \times P(B) = P(A \cap B)$.
- La pregunta del problema se hace sobre una probabilidad desconocida que está relacionada con las probabilidades conocidas por al menos una de las relaciones ternarias.

De acuerdo con lo anterior, la estructura de cualquier problema ternario de probabilidad condicional está determinada por niveles (N), categorías (C) y tipos (T). El nivel especifica el número de probabilidades condicionales en el enunciado, la categoría especifica el número de probabilidades marginales conocidas, y el tipo está determinado por la pregunta del problema, que puede ser una condicional, una marginal o una intersección. Por ejemplo, en un problema clasificado como $N_0C_2T_1$, N_0 significa que no hay probabilidades condicionales en el enunciado, C_2 significa que se proporcionan dos probabilidades marginales y T_1 significa que la pregunta del problema es sobre una probabilidad condicional. Por su parte, un problema clasificado como $N_2C_0T_2$, significa que se proporcionan dos probabilidades condicionales, cero probabilidades marginales y se pregunta por una probabilidad marginal. Un cuadro que muestra la clasificación en familias y subfamilias de problemas ternarios de probabilidad condicional que se pueden tener, se muestra a continuación (Tabla 1).

Adicionalmente, en la resolución de un problema pueden influir, además de la estructura anterior basada en las componentes del problema, otro tipo de variables tales

como el formato de los datos, la pregunta que se plantea y el enunciado del problema, que pueden ser consideradas como variables independientes.

Tabla 1. Clasificación de los problemas ternarios de probabilidad condicional de acuerdo a su estructura

	N_0			N_1			N_2			N_3		
C_0	C_0T_1	Ø	Ø	C_0T_1	C_0T_2	C_0T_3	C_0T_1	C_0T_2	C_0T_3	C_0T_1	C_0T_2	C_0T_3
C_1	C_1T_1	Ø	Ø	C_1T_1	C_1T_2	C_1T_3	C_1T_1	C_1T_2	C_1T_3	Ø	Ø	Ø
C_2	C_2T_1	Ø	Ø	C_2T_1	Ø	C_2T_3	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø

3. Metodología

La muestra de los sujetos de estudio que participaron en la investigación se compone de 153 estudiantes que habían concluido el bachillerato y estaban en proceso admisión a una carrera universitaria. El principal instrumento de recolección de datos consistió de un cuestionario (ver anexo) que fue tomado de la investigación de Amorós (2012), el cual fue aplicado mientras los estudiantes tomaban un curso de inducción. Tanto la información como las preguntas de los problemas del cuestionario estaban expresadas en términos de porcentajes y podían ser resueltos por métodos aritméticos y algebraicos. No obstante, se considera que son problemas de probabilidad, ya que también pueden ser resueltos con representaciones matemáticas y modelos propios de esta disciplina, tales como tablas de contingencia y diagramas de árbol (ver Tabla 2).

Tabla 2. Características de los problemas del cuestionario

Problema	Familia	Se conoce	Pregunta	Contexto
1	$N_0C_2T_1$	$P(A)$ $P(B)$ $P(\bar{A}\cap\bar{B})$	$P(A \setminus B)$	Salud
2	$N_2C_1T_1$	$P(A)$ $P(B \setminus A)$ $P(B \setminus \bar{A})$	$P(A \setminus \bar{B})$	Diagnóstico
3	$N_2C_0T_2$	$P(B \setminus A)$ $P(B \setminus \bar{A})$ $P(\bar{A} \setminus \bar{B})$	$P(A)$	Social
4	$N_1C_0T_1$	$P(\bar{A}\cap B)$ $P(\bar{A}\cap\bar{B})$ $P(B \setminus A)$	$P(A \setminus B)$	Social
5	$N_1C_1T_1$	$P(A)$ $P(\bar{A}\cap B)$ $P(B \setminus A)$	$P(A \setminus B)$	Diagnóstico
6	$N_2C_0T_2$	$P(\bar{A} \cap B)$ $P(A \setminus B)$ $P(\bar{A} \setminus \bar{B})$	$P(A)$	Social
7	$N_2C_1T_1$	$P(A)$ $P(B \setminus A)$ $P(A \setminus \bar{B})$	$P(\bar{A} \setminus B)$	Salud

Los problemas involucran dos sucesos A y B, sus complementarios, las intersecciones y las condicionales derivadas de estos. Los problemas están formulados en diferentes contextos (salud, social y diagnóstico) y con diferente estructura (niveles, categorías y tipos). En el análisis del resultado de la resolución del problema se han considerado los indicadores definidos por Huerta et al, (2011), mismos que se describen a continuación:

- *Dificultad apreciada del problema (DAP):* Es medida por el porcentaje de estudiantes que no abordan un determinado problema, lo cual puede ser un indicador de que no entienden el enunciado o que no son capaces de resolverlo.

$$DAP = 100 - \frac{abordados}{total\ de\ estudiantes} \times 100$$

- *Dificultad global del problema (DP):* Nos informa del porcentaje de estudiantes que no alcanzan a emitir una respuesta a la pregunta del problema, entre todos los estudiantes.

$$DP = 100 - \frac{resultado}{total\ de\ estudiantes} \times 100$$

- *Dificultad del problema (DPR):* Nos informa del porcentaje de estudiantes que no alcanzan a emitir una respuesta a la pregunta del problema, entre aquellos que si abordaron su resolución.

$$DPR = 100 - \frac{resultado}{abordados} \times 100$$

- *Dificultad de la solución del problema (DSP):* Se refiere a la dificultad de dar una solución numérica correcta a la pregunta del problema.

$$DSP = 100 - \frac{número}{abordados} \times 100$$

4. Resultados y discusión

De acuerdo con los resultados que se muestran en la tabla 3, el valor de la dificultad apreciada (DAP) nos indica que un alto porcentaje (del 69.04% al 92%) de estudiantes abordaron los problemas; sin embargo, el porcentaje fue disminuyendo conforme se incrementaba el número de condicionales en el enunciado (nivel), a excepción del problema 3, el cual fue abordado por casi todos los estudiantes, pudiendo influir en ello el contexto social en el que se planteó, muy asequible a los estudiantes. El problema 6 fue el menos abordado y corresponde al nivel N_2 y a contexto social. Una posible explicación sería la complejidad del mismo enunciado, dado que muchos estudiantes hicieron referencia a ello.

La dificultad global del problema (DP) también muestra un comportamiento similar de incremento en su complejidad con el aumento del nivel en la estructura del problema, pero sus valores son mayores a los de la dificultad apreciada (DAP), por lo que se deduce que un porcentaje considerable (del 18.95% al 48.36%) no lograron siquiera emitir una respuesta.

Tabla 3. Resultados de los indicadores de dificultad de acuerdo al nivel (N)

Problema	Nivel	DAP	DP	DPR	DSP
P1	$N_0C_2T_1$	13.72	32.67	21.96	99.24
P4	$N_1C_0T_1$	17.00	42.48	30.70	99.21
P5	$N_1C_1T_1$	22.22	32.67	13.44	99.15
P2	$N_2C_0T_1$	17.64	29.41	14.28	98.41
P6	$N_2C_0T_1$	30.06	45.09	21.49	93.13
P7	$N_2C_1T_1$	27.45	48.36	28.28	90.99

P3	$N_3 C_0 T_2$	7.18	18.95	12.67	99.30

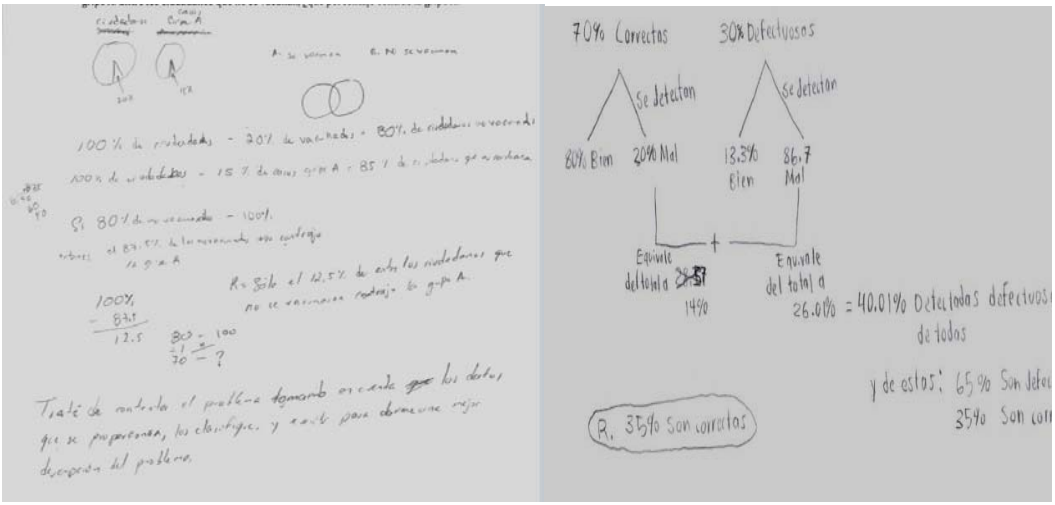
L

En cuanto a la dificultad del problema (DPR) se observa que es menor en todos los problemas a la dificultad global (DP), como consecuencia del alto porcentaje de estudiantes que abordaron los problemas. Sobresalen los problemas 2, 3 y 5 por ser los de menor dificultad en este indicador, los cuales corresponden a contexto social y diagnóstico. Sin embargo la dificultad de solución de los problemas (DSP) fue superior al 90% en todos los casos, lo que indica que fueron muy pocos los estudiantes que lograron resolver los problemas correctamente. Respecto al contexto, no se observa un efecto claro en los niveles de dificultad apreciada. Sin embargo los indicadores DP y DPR nos señalan que los problemas de diagnóstico resultaron menos difíciles, aunque ello no se refleja en el indicador de solución correcta (DSP).

Tabla 4. Resultados de los indicadores de dificultad de acuerdo al contexto del problema

Problema	Nivel	DAP	DP	DPR	DSP
P1	Salud	13.72	32.67	21.96	99.24
P7	Salud	27.45	48.36	28.28	90.99
P2	Diagnóstico	17.64	29.41	14.28	98.41
P5	Diagnóstico	22.22	32.67	13.44	99.15
P6	Social	30.06	45.09	21.49	93.13
P3	Social	7.18	18.95	12.67	99.30
P4	Social	17.00	42.48	30.70	99.21

Las estrategias utilizadas para resolver los problemas fueron principalmente aritméticas. En algunos casos se observó el uso de representaciones como diagramas de árbol y diagrama de Venn pero sin éxito en la solución del problema. Las tablas de contingencia no aparecieron en sus estrategias de solución, aún cuando era una representación que permitía resolver algunos problemas de forma sencilla. Un ejemplo de solución correcta obtenida en el problema 1 y 2 donde se muestran estrategias aritméticas y algunos indicios sobre uso de representaciones gráficas se muestran a continuación:



Aunque no es posible realizar una comparación válida con otros estudios que utilizaron la misma metodología, como los realizados por Amorós (2012) y Carles et al. (2009), por las diferencias en los sujetos de estudio y en los cuestionarios utilizados, si es posible realizar una reflexión en torno a ello. Amorós (2012) utilizó el mismo cuestionario –de hecho el cuestionario que utilizamos lo tomamos de su investigación- con estudiantes de máster universitario antes de tomar el curso de probabilidad y estadística. Se observa que las dificultades de estos últimos fueron considerablemente menores en todos los problemas. En el caso de los sujetos de Carles et al., (2009) eran estudiantes de cuarto año de ESO sin formación previa (15-16 años) y el cuestionario solo abordaba problemas de nivel N_0. Estos estudiantes son más similares en cuanto a nivel de escolaridad a nuestros sujetos de estudio, con la diferencia que muchos de nuestros sujetos ya habían tomado un curso de probabilidad en el bachillerato. Si tomamos como base el problema 1 de nuestro cuestionario, por ser el único de nivel N_3, se observa que los alumnos españoles tuvieron mayor dificultad en la dificultad apreciada (DAP) y en la dificultad global del problema (DP), un nivel similar en la dificultad del problema (DPR), pero menor dificultad en la solución del problema (DSP), lo que indica que resolvieron de forma correcta más problemas que nuestros sujetos de estudio a pesar de no tener conocimientos previos en probabilidad.

5. Conclusiones

Los resultados muestran que los problemas de probabilidad condicional resultaron muy complicados para los estudiantes que participaron en a investigación, quienes a pesar de haber tenido en la mayoría de los casos, conocimientos previos de probabilidad, aritmética y álgebra, no lograron tener éxito para resolverlos correctamente en más del 90% de los casos. En sus estrategias de solución se observaron muchas dificultades para colocar la información en algún registro simbólico que les ayudara a resolverlo y con frecuencia mencionaron textualmente su imposibilidad de hacerlo. Aunque en muchos casos se observaron intentos de apoyarse en representaciones gráficas como los diagramas de árbol y diagramas de Venn, -en incluso en diagramas circulares-, se observó una falta de dominio de estas representaciones que les hubieran sido de utilidad en la resolución del problema. Las tablas de contingencia que pudieron ser útiles para resolver algunos problemas no fueron utilizados por ningún estudiante. Una revisión de los currículos de los diferentes sistemas de bachillerato que existen en el estado de Sinaloa, nos muestra que el uso de representaciones como el diagrama de árbol y diagrama de Venn aparece como temática de estudio. Sin embargo, por referencia de algunos profesores de bachillerato, la probabilidad condicional es abordada en forma superficial al igual que las representaciones para resolución de problemas. Los resultados del presente estudio muestran que es necesario profundizar en el

estudio de las dificultades de la probabilidad condicional a través de la metodología de resolución de problemas incluyendo como sujeto de estudio a los mismos profesores de bachillerato.

Referencias

Amorós, R. (2012). *Un ejemplo de análisis de datos mediante inferencia bayesiana en resolución de problemas de probabilidad condicionada.* Memoria Fin de Master. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitàt de Valencia.

Carles, M., Cerdán, F., Huerta, M. P., Lonjedo, M. A. y Edo, P. (2009). Influencia de la estructura y el contexto en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional de nivel No. Un estudio exploratorio con estudiantes sin enseñanza previa. *Investigación en Educación Matemática XIII.* SEIEM España.

Cerdán, F. y Huerta, M. P. (2007). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática*, *19*(1), 27-62.

Edo, P. y Huerta, M. P. (2010). Estudios sobre los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel No. *Comunicación presentada en el grupo de Probabilidad y Estadística*. Lleida: SEIEM.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. *Proceedings of the International Conference on Teaching Statistics 2.* University of Victoria, Canada. IASE-ISI.

Huerta, M. P., y Lonjedo, M. A. (2006). The nature of the quantities in a conditional probability problem. Its influence on the problem solving behaviour. En M. Bosch (Ed.), *European Research in Mathematics Education IV. Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* CERME 4 (p. 353-364).

Huerta, M. P. (2009). On conditional probability problem solving research - Structures and context. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 163-194.

Lonjedo, M. A. y Huerta, M.P. (2004). Una clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional. Su uso para la investigación y el análisis de textos. En Castro, E. y De la Torre, E., *Investigación en Educación Matemática. Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 229-238). Universidad da Coruña,.

Lonjedo, M. A. (2007). *Análisis de los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal y de sus procesos de resolución*. Tesis doctoral. Universitat de Valencia.

Pollatsek, A., Well, A.D., Konold, C., Hardiman, P., and Cobb, G. (1987), Understanding Conditional Probabilities. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255-269.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. Grows (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: McMillan Publishing Company. 465-494.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1983). Evidential impact of base rates. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Ed.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge Academic Press, 153-160.

Yañez, G. (2000). El álgebra, las tablas y los árboles en los problemas de probabilidad condicional. En Gómez, p. y Rico, L. (eds.). *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro*. Editorial Universidad de Granada. pp. 355-371

Anexo A

Cuestionario

1. El 20 % de los ciudadanos se vacunan para prevenir el contagio de la gripe A. Por otra parte, el 15 % de los ciudadanos contrae la gripe A y un 70 % ni se vacuna ni contrae la gripe A. Entre los ciudadanos que no se vacunan, ¿qué porcentaje contrae la gripe A?

2. El 70 % de las piezas manufacturadas en una fábrica son correctas. De las piezas que son correctas, un dispositivo detecta como correctas el 80 % y de las defectuosas, el dispositivo detecta como correctas el 13.3 %. Entre las piezas detectadas por el dispositivo como defectuosas, ¿qué porcentaje son correctas?

3. De las chicas del instituto, el 37.5 % usa lentes. De los chicos, el 28.6 % usa lentes. De los que no usan lentes, el 50 % son chicos. Entre los estudiantes del instituto, ¿qué porcentaje son chicas?

4. En un instituto, el 26 % de los estudiantes no aprueba ni matemáticas ni filosofía y un 4 % aprueba filosofía pero no aprueba matemáticas. Se sabe también que de los estudiantes que aprueban matemáticas el 80 % aprueba filosofía. Entre los estudiantes que aprueban filosofía, ¿qué porcentaje aprueba matemáticas?

5. Una población de riesgo de sufrir tuberculosis se somete al test de la tuberculina. Diferentes estudios muestran que el 57% de dicha población padece de tuberculosis y que de los que padecen la tuberculosis el 59.6 % dan positivo en el test. Además se sabe que un 13% no padece tuberculosis pero da positivo en el test. Entre los que dan positivo en el test, ¿qué porcentaje padecen tuberculosis?

6. Un 14% de los ciudadanos leen diariamente los periódicos pero no leen el periódico El País. De los que leen diariamente los periódicos el 80% leen El País y de los que leen ocasionalmente los periódicos el 86.7% no leen El País. ¿Que´ porcentaje de ciudadanos lee el periódico El País?

7. Una población sufre una infección en los ojos. De ellos, el 53.3% son tratados con un antibiótico nuevo. Los resultados muestran que de los tratados con el antibiótico el 84% se han curado y que de las personas que no se han curado el 14.3% se han tratado con el antibiótico. Entre las personas que se han curado, ¿que´ porcentaje no se ha tratado con el antibiótico nuevo?

Educação estatística crítica no contexto da educação a distância

Zampieri, Maria Teresa y Javaroni, Sueli Liberatti

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

Resumo

Nesse artigo, temos o propósito de tecer algumas reflexões acerca do desenvolvimento da atividade "Análise de investimento no mercado de ações" realizada por estudantes na disciplina *Introdução a Estatística*, que compõe a grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática, ofertado a distância pela Universidade Federal de Roraima (UFRR), e vinculado a Universidade Aberta do Brasil (UAB). A metodologia de pesquisa adotada é de cunho qualitativo, e dentre os procedimentos metodológicos utilizados, destacamos a observação e a orientação aos alunos durante todo o proceso de desenvolvimento da atividade. Os conteúdos abordados em tal atividade foram: *Média Aritmética, Desvio Padrão e Coeficiente de Variação*. Além disso, os articulamos com questões que tratavam de temas políticos e sociais coerentes com a problemática abordada. Ressaltamos ainda que os dados, aqui apresentados, são referentes à uma pesquisa de mestrado (em desenvolvimento) que está sendo conduzida pela primeira autora, sob orientação da segunda. Tal atividade foi elaborada tendo como base a Teoria da Educação Estatística Crítica, onde são valorizados o trabalho com dados reais, a análise e interpretação de resultados, bem como o diálogo e a troca de ideias sobre temas sociais e políticos vinculados aos conteúdos abordados. Um dos resultados obtidos foi o que denominamos de *produção estatística conjunta*, que diz respeito aos diferentes aspectos que permearam o estudo de conteúdos estadísticos por grupos de alunos.

Palabras clave: Educação a distância; Produção estatística; comunicação escrita

.

1. Introdução

Nos dias atuais, estamos acompanhando a difusão do ensino na modalidade a distância no Brasil e de como tal modalidade vem se consolidando dentro desse país. E por causa dessa ascenção, temos nos deparado com uma nova realidade educacional, especialmente no Ensino Superior.

Dados do Censo Escolar de 2011 apontam que o número de alunos matriculados no ensino superior no Brasil é de 6.739.689, e dentre esses, 992.927 estudam na modalidade a ditância, o que corresponde a aproximadamente 14,73% do total de alunos matriculados no ensino superior. (Brasil, 2012).

Esse dado estatístico é concordante com o fato de que a modalidade de Educação a Distância (EaD), praticada hoje no Brasil, tem a internet como um de seus principais meios de comunicação. Uma ilustração dessa situação é a Universidade Aberta do Brasil (UAB), maior iniciativa pública na modalidade no país, que desde a sua constituição traz a preocupação com a utilização da rede para a interação entre professores, alunos e tutores (Costa, 2007).

Ainda, segundo Costa (2007), nesse contexto, tanto as necessidades quanto o cotidiano dos alunos "são fatores determinantes para o desenho pedagógico dos cursos, para a organização curricular e na seleção dos recursos tecnológicos a serem utilizados" (Costa, 2007, p.2).

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 213-219). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Com relação a essa organização curricular, especialmente de cursos de licenciatura em matemática a distância, que é o contexto onde o presente artigo está inserido, pode-se observar que existem desafios que precisam ser superados.

Um desses desafíos se refere à inserção da Estatística dentro dessa organização curricular. Com relação aos cursos presencias de licenciatura em matemática, Silva (2011) investigou sete deles, analisando ementas e matrizes curriculares, bem como projetos pedagógicos e verificou uma quase ausência de articulações interdisciplinares que envolvam tanto o domínio de conteúdos estatísticos específicos, quanto uma discussão sobre seu ensino. A nosso ver, situação similar ocorre também na modalidade a distância, uma vez que as organizações curriculares referentes a essas duas modalidades de ensino estão em consonância.

Ainda sobre essa inserção, mas por outro viés, Costa e Pamplona (2011) teceram considerações sobre os desafíos enfrentados por futuros educadores matemáticos para se tornarem futuros educadores estatísticos. E, segundo esses autores, para que isso seja possível, seria fundamental "…favorecer o trânsito e intensificar as relações entre as formações matemática, estatística, pedagógica, ética e profissional do licenciando em matemática". (Costa e Pamplona, 2011, p.897).

Já no que diz respeito a estatística no cotidiano de estudantes, ela pode se fazer presente por meio de noticias em jornais, revistas, sites na internet ou outros veículos de comunicação. Entretanto, para compreendê-la dentro de contextos específicos, é necessário que se tenha o mínimo de conhecimento sobre a mesma. Logo, em nossa opinião, o desenvolvimento de estudos que abordem a educação estatística dentro de cursos de licenciatura em matemática, e em particular, os da modalidade a distância, se mostra necessário.

Com isso, ressaltamos que esse artigo apresenta recortes de uma pesquisa de mestrado que está sendo desenvolvida pela primeira autora, sob orientação da segunda, e o nosso propósito aqui é tecer algumas reflexões acerca do desenvolvimento da atividade "Análise de investimento no mercado de ações" realizada por estudantes na disciplina *Introdução a Estatística*, que compõe a grade curricular do curso de licenciatura em matemática, ofertado a distância pela Universidade Federal de Roraima (UFRR), e vinculado a UAB.

2. A atividade "Análise de investimento no mercado de ações"

Ao longo da nossa participação, como profesoras e pesquisadoras na referida disciplina, ficamos responsáveis por elaborar, conduzir e fazer o acompanhamento de uma atividade junto com os alunos. Tal atividade abordou os conteúdos estatísticos Média Aritmética, Desvio Padrão e Coeficiente de Variação. Além disso, havia questões onde era necessária a articulação entre esses conteúdos com aspectos políticos e sociais condizentes com a temática abordada.

Para tanto, tomamos como base um projeto desenvolvido por Campos (2007), em sua tese de doutorado. E no que diz respeito à utilização do conteúdo Coeficiente de Variação no contexto da análise de risco, nos apoiamos em algumas ideias de Gitman (2004). O roteiro de tarefas pode ser observado na Figura 1. No roteiro original, havia uma tabela com 10 empresas, sendo que para cada uma, estavam disponíveis os valores de retorno esperado, desvio padrão, coeficiente de variação e dividendos. Sendo que para o cálculo dos três primeiros, foi utilizada uma série histórica com valores de fechamentos dos ativos dessas empresas na bolsa de valores BMF&Bovespa. Esses valores foram obtidos no site do Terra, supracitado.

A proposta dessa atividade consiste em investigar possibilidades de investimentos em bolsa de valores, através da análise de retorno esperado, desvio padrão, coeficiente de variação e dividendo para cada

ativo.

Objetivo da atividade: Fazer uma análise de investimento em 10 ativos, e escolher 5 deles, nos quais você, aplicaria o seu dinheiro.

Roteiro da atividade:
Materiais necessários: Editor de textos do Google Docs, consultas na internet para discussões sobre as empresas (opcional), consultas (opcional) no site de economia do Terra (http://economia.terra.com.br/mercados/acciones/default.aspx), texto sobre o resumo do filme "Jardineiro Fiel" que provoca discussões em função das denúncias que faz e da realidade trágica que retrata (http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exilibris/bd/brc/33004137031p7/2007/campos_cr_dr_rcla.pdf) e tabela.

1. Tendo em mãos os dados sobre os valores de retorno esperado, desvio padrão, coeficiente de variação e dividendos das empresas, discutam e escolham cinco delas para formar uma carteira de investimento. Utilizem esse espaço para descrever e argumentar sobre suas decisões.
2. Sua carteira de investimento foi formada por cinco diferentes empresas. Reflitam sobre os segmentos nos quais essas empresas atuam, o público que elas tem como foco, suas políticas sociais e de sustentabilidade e discutam sobre as decisões tomadas na formação da sua carteira, levando em consideração não somente os dados apresentados nas tabelas iniciais. Fiquem a vontade para buscar informações na internet e apresentarem novos argumentos para suas escolhas.
3. Levando em consideração as reflexões feitas por vocês nas questões acima, discutam em seus grupos e informem seus perfis como investidores e justifiquem.
4. Após a leitura do texto indicado nos materiais necessários acima, responda a pergunta:

Pergunta: Sabendo que quando você investe em um determinado ativo, além de você se tornar investidor da respectiva empresa, você também se torna incentivador, qual seria a sua opinião sobre a atitude de alguém que decide fazer um investimento em ativos da companhia farmacêutica citada no texto acima? Quando você montou a sua carteira de ativos, pensou em quais seriam as consequências de seus investimentos? Justifique.

Figura 1. Atividade "Análise de investimento no mercado de ações"

Além disso, para que pudéssemos compreender o proceso de desenvolvimento dessa atividade por parte dos alunos, emergiu a ideia de solicitarmos a eles a escrita de um relatório, pois assim como Smith (1998), consideramos que ao elaborar um relatório, os estudantes desenvolvem não somente a habilidade nos conceitos estatísticos envolvidos como a habilidade na própria escrita. Além disso, solicitamos aos alunos que realizassem essa atividade, prioritariamente em duplas ou em trios.

5. Formas de conduzir a pesquisa

Conforme mencionado anteriormente, o objetivo desse artigo é tecer algumas reflexões acerca do desenvolvimento da atividade "Análise de investimento no mercado de ações" realizada por estudantes na disciplina *Introdução a Estatística*, que compõe a grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática, ofertado a distância pela UFRR, e vinculado a UAB.

Tendo isso em mente, cabe ressaltar que para fazer tais reflexões, é necessário que realizemos um estudo nas relações sociais que permeiam o cenário dessa pesquisa. Dessa forma, o presente artigo está inserido nos pressupostos da metodologia de pesquisa qualitativa. E a nossa compreensão com relação ao termo "pesquisa qualitativa" está em concordância com o que Goldemberg (2003, p. 14) descreve. Para essa autora "Na pesquisa

qualitativa a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc".

Nesse sentido, buscamos compreender a forma como os alunos realizaram essa atividade dentro de um grupo social, o qual é a disciplina investigada em questão. Em particular, aqui nesse artigo, traremos as nossas reflexões com relação a resolução feita por um grupo de três alunas, que a saber são: Sônia, Mara e Daiane (0s nomes dos envolvidos na disciplina serão alterados).

Ressaltamos ainda que a análise dos dados que aqui será apresentada está pautada na teoria da Educação Estatística Crítica, desenvolvida por Campos (2007) a partir do entrelaçamento de ideias de autores como Paulo Freire, Henry Giroux e Ole Skovsmose. Ademais, segundo Campos (2007, p. 124), existem três princípios básicos que podem criar possibilidades para o envolvimento do professor nessa prática de educação, sendo eles: "Contextualizar os dados de um problema estatístico, preferencialmente utilizando dados reais; Incentivar a interpretação e análise dos resultados obtidos; Socializar o tema, ou seja, inseri-lo num contexto político/social e promover debates sobre as questões levantadas".

Complementando, o autor ainda ressalta que para a consolidação de tal teoria, os pressupostos da Educação Estatística e da Educação Crítica foram entrelaçados, igualmente, assumindo uma postura autocrítica e reflexiva.

Tendo isso em mente, buscamos tecer algunas reflexões acerca da resolução dessa atividade por parte do grupo formado por Sônia, Mara e Daiane, sob a ótica da teoria da Educação Estatística Crítica.

6. Análise e Resultados

Com relação a primeira questão da atividade, a qual solicitava aos alunos que escolhessem cinco da dez empresas que constavam na tabela, e que argumentassem sobre suas decisões, a resposta das alunas Sônia, Mara e Daiane foi a seguinte.

> Ao analisarmos as informações da tabela, cegamos a conclusão de que o coeficiente de variação é uma medida que normaliza o desvio padrão. E quanto menor for o coeficiente de variação maior será o retorno do investimento, e quanto mais próximo de zero o desvio padrão for, mais vantajoso será o retorno esperado. Levando em consideração estes aspectos observados na tabela de dados, as empresas que se destacam são: Ambev, Embraer, Tam, Banco do Brasil e Sousa Cruz.

Nessa resposta, as alunas, primeiramente, tentaram deixar claro as relações que estabeleceram entre os conteúdos estatísticos abordados, e em seguida, mencionaram quais empresas elas haviam escolhido, baseadas em suas análises. Por essa resposta, evidenciamos que as alunas haviam estudado os conteúdos antes de responder a questão.

Já com relação a resposta dada na questão 4, a qual solicitava aos alunos que lessem um texto que é o resumo do filme "o Jardineiro Fiel" e refletissem sobre a atitude de quem investe na companhia farmacêutica citada no mesmo (tal companhia atua numa determinada região da África de forma controversa) e em seguida pensassem também em sobre suas empresas escolhidas, a resposta do grupo foi a seguinte.

> Bem, primeiro que essa Pessoa não tem o menor pudor e respeito pela figura humana e para com o próximo, antes de mais nada esta pessoa teria que pensar e refletir se está fazendo um bom investimento, se realmente esse negocio é favorável, observando os riscos que seu investimento futuramente poderá ocasionar uma que ele se trata da saúde das pessoas. Antes

> de fazermos qualquer tipo de investimento precisamos levar em consideração alguns pontos como, o fator ambiental, prejuízo na saúde humana, enfim, refletir se realmente esse investimento valerá a pena.
>
> E justificando, é fundamental fazermos uma analise profunda antes de investir num negócio, precisamos atentar para o seu público alvo, a questão da sustentabilidade, suas políticas sociais e etc. são imprescindíveis essas observações antes investir em determinado negócio ou empresa.

Como se pode observar, elas debateram sobre a temática "saúde", mas não consideraram em repensar suas escolhas ou argumentar a favor das mesmas, tendo em vista que na primeira questão, a qual pedia que escolhessem as empresas que gostariam de investir, dentre as cinco escolhidas por elas, estavam a Souza Cruz (fabricante de cigarros) e a Ambev (fabricante de bebidas).

Outro indício que aponta dificuldade em apresentar argumentos concisos pela escrita pode ser observado na resposta de um item do relatório, o qual pedia que os alunos dissertassem sobre os conceitos estatísticos utilizados na primeira questão, bem como sobre suas aplicações em um contexto diferente do que o da atividade proposta. A resposta do grupo segue:

> O desvio padrão e o coeficiente de variância é usado também em empresas de pesquisas na área da agricultura, quando querem testar o vigor e a produtividade de uma nova cultivar, por exemplo, a soja. E só depois de testada e confirmada, levando em consideração o desvio padrão e o coeficiente de variação citados acima, a cultura é considerada economicamente viável, e dai pode ser liberada para ser comercializada.

Embora elas tenham citado um contexto onde esses conceitos estatísticos podem ser aplicados, não deixaram claro como tais conceitos são utilizados na análise mencionada.

O fato de elas não terem se aprofundado em suas reflexões nos leva a inferir que nessa disciplina, os alunos não estavam acostumados a fazer atividades que envolviam cálculos relacionados com escrita, então esta última não era algo comum a eles. Nesse sentido, concordo com Campos (2007) que

> Os estudantes estão habituados a resolver exercícios por meio de cálculos, buscando as *respostas corretas*, que podem ser comparadas com um gabarito colocado no final do livro. Os hábitos de questionamento, análise, escrever justificativas com suas próprias palavras e ideias não são comuns nos estudantes e só serão desenvolvidos se a eles forem dados incentivos para tanto [...] (Campos, 2007, p.43).

Complementando as ideias do autor, no nosso modo de ver, a escrita conjunta de relatórios sobre o processo de desenvolvimento de uma atividade sobre conceitos estatísticos, como foi o caso dessa atividade, possibilita que o professor avalie tal desenvolvimento e busque subsídios pedagógicos pertinentes para lidar com as dificuldades dos alunos. Para Batanero (2001), uma das formas de avaliar os conhecimentos matemáticos dos estudantes diz respeito à Formulação e Comunicação Matemática, onde devem ser levados em conta a forma como expressam as ideias matemáticas oralmente, de forma escrita ou por meio de representações visuais.

Nesse mesmo sentido, Fonseca (2002) aponta a comunicação escrita como sendo importante no processo de ensino e aprendizagem da matemática e por esse motivo, segundo essa autora, há professores de matemática que já estão adotando a prática de pedir relatórios escritos a seus alunos para poderem acompanhar os raciocínios dos mesmos.

Concordamos com as ideias desses autores e reiteramos que, no nosso modo de ver, a escrita em atividades que abordam conceitos estatísticos, especialmente se for feita de forma conjunta, possibilita que os alunos reflitam sobre tais conceitos, comuniquem suas ideias, analisem e interpretem os resultados que obtiveram e que argumentem sobre os mesmos.

No entanto, mesmo com esses contratempos com relação à comunicação escrita, evidenciamos *produção estatística conjunta* no grupo, uma vez que a análise que as alunas fizeram para escolher as cinco empresas na questão 1 foi pautada nos conteúdos estatísticos abordados, e, além disso, elas souberam justificar suas escolhas relacionando tais conteúdos.

Ademais, estamos chamando de *Produção Estatística* o processo pelo qual os alunos conseguem estabelecer uma compreensão com relação a determinados conteúdos estatísticos, conseguem fazer uma análise baseados nesses conteúdos e, por fim, conseguem apresentar os resultados obtidos a partir dessa análise.

Ressaltamos ainda, que mesmo o curso sendo na modalidade a distância, as alunas deixaram transparecer que preferem se comunicar presencialmente, conforme resposta do grupo em um item do relatório sobre a forma como se comunicaram para realizar a atividade.

> Apesar de o nosso curso ser a distancia tendo a Internet como canal de comunicação, o processo de comunicação que utilizamos para a confecção deste trabalho foi o processo presencial, porque pessoalmente, as idéias, os pensamentos e opiniões fluem mais rapidamente.

Reiteramos que além da "preferencia" das alunas por realizarem presencialmente essa atividade, isso também ocorre por causa do difícil acesso a internet na Região Norte do Brasil, pois devido as peculiaridades naturais dessa região, fica inviável a passagem de cabos de fibras óticas, e dessa forma, as opções ainda são internet discada e via satélite, mas esta última ainda está em fase de implementação.

Sendo assim, frente a essa problemática mencionada, ressaltamos aqui que, a nosso ver, o incentivo dado pelo profesor com relação a comunicação de forma presencial nos respectivos polos desse curso deve continuar, e que o potencial de tal comunicação pode ser mais explorado, não só em sua vertente verbal, quanto em sua vertente escrita, como por exemplo, solicitando aos alunos que elaborem relatórios sobre o desenvolvimento de atividades abordando conceitos estatísticos, e que tenham a oportunidade dialogar sobre os mesmos e de articulá-los com aspectos políticos e sociais, conforme sugere a Teoria da Educação Estatística Crítica.

Referencias

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Grupo de Investigación em Educación Estadística, Universidad de Granada, Espanha.

Brasil. (2012). *Censo da educação superior*, INEP/MEC.

Campos, C. R. (2007). *A educação estatística: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da estatística em cursos de graduação.* Tese de Doutorado. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP-Rio Claro/SP.

Costa, C. J. (2007). Modelos de educação superior a distancia e implementação da Universidade Aberta do Brasil. *Revista Brasileira de Informática Na Educação*, 15, 9 – 16

Costa, W. N. G.; Pamplona, A. S. (2011). Entrecruzando fronteiras: a educação estatística na formação de professores de matemática. *BOLEMA*, 24, 897 - 911.

Fonseca, M. C. F. R. (2002). *Educação matemática de jovens e adultos.* Belo Horizonte Autêntica.

Gitman, L. (2004). *Princípios de administração financeira*. São Paulo/SP: Pearson.

Goldenberg, M. (2003). *A arte de pesquisar – como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais*. Rio de Janeiro: Record.

Silva, M. A. (2011). A presença da estatística e da probabilidade no currículo prescrito de cursos de licenciatura em matemática: uma análise do possível descompasso entre as orientações curriculares para a educação básica e a formação inicial do professor de matemática. *BOLEMA*, 24, 747 - 764.

Smith, G. (1998). Learning statistcs by doing statistics. *Journal of Statistics Education, 6*, 3. Disponible en htttp://www.amstat.org/publications/jse/v6n3/smith.html.

El centro de recursos CRDM-Guy Brousseau y el análisis estadístico implicativo como herramienta en la formación de profesores

Orús Báguena, Pilar, Peydró Pons, Laura y Gregori Huerta, Pablo

Universitat Jaume I de Castellón

Resumen

Los fenómenos involucrados en la actividad docente tienen un nivel de complejidad que precisa que se analicen a través de una gran cantidad de variables, difíciles de interpretar por sí solas. El Análisis Estadístico Implicativo es uno de los métodos de análisis de datos, concebido en el campo de la Didáctica de las Matemáticas (Gras, 1979), que pretende desvelar relaciones de causalidad entre las variables estudiadas. Por ello consideramos interesante que el profesorado conozca esta herramienta y la pueda utilizar en su práctica docente, ya que permite confirmar o refutar algunas creencias del profesor, así como descubrir otro tipo de relaciones que hasta el momento no le fueran evidentes.

Asimismo, la Universitat Jaume I de Castellón dispone de un fondo de recursos de Didáctica de las Matemáticas de reciente creación, el CRDM-*Guy Brousseau* (http://www.imac.uji.es/CRDM), que contiene valiosos documentos producidos durante 28 años (de 1972 a 1999) en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) que pueden ser muy útiles para la formación del profesorado de Matemáticas.

En el trabajo que presentamos se pretende difundir tanto la herramienta estadística como la existencia y las posibilidades del fondo documental de cara a la formación de profesores, a través del análisis estadístico de un ejemplo de investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Palabras clave: Análisis estadístico implicativo, didáctica de las matemáticas, formación de profesores, recursos didácticos.

.

1. Introducción

El objetivo de este trabajo va orientado a la formación de profesores. De una parte, se quiere hacer hincapié en una rama del análisis estadístico multivariante, el Análisis Estadístico Implicativo (ASI), iniciada hace más de treinta años en Francia, dentro del ámbito de la Didáctica de las Matemáticas (DM), y que se ha venido desarrollando y aplicando por investigadores principalmente de países francófonos (Gras et al., 2009). Sin embargo, estos últimos años se está dando a conocer en la literatura anglosajona (Gras et al., 2008) e hispanohablante (Orús et al., 2009), y se están encontrando un gran número de áreas de conocimiento donde estas técnicas están dando frutos.

Asimismo, se desea difundir la existencia de un reciente fondo documental de investigación en DM localizado desde 2010 en la Universitat Jaume I de Castellón (UJI).

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 221-228). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

2. El Análisis Estadístico Implicativo

2.1. Interés del Análisis Estadístico Implicativo, para la investigación en Didáctica de las Matemáticas

El desarrollo de la investigación en Didáctica de las Matemáticas (DM) está profundamente relacionado desde sus inicios con el Análisis Estadístico Multidimensional, al que considera un instrumento esencial, y al ASI una herramienta específica para resolver problemas de investigación surgidos desde la DM (las referencias citadas en este trabajo son traducciones de los autores del texto extraído de Gras, 1995).

André Rouchier, Presidente en ese momento de la *Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques*, explicita y desarrolla la naturaleza de esta estrecha y fructífera relación a lo largo de toda la Introducción a dichas Actas (pp.3-5), citando como una de sus referencias previas 1975, año en que el IREM de Bordeaux organiza por iniciativa de G. Brousseau el Coloquio l'*Analyse de la Didactique des Mathématiques*, marcado por una fuerte preocupación por los métodos a utilizar en la investigación en DM y particularmente por el análisis de datos. Rouchier (1995) continúa citando entre otros trabajos, las tesis de F. Pluvinage, R. Gras, A. Larher, S. Ag Almouloud, H. Ratsimba-Rajohn, A. Totohasina, y M. Bailleul, como testimonio de que los Métodos de Análisis Estadísticos Multidimensionales forman un dominio de investigación fuertemente asociado a ciertas cuestiones de fondo de la Didáctica Fundamental, ligadas a la naturaleza de la investigación realizada sobre el saber en matemáticas involucrado en los sistemas didácticos y que responde a las preguntas siguientes:

- ¿Qué saber detenta una población de alumnos, confrontada a una población de problemas, ejercicios o situaciones?
- ¿En qué o cómo, tal población de ejercicios, problemas o situaciones puede ser una buena candidata para asegurar una buena representación de un saber determinado a fin de permitir eventualmente su enseñanza y por tanto su aprendizaje?
- Toda enseñanza consiste en proponer a los alumnos un número finito de situaciones, problemas y ejercicios, aceptando la idea de que el conocimiento de (o el éxito a) este sistema de situaciones permitiría confrontarse a cualquier otra situación relativa a ese saber. ¿Quién tiene, desde el punto de vista del saber, ese carácter "generador" de un sistema de ejercicios? ¿Cómo determinar, si existen, estos sistemas generadores?

De acuerdo con Rouchier (1995):

> vemos que la clave de estos trabajos [iniciados en 1975], que conciernen directamente a los saberes mismos, que conciernen a las poblaciones a las que son confrontados, que conciernen a los profesores, sus concepciones y sus prácticas, no reside en un método (un conjunto de métodos) o en una técnica (o un conjunto de técnicas) sino a las cuestiones recordadas anteriormente y en torno a las cuales se ordenan todos ellos.

Nos gustaría volver a mostrar, en nuestro trabajo, que estas cuestiones iniciales para la Didáctica de las Matemáticas siguen generando, hoy día, problemas de investigación e informaciones que pueden ser abordadas conjuntamente desde la Didáctica y desde el análisis de datos, y de forma particular desde el ASI.

Un trabajo colectivo sobre la enseñanza de la división y los recursos de DM del CRDM-*Guy Brousseau* (CRDM-GB), realizado por docentes e investigadores de diferentes niveles y modalidades de la Universidad Nacional de Córdoba en Argentina (Fregona y Orús, 2012; Brousseau et al., 2012) y de la UJI de Castellón, nos ha conducido hasta los datos que analizaremos en esta comunicación.

2.2. La herramienta estadística

El concepto de cuasi-implicación, eje central del ASI, relaja al de implicación, de modo que se trata de una regla que admite contraejemplos: *"cuando un individuo presenta el rasgo A, entonces, generalmente, también presenta el rasgo B"*. La fuerza de la cuasi-implicación se mide al comparar el número de contraejemplos presentes, con los que aparecerían bajo una ausencia de relación estadística. Esta filosofía conduce a varias modelizaciones posibles, entre las que describimos una: si de n individuos muestreados, el rasgo A se presenta en n_a de ellos, y el rasgo B en n_b de ellos, entonces se podría asumir que: (1) la observación de un individuo que presenta el rasgo A ocurre con probabilidad n_a/n, y con independencia entre individuos, (2) la observación de un individuo que *no presenta* el rasgo B ocurre con probabilidad $(n-n_b)/n$, y con independencia entre individuos, y (3) la ausencia de relación estadística entre A y B conlleva a que la observación de un individuo contraejemplo de a → b (es decir que presenta el rasgo A y no presenta el rasgo B) ocurre con probabilidad $n_a(n-n_b)/n^2$.

Así pues, el número aleatorio de contraejemplos a la regla a → b, que podemos denotar por N_{ab}, al muestrear n individuos bajo independencia, sigue el modelo binomial de parámetros n y $n_a(n-n_b)/n^2$.

Ejemplo: En el estudio que detallamos en la Sección 3.2 analizamos las estrategias y el éxito que alcanzan alumnos frente a seis situaciones (problemas) en torno al concepto de la división. Detallamos cómo mide el ASI la fuerza de la eventual relación implicativa sobre el éxito en las situaciones 1 y 2 (variables S1 y S2, que describen el rasgo de realizar con éxito cada situación). Mostramos los datos en la Tabla 1.

Tabla 1. Datos

S1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
S2	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0

Tenemos 8 individuos con el rasgo S1 presente y 7 con el rasgo S2 ausente de un total de 21 individuos. De ellos, sólo 4 son contraejemplos a la implicación a S1 → S2 (que presentan el antecedente y no el consecuente). Una ausencia de relación estadística entre S1 y S2 y la modelización descrita anteriormente provoca un número de contraejemplos aleatorio que sigue el modelo binomial de parámetros n=21 y p= 0,254, y que se distribuye como se observa en la Figura 1.

Como se puede ver, es muy extraordinario encontrar 0 ó 1 contraejemplos, y algo difícil, pero menos, encontrar 2 contraejemplos. La fuerza de la implicación se mide entonces con el grado de dificultad de que el puro azar dé lugar al mismo número de contraejemplos, o menos, que el encontrado en la muestra. Mirando de nuevo la Figura, podemos admitir que los 4 contraejemplos encontrados en la muestra son fácilmente atribuibles al azar, por lo que la *intensidad* de la implicación S1 → S2 será baja. En efecto:

$$\varphi(S1,S2) = P(N_{ab} > 4) = 0.6482171$$

A partir de aquí, este campo se ha ido desarrollando durante los últimos 30 años, con contribuciones teóricas que han ampliado el ámbito de aplicación desde las variables binarias (de presencia/ausencia), como las tratadas en nuestro ejemplo, a variables de todo tipo (nominal, ordinal, escala, incluso difusas) y ha desarrollado, en particular, un método jerárquico de agrupación de variables, al estilo de los árboles jerárquicos de clasificación del Análisis *Cluster*, que, a diferencia de éste, agrupa variables de forma no simétrica, pues se basa en la cuasi-implicación entre ellas. Se le ha llamado *Análisis de Cohesión*, y es muy

útil como herramienta de Análisis Exploratorio, pues estructura las variable analizadas en "reglas de reglas" (como cuasi-corolarios a cuasi-teoremas).

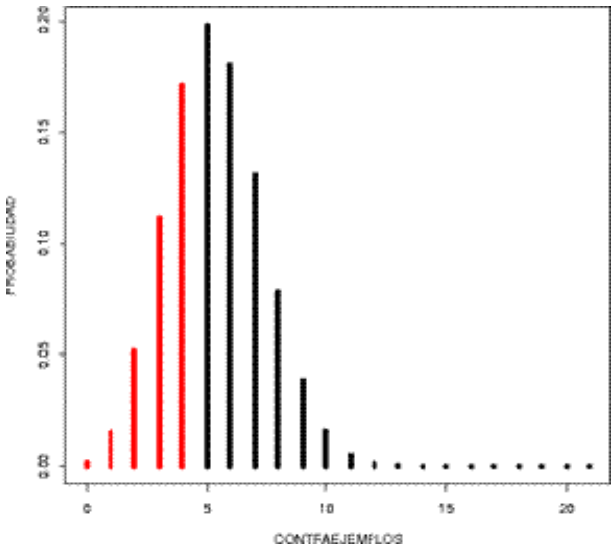


Figura 1. Distribución del número de contraejemplos bajo independencia. En rojo las probabilidades de tantos contraejemplos o menos de los realmente observados en la muestra

Sin entrar en las definiciones concretas, el algoritmo del análisis de cohesión, va agrupando las variables en clases de variables (de forma no simétrica, como la cuasi-implicación), de manera que la primera clase puede denotarse (a → b). Si esta clase se une a una tercera variable c, puede ser, por ejemplo, de la forma c → (a → b), que se puede interpretar como que a → b es un corolario de c. Esta construcción jerárquica ascendente, comienza en el nivel 0 con clases formadas por una variable cada una, de modo que en cada nivel del algoritmo, se calcula el índice de cohesión entre cada par (ordenado) de clases del nivel anterior, y se forma una nueva clase que reúne (y remplaza) a las dos anteriores. Y así sucesivamente. De este modo, en cada nivel:

- Se retiene el índice de cohesión de la nueva clase formada (par ordenado de clases del nivel anterior), que mide la fuerza de la consistencia de las variables involucradas en dicha clase recién creada.
- Se calcula un *índice adicional* sobre todas las clases presentes en ese nivel (la nueva incluida), que permite matizar si dicho nivel tiene una estructura especial respecto a los anteriores y posteriores, en tanto en cuanto las parejas de variables que forman parte de una misma clase, tienen índices de cohesión "generalmente" mayores a los de las parejas de variables que todavía se mantienen en clases distintas. En ese caso se llama *nivel significativo* y es digno de atraer la atención del investigador por la especial consistencia interna de todas las clases que lo forman (no sólo la nueva clase creada).

Con estas herramientas, y gracias a su implementación informática CHIC desde 1992 (CHIC, 2013), que presenta una interfaz gráfica sencilla, el investigador en DM dispone de una buena ayuda para explorar sus hipótesis de trabajo. En la Sección 3.2 mostramos un ejemplo.

3. Un análisis de datos de Didáctica de las Matemáticas

3.1. El centro de recursos, CRDM-*Guy Brousseau*

La Universitat Jaume I de Castellón (UJI) dispone de un fondo de recursos de DM desde 2010, el CRDM-*Guy Brousseau* (CRDM-GB, http://www.imac.uji.es/CRDM), que

contiene valiosos documentos producidos durante 28 años en el marco de la *Teoría de Situaciones Didácticas* (Brousseau, 1986) que pueden ser muy útiles para la formación del profesorado de Matemáticas y la investigación en DM.

Brousseau dirigió durante 28 años (1972-1999) el *Centre d'Observation pour la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* (COREM), en la Escuela Michelet de Talence (Burdeos, Francia), junto a un gran equipo de colaboradores e investigadores. Este equipo se encargó de realizar una extraordinaria labor de observación e investigación de la enseñanza de las matemáticas en las aulas de Educación Infantil y Primaria.

Actividades como la preparación de clases —tanto las "comunes" como las especialmente diseñadas para la investigación—, la observación de clases que además eran filmadas para su posterior análisis, los seminarios de investigación así como los informes de los maestros e investigadores, fueron recogidos en el COREM durante su funcionamiento y han sido conservados hasta el día 1 de diciembre de 2010 en la escuela Michelet. Desde ese día, todos estos documentos están depositados y pueden ser consultados en la UJI, en el *Centro de Recursos de Didáctica de las Matemática*, CRDM-GB, del *Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones de Castellón* de la Universitat Jaume I (IMAC).

Se han iniciado nuevas líneas de investigación en DM, sobre la utilización de los recursos del COREM sobre: la enseñanza de la división y la formación del profesorado (Fregona y Orús, 2012), y el CRDM-GB: como cantera de datos para investigaciones en Didáctica de las Matemáticas y en ASI (Brousseau et al., 2012).

Los trabajos citados, tienen su origen en un taller de profesores en Argentina en 2008, dedicado a estudiar, problematizar y reconstruir un informe de actividades para la enseñanza de la división en el nivel primario (Briand et al., 1985). A partir de referencias de este informe se han extraído los datos del ejemplo que vamos a analizar mediante las técnicas del ASI.

3.2. Un análisis de datos en el aula

En el ejemplo que se presenta a continuación (Tabla 2), se analizan los datos recogidos en una investigación (Teule-Sensacq y Vinrich, 1980) llevada a cabo en la escuela Michelet y realizada en el COREM, sobre la resolución de una serie de problemas que involucran el concepto de la división, que los alumnos deben resolver con estrategias propias, por medio de sumas, restas y productos, puesto que es su primer contacto con ese tipo de situaciones.

Los datos corresponden a 21 de los alumnos y alumnas de un mismo grupo, correspondiente al nivel educativo francés CE2 (equivalente a 3º curso de enseñanza primaria en España). Las situaciones están numeradas según el orden cronológico de resolución:

Tabla 2. Situaciones empleadas

SITUACIÓN 1: Se debe distribuir un pastel a cada uno de los 245 niños de una colonia de verano, para merendar. Cada paquete contiene 18 pasteles. ¿Cuál es el número de pasteles que hará falta abrir?	SITUACIÓN 2: El confitero ha fabricado 310 bombones de chocolate. Para venderlos, quiere guardarlos en cajas de 16. Encuentra el número de cajas que deberá obtener para poder vender los bombones.
SITUACIÓN 3: Un restaurador recibe 187 invitaciones. Tiene que colocar 12 personas por mesa. ¿Cuántas mesas deberá poner en la sala del restaurante?	SITUACIÓN 4: Carole Tiene una caja con 350 perlas. Ella fabrica los collares de 28 perlas cada uno. ¿Cuántos collares podrá fabricar?
SITUACIÓN 5: Usted tiene una banda de 16	SITUACIÓN 6: Volver a la situación anterior,

cuadrados de ancho. Queremos cortar de manera que se obtenga un rectángulo igual de ancho, que no pase de 460 cuadrados, pero que se aproxime lo más posible.	sin soporte material, con 3300 cuadrados en lugar de 460.

Para cada situación *i* (*i*=1,…, 6) se definen las siguientes variables binarias:

- S*i* = 1 si se resuelve correctamente la situación *i*. 0 en caso contrario.
- S*i*R = 1 si para resolver la situación *i* no se sigue ningún modelo de resolución o si no se hace nada. 0 en caso contrario.
- S*i*A = 1 si para resolver la situación *i* se sigue un modelo de resolución aditivo (incluyendo las operaciones de adición y sustracción). 0 en caso contrario.
- S*i*M = 1 si para resolver la situación *i* se sigue un modelo de resolución multiplicativo. 0 en caso contrario.

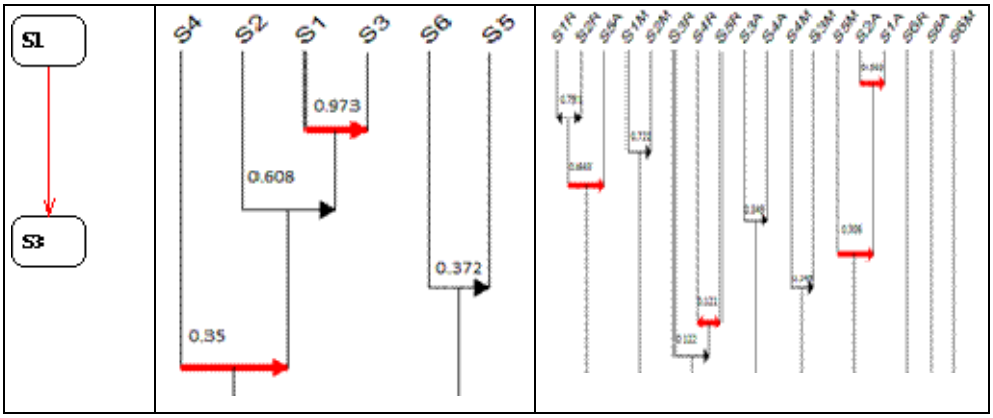


Figura 2. Grafo implicativo (izquierda) y árboles de cohesiones de los datos analizados: con sólo las 6 variables de éxito (centro), y con las 24 variables (dercha).

A partir de las situaciones planteadas y de los trabajos de los alumnos, se completa la tabla de datos binarios constituida por 21 sujetos y 24 variables, que se analiza mediante el ASI usando el programa CHIC (v5.0), con la modelización clásica binomial. A parte de los estadísticos clásicos (frecuencias, medias, desviaciones típicas y matriz de correlaciones), se puede solicitar el *grafo implicativo* (representación de las intensidades de las implicaciones en forma de grafo dirigido) y el árbol de cohesiones, que podemos ver en la Figura 2.

Se ve que únicamente que hay una relación implicativa fuerte entre las situaciones: los alumnos que hacen con éxito S1 suelen resolver también. El árbol cohesitivo sólo con las variables de tipo éxito diferencia claramente dos clases, una de ellas relaciona la cuatro primeras situaciones y la otra las dos últimas, tal como cabía esperar por la similitud entre sus enunciados, siendo S5 y S6 problemas que hacen referencia a situaciones basadas en el trabajo con cuadrículas, actividad muy utilizada en la escuela Michelet, como soporte para las operaciones y muy especialmente en la multiplicación.

Las implicaciones que relacionan las cuatro primeras situaciones nos aportan la siguiente regla: "si un alumno resuelve bien la situación 4 entonces, en el caso de haber resuelto bien la 1 y la 2 también cabe esperar que resuelva bien la 3". Esta regla refleja la relación entre el orden de las situaciones y su correcta resolución. Además, teniendo en cuenta la contribución de las variables suplementarias correspondientes al modelo de resolución empleado en cada situación, se muestra que los alumnos que contribuyen a la

formación de esta regla son aquellos que utilizan ya, en las primeras situaciones, el modelo multiplicativo. También se puede observar en el gráfico la implicación significativa entre la correcta resolución de las situaciones 1 y 3, confirmada a la vez por el grafo implicativo.

En el árbol de cohesiones de las 24 variables, la primera implicación significativa nos indica que se mantiene el modelo de resolución aditivo para las situaciones 1 y 2, y que si se llega al modelo multiplicativo en la quinta situación es una evolución de los modelos aditivos utilizados en las dos primeras. También es significativo que aquellos alumnos y alumnas que en las primeras situaciones no escogen ningún tipo de modelo de respuesta, entonces, en la situación 5, alcanzan el modelo aditivo, pero no el multiplicativo: el modelo multiplicativo es una evolución del aditivo.

La existencia de un nodo significativo que relaciona las situaciones 4 y 5 cuando no se incluye ningún modelo de respuesta nos ha hecho buscar a los alumnos más típicos y a los que más han contribuido. Son típicos respecto a este comportamiento casi todos (19 alumnos) pero ninguno de éstos ha contribuido de forma afirmativa. Sólo un sujeto ha contribuido a la formación de esta regla: "si en la situación cuarta no tienes ya un modelo de respuesta, tampoco lo tendrás en la siguiente, aunque no es probable que un alumno llegue a la cuarta situación sin ningún modelo de resolución".

El modelo de respuesta empleado en la situación 6 no se vincula a ningún modelo de resolución anterior. Sin embargo, observando la tabla de frecuencias, todos los sujetos emplean el modelo multiplicativo para su resolución. Esto permitiría plantearse preguntas como por ejemplo: ¿El planteamiento de enunciados con números grandes determina la utilización de la operación multiplicación, independientemente del sentido de la situación?

Resumiendo, el análisis implicativo llevado a cabo sobre los datos observados, muestra una evolución en el tiempo de los modelos empleados por los alumnos para la resolución de las situaciones de división. El modelo aditivo es más frecuente al principio y va cambiando hacia el modelo multiplicativo. También se observa que el uso del modelo multiplicativo contribuye al éxito de las situaciones y el trabajo de las situaciones con cuadricula,supone un tasa de éxito importante, que aparece sin implicaciones significativas con el resto de situaciones.

Referencias

Briand, J., Brousseau, N., Gresillier, M.-F., Greslard, D., Lacave-Luciani, M.-J., Teule-Sensacq, P. y Vinrich, G. (1985). *La division à l'école élémentaire, Compte rendu des situations d'enseignement réalisées avec des enfants de CE2, CM1 et CM2*. Bordeaux: IREM, Université de Bordeaux.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

Brousseau, G., Orús, P., Fregona, D. y Gregori, P. (2012) . Los recursos del «Centre pour l'Observation et la Recherche en Didactique des Mathématiques» (COREM), posible cantera de datos para el ASI. Un ejemplo: la enseñanza de la división en la escuela primaria. En J.C. Régnier, M. Bailleul y R. Gras (Eds.), *L'analyse statistique implicaitve: de l'exploratoire au confirmatoire*. Caen: Université de Caen.

CHIC (2013). http://www.ardm.eu/contenu/logiciel-d-analyse-de-donnees-chic

Fregona, D. y Orús, P. (2012). Enseñar la división en la escuela primaria: un problema de investigación y de formación docente, Comunicación presentada en la *XXXV Reunión de Educación Matemática de la Unión Matemática Argentina*, Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba. http://www.famaf.unc.edu.ar/uma2012/archivos/ComunicacionesREM.pdf

Gras, R. (1979). *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques.* Thèse d'Etat. Rennes: Université de Rennes 1.

Gras R. (1995). *Actes du Colloque "Méthodes d'Analyses Multidimensionnelles en Didactique des Mathématiques"*. Rennes: IRMAR.

Gras, R., Ag Almouloud, S., Bailleul, M., Larher, A., Polo, M., Ratsimba-Rajohn, H. y Totohasina, A. (1996). *L'implication statistique. Nouvelle méthode exploratoire de données*. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Gras, R., Regnier, J.C., Guillet, F. (2009). *Analyse statistique implicative: une méthode d'analyse de données pour la recherche des causalités*. RNTI E-16. Paris: Cépaduès.

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F. y Spagnolo, F. (2008). *Statistical implicative analysis: theory and applications*. Studies in Computational Intellingence 127. New York: Springer.

Orús P., Zamora, L. y Gregori, P. (2009). *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana*. Universitat Jaume I de Castellón y Universidad de Oriente de Santiago de Cuba. Castellón.

Rouchier A. (1995). Avant-propos. En R. Gras (Ed.), *Actes du Colloque "Méthodes d'Analyses Multidimensionnelles en Didactique des Mathématiques"*. Rennes: IRMAR.

Teule-Sensacq, P. y Vinrich, G. (1980). *Résolution de problèmes de division au cycle élémentaire dans deux types de situations didactiques.* Bordeaux: IREM, Université de Bordeaux.

El histograma como un instrumento para la comprensión de las funciones de densidad de probabilidad

Behar Gutiérrez Roberto[1], Grima Cintas Pere[2]

[1]Universidad del Valle, Cali, Colombia
[2]UPC Barcelona, España

Resumen

Tradicionalmente los profesores de Estadística de nivel medio y superior hemos mirado la Estadística Descriptiva como una temática divorciada de la probabilidad y de la Inferencia. Cuando llega el momento de explicar el histograma, generalmente se construyen intervalos de igual tamaño y el eje de las ordenadas representa directamente la frecuencia relativa. Sin embargo, cuando trata la temática de las funciones de densidades en probabilidad, para calcular la probabilidad, que conceptualmente es el homólogo de la frecuencia relativa, si se mira como una extensión del concepto a la población entera, debe calcularse un área, ya no son las ordenadas las que proporcionan esta información.

La pregunta que surge es ¿Por qué si el concepto de probabilidad es una extensión de la frecuencia relativa a la población, en un caso se calcula un área y en el otro una altura? Esto parece conceptualmente incoherente. En el presente trabajo se plantea una estrategia para lograr coherencia, definiendo el histograma como un gráfico de la densidad empírica. Esto tiene una doble función, ganar potencial intuitivo para dar sentido real a la idea de densidad, logrando que la definición de variable aleatoria continua no suene artificial para los estudiantes y por otro lado resolver la mencionada incoherencia. En este trabajo se ilustra con un ejemplo la estrategia que se plantea.

Palabras clave: Histograma, función de densidad empírica, intervalos de clase. Función de densidad de probabilidad.

4.1. Introducción

En los cursos básicos de estadística, el capítulo que corresponde a Estadística Descriptiva, aparece como un tema aislado, que puede ir antes o después de la parte de probabilidad. En estas condiciones no se aprovechan algunos desarrollos de la Estadística Descriptiva que podrían ser usados como un puente intuitivo para la comprensión de resultados más abstractos de la teoría de la probabilidad. En este artículo se hará referencia específica al concepto de histograma, representación de la función empírica de densidad para dar sentido a la definición de variable aleatoria continua.

Una primera contradicción que podría enfrentar un estudiante, es que cuando aprendió su concepto de histograma, las ordenadas del gráfico representaban la frecuencia relativa, sin embargo en la extensión de la idea de histograma a la de densidad de probabilidad, se propone el cálculo del área bajo la curva para calcular la probabilidad y no las ordenadas. Esta fractura no tiene explicación alguna, convirtiéndose posiblemente en un obstáculo para el aprendizaje significativo de la función de densidad de probabilidad.

Si se quiere que la función de densidad de probabilidad sea una extensión de la idea de histograma, es conveniente que la definición de histograma se corresponda con el gráfico de función de densidad empírica. De esta manera se garantiza una continuidad en el concepto y se proporciona una base intuitiva para la comprensión de la definición de variable aleatoria continua, que es generalmente es matemática.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 229-235). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Lee y Meletiou (2003) estudian algunos tipos de razonamientos erróneos al construir, interpretar y aplicar los histogramas en diferentes contextos de la vida real, sin embargo, no se refieren a la situación en la cual las áreas del histograma representan las frecuencias.

Wu (2004), típica algunos errores comunes relacionados con la interpretación y significado de algunos gráficos. Destaca la confusión entre gráficos parecidos pero de naturaleza distinta, en particular entre el histograma y gráfico de barras, pero no trata lo relativo al histograma como una representación de la función empírica de densidad, lo cual puede ser objeto de confusión, toda vez que esta no es observable de manera directa.

5. Definición de Histograma. (Función empírica de densidad)

Por comodidad, generalmente se toman los intervalos de clase del mismo ancho y se omite el concepto de densidad empírica, pues en caso de intervalos de igual ancho, la forma del histograma es idéntica, si se toma como ordenada la densidad o si se asume como la frecuencia relativa. El software de estadística, refuerza esta costumbre, pues por defecto hace gráficos de histograma con intervalos del mismo ancho.

Introduciendo el tema de la representación gráfica de los datos, usando intervalos de anchura desigual, se produce una ganancia conceptual importante, pues obliga a la representación del histograma como rectángulos que tienen como base el intervalo de clase y su área proporcional (o igual) a la frecuencia relativa.

Definiendo el histograma de esta manera sus ordenadas representan automáticamente la función empírica de densidad, generándose el enlace conceptual apropiado con la densidad de probabilidad de una variable aleatoria. Además la palabra "empírica" se asocia con muestral, y la densidad de probabilidad como su análogo poblacional. Ilustremos la situación con un ejemplo.

Ejemplo 1. En el sector de la industria metalmecánica, se toma una muestra al azar de 500 obreros y se determina la antigüedad en su trabajo. Por razones de índole administrativo, se quiere representar los datos por medio de un histograma que considere los siguientes intervalos de clase: 0-2 años, 2-3 años, 3-5 años, 5-10 años, 10-20 años. Después de contar el número de obreros que pertenecen a cada intervalo y expresarlo en porcentaje, se obtiene la Tabla 1. La frecuencia relativa se ha denotado por f_i

Tabla 1. Frecuencia relativa de la variable Antigüedad en el trabajo

i	Intervalo (Años de Antigüedad)	Frecuencia Relativa % (f_i)
1	(0-2]	10
2	(2-3]	5
3	(3-5]	40
4	(5-10]	40
5	(10-20]	5
Total		100

Ahora se procede a construir el histograma, como el gráfico de la función de densidad empírica. Note que en esta situación los intervalos son de diferente ancho (Ci). Se debe ahora construir un conjunto de rectángulos cuya base sea el intervalo de clase correspondiente y cuya área (Ai) represente la frecuencia relativa (fi) del intervalo respectivo. De esta manera, si un rectángulo asociado con un intervalo de clase tiene el doble de área que otro, es porque contiene el doble de datos. En nuestro ejemplo, si detallamos la frecuencia relativa en la Tabla 1, el área sobre el primer intervalo deberá ser el doble del área sobre el segundo. El área del rectángulo sobre el tercer intervalo deberá ser cuatro veces el área del primero. De esta manera la ordenada, es decir las alturas, digamos

f^*_i, del rectángulo construido sobre el i-ésimo intervalo, deberá ser tal que el área del rectángulo Ai coincida con su frecuencia fi, es decir que:

$$A_i = f_i = (base).(altura) = C_i.f_i^*$$

donde C_i es el ancho del intervalo. Así, despejando f^*_i, se obtiene la altura (ordenada eje vertical) que debe tener cada rectángulo: $f_i^* = {}^{f_i}\!/_{C_i}$.

Observe que se divide la frecuencia relativa entre el número de unidades que tenga el intervalo correspondiente, entonces las unidades de f^*_i son (% de datos por cada unidad de la variable en dicho intervalo). Veamos por ejemplo para el primer intervalo:

$$f_1 = 10\%\ C_1 = 2,$$

así que la altura del primer rectángulo es: $f_1^* = \frac{f_1}{C_1} = \frac{10\%}{2\ años} = 5\%/año$

Es intuitivamente claro, que si el primer intervalo tiene el 10% de los datos y estos datos están distribuidos en un intervalo que tiene una longitud de dos (2) unidades, pues en promedio hay 5% por cada unidad (f^*_i=5% /año=0.05/año).

El cuarto intervalo, (5; 10], por ejemplo, en sus 5 unidades (5 años) contiene 40% de los datos. Así que en promedio, hay 8% de los datos en cada unidad o lo que es lo mismo:

$$f_4^* = \frac{f_4}{C_4} = \frac{40\%}{5\ años} = 8\%/año \equiv 0,08/año$$

Es decir que las unidades del eje Y en el gráfico del histograma es %/unidad de intervalo, por eso se le conoce como densidad de frecuencia (f^*_i) y en este caso, para tomar en consideración que se calcula con base en los datos de una muestra, se le llama función empírica de densidad de frecuencia. En la siguiente tabla, se registra la densidad empírica de frecuencia para cada intervalo.

Tabla 2. Densidad empírica de frecuencia para la variable antigüedad

i	Intervalo (Años de Antigüedad)	Frecuencia Relativa f_i %	Densidad de Frecuencia f^*_i %/año
1	(0-2]	10	5
2	(2-3]	5	5
3	(3-5]	40	20
4	(5-10]	40	8
5	(10-20]	5	0,5
Total		100	

Si se realiza el gráfico de las densidades empíricas de frecuencias de la Tabla 2, se obtiene el histograma de la Figura 1.

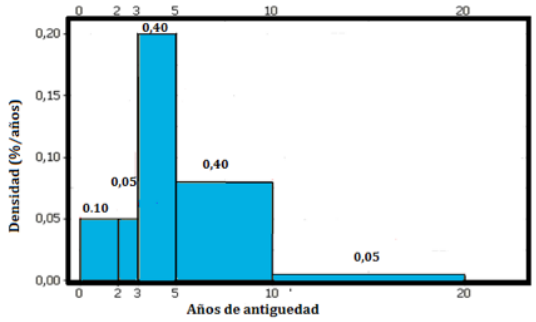


Figura 1. Histograma. Función empírica de densidad de frecuencia

Sobre cada rectángulo se ha colocado su área, es decir la frecuencia relativa. La ordenada correspondiente representa la densidad.De esta manera la estimación de un porcentaje relacionado con evento de la variable antigüedad, se convierte en el cálculo de un área, tal como ocurrirá más tarde, cuando se trate el tema de variables aleatorias continuas.

Así por ejemplo si se está interesado en estimar el porcentaje de obreros con antigüedad menor o igual a 4 años, digamos P(X≤4), bastará calcular el área del histograma comprendida entre cero (0) y cuatro (4), como se muestra en la Figura 2

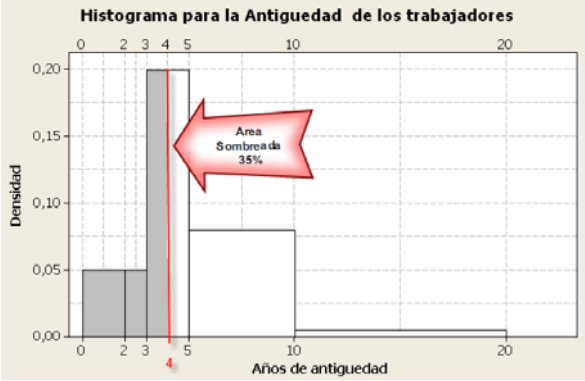


Figura 2. Área oscura del gráfico representa P(X≤4)

Observe que el área sombreada se calcula sumando por un lado las áreas de los primeros rectángulos (10%+5%) y por otro lado la parte del tercer rectángulo comprendida entre 3 y 4, como se conoce su densidad, que es 20% , y se requiere un año, Así que el porcentaje de trabajadores con antigüedad de 4 años o menos se estima en:

$$P(X\leq 4) = 10\% + 5\% + 20\% \,.(1 \text{ año}) = 35\%$$

Análogamente, si se desea estimar el porcentaje de obreros con antigüedad entre 4 y 7,5 años, es decir $P(4\leq X\leq 7{,}5)$. La respuesta será calcular el área del histograma entre dichos valores, como se muestra en la Figura 3.

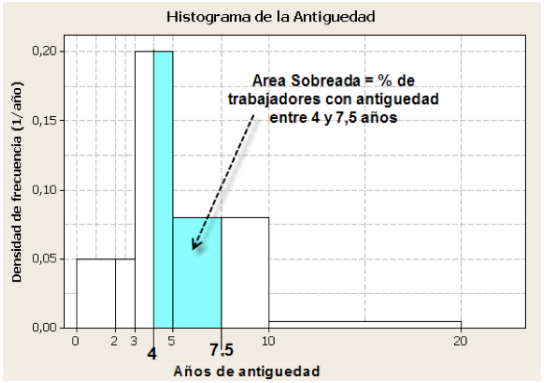


Figura 3. Representación de P(4≤X≤7.5). Área sombreada.

Haciendo el cálculo, usando el concepto de densidad, se obtiene:

$$P(4 \leq X \leq 7{,}5) = f_3^* * (5-4) + f_4^* * (7{,}5-5) = 20\%/\,año * (1año) + 8\%/\,año * (2{,}5años) = 40\%$$

Después de éste recorrido, abordemos la definición de variable aleatoria continua.

6. Variable aleatoria. Definición (Función de densidad de probabilidad)

Se dice que X es una variable aleatoria continua si existe una función f(x), llamada función densidad de probabilidad (fdp) de X, que satisface las siguientes condiciones:

a. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Re$;

Es razonable que no tome valores negativos, si se asocia con la función empírica de densidad de frecuencia.

b. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1$

Ya hemos dicho antes que el área del histograma y ahora el área bajo la función de densidad, debe ser 100%.

c. Para cualquier a, b se tiene que $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x).dx$

El área atrapada entre los valores a y b es justamente el porcentaje de datos de la población que cumple con esas especificaciones, análogamente a lo observado en el histograma. Mirado como la experiencia aleatoria de sacar al azar un valor de X, esta área puede interpretarse como probabilidad.

Ejemplo 2. El histograma de una cierta característica continua X, es el que muestra sombreado en la Figura 4. Se pretende ajustar una función empírica densidad continua y suena razonable la que aparece formando un triángulo equilátero. Encuentre la definición de dicha función de densidad de probabilidad estimada, f(x).

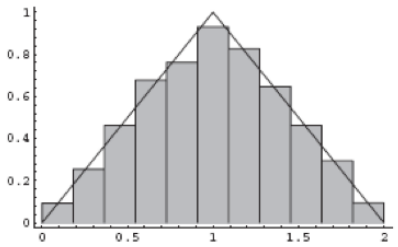


Figura 4. El gráfico sombreado es un histograma y las líneas una aproximación a una densidad empírica continua.

En primer lugar se observa que el rango de valores que puede tomar la variable aleatoria X son los puntos en el intervalo que va de cero (0) a dos (2). Es decir que:

$$\Omega_X = \{x \in \Re / 0 \prec x \leq 2\}$$

El rango o recorrido de la variable aleatoria X. algunas veces se denota por $\Re_X$

¿Cual deberá ser la ecuación que defina las dos rectas que conforman el triángulo equilátero y que definen la función de densidad de probabilidad estimada?Pues como el área debe ser igual a la unidad, esto significa que la altura h del triángulo, debe ser tal que el área valga 1.

$$Area = 1 = \frac{base * altura}{2} = \frac{2 * h}{2} = 1$$

De donde se deduce que la altura h=1. Por lo tanto la ecuación de la recta de pendiente positiva es f(x)=x. la ecuación de la recta con pendiente negativa será: f(x)=2 –x, así pues:

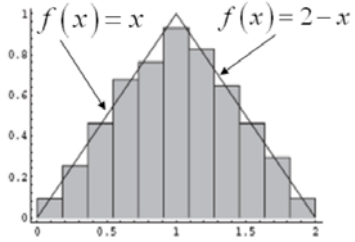


Figura 5. Función de densidad empírica ajustada

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x\leq 1 \\ 2-x & 1<x\leq 2 \end{cases}$$

Si se produce una realización de la variable aleatoria X, estime el porcentaje de veces en el que dicho valor resulta entre 0,5 y 1,5?

$$P(0,5\leq X\leq 1,5)=\int_{0,5}^{1,5} f(x).dx \; P(0,5\leq X\leq 1,5)=\int_{0,5}^{1,0} x.dx+\int_{1,0}^{1,5}(2-x).dx=$$

$$P(0,5\leq X\leq 1,5)=\int_{0,5}^{1,0} x.dx+\int_{1,0}^{1,5}(2-x).dx = P(0,5\leq X\leq 1,5)=\frac{x^2}{2}\Big|_{0,5}^{1,0}+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1,0}^{1,5}=$$

$$P(0,5\leq X\leq 1,5)=\frac{3}{4}$$

Observe que el área, en este caso, se hubiera podido calcular como el área de dos trapecios, con base mayor la altura del triángulo.

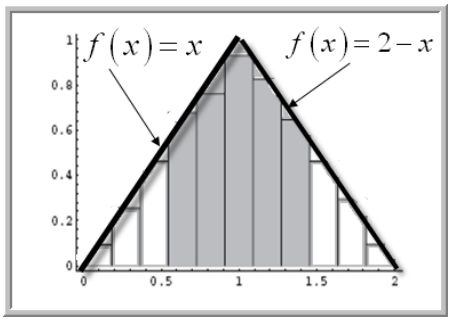


Figura 6. Representación de P(4≤X≤7.5).

7. Conclusión

La definición de variable aleatoria continua, es muy poco intuitiva e introduce la función de densidad de probabilidad de manera muy artificial. Desarrollar la idea de función

empírica de densidad, al momento de tratar la representación gráfica de variables de tipo continuo, a través de una definición apropiada de histograma, para una situación de intervalos de clase desiguales, en la cual las áreas y no las alturas representen la frecuencia relativa, hace que la definición y los procesos operativos con variables aleatorias sean más naturales y con una buena componente intuitiva.

Referencias

Lee y Meletiou (2003). Some difficulties of learning histograms in introductory statistics. Trabajo presentado en el *Joint Statistical Meetings Section on Statistical Education.* Online: http://www.statlit.org/PDF/2003LeeASA.pdfNadaraya, E.A. (1964).

Wu, Y. (2004). Singapore secondary school students´understanding of statisticalgraphs. Trabajo presentado en el *10th International Congress on Mathematics Education.*

El humor en el aula de Estadística

Guitart Coria, Mónica[1] *y Flores Martínez, Pablo*[2]

[1]Universidad Nacional de Cuyo
[2]Universidad de Granada

Resumen

Los estudios sobre el humor concluyen que produce efectos favorables en la salud, las relaciones personales y en otros contextos, como el educativo.

Tras analizar el concepto de humor y los múltiples aspectos involucrados en él, sin olvidar la subjetividad de cada sujeto que interviene, nos planteamos estudiar qué efectos produce el empleo del humor en clase, a partir de una propuesta didáctica para el humor en la enseñanza de la Estadística en carreras de Ingeniería. Para ello diseñamos situaciones humorísticas para tres instancias del curso de Estadística: Patrón de comportamiento, Muestreo y Pruebas de hipótesis.

Llevamos a cabo una investigación cuasiexperimental, con un grupo experimental, que utilizó el humor en su enseñanza y, otro de control.

Mediante cuestionarios a los alumnos, pruebas de rendimiento, entrevistas a alumnos y profesores y las apreciaciones de los observadores, se obtuvo información sobre el aprendizaje, el impacto y consecuencias del humor en la fijación de los conceptos trabajados. El análisis de las respuestas de los alumnos destaca la efectividad que tuvo el uso del humor en su aprendizaje, reflejado además en que recordaron experiencias humorísticas y fueron capaces de relacionarlas con la temática de la asignatura, haciendo hincapié en la funcionalidad de la Estadística para la vida cotidiana. Los docentes se mostraron interesados en la implementación del humor, aunque cautelosos para las distintas circunstancias y personalidades de los docentes.

Palabras clave: Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística – Humor como recurso didáctico.

1. Introducción

El humor ocupa un lugar muy especial en la vida del hombre ya que es una característica humana única, cuyo comportamiento es crítico para el pensamiento, la comunicación y la interacción social (Goel y Dolan, 2001). Además, el humor involucra diversos aspectos del ser humano, muchos de los cuales repercuten a la hora de aplicar el humor en el aula.

Ante tal panorama, no tenemos menos que pensar en el humor como un elemento que acompaña nuestras vidas, y lo hace de manera compleja, interrelacionando e integrando factores de distinta índole. Por esto, el fundamento del humor es complejo desde su concepción, por lo que es necesaria una propuesta para enmarcar el uso del humor en el aula desde las perspectivas que más influyen en él o que más situaciones de conflicto pueden plantear.

A pesar de esta complejidad, muchos intentos por entender la forma en que funciona el humor tienden hacia una línea de análisis en donde se resalta la conceptualización del humor como un acto de incongruencia entre marcos contextuales compatibles (o no).

El humor se plantea a través de experiencias con una lógica que pueda ser entendida por el receptor y tras plantear una introducción y un desarrollo, presenta una conclusión

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 237-241). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

(parcial o final) que rompe, de manera coherente o no, esta lógica. Esta situación se ilustra en el siguiente chiste: El 86% de todas las víctimas de delitos sexuales y asesinatos, son vecinos, amigos, ex amigos o parientes de los atacantes. Además, el 70% de estos delitos ocurren de día, en la casa o en sus cercanías. La conclusión que se dio en algunos artículos periodísticos fue: "Uno está más seguro en un parque público, entre extraños y por la noche, que en casa y en la cama".

El chiste supone una actividad de la inteligencia, una exploración del mundo exterior, de la que se extraen algunos rasgos, que se exageran, o ingresan en nuevas e ingeniosas combinaciones, capaces de sorprender y arrancar carcajadas. El humor produce cambios que inciden en sus creencias más profundas, sin necesidad de que el sujeto sea consciente de su implicación.

Todo esto supone ir más allá. Es el caso de la educación que va más allá de la enseñanza de conceptos puros, apuntando a ellos con fines actitudinales; no se trata sólo de suministrar instrucción, sino que pretende que ésta influya en la manera de contemplar el mundo en el que el estudiante está sumergido, afrontándolo de manera más científica, analítica, basada en valores y con carácter socializador. Por tanto, para implementar esta propuesta, no basta con exponer de manera suficientemente clara los diversos conceptos, sino que el profesor tiene que tratar de que estos conceptos influyan en la vida del alumno, interpretando adecuadamente las informaciones referentes al concepto que se estudia, en situaciones reales. Sabemos que muchos docentes lo intentan y muchos lo logran, pero... ¿podrá el humor servir para este objetivo?, ¿podremos calar más profundamente desde lo afectivo y lo humorístico?

2. Análisis de las situaciones humorísticas

Al trabajar situaciones humorísticas se debe definir si el objetivo es sólo divertir, relajar, cambiar el ambiente de clase o se desea usar el humor como un recurso didáctico específico. En este último caso, se deben seleccionar aquellas situaciones que favorezcan un aprendizaje creativo, ameno y participativo.

El uso de situaciones humorísticas en clase exige un análisis meticuloso a fin de que apunten precisamente al logro de los objetivos y no se transformen en elementos distractores. Hay que tener presente que cada propuesta humorística tiene un carácter subjetivo.

Una apropiada utilización del humor requiere una labor previa de selección y planificación, teniendo en cuenta, especialmente: la edad y madurez de los alumnos, el nivel de complejidad y su relación con los contenidos curriculares.

Partiendo de la idea de Watzlawick (1994) de que el chiste permite la comunicación con el inconsciente, es importante analizar los posibles significados que se le pueden atribuir a los chistes usados en clase, y con ello habremos profundizado la forma en que pueden interactuar los alumnos y el docente involucrados en esta comunicación.

3. El humor en el aula de Estadística: Nuestra experiencia

El trabajo de investigación se realizó en el curso de Estadística Técnica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo, en la ciudad de Mendoza, Argentina, con profesores que aplicaron el humor como recurso didáctico y otros que dieron sus clases de manera tradicional.

Como el estudio fue implementado en distintas carreras de Ingeniería, fue necesario analizar si los componentes individuales del sentido del humor y la capacidad para disfrutar el humor de los estudiantes de Ingeniería difieren según la carrera.

Los resultados obtenidos indicaron que no hay diferencia significativa en la capacidad para apreciar el humor entre los alumnos de las distintas carreras. Además, se extendió este estudio a alumnos de Ingeniería de distintas edades, carreras e instituciones indicando que no hay diferencias significativas en su capacidad para captar y disfrutar el humor.

Se trabajaron cuatro situaciones humorísticas en tres momentos del curso. Todas ellas fueron seleccionadas por haber sido utilizadas en cursos anteriores y tener referencias de su efectividad como elementos motivadores, de aprendizaje y de fijación. Esto plantea el supuesto de que estas situaciones son más efectivas en términos del cumplimiento de los objetivos. Además, las propuestas humorísticas fueron evaluadas por expertos, quienes acordaron la pertinencia de las mismas para cada temática a abordar.

Las experiencias en las clases de Estadística se implementaron en tres instancias. Las temáticas consideradas fueron:

1. Patrón de comportamiento y su análisis en gráficos.
2. Muestra. Universo. Muestreo. Censo. Representatividad. Tamaño de muestra.
3. Pruebas de hipótesis. Errores tipo I y tipo II. Alfa y beta. Ventajas y desventajas de la selección del tamaño de los errores.

Primera experiencia

Se trabajó con gráficos estadísticos que representaban descripciones de variables que hacen referencia a chistes que involucran a ambos géneros. Los gráficos analizados hacen referencia a:

- Probabilidades de un hombre de ganar una discusión en función de las distintas etapas de una relación con una mujer (saliendo, noviazgo, compromiso, matrimonio)
- Cantidad de maniobras que debe realizar una mujer hasta estacionar correctamente un automóvil entre dos autos (uno detrás de otro)

Segunda experiencia

En esta instancia se trabajó en dos etapas: En primer lugar con una poesía y un simple recuento de letras para reflexionar sobre las posibilidades, ventajas y desventajas de un trabajo censal. Luego, se analizaron las posibilidades de trabajar con una muestra que sea realmente representativa y se evaluaron cuáles deberían ser las condiciones para que la muestra tenga el rigor estadístico necesario para los estudios de inferencia. Todo esto en base a una actividad donde se debe descubrir cuál de los tres cubiertos (tenedor, cuchillo, cuchara) es el mostrado, tras exponer sólo una parte de los mismos.

Tercera experiencia

Se comenzó con una clase aparentemente tradicional, que hace reflexionar sobre la importancia de una buena toma de decisiones en cualquier ámbito de la vida y de las condiciones que se pueden trabajar desde la Estadística para que la toma de decisiones tenga respaldo científico, además de estudiar la posibilidad de analizar cómo y cuánto riesgo uno debería asumir en cada caso. La situación humorística es una historia cotidiana relatada a lo largo de toda la clase, volviendo hacia los conceptos más abstractos y relacionándolos con la historia basada en los riesgos que se asumen al cocinar, al juzgar a un sospechoso y al comenzar una relación con otra persona. La esencia humorística está en recordar situaciones que todos han vivido con mayor o menor intensidad y que ya superadas pueden provocar

risas. La intención es hacer sentir que todos podemos estar “de los dos lados” ante las decisiones propias y ajenas, es decir, que todos podemos ser víctimas y victimarios, beneficiados y beneficiarios, etcétera.

4. Análisis de los resultados

Para una primera aproximación sobre los efectos del humor en el recuerdo de los conceptos y en la transferencia de los mismos, se presentaron cuestionarios a los alumnos de ambos grupos (los que habían recibido clases con humor y los de clases tradicionales) al finalizar cada clase.

En estos cuestionarios se preguntó sobre los conceptos teóricos involucrados en las situaciones humorísticas, se presentaron escenarios en los que era necesario hacer transferencia y se pidió que indicaran en qué ejemplo/s de la clase se trataron los temas en cuestión.

En los cursos que se impartieron clases con humor, el recuerdo, la aplicación y la transferencia fueron significativamente mejores. Además, y como resultado no esperado, muchos alumnos inventaron ejemplos y situaciones que también eran humorísticas.

Luego, y considerando un enfoque más general, los alumnos que estuvieron en los grupos que trabajaron con situaciones humorísticas tuvieron, en las evaluaciones parciales y finales, resultados significativamente mejores, aunque es importante aclarar que esto puede deberse a muchas otras razones.

Además, se realizaron entrevistas a alumnos y a profesores. Las entrevistas a los estudiantes se efectuaron al terminar el curso, tras cuatro meses y tras nueve meses de finalizado el mismo. Las mismas apuntaron a obtener información sobre el impacto del humor en el aprendizaje y sus consecuencias en la fijación de los conceptos trabajados en cada situación humorística.

Los cuestionarios de las entrevistas a alumnos y profesores fueron presentados para la evaluación de expertos y tras las correcciones propuestas se aplicaron sin tener problemas en su implementación.

Los alumnos destacaron, en todos los casos, la efectividad que tuvo el uso del humor en su aprendizaje y además, recordaron experiencias humorísticas siendo capaces de relacionarlas con la temática de la asignatura, haciendo hincapié en la aplicación de la Estadística a la vida cotidiana y recordando los conceptos involucrados.

Los docentes entrevistados, en general, se mostraron interesados en la implementación del humor, aunque cautelosos para las distintas circunstancias y personalidades de los docentes.

Por otro lado, las clases contaron con observadores docentes, no docentes y alumnos que ya habían aprobado la asignatura. A continuación se resumen sus comentarios:

- Se dieron respuestas ingeniosas para replicar, completar o subir la apuesta en el chiste.
- Se observó mayor participación en los momentos humorísticos que en los otros.
- Los alumnos trabajaron con placer y relajados, manteniendo una excelente relación con la profesora, observándose empatía y amabilidad.
- Algunas actividades llamaban a la reflexión pero al hacerlo de manera humorística, generaban una sensación de tranquilidad, mucho más propicia para reflexionar y expresar sus opiniones.
- Se observó que las clases estaban llenas aunque no fuera obligatoria la asistencia.

- Es llamativo el ambiente que se crea, por lo ameno, participativo, de atención, de compenetración, de tener el cuerpo metido en la clase, los alumnos no eran meros espectadores.
- Seguramente los alumnos no se dan cuenta cuánto están aprendiendo porque es como que el conocimiento se hubiera desmitificado. A medida que la docente iba exponiendo se notaba en las actitudes de los alumnos que comprendían bien el tema, porque podían seguir la clase, preguntar, analizar alternativas y hacer deducciones.
- La informalidad le dio frescura pero no falta de nivel ni de rigor científico.
- Los ejemplos permitían entender los conceptos que aparecen de manera fría en cualquier libro pero fue el humor el que hizo que se viera y entendiera más allá.

5. Comentarios finales

En resumen, un juicioso uso del humor facilita la atención en clase, hace el aprendizaje más entretenido, promueve la creatividad y, bajo ciertas condiciones, mejora la adquisición de información y la retención de los conceptos.

Es importante destacar que el humor debe ser pertinente, porque los éxitos en la enseñanza con humor dependen del empleo del correcto tipo de humor, bajo las propias condiciones, en el tiempo adecuado y con alumnos adecuadamente motivados y receptivos.

Un factor esencial es el docente, por su función como facilitador y limitador.

La experiencia propia, los resultados obtenidos, la opinión de los alumnos y los informes realizados por los observadores hacen pensar en la efectividad del humor para lograr el cumplimiento de los objetivos propuestos.

Por esto, pensamos que la educación universitaria puede verse mejorada con propuestas humorísticas y que para comprobar esto es necesario un profundo análisis de los factores que permiten lograr este objetivo, ya que el humor en la educación puede presentarse de múltiples maneras y en diversos ámbitos, pero para utilizarlo no hace falta ser gracioso ni humorista, basta tener sentido del humor y pasión pedagógica.

6. Agradecimientos

A nuestros alumnos, víctimas y cómplices de nuestro humor.

Referencias

Goel, V. y Dolan, R. (2001). *The functional anatomy of humor: segregating cognitive and affective components*. Nature Neuroscience, 4(3), 237-238.

Watzlawick, P. (1994). *El lenguaje del cambio*. Herder, Barcelona.

El uso de Geogebra como herramienta para el aprendizaje de las medidas de dispersión

Del-Pino, Jesús

Universidad de Jaén.

Resumen

En este trabajo se presenta un pequeño resumen de las herramientas virtuales y software que existe en el mercado para facilitar la comprensión de conceptos estadísticos teóricos y/o abstractos, como puede ser el de la dispersión y las medidas de la dispersión. Haciendo hincapié en las posibilidades de GeoGebra como herramienta estadística y probabilística para la educación secundaria debido a que es una herramienta que está en auge por la implantación de las pizarras digitales interactivas (PDI) de las que podemos sacar un gran partido, especialmente en la enseñanza de un concepto como la dispersión y sus medidas.

Palabras clave: Dispersión, TIC, GeoGebra

1. Introducción

En los últimos años la administración ha realizado un esfuerzo por implantar las denominadas como "Escuelas 2.0" en los centros de educación secundaria. El programa consiste en ir sustituyendo progresivamente las tradicionales pizarras por pizarras digitales interactivas (PDI) y dotar a los alumnos de ordenadores portátiles para su uso como material escolar.

Actualmente podemos emplear la potencia de las herramientas TIC con todas sus ventajas, como la posibilidad de manipulación o de interacción de los alumnos con ellas para facilitar el aprendizaje de conceptos estadísticos. Un ejemplo claro del uso de las TIC podemos verlo en su aplicación en el concepto de la dispersión, que habitualmente muestra dificultades en la interpretación y comprensión por parte del alumnado.

Dentro del espectro de herramientas existentes para este aprendizaje, en esta exposición deseamos destacar GeoGebra por varios motivos:

1. Es software gratuito, libre y de código abierto. No les cuesta dinero a los centros educativos y pueden modificar elementos para tener funcionalidades que no se presentan en la versión estándar.
2. Es multiplataforma. Funciona tanto si emplean una versión de Linux propio de la Comunidad Autónoma como distintas versiones de Microsoft Windows.
3. Es fácil de usar. Además existen numerosas formaciones, algunas de ellas gratuitas, impulsadas por colectivos de profesores y universidades.
4. Es sencillo y a la vez potente. Posee una hoja de cálculo y sus numerosas vistas permiten alternar el uso de la aritmética, representaciones algebraicas, cálculo simbólico y cálculo estadístico y probabilístico.

2. Antecedentes.

La enseñanza de la estadística y en concreto la del concepto de dispersión han estado normalmente marginados por varios motivos, uno de ellos y quizá el más relevante en nuestro país es similar al que exponía Shaughnessy (1997) y es el énfasis que se da a los elementos del currículo cuando se estudia la estadística marginando la dispersión. Normalmente la estadística es el último bloque de contenidos del currículo (el que no se

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 243-250). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

imparte si el tiempo no da para más) y en este bloque la dispersión suele hacer una aparición pobre. De hecho existe un chascarrillo entre los profesores que dice "los profesores de Matemáticas dejamos cada año la Geometría como última unidad del curso, y después viene la Estadística." Por tanto, una posible solución para que el bloque de estadística sea más atractivo y más ágil es la introducción de las TIC.

Nickerson (1995) analizó el impacto del uso de software en educación y expuso algunos motivos para el empleo de software:

1. Ver el aprendizaje como un proceso constructivo en el que la tarea es proporcionar una guía que facilite la exploración y el descubrimiento.
2. Utilizar simulaciones para llamar la atención de los estudiantes a los aspectos de una situación o problema que fácilmente pueden pasar desapercibidos o no observados en condiciones normales.
3. Proporcionar un ambiente de apoyo que es rico en recursos, ayudas a la exploración, crea una atmósfera en la que las ideas se pueden expresar libremente, y proporciona un estímulo cuando los estudiantes hacen un esfuerzo por comprender. (Nickerson, 1995 citado en Delmas, Garfield y Chance, 1999, p.2)

En la misma obra Snir, Smith y Grosslight (1995) nos indican que "*ello (el uso de software) permite a los estudiantes percibir fenómenos que no pueden ser observados bajos condiciones normales (e.g., conceptos teóricos y abstractos)*" (Snir, Smith y Grosslight, 1995, citado por Delmas, Garfield y Chance, 1999, p.3)

La misma opinión comparte Blejec (2003) sobre el empleo del software y simulaciones por ordenador para la comprensión de conceptos teóricos y/o abstractos que de la forma tradicional presentan más dificultades a los alumnos,

> Estas simulaciones pueden ayudar a enseñar estadística en general y particularmente conceptos abstractos o difíciles y teoremas. Usando simulaciones combinadas con visualizaciones en el ordenador, los conceptos y teoremas pueden ser efectivamente demostrados incluso a los estudiantes con escasas habilidades matemáticas o falta de interés, y en ocasiones puede servir como sustituto de la demostración matemática rigurosa. (Blejec, 2003, p. 2)

Blejec emplea herramientas online que cada día están más presentes, como IMS, Moodle, redes sociales o más específicas como RVLS (Rice Virtual Lab in Statistics, http://onlinestatbook.com/rvls.html) y se muestra un férreo defensor de la enseñanza con software y herramientas virtuales "*el uso de simulaciones de ordenador en la enseñanza estadística demostró ser un medio muy útil para la explicación de conceptos estadísticos difíciles*." (Blejec, 2003, p. 3). Pero probablemente la cita que mejor demuestra que, en efecto, las TIC son hoy una herramienta no sólo útil sino imprescindible es "*es duro imaginar enseñar estadística hoy sin emplear de alguna forma la tecnología*" (Chance, Ben-Zvi, Garfield y Medina, 2007, p. 1)

Otros autores se unen a la opinión de que el uso de las TIC como herramienta mejora el aprendizaje de conceptos estadísticos difíciles (Kalsbeek, 1996; Hesterberg, 1998; Garfield y Ben-Zvi, 2008; Lane y Tang, 2000, Mills, 2003; Mills, 2005; Erikson, 2006) e incluso la guía sobre evaluación e instrucción en educación estadística (GAISE) recomienda el uso de la tecnología para una mejor comprensión de conceptos estadísticos. (Franklin y Garfield, 2006)

Sin embargo, la realidad en las aulas es bien distinta y se prescinde de la tecnología, por falta de formación o de conocimiento de cómo las TIC pueden ayudarnos a enseñar conceptos estadísticos complejos, por eso en este trabajo queremos mostrar brevemente,

cómo un software al alcance de todos como GeoGebra nos puede ayudar y dar algunas referencias sobre material ya elaborado.

3. Algunos programas y herramientas virtuales existentes. Ventajas y desventajas.

Algunos de los autores que he indicado anteriormente utilizaron herramientas virtuales o software como los que a continuación vamos a describir para realizar sus investigaciones didácticas, por supuesto no todos tienen las mismas funcionalidades ni son aconsejables en los mismos niveles. Por este motivo vamos a hacer un breve repaso de algunas de estas herramientas indicando los problemas que encontramos para su uso en educación secundaria.

- S-Plus/R/SPSS(http://www.statsci.org/splus.html http://www.r-project.org/ http://www-01.ibm.com/software/es/analytics/spss/products/statistics/): Estos tres programas son muy similares. Todos son software de análisis estadístico, los dos primeros gratuitos y el último de pago, al principio tanto S, como R eran más difíciles de usar debido a que usaban un lenguaje de programación para trabajar, sin embargo hoy existen GUIs o interfaces como R-commander o PSPP que hacen más amigable este software. Probablemente son los más potentes en cuanto a cálculo estadístico se refiere, pero precisamente la dificultad de su manejo los hace inaccesibles para secundaria, aunque se podrían introducir en un curso posterior como 2º de Bachillerato o 1º de Grado.

- Mathematica (http://www.wolfram.com/mathematica/) y Matlab

  (http://www.mathworks.es/) son dos aplicaciones de computación numérica de pago, que cuestan de 120€ mínimos para el Mathematica a 6000€ mínimos para Matlab, los que los hace económicamente inviables para su uso en educación secundaria.

- Excel (http://www.microsoft.com/office/preview/es/excel-2013-preview) y Calc (http://es.libreoffice.org/caracteristicas/calc/): Son dos hojas de cálculo muy similares, la primera es de pago y pertenece a la suite Microsoft Office, la segunda es libre y pertenece a la suite Libreoffice. Son muy útiles a la hora de gestionar datos y obtener datos, pero no permiten crear construcciones.

- WIRIS (http://www.wiris.com/es): Wiris es un software ideado para PDI por la empresa Maths for more y que tiene gran presencia en muchos centros educativos, además cuenta con la ventaja de que existe gran cantidad de material diseñado y compartido. Sin embargo la calculadora online trabaja sobre internet, lo que determinados momentos es incómodo por la lentitud y los cortes que suele haber en los centros y por otro lado si deseas contar con el software de escritorio completo tendrás que pagar en torno a los 600€.

- RVLS (http://onlinestatbook.com/rvls.html): El Rice Virtual Lab in Statistic fue desarrollado por David Lane en el año 2000. Es un conjunto de applets para trabajar conceptos estadísticos. Son descargables y modificables siempre que conozcas el lenguaje de programación JAVA ya que también puedes descargar el código fuente. Por señalar algunos inconvenientes toda la página está en inglés, con lo que algunos profesores pueden ser reticentes a su uso, y su modificación y/o creación implica conocer programación en JAVA. (Lane y Peres, 2006)

- Tinkerplots(http://www.keycurriculum.com/products/tinkerplots): Es una herramienta de exploración dinámica de datos diseñada por KCP technologies y la Universidad de Massachusetts en 1998 y utilizada por autores como Hammerman y Rubin (2004) o Watson, Fitzallen, Wilson y Creed (2008.) Muy útil a todos los niveles el inconveniente que presenta es que es de pago con precios que van desde los 10$ hasta los 50$ por

licencia para el centro en licencias de por vida, mientras que para los alumnos tiene un coste de 8$ anuales.

- Minitools (http://www.fi.uu.nl/wisweb/): Es un lote de tres applets ideadas por Paul Cobb, desarrolladas por Bakker y utilizadas por Gravemeijer en su tesis doctoral. Algunos resultados de su empleo los podemos leer en Bakker y Gravemeijer (2004.) Como principal problema los applets no son modificables y si quisiera notar que en mi última visita (15/02/2013) la minitool nº1 no estaba disponible.
- I^3 (http://www.rossmanchance.com/applets/): Es una colección de applets diseñados por Rossman y Chance (2004) para cuatro áreas de la estadística: el análisis de datos, la distribución de muestreo, simulación de distribuciones aleatorias y probabilidad e inferencia. Los inconvenientes que presentan son el lenguaje inglés y el carecer del código fuente para modificarlos (y quizá aun teniéndolo la dificultad de su modificación según el lenguaje de programación.

En este apartado hemos querido hacer un pequeño resumen de algunas de las herramientas virtuales y software existentes y que se podrían utilizar para hacer más comprensible la estadística. Todos son muy útiles, pero a juicio de los autores siempre tienen algún pero para su introducción en las aulas de secundaria de España.

4. GeoGebra como herramienta estadística y probabilística.

Desde la versión 3.2 GeoGebra incorpora hoja una hoja de cálculo, con las mismas posibilidades que las vistas en el apartado anterior (Excel/Calc), comandos estadísticos y gráficos y la vista de probabilidades. (GeoGebra, 2013a)

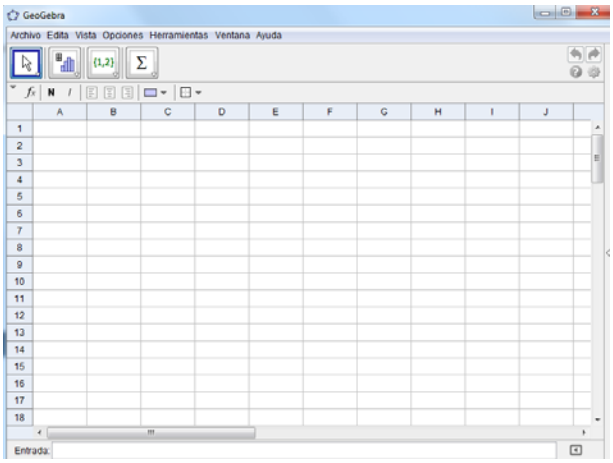


Figura 1. Hoja de cálculo en GeoGebra.

En la vista de la hoja de cálculo, no sólo podemos realizar las opreaciones habituales de un software similar, sino que viene con 3 botones de cálculos estadísticos con diferentes herramientas que facilitan el cálculo.

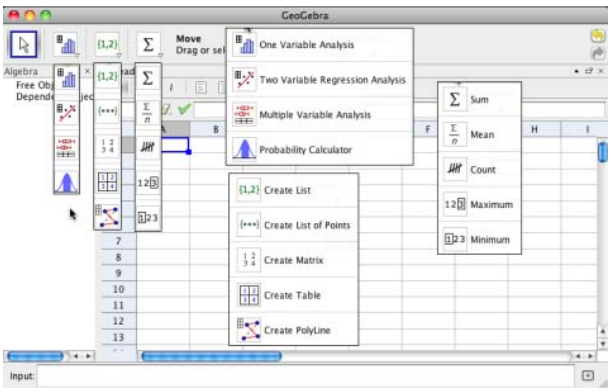


Figura 2. Herramientas estadísticas en la vista hoja de cálculo. (GeoGebra, 2013b)

Además GeoGebra cuenta con una vista probabilística dónde podemos manejar las distribuciones más frecuentes, así como calcular sus estadísticos. En la misma vista pero en otra pestaña podemos realizar diferentes test de bondad y ajuste. Como podemos observar GeoGebra cuenta con una serie de herramientas que lo convierten en un software ideal para enseñar estadística como podemos leer en Romano, Martín y Tenorio (2012) que lo emplearon en educación superior con este fin.

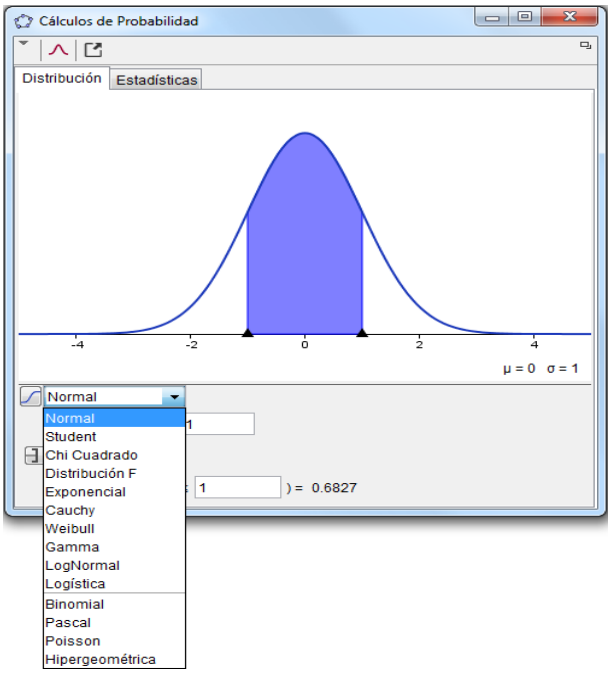


Figura 3. Vista de cálculo de probabilidades.

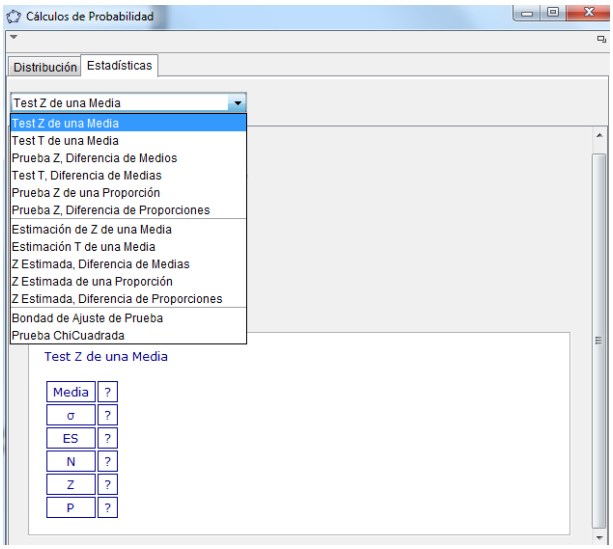


Figura 4. Realización de test.

5. Applets sobre las medidas de dispersión en GeoGebra

GeoGebra permite la construcción de applets que se pueden subir y compartir en su propia red GeoGebraTube (http://geogebratube.org/) lo que permite globalizar el conocimiento, no sólo nos permite descargarlos, sino que además podemos modificarlos fácilmente para adaptarlos a nuestras necesidades, también nos permite crear applets online para utilizar en sistemas CMS como Moodle. En GeoGebraTube podemos encontrar applets ya diseñados para ayudar a entender algunas medidas de dispersión como el siguiente, en el que se explica cómo se construye un diagrama de caja: (http://www.geogebratube.org/student/m18352)

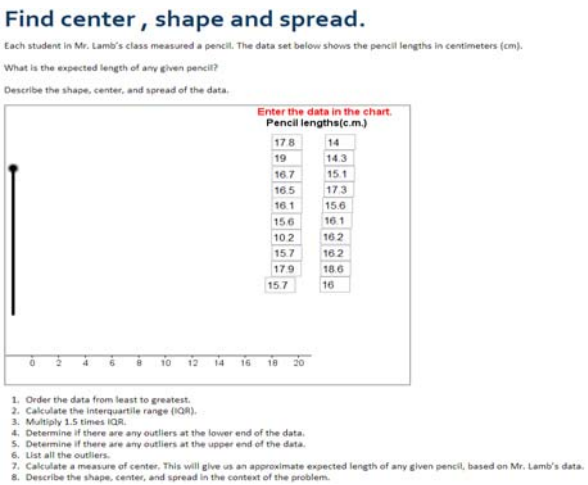


Figura 5. Ejercicio de GeoGebraTube.

Podemos encontrar otros similares en http://www.geogebratube.org/student/m14006 http://www.geogebratube.org/student/m14005, aunque aparecen en inglés, descargándolos podemos modificarlos y traducirlos.

6. Conclusiones

Siguiendo la línea del Real Decreto 1631/2006 en el que se fijan las competencias y una de ellas (la cuarta) es el tratamiento de la información y competencia digital en este artículo hemos querido poner de manifiesto no sólo lo útil que puede ser GeoGebra para mostrar algunas medidas de dispersión sino también hemos traído un elenco de software existente para este fin, este decreto además otorga un papel relevante a la estadística aunque no siempre los profesores se lo dan

> Debido a su presencia en los medios de comunicación y el uso que de ella hacen las diferentes materias, la estadística tiene en la actualidad una gran importancia y su estudio ha de capacitar a los estudiantes para analizar de forma crítica las presentaciones falaces, interpretaciones sesgadas y abusos que a veces contiene la información de naturaleza estadística. (M.E.C., 2007, p. 751)

Así pues, las TIC y en concreto GeoGebra nos permiten conjugar a la perfección ambas directrices y puede ser una herramienta perfecta para la creación de futuros experimentos de enseñanza.

Referencias

Bakker, A. y Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 147–168). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Blejec, A. (2003). Teaching statistics by using simulations on the Internet. *IASE Satellite Conference on Statistics*, Berlin, Germany.

Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J. y Medina, E. (2007). The role of technology in improving student learning of statistics. *Technology Innovations in Statistics Education Journal*, 1.

DelMas, R., Garfield, J. y Chance, B. (1999). A model of classroom research in action: developing simulation Activities to improve students' statistical reasoning. *Journal of Statistics Education*, 7, 1-12.

Erickson, T. (2006). Using simulation to learn about inference. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Voorburg, The Netherlands: International Statistics Institute

Franklin, C. y Garfield, J. (2006). The GAISE (Guidelines for assessment and instruction in statistics education) project: Developing statistics education guidelines for pre K-12 and college courses. En G. Burrill (Ed.), *2006 NCTM Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008), *developing students' statistical reasoning: connecting research and teaching practice*, Kluwer Academic Publishers.

GeoGebra. (2013a). *Página web de GeoGebra*. Recuperado el 18 de febrero 2013 de, http://www.geogebra.org/cms/

GeoGebra (2013b). *Revisión de las utilidades estadísticas de GeoGebra en la versión 4.0*. Recuperado el 18 de febrero de 2013 de, http://nrocnetwork.org/sites/default/files/resources/SpreadsheetStatistics_GeoGebra4.0rc.pdf

Hammerman, J.K. y Rubin, A. (2004). Strategies for managing statistical complexity with new software tools. *Statistics Education Research Journal*, 3 (2), 17-41.

Hesterberg, T.C. (1998). Simulation and bootstrapping for teaching statistics. *American Statistical Association Proceedings of the Section on Statistical Education*, 44-52.

Hodgson, T. y Burke, M. (2001). on simulation and the teaching of statistics. *Teaching Statistics*, 22, 91-96.

Kalsbeek, W.D. (1996). The computer program called sample: a teaching tool to demonstrate some basic concepts of sampling (version 1.01). *American Statistical Association Proceedings of the Section on Statistical Education*, 103-8.

Lane, D. y Peres, C. (2006), "Interactive simulations in the teaching of statistics: promise and pitfalls," En A. Rossman yB. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Voorburg, The Netherlands: International Statitics Institute.

Lane, D. y Tang, Z. (2000). Effectiveness of simulation training on transfer of statistical concepts. *Journal of Educational Computing Research*, 22, 383-396.

M.E.C. (2007). Real decreto por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, 5 de enero de 2007. RD 1631/2006.

Mills, J. (2003).A theoretical framework for teaching statistics. *Teaching Statistics*, 25, 56- 58.

Mills, J. (2005). Learning abstract statistics concepts using simulation.. *Educational Research Quarterly*, 28, 18-33.

Nickerson, R. S. (1995). Can technology help teach for understanding. In eds. D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. M. West, and M. S. Wiske, S*oftware goes to school: teaching for understanding with new technologies*, New York: Oxford University Press.

Romano, I., Martín, A.M. y Tenorio, A.F. (2012). Teaching statistics using GeoGebra. *Proceedings of EDULEARN12 Conference, 4th International Conference on Education and New Learning Technologies*, pp. 1307-1314.

Rossman, A. y Chance, B. (2004). The Rossmann/Chance Applet Collection.

Shaughnessy, J. M. (1997). Missed opportunities on the teaching and learning of data and chance. In J. Garfield and J. Truran (Eds.), *Research Papers on Stochastics Education* (pp. 129-145).

Snir, J., Smith, C. y Grosslight, L. (1995). Conceptually enhanced simulations: a computer tool for science teaching. in eds. D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. M. West, and M. S. Wiske, *Software goes to school: teaching for understanding with new technologies*, New York: Oxford University Press.

Watson, J.M., Fitzallen, N.E., Wilson, K. y Creed, J.F., (2008) The representational value of hats, *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14, (1), 4-10.

El uso de las situaciones aleatorias en la enseñanza de la probabilidad

Osorio Gonzales, Augusta

Pontificia Universidad Católica del Perú

Resumen

El analisis de cómo los niños y las personas en general comprenden la idea de aleatoriedad es materia de estudio de diversos autores que incluyen a Piaget o Fishbein. Muchos investigadores han revisado estos trabajos y realizado el analisis de diversos procesos de enseñanza para el tema, para llegar a diversas propuestas que pudieran permitir enseñar adecuadamente el concepto de probabilidad. Estas propuestas se pueden ir viendo en los distintos textos desde el nivel primario hasta el nivel universitario, pero tambien se puede observar como casi siempre se deja un poco de lado lo que es el estudio de las situaciones aleatorias y su relacion con el concepto de probabilidad.

Queremos presentarles un proceso de instrucción para la enseñanza de la probabilidad a nivel universitario, que ha sido utilizado por más de siete años en alumnos de Letras y Ciencias Humanas de la Pontificia Universidad Católica del Perú y que se basa en el uso de las situaciones aleatorias como elemento básico en el desarrollo del tema de probabilidades. Este proceso ha sido analizado y su idoneidad validada en la tesis de maestría de la autora para optar el grado de Magister en Enseñanza de las Matemáticas.

Palabras clave: probabilidad, situaciones aleatorias, incertidumbre

.

1. Introducción

Dentro de los objetos de estudio que analizan los grupos que investigan sobre la didáctica de las Matemáticas, se puede resaltar la noción o idea de aleatoriedad. Este tema ha sido motivo de estudio de muchos investigadores a lo largo del tiempo, como bien lo menciona Batanero (2001) en su libro sobre Didáctica Estadística.

Hay que reconocer que la idea de aleatoriedad o el pensamiento aleatorio ya ha sido incorporada en la enseñanza de las matemáticas desde la escuela primaria, hecho que se verifica al revisar los diseños curriculares de enseñanza de cualquier país. En particular, podemos fijarnos en el diseño curricular del Perú, donde los conceptos relacionados con la idea de aleatoriedad se van presentando desde el segundo grado de primaria.

Pero también es bien conocido, y así lo han expuesto algunos investigadores como Jiménez y Jiménez (2005), que a pesar de lo desarrollado en los diseños curriculares, en muchos casos algunos temas quedan circunscritos a la planificación y no llegan a ser ejecutados dentro de las clases. Esto sucede con la mayoría de los temas de Estadística y Probabilidad, dado que en casi todos los grados estos temas van al final del año y muchas veces son sacrificados por la conclusión de otros componentes del área.

Es así que nos enfrentamos a un problema real: si un joven no ha sido expuesto al desarrollo del pensamiento aleatorio durante su preparación escolar, es previsible que se presenten problemas al continuar estudios superiores cuando en su primer curso formal de estadística deba enfrentarse a una forma de pensar que no ha desarrollado previamente. Cómo debe enfrentar un docente este problema, cómo se puede desarrollar en una persona

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 251-256). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

una forma de concebir la realidad que no ha sido elaborada previamente durante un proceso continuo y progresivo, y que además le permita al alumno poder desarrollar y comprender esta idea a plenitud; estos son algunos de los desafíos que debe enfrentar cualquier profesor de un curso de estadística básica dentro de casi todas las profesiones actuales.

En particular, conocíamos sobre esta problemática de primera mano al ser una docente que impartió un primer curso de Estadística a nivel universitario durante ocho años. Por ello vimos la necesidad de que los alumnos experimenten una visión diferente de la realidad, pudiendo tener la capacidad de separar en ella las situaciones deterministas de las situaciones aleatorias basándose en la idea de incertidumbre. El proceso de instrucción creado para introducir el concepto de probabilidad buscaba lograr que estas situaciones de incertidumbre sean descompuestas en sus elementos básicos con el fin de poder tener una compresión exacta de ellas y finalmente exponer al alumno al entendimiento de la pertinencia del uso de las probabilidades como medio para poder concluir el conocimiento completo de la situación aleatoria estudiada.

Es bajo la referencia de lo expuesto que, al crear el proceso de instrucción para poder abordar el tema de probabilidades, se tomó en consideración introducir previamente los conceptos básicos relacionados a las situaciones aleatorias y buscar que los alumnos puedan reconocer y definir situaciones de la realidad bajo esta óptica.

Partimos del hecho de que una vez que el alumno conoce las situaciones aleatorias es cuándo el concepto de probabilidad toma sentido y va a procurarles información relevante. Así mismo, consideramos que es importante que las situaciones aleatorias a trabajar sean de interés para el alumno, por tanto, lo mejor es utilizar en un inicio situaciones de su entorno inmediato y procurar que sean ellos mismos en un determinado momento los que puedan llegar a plantearlas. Y finalmente, consideramos que es importante que el alumno pueda aprender a reconocer los diferentes tipos de situaciones aleatorias que procurarán la existencia de los diversos planteamientos sobre el cálculo de probabilidades.

Durante el diseño del proceso de instrucción se procedió a la revisión de bibliografía que permitiera tener un referente para las actividades. Durante este proceso se observó que la mayoría de libros de estadística de nivel universitario utilizados en nuestro medio se caracterizan por la presentación directa del concepto de probabilidad y con referencia a la idea de experimento aleatorio, simplemente listan las definiciones necesarias. Algunos de los libros revisados fueron Veliz (2000), Córdova (2006), Meyer (1986), Johnson, Kuby (2004). En el caso de proveer ejemplos, la mayoría de ellos son sobre los típicos ejemplos de dados o el escoger una bola de color desde una bolsa repleta de bolas de colores distintos. Nuestra preocupación se centró en que no se encontró una relación entre los diferentes tipos de situaciones aleatorias y los tipos de planteamientos para el establecimiento de probabilidades. Tampoco se encontraron ideas que reforzaran la necesidad del uso de las probabilidades.

Partiendo de la información encontrada y estableciendo los puntos que se deseaban resaltar en la introducción del concepto de probabilidad, se construyó una serie de actividades que favorecieran el entendimiento de lo que es una situación aleatoria, cómo se define y de qué partes se compone.

El proceso de instrucción mencionado se aplicó durante más de diez semestres dentro del curso que tuvimos a cargo y fue sufriendo las modificaciones necesarias propias de la reflexión docente. Paralelamente fue necesario ir mejorando la visión teórica del proceso de introducción del concepto de probabilidad y se fue construyendo una visión de la realidad que permitió colocar en ella todos los elementos que se desarrollaron. De esta manera se pudo establecer cómo se calcula la probabilidad de un suceso en particular.

Luego de este trabajo de varios años vimos la necesidad de adoptar la postura de investigadora, buscando analizar y valorar la idoneidad que presentaba el proceso de instrucción diseñado. El fin era poder tomar las medidas adecuadas para su mejora final. La valoración que nos interesaba tomó en cuenta aspectos relacionados con la naturaleza del objeto estadístico en estudio, las actividades desarrolladas e implementadas, las acciones que realizan los estudiantes ante estas actividades y otras dimensiones que permitieron entender los resultados de la puesta en escena. Es desarrollo total de esta investigación puede verse en Osorio (2012).

2. Descripción del proceso de instrucción

Las características del proceso de instrucción se establecieron en base a una propuesta de solución que se procuró frente a cada una de las problemáticas detectadas en la enseñanza del concepto de probabilidad. Las problemáticas trabajadas son las presentadas en Serradó, Cardeñoso y Azcárate (2006) donde se hace una exposición de la vasta problemática que hay para la enseñanza del concepto de probabilidades.

Las situaciones problema diseñadas para las diferentes actividades del proceso de instrucción tienen como eje central a la situación aleatoria y sus componentes. Específicamente, se busca que los alumnos puedan reconocer cuándo una situación propuesta es aleatoria y puedan determinar todos los componentes inherentes a ella. El conseguir este objetivo se evidenciará mediante el alcance de los siguientes objetivos parciales. Se espera que los alumnos:

1. Puedan mencionar algunos posibles resultados de una determinada situación, cuando tienen en consideración determinadas restricciones fijadas de antemano dentro del contexto de la situación que se está analizando.
2. Puedan diferenciar entre una situación de la vida cotidiana que incluye la característica de incertidumbre de una que no la tiene.
3. Puedan dar una posible situación aleatoria cuando se les da un determinado contexto de la realidad.
4. Puedan, dada una determinada situación aleatoria, determinar un suceso simple por extensión y por comprensión.
5. Puedan definir el espacio muestral de la situación aleatoria presentada.
6. Puedan, dada una determinada situación aleatoria, determinar un suceso compuesto por extensión y por comprensión.
7. Puedan determinar un suceso o evento compuesto por extensión, cuando les es presentada una determinada situación aleatoria y un suceso o evento compuesto por comprensión perteneciente a dicha situación aleatoria.
8. Puedan, dada una determinada situación aleatoria, determinar de un grupo de sucesos compuestos propuestos, cuál es el suceso compuesto que es componente de la situación aleatoria presentada.
9. Puedan definir apropiadamente un experimento aleatorio de su entorno. Brindado el contexto con sus condiciones o restricciones a tener en cuenta, el espacio muestral y un grupo de sucesos simples compuestos, ambos grupos por extensión y por comprensión.

El tiempo disponible para la aplicación de todo el proceso de instrucción comprende seis semanas de programación de un curso de tres horas teóricas y dos prácticas a la semana. En este lapso de tiempo se utilizarán las dos primeras horas de clase de la primera semana,

la sesión de práctica de la segunda semana y se aplicará una evaluación individual en la semana seis. Además, los alumnos utilizarán tiempo fuera de clases, se espera que utilicen dos horas de práctica entre la semana uno y dos mediante la aplicación de una evaluación en línea y un promedio de doce horas de trabajo (dos horas semanales) para el desarrollo y revisión del trabajo individual que se presenta en la semana seis.

El proceso de instrucción analizado consta de ocho actividades:

1. Actividad colaborativa para la introducción del concepto de situación aleatoria.
2. Actividad colaborativa para aplicar el concepto de situación aleatoria a un contexto dado.
3. Actividad colaborativa para describir los componentes de una situación aleatoria.
4. Práctica en línea para repasar los conceptos vistos.
5. Prueba individual de conocimientos adquiridos, conceptos teóricos.
6. Práctica en parejas para poder aplicar el concepto de situación aleatoria y de sus componentes.
7. Desarrollo de trabajo individual de análisis de una situación aleatoria propuesta por el alumno.
8. Evaluación de los conceptos de situación aleatoria y de sus componentes, teórica y de aplicación.

Las actividades 1, 2, 3, 5 y 6 que se desarrollan dentro de las sesiones de clase y práctica del curso, tienen un diseño específico de tiempo para ser desarrolladas. En el caso de las tres primeras actividades, que van en la sesión de clases de la primera semana, estas se desarrollan en un lapso de 110 minutos. Se espera que la primera actividad se realice en 40 minutos, la segunda en 20 minutos y la última en 50 minutos. En el caso de las actividades 5 y 6, que se realizan en la sesión de prácticas de la segunda semana, se espera que la parte individual se realice en 15 minutos y la de parejas en 60 minutos.

3. Valoración de la idoneidad del proceso de instrucción

El análisis de idoneidad emprendido tuvo como finalidad establecer si el proceso de instrucción diseñado para la introducción de la probabilidad presentaba los aspectos necesarios para que el alumno integre los significados relacionados al objeto en estudio, la situación aleatoria, a sus significados personales. La valoración de idoneidad se trabajó bajo las concepciones del Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) y se consideró solo dos facetas: la epistémica y la cognitiva.

Los descriptores o indicadores empíricos que ayudaron a la puesta en funcionamiento de la idoneidad didáctica como herramienta de análisis y valoración del proceso en estudio estuvieron basados en los propuestos por Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006). Desde los descriptores de idoneidad propuestos se determinó una serie de desviaciones que muestran los componentes del proceso de instrucción al tener como ideal la configuración epistémica de referencia considerada. Desde los resultados obtenidos nuestras interrogantes finales son ¿el proceso de instrucción cumple su objetivo? ¿Vale la pena invertir recursos en su mejora?

Con respecto al cumplimiento de los objetivos del proceso de instrucción hemos establecido que este proceso les permitió a los dos alumnos analizados, a pesar de iniciar el proceso sin ningún conocimiento previo sobre el tema, llegar a identificar, proponer y analizar adecuadamente una situación aleatoria. Esto nos da pie para indicar que el proceso cumple con su finalidad y por lo tanto, pensar que una mejora del proceso de instrucción es factible y valida.

Un punto importante que debemos tener en cuenta con respecto a la presencia de las desviaciones encontradas, es el marco epistémico que se tuvo en cuenta para la construcción del proceso de instrucción. El marco epistémico es más bien original, ya que no encontramos un trabajo donde se utilicen todas las tipologías de las situaciones aleatorias para poder relacionarlas con los planteamientos de cálculo de las probabilidades. Toda referencia encontrada en la bibliografía sobre el tema solo hacía alusión a los experimentos aleatorios y a la presentación de sus componentes sin detenerse mucho en el trabajo de análisis de los componentes de estos experimentos. Tenemos entonces que el marco epistémico trabajado lo hemos establecido sobre la base de la búsqueda de la teoría necesaria que reforzara la necesidad del uso de las probabilidades y fue mediante la experiencia con el proceso de instrucción que ajustamos los significados involucrados y sus relación entre ellos.

Podemos también indicar que muchas de las desviaciones encontradas son consecuencia de la falta de presentación de los procedimientos y argumentos asociados a los significados pretendidos en el proceso de instrucción. Esta es la desviación más importante encontrada en el análisis, que fue más consecuencia de nuestro desconocimiento en materia de didáctica que en un desconocimiento del tema. ¿Cómo afecto esta falta de información a los alumnos? Por ejemplo, cuando un alumno tiene que decidir cuáles de las situaciones presentadas corresponden a un experimento aleatorio. En ese momento, el alumno tiene que concluir cuáles son los pasos del procedimiento que le llevan a establecer si la situación es o no un experimento aleatorio. Hemos observado durante el análisis de respuestas, que uno de los alumnos solo busca la característica de reproducibilidad dejando de lado el análisis de la incertidumbre. Esta deficiencia se puede subsanar si es que el alumno tiene a su disposición el procedimiento para establecer experimentos aleatorios.

Debemos reconocer que a pesar de las desviaciones, los alumnos pueden enfrentar los problemas propuestos, aunque en algunos casos requieren más tiempo para poder manejar los significados. Tenemos que uno de los alumnos analizados pudo manejar los significados casi desde un inicio del proceso de instrucción, mientras que el otro lo hizo recién al final del proceso.

También debemos comentar sobre el planteamiento que utilizamos para el análisis de idoneidad. Debemos resaltar la ventaja que ha proporcionado a nuestro análisis el hecho de poder contar con los descriptores por competencia y faceta. Su establecimiento ha permitido ordenar nuestro trabajo durante el análisis y centrarlo convenientemente en la búsqueda de las características esenciales que el proceso de instrucción debe poseer. En un análisis tan extenso es necesario tener una metodología muy estricta que permita sistematizar la revisión y el establecimiento de resultados, todo ese trabajo es mucho más fácil cuando el trabajo está organizado por medio de puntos específicos que hacen que la mirada se centre en un tema determinado.

Finalmente, no pensamos que este análisis es suficiente para poder terminar de elaborar un proceso de instrucción que nos lleve a lograr un cambio total en el pensamiento de los alumnos y los dirija a una nueva forma de ver la realidad. Este es solo un primer paso, que ayuda pero que por sí solo no hará todo el trabajo. Con este proceso hemos logrado que los alumnos se introduzcan a un entendimiento sobre de donde surgen la probabilidades, pero aún nos faltan hacer que trabajen con ellas y que además lleguen a construir los famosos modelos probabilísticos. Esto hace que tengamos que pensar en la elaboración de problemas que les permitan manejar la parte conceptual de los planteamientos de cálculo y procedimientos que los lleven a entender de donde surgen las variables aleatorias, tema fundamental para el trabajo en Inferencia estadística, y que está íntimamente ligado con el tema de experimentos aleatorios y modelos probabilísticos. Algunas de estas problemáticas ya las hemos ido trabajando y tenemos algunas ideas de cómo enfrentarlas, pero ahora viene el trabajo difícil, la elaboración de nuevos procesos de instrucción. Esta son algunas de las

ideas que tenemos y que trabajaremos en el futuro. Nuestro propósito es llegar a establecer un mecanismo de enseñanza con el que un alumno pueda entender porque es necesario llegar a establecer modelos probabilísticos y como es que estos se determinan.

Referencias

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada. Granada, España.

Córdova, M. (2006). *Estadística aplicada*. Lima: Moshera.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII(2), 221-252.

Johnson, R. y Kuby, P. (2004). *Estadística elemental. Lo esencial*. México: International Thomson Editores.

Jimenez, L. y Jimenez, J. (2005). Enseñar probabilidad en primaria y secundaria? ¿Para qué y por qué?. *Cidse-Revista virtual matemática- Educación e Internet*, 6(1).

Osorio, A. (2012). *Análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad en la enseñanza superior*. Tesis para optar el grado de Magister en Enseñanza de las Matemáticas. PUCP.

Meyer, P. (1986). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas.* Wilmington: Addison -Wesley Iberoamericana.

Serradó,A., Cardeñoso, J. y Azcarate,P (2006). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. *Tarbiya*, 38.

Véliz, C.(2000). *Estadística: aplicaciones*. Lima: Copias Gráficas

Estrategias y conflictos semióticos de estudiantes de psicología al evaluar un problema de independencia

Cañadas de la Fuente, Gustavo R. y Gea Serrano, M. Magdalena

Universidad de Granada

En este trabajo se analizan las estrategias utilizadas en la evaluación de la independencia en una tabla de contingencia en una muestra de 414 estudiantes de psicología en tres universidades españolas. Las estrategias se analizan desde el punto de su nivel de complejidad, según la clasificación de los niveles de dificultad propuestas por Pérez Echeverría (1990). En cada nivel de esta clasificación se estudia la corrección de las estrategias, considerándose tres tipos: (a) estrategias correctas, (b) estrategias parcialmente correctas, entendiéndose estas como las que proporciona soluciones válidas en algunos problemas, pero en otros no, y (c) estrategias incorrectas. El análisis de las estrategias incorrectas y parcialmente correctas condujo a la identificación de los diversos conflictos semióticos, los cuales vienen definido en el marco teórico del enfoque onto-semiótico (Godino, Batanero y Font, 2007; Font y Godino, 2006) que es el que utilizamos en nuestra investigación. Estos conflictos semióticos implicados en el razonamiento del estudiante fueron clasificados y comentados.

Aunque dados los datos se trata de un caso de independencia perfecta, la mayoría de los estudiantes dieron un coeficiente de asociación de tamaño moderado y un juicio positivo de la asociación. Pocas estrategias llegaron al nivel más alto de complejidad y una serie de conflictos semióticos fueron identificados.

Palabras clave: Tablas de contingencia, dificultades, juicios de asociación y estrategias

.

1. Introducción

A pesar de que las tablas de contingencia son comunes para presentar la información estadística y de que el juicio asociación es un tema prioritario de aprendizaje en los cursos de estadística (Zieffler, 2006; Arteaga et al., 2011), se presta poca atención a su enseñanza, en el supuesto de que su interpretación es fácil.

En este trabajo se describe parte de una investigación más amplia que tuvo como objetivo evaluar la comprensión de los estudiantes de asociación en tablas de contingencia antes de enseñar y comparar sus conocimientos con los adquiridos después de una enseñanza diseñada (Cañadas, 2012).

En concreto se analizan sólo las estrategias de los estudiantes en la parte correspondiente a la independencia, porque éste era el punto donde los estudiantes eran menos precisos en la estimación del coeficiente de asociación y, además, la mayoría de los estudiantes consideró que había asociación en los datos (Batanero, Cañadas, Estepa y Arteaga, 2011; Cañadas, Batanero, Contreras y Arteaga, 2011). Las estrategias se clasifican de acuerdo con los niveles definidos por Pérez-Echeverría (1990), y su corrección. Los resultados son comparados con los descritos por Batanero, Estepa, Godino y Green (1996) y se describen los conflictos semióticos de los estudiantes que pueden explicar sus estrategias equivocadas.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 257-263). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

2. Investigaciones previas

La investigación sobre la asociación fue iniciada por Inhelder y Piaget (1955), que describe las estrategias utilizadas en las diferentes edades cuando se juzga asociación en tareas que eran formalmente equivalente a una tabla de contingencia 2x2 (ver Tabla 1).

Tabla 1. Formato de una tabla de contingencia 2x2

	A	No A	Total
B	a	b	a+b
No B	c	d	c+d
Total	a+c	b+d	

Más tarde, los estudios psicológicos se desarrollaron con los adultos, y mostró bajo rendimiento al juzgar asociación en estas tablas. Smedslund (1963) encuentra que algunos adultos basan su juicio sólo en una celda o mediante la comparación de *a* con *b*. Allan y Jenkins (1983) mostraron la tendencia a basar la sentencia de asociación sobre la diferencia entre una celda *a* y *d*.

Aunque Allan y Jenkins (1983) encontraron que la comparación de las diagonales *(a + d)* y *(c + b)* era común en los adultos. Jenkins y Ward (1965) señaló que esta estrategia es sólo válida en las tablas que tienen filas con iguales frecuencias marginales. Una estrategia correcta para todos los tipos de tablas, según Jenkins y Ward es la comparación de las dos probabilidades condicionales, *P(B|A)* y *P(B|no A)*. Pérez Echevarría (1990) clasifica las estrategias que se han identificado en la investigación psicológica hasta entonces en 6 niveles de rendimiento. Niveles de 0 a 3 corresponden a los estudiantes que utilizar 0 a 3 celdas para llevar a cabo el juicio de asociación. En los niveles 4 y 5, los estudiantes utilizan todas las celdas, la diferencia es que la comparación entre las celdas es de forma aditiva en el Nivel 4 y multiplicativa en el Nivel 5.

Chapman (1967, p. 151) describió una tendencia común a la que llamó "correlación ilusoria": "*el informe de los observadores de una correlación entre dos clases de acontecimientos que, en realidad, (a) no están correlacionados, (b) se correlacionan en menor medida que lo reportado, o (c) se correlacionan en la dirección opuesta a la que se informa*". Muchos investigadores han informado de esta tendencia y sugieren que las teorías previas alteran las estimaciones de la asociación (por ejemplo, Meiser y Hewstone, 2006).

Batanero, Estepa, Godino y Green (1996) analizaron el comportamiento de 213 estudiantes de 17 años y sus estrategias en los juicios de asociación y define diferentes concepciones de la asociación: (a) la concepción causal según la cual el sujeto sólo tiene en cuenta la asociación entre variables, cuando se puede explicar por la presencia de una relación causa - efecto; concepción unidireccional, por el cual el estudiante no acepta una asociación inversa, y la concepción local, donde se deduce la asociación de sólo una parte de los datos. Otros autores (por ejemplo, Contreras, 2012) encuentran errores en el cálculo de probabilidades a partir de tablas de contingencia.

Nuestra investigación tiene como objetivo ir más allá en el análisis de las estrategias en el caso de que los datos muestran independencia perfecta, ya que esta fue la tarea en la que los estudiantes se desempeñaron peor en el estudio de Batanero et al. (1996), y en nuestro estudio anterior (Batanero, Cañadas y Arteaga, 2011). También complementa el tipo de análisis efectuados en la investigación anterior con el fin de identificar los posibles conflictos semióticos de los estudiantes en la evaluación de la independencia. Este término se ha tomado de Godino, Batanero, y Font (2007). Los autores utilizan el término conflicto semiótico como: "*interpretación disparidades entre el estudiante y el significado en la institución de las matemáticas*" (p. 133).

3. Método

La muestra incluyó a 414 estudiantes en su primer año de estudios de psicología de tres universidades españolas: Almería (115), Granada (237) y Huelva (62), todos ellos tomando un curso de introducción a la estadística. La tarea encomendada a los estudiantes es una adaptación de Batanero et al. (1996), cambiando a un contexto de diagnóstico psicológico, sin variar los datos. Las muestras incluyeron todos los estudiantes matriculados en el curso, la diferencia en el tamaño de la muestra se debe al tamaño de la Universidad. Los estudiantes no habían estudiado asociación, pero si las estadísticas de secundaria.

En la parte (a), los estudiantes tienen que proporcionar un juicio asociación. Hay dos categorías de respuestas: el estudiante considera que las variables están o no relacionadas. La estimación del coeficiente de asociación se deduce en la escala numérica (0-1) en la segunda parte del ítem. Por último, un análisis cualitativo se utilizó para identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes y sus conflictos semióticos. La clasificación de las estrategias fue realizada por dos miembros del equipo, en caso de desacuerdo, se discutió con los otros miembros del equipo hasta que se alcanzó un acuerdo.

4. Resultados y discusión

4.1. Juicios de asociación y estimación de la asociación

En la Tabla 2 se presenta el porcentaje de estudiantes que consideran la existencia de asociación y el valor medio de la estimación del coeficiente de asociación. La mayoría de los estudiantes indicaron la existencia de asociación a pesar de que los datos corresponden a un caso de independencia perfecta. Este juicio es consistente con la estimación del coeficiente de asociación, que es de tamaño moderado en promedio. Las diferencias en la estimación de la media o en el porcentaje de alumnos a juzgar asociación (en el test de chi-cuadrado) entre las tres universidades no fueron estadísticamente significativas, esto sugiere que las respuestas de los estudiantes fueron similares. Los resultados pueden explicarse por la correlación ilusoria (Chapman, 1967) ya que los datos contradice las teorías previas, así como por la concepción causal de la asociación, reportados por Batanero et al. (1996).

Tabla 2. Medias estimadas de asociación y juicios de asociación

	Almeria (n=115)	Granada (n=237)	Huelva (n=62)	Total (n=414)
Media estimada	0.51	0.47	0.44	0.47
Número (y porcentaje) de estudiantes que consideran que hay asociación	87 (75.7)	194 (81.9)	42 (67.7)	323 (78.1)

4.2. Niveles de estrategias

Con el fin de explicar los resultados anteriores hemos analizado las estrategias de los estudiantes y las prácticas matemáticas que intervienen en estas estrategias. En primer lugar, las estrategias de los estudiantes fueron clasificadas de acuerdo a su corrección, en tres grupos: (a) estrategias correctas, (b) estrategias parcialmente correctas que produce respuestas correctas sólo para tablas específicas, y (c) estrategias incorrectos. Esta clasificación se cruzó con los niveles de dificultad propuestas por Pérez Echeverría (1990):

Nivel 0. El estudiante no usa la información de la tabla y sólo se tuvieron en cuenta sus propias teorías previas sobre la asociación, la correlación ilusoria (Chapman y Chapman, 1969; Murphy y Medin, 1985).

Nivel 1. Cuando el alumno sólo utiliza una celda de la tabla, por lo general es la celda cuando ambas variables están presentes y tienen un mayor impacto en la atención (Smedlund, 1963; Beyth y Maron, 1982; Shaklee y Mins, 1982).

Nivel 2. Algunos estudiantes utilizaron dos celdas, por ejemplo, en comparación *a* con *b* ó *a* con *c*, por lo que dedujeron asociación de una sola distribución condicional. Otros estudiantes comparan las celdas de frecuencia máxima con la de frecuencia mínima (Batanero et al., 1996).

Nivel 3: En esta estrategia los estudiantes utilizaron tres celdas, por ejemplo, comparar la celda *a* con las celdas *b* y *c*. En general, estos estudiantes descartaron la celda *d* (Batanero et al, 1996.). Todas las estrategias de los niveles 1 a 3 son incorrectas ya que los estudiantes sólo utilizan una parte de los datos, mostrando una concepción local de la asociación (Batanero et al., 1996).

Nivel 4: Se basa en la comparación de forma aditiva de las cuatro celdas. Un ejemplo es la comparación de la suma de las diagonales *(a + d)* con *(b + c)*. Esta estrategia fue encontrada por Allan y Jenkins (1983). Esta estrategia podría proporcionar una buena solución cuando las frecuencias marginales (número de personas con y sin insomnio) son iguales, de acuerdo con Shaklee (1983). En otro ejemplo, los estudiantes compararon dos distribuciones condicionales en forma aditiva.

Nivel 5 utiliza todas las celdas con comparaciones multiplicativas, pero todavía puede ser incorrecta o parcialmente correcta. Por ejemplo, una estrategia equivocada consiste en calcular todas las frecuencias relativas conjuntas y compararlas. Un ejemplo de una estrategia parcialmente correcta está en asumir que todas las frecuencias relativas en la tabla deben ser idénticas. Por último, entre las estrategias correctas encontramos estudiantes que compararon dos distribuciones condicionales, por ejemplo, *a/(a+b)* con *c/(c+d)*. Otra estrategia correcta es la comparación de las posibilidades a favor y en contra de B para cada valor de A; que fue descrito por Batanero et al. (1996).

Tabla 3. Frecuencias (y porcentajes) de estrategias por niveles

	Incorrecta	Parcialmente correcta	Correcta	Total
Nivel 0	13 (100.0)			13 (3.1)
Nivel 1	73 (100.0)			73 (17.6)
Nivel 2	108 (100.0)			108 (26.1)
Nivel 3	27 (100.0)			27 (6.5)
Nivel 4	27 (26.2)	76 (73.8)		103 (24.9)
Nivel 5	20 (26.3)	10 (13.2)	46 (60.5)	76 (18.4)
No response	14 (100.0)			14 (3.4)
Total	282 (68.1)	86 (20.8)	46 (11.1)	414 (100)

En la Tabla 3 se presenta la frecuencia de las respuestas en la clasificación anterior. Sólo el 11,1% de los estudiantes utilizan estrategias correctas y el 20,8% de los cuales son parcialmente correctas. Los estudiantes tienden a utilizar los niveles 2 ó 4, en los cuales ninguna de las estrategias es correcta, y además había un gran porcentaje de estudiantes que no utilizaron toda la información de las celdas, ya que sus estrategias eran de nivel 3 o inferior.

En el nivel 4, cerca de 30% de los estudiantes compara frecuencias absolutas entre ellas, una estrategia errónea descrita por Batanero et al. (1996) y aproximadamente 60% utiliza las cuatro celdas con comparaciones aditivas, una estrategia descrita por Inhelder y Piaget (1955), también se encontrada por Batanero et al. (1996) en estudiantes de secundaria. Finalmente, la mayoría de estrategias de nivel 5 eran correctas ya sea comparando los odds ratios o las distribuciones condicionales, estrategia propuesta por Jenkins y Ward (1965) y también se encuentra en Batanero et al. (1996). La precisión en la

estimación del coeficiente de asociación aumenta con la estrategia de corrección y las diferencias fueron estadísticamente significativas en la prueba de ANOVA.

4.3. Conflictos semióticos

El análisis de las estrategias incorrectas y parcialmente correctas condujo a la identificación de diversos conflictos semióticos las cuales solo mencionamos por motivos de la extensión, que se clasifican a continuación, según ya se trate de las disparidades en los estudiantes el significado asignado a la asociación o independencia (atribuyendo propiedades incorrectas a estos conceptos) u otros conflictos:

1. Propiedades incorrectas atribuidas a la asociación. Se encontraron las siguientes:
    - La identificación de la concepción causal de la asociación por Batanero et al, (1996) se encontró en las estrategias de nivel 0.
    - Suponer que la asociación se puede deducir a partir de sólo una parte de los datos (concepción local).
    - Asumir que es posible deducir de las comparaciones aditivas asociación, una estrategia que debería haber sido superado, de acuerdo con Inhelder y Piaget (1951) en la etapa de las operaciones formales.
    - Suponer que la asociación se puede deducir a partir de sólo una distribución condicional, que también fue descrito por Inhelder y Piaget (1951).
    - Pensar que la diferencia de las frecuencias absolutas condicionales es suficiente para mantener a la asociación, un error que se encontró en Smedlund (1963) y Shaklee y Mins (1982).
    - Considerar que la asociación se puede deducir de la diferencia entre las sumas de las diagonales de la tabla. Esa estrategia fue considerada como correcta por Piaget e Inhelder, pero Allan y Jenkins (1983) sugirió que no funciona en el caso general.
    - Si se asume que a> d en caso de asociación. Estos estudiantes consideraron que sólo estas dos celdas influían en la asociación.
2. Propiedades incorrectas atribuidas a la asociación. La principal fue la confusión entre las ideas de independencia y equiprobabilidad.
3. Otros conflictos, como basar el juicio asociación en su propia opinión.

5. Discusión y consecuencias de la enseñanza

La mayoría de los estudiantes de psicología en nuestro estudio han juzgado asociación en una tarea donde había independencia perfecta, debido al fenómeno de correlación ilusoria, afectando a su precisión en la estimación del coeficiente de asociación.

Los resultados de nuestro estudio eran peores en comparación con Batanero et al. (1996). Estos autores no informaron acerca de la estimación de la asociación por parte de sus estudiantes, en nuestro estudio, la estimación es consistente con el criterio de asociación. Los resultados fueron muy parecidos en todas las universidades participantes. En cuanto a los conceptos descritos por estos autores, se observó la concepción causal y la local. Ya que no pudimos comprobar la estabilidad de estas concepciones, se utiliza en su lugar la idea de conflicto semiótico, que sólo implica una interpretación errónea de una expresión matemática, un concepto, propiedad o procedimiento.

Nuestra lista de conflictos semióticos es más amplia que la lista de los conceptos descritos por los autores, como nuevos conflictos relacionados con las ideas de la asociación y la independencia fueron identificados. Por ejemplo, asumir que la asociación puede ser juzgada a partir de sólo una parte de los datos, otro conflicto frecuente fue el supuesto de que la asociación puede ser juzgada a partir de las frecuencias absolutas. Puesto que los conflictos semióticos no asumen una fuerte convicción por parte de los estudiantes, es posible cambiarlos con una instrucción adecuada y la identificación de estos conflictos es un primer paso para corregir su razonamiento erróneo.

Estas razones y nuestros resultados sugieren la necesidad de una mayor investigación sobre la enseñanza de la asociación, la concepción causal y el efecto de correlación ilusoria no parece mejorar con la enseñanza tradicional (Batanero, Godino, y Estepa, 1998). Nuestro propósito es continuar este trabajo mediante el diseño de una enseñanza alternativa a las actividades que se enfrentan los estudiantes con sus conflictos y ayudarles a superarlos.

Agradecimientos: Proyecto EDU2010-14947 y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Allan, L. G. y Jenkins, H.M. (1983). The effect of representations of binary variables on judgment of influence, *Learning and Motivation, 14,* 381-405.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales, *Números 76,* 55-67.

Batanero, C., Cañadas, G., Estepa, A. y Arteaga, P. (2011) Psychology students' estimation of association. *Statistique et Enseignement, 3* (1), 3-18.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D. y Green, D. (1996) Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 151-169.

Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1998). Building the meaning of statistical association trough data analysis activities. Research Forum. In A. Olivier & K, Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.1, pp. 221-242). University of Stellembosch.

Beyth-Marrow, R. (1982). Perception of correlation reexamined. Memory and cognition, *10* (6), 511-519.

Cañadas, G. (2012). *Comprensión intuitiva y aprendizaje formal de las tablas de contingencia en alumnos de psicología*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Cañadas, G., Batanero, C., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2011). Estrategias en el estudio de la asociación en tablas de contingencia por estudiantes de psicología. *Educacion Matemática, 23*(2), 5-32.

Chapman, L. J. (1967). Illusory correlation in observational report. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 6*(1), 151-155.

Chapman, L. J. & Chapman, J. P. (1969). Illusory correlation as an obstacle to the use of valid psychodiagnostic signs, *Journal of Abnormal Psychology,* 74, 271-280.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional.* Tesis doctoral. Universidad de Granada,

Fint, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa 8* (1), 67-98.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007) The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l´enfant à la logique de l´adolescent.* (From the child's logic to the adolescent's logic). Paris: Presses Universitaires de France.

Jenkins, H. M. yWard, W. C. (1965). Judgment of the contingency between responses and outcomes, *Psychological Monographs, 79,* 1-17.

Meiser, T. y Hewstone, M. (2006). Illusory and spurious correlations: Distinct phenomena or joint outcomes of exemplar-based category learning? *European Journal of Social Psychology, 363*(3), 315-336.

Pérez Echeverría, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico.* Madrid: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

Shaklee, H. (1983). Human covariation judgment: accuracy and strategy. *Learning and Motivation, 14,* 433-448.

Shaklee, H. y Mins, M. (1982). Sources of error in judging event covariations: Effects of memory demands, *Journal of Experimental Psychology Learning, Memory and Cognition, 8*(3), 208-224.

Smedlund, J. (1963). The concept of correlation in adults. *Scadinavian Journal of Psychology,* 4, 165-174.

Zieffler, A. (2006). *A longitudinal investigation of the development of college students' reasoning about bivariate data during an introductory statistics course.* Unpublished PhD. University of Minnesota.

Estudio comparativo de los currículos de probabilidad y estadística español y americano

Jaldo Ruiz, Pilar

Universidad de Granada

Resumen

¿Adquiere las mismas capacidades en Probabilidad y Estadística un estudiante en España y en Estados Unidos a lo largo de su etapa escolar y de instituto? ¿Puede un/a niño/a español/a viajar a EEUU (o viceversa) y continuar sus estudios sin alterar su nivel educativo? Estas son las preguntas a las que se intenta dar respuesta en el siguiente estudio. Para ello, una vez fijada la correspondencia entre los cursos académicos que se suceden en cada país de los 6 a los 18 años, realizamos una comparación de los currículos sobre Probabilidad y Estadística que se imparten en los centros de Educación Primaria y Secundaria en 3 etapas educativas: de 6-8, de 8-14 y de 14-18 años.

Dicha comparación se centra en los objetivos sobre Probabilidad y Estadística que aparecen establecidos por la ley en ambos currículos y que los estudiantes deberían haber alcanzado una vez finalizado cada nivel. Compararemos tanto un país con otro dentro de un mismo curso académico, como los distintos niveles en los que se estructuran los estudios preuniversitarios de ambos países. Una vez hecho lo anterior, se pueden extraer las semejanzas y diferencias de las dos formas de enseñanza. Concluyendo que, en general, casi todas las aptitudes que según el currículo americano los/as alumnos/as deben conseguir una vez finalizado el 12º grado están reflejadas también al acabar 2º de Bachillerato en España, aunque ciertos contenidos se den con un curso de adelanto o de retraso dependiendo del sistema en que nos encontremos.

Palabras clave: Currículum de Probabilidad y Estadística, España, Estados Unidos, comparación, enseñanza Primaria y Secundaria.

1. Introducción

La necesidad del conocimiento estadístico ha sido reconocida por las autoridades educativas en España, donde la estadística se enseña en la Educación Secundaria desde hace 20 años, con alguna presencia también en el último curso de la Educación Primaria. A partir de 2006, con los nuevos Decretos de Enseñanzas Mínimas (MEC 2006; 2007a, b); se incluye la estadística en todos los ciclos educativos, desde los 6 años de edad. Con ello se desea proporcionar a los estudiantes una experiencia estadística desde su infancia, siguiendo el ejemplo de otros países (por ejemplo, NCTM, 2000).

En este trabajo vamos a realizar un estudio comparativo de los currículos de Probabilidad y Estadística entre España y Estados Unidos que se imparten en los centros de Educación Primaria y Secundaria analizando los documentos citados. Para ello nos fijaremos en la correspondencia entre los cursos académicos de cada país según indica la Tabla 1 y compararemos tanto un país con otro dentro del mismo curso académico como los distintos niveles entre sí conforme se avanza en edad de cada país. Distinguiremos varios bloques en los cuales compararemos lo que los estudiantes deberían ser capaces de hacer una vez superado el curso. Estos contenidos se presentan resumidos en tablas:

- Tabla 2: Primer ciclo de primaria, o lo que es lo mismo, cursos con edades comprendidas entre los 6 y los 8 años.
- Tabla 3: Segundo ciclo de educación primaria, o lo que es lo mismo, cursos con edades comprendidas entre los 8 y los 9 años.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 265-272). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

- Tabla 4: Tercer Ciclo de Educación Primaria y Primer Ciclo de Educación Secundaria Obligatoria, o lo que es lo mismo, cursos con edades comprendidas entre los 8 y los 14 años. Aunque dentro de este segundo bloque haremos subdivisiones según cursos.
- Tablas 5 y 6: Desde 3º de Educación Secundaria Obligatoria a 2º de Bachillerato, o lo que es lo mismo, cursos con edades comprendidas entre los 14 a los 18 años. Haciendo también las subdivisiones según cursos.

Tabla 1. Correspondencia entre los cursos académicos

Edad	España	Estados Unidos
6-7 años	1º Primaria	1º Grado
7-8 años	2º Primaria	2º Grado
8-9 años	3º Primaria	3º Grado
9-10 años	4º Primaria	4º Grado
10-11 años	5º Primaria	5º Grado
11-12 años	6º Primaria	6º Grado
12-13 años	1º Secundaria	7º Grado
13-14 años	2º Secundaria	8º Grado
14-15 años	3º Secundaria	9º Grado
15-16 años	4º Secundaria	10º Grado
16-17 años	1º Bachillerato	11º Grado
17-18 años	2º Bachillerato	12º Grado

Lo hacemos de esta manera porque, en los documentos curriculares, los objetivos no siempre se encuentran organizados por cursos, sino por ciclos o grupos de varios cursos.

2. Comparación del Primer Ciclo de Educación Primaria con los Grados 1º, 7º y 8º de Estados Unidos

En primer lugar hemos comparado los estándares del NCTM (2000) y el primer ciclo de Educación Primaria (MEC, 2006). Vemos en la Tabla 2 que no se aprecian demasiadas diferencias entre los currículos español y americano en los dos primeros años de escolaridad obligatoria. De hecho lo que los niños y niñas tienen que ser capaces de hacer es prácticamente lo mismo en los dos países.

Tabla 2. Comparación de los estudios de primer ciclo de primaria:

España (Ciclos 1º y 2º de Primaria)	Estados Unidos (Grados 1º y 2º)
Recoger y ordenar datos en contextos familiares y cercanos.	Plantear preguntas y reunir datos sobre sí mismos y su entorno.
Realizar interpretaciones elementales de los datos presentados en gráficas de barras.	Ordenar y clasificar objetos según sus atributos y organizar datos sobre los objetos.
Reconocer gráficamente informaciones cuantificables.	Representar datos utilizando objetos concretos, dibujos y gráficas.
Formular y resolver sencillos problemas en los que intervenga la lectura de gráficos.	Describir partes de los datos y todo el conjunto de ellos para determinar lo que estos muestran.
Estar familiarizados con conceptos y términos básicos sobre el azar: seguro, posible, imposible...	Discutir los acontecimientos relacionados con la experiencia de los estudiantes como probable o improbable.

3. Comparación del Segundo y Tercer Ciclo de Educación Primaria con los Grados 3º, 4º y 5º de Estados Unidos

Estos contenidos se presentan en la Tabla 3 que resume lo presentado en los estándares del NCTM (2000) y los ciclos segundo y tercero de Educación Primaria (MEC, 2006). Aunque una vez finalizadas ambas etapas los contenidos se corresponden en esencia, los rasgos más llamativos que se pueden observar, entre los objetivos que se tienen que

conseguir, son que en el segundo ciclo español apenas se da una introducción a la estadística (basándose sólo en recoger y ordenar datos e interpretarlos en una gráfica), dejando las técnicas más complejas de recogida así como el cálculo de algunas medidas de centralización para el tercer ciclo.

Tabla 3. Comparación de los estudios de Segundo y Tercer ciclo de Primaria

	España (primaria)	Estados Unidos (3º, 4º, 5º grados)
3º y 4º	Recoger datos sobre hechos y objetos de la vida cotidiana utilizando técnicas sencillas de recuento. Ordenar estos datos atendiendo a un criterio de clasificación y expresar el resultado de forma de tabla o gráfica. Describir e interpretar gráficos sencillos relativos a situaciones familiares.	*Formular preguntas que se pueden responder con datos y recolectar, organizar y presentar datos relevantes para responderlas* Diseñar investigaciones para abordar una pregunta y considerar cómo los métodos de recolección de datos afectan la naturaleza del conjunto de datos. Recopilar datos usando observaciones, encuestas y experimentos. Presentar datos utilizando tablas y gráficas tales como trazos de línea, gráficos de barras y gráficos de líneas. Reconocer las diferencias en la representación de los datos categóricos y numéricos. *Seleccionar y usar métodos estadísticos apropiados para analizar datos* Describir la forma y las características importantes de un conjunto de datos y comparar conjuntos de datos relacionados, con un énfasis en cómo se distribuyen los datos. Utilizar medidas de tendencia central, con énfasis en la mediana, y entender lo que cada uno nos indica sobre el conjunto de datos. Comparar diferentes representaciones de los mismos datos y evaluar el funcionamiento de cada representación muestra aspectos importantes de los datos. *Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos* Proponer y justificar conclusiones y predicciones basadas en datos y estudios de diseño para investigar más a fondo las conclusiones y predicciones. *Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad* Describir eventos como probables o improbables y discutir el grado de probabilidad usando palabras tales como seguros, probables por igual, y lo imposible. Predecir la probabilidad de resultados de experimentos sencillos y poner a prueba las predicciones. Entender que la medida de la probabilidad de un evento puede ser representado por un número de 0 a 1.
5º y 6º	Recoger y registrar una información que se pueda cuantificar, utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Utilizar algunos recursos sencillos de representación gráfica tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales... y comprender y comunicar la información así expresada. Aplicar la media aritmética, la moda y el rango a situaciones familiares. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado.	

Respecto a la parte de probabilidad, en España no aparece nada en el segundo ciclo, sólo se sabe que el niño o niña lo tiene que haber asimilado cuando haya acabado el tercer ciclo, mientras el contenido es mucho más completo en el currículo americano.

4. Comparación el Primer Ciclo de Educación Secundaria Obligatoria con los Grados 6º, 7º y 8º de Estados Unidos

La comparación de contenidos para estos grados se presenta en la Tabla 4, partiendo

del NCTM (2000) y el decreto de enseñanza secundaria (MEC, 2007a).

Tabla 4. Comparación de los estudios de Primer ciclo de E.S.O

	España (1º y 2º ESO)	Estados Unidos (6º a 8º grados)
1º ESO	Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios y, en estos últimos, analizar las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces una experiencia aleatoria. Comprender el concepto de frecuencia relativa y, a partir de ella, la capacidad de inducir la noción de probabilidad. Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica.	*Formular preguntas que se pueden responder con datos y recolectar, organizar y presentar datos relevantes para responderlas* Formular preguntas, estudios de diseño, y recopilar datos sobre una característica compartida por dos poblaciones o características diferentes dentro de una población. Seleccionar, crear y utilizar adecuadas representaciones gráficas de los datos, incluyendo histogramas, diagramas de caja y diagramas de dispersión. *Seleccionar y usar métodos estadísticos apropiados para analizar datos* Buscar, usar e interpretar medidas de tendencia central y dispersión, incluyendo rango intercuartil y media. Discutir y entender la correspondencia entre conjuntos de datos y sus representaciones gráficas, especialmente histogramas, diagramas de tallo y hoja, diagramas de caja y diagramas de dispersión.
2º ESO	Desarrollar las distintas fases de un estudio estadístico para conocer las características de una población. Formular la pregunta o preguntas adecuadas que darán lugar al estudio, recoger la información, organizarla en tablas y gráficas, hallar valores relevantes (media, moda, valores máximo y mínimo, rango) y obtener conclusiones razonables a partir de los datos obtenidos en casos sencillos y relacionados con su entorno. Utilizar la hoja de cálculo como herramienta informática, para organizar y generar las gráficas más adecuadas a la situación estudiada.	*Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos* Utilizar las observaciones sobre las diferencias entre dos o más muestras para hacer conjeturas acerca de las poblaciones de las que se tomaron las muestras. Hacer conjeturas acerca de las posibles relaciones entre dos características de una muestra sobre la base de los diagramas de dispersión de los datos y líneas aproximadas de ajuste. Utilizar conjeturas para formular nuevas preguntas y planificar nuevos estudios para responderlas. *Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad* Comprender y utilizar la terminología adecuada para describir eventos complementarios y mutuamente excluyentes. Utilizar proporcionalidad y una comprensión básica de la probabilidad de hacer y probar conjeturas acerca de los resultados de experimentos y simulaciones; Calcular las probabilidades de eventos compuestos simples, usando métodos tales como listas organizadas, diagramas de árbol y modelos de área.

Observamos que en el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria se incluyen todos los contenidos que el alumno o alumna debe aprender sobre probabilidad. Comparando con el currículo americano observamos que los dos hablan sobre hacer predicciones y conjeturas de los resultados de un experimento a partir de experiencias previas, introduciendo al estudiante así por primera vez el concepto de frecuencia relativa. La diferencia más significativa que se encuentran es que en Estados Unidos también se exige calcular las probabilidades de eventos simples y compuestos, usando métodos tales como listas organizadas, diagramas de árbol y modelos de área.

En cuanto al segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria sólo se proponen contenidos estadísticos. En ambos currículos por primera vez el estudiante formula preguntas sobre una característica determinada de la población y se encarga además de las distintas fases del estudio estadístico. Se amplían las medidas de centralización estudiadas y se introducen las medidas de dispersión y la finalidad con la que se utiliza cada una de estas medidas, interrelacionando los conceptos. La diferencia más significativa es que en España se introduce la utilización de la hoja de cálculo como herramienta informática.

5. Comparación el Segundo Ciclo de Educación Secundaria Obligatoria con los Grados 9º, 10º y 11º y 12º de Estados Unidos

En estos últimos años de enseñanza el currículo español de estadística y probabilidad es mucho más rico y avanzado que en los cursos anteriores.

En el curso tercero de Educación Secundaria Obligatoria se hace un repaso/ampliación de todo lo que se ha visto en estadística hasta el momento con las novedad de que el estudiante tiene que saber escoger qué método de representación de determinados datos es el más adecuado y obtener conclusiones a partir del estudio de los parámetros de centralización y dispersión, los cuales se han ampliado también llegando hasta la desviación típica. En la probabilidad que se da en este año, además de profundizar en los contenidos del curso primero de Educación Secundaria Obligatoria (ya que en segundo curso no se da probabilidad) se utiliza por primera vez la regla de Laplace para calcular probabilidades, complementando al cálculo basado en experiencias previas. Por último, decir que los diagramas de árbol que se vieron en Estados Unidos al finalizar el 8º grado, se ven aquí por primera vez.

En el curso cuarto de Educación Secundaria Obligatoria se juega de forma más significativa con las distribuciones continuas que antes. Lo novedoso respecto al curso anterior es tener en cuenta la representatividad y la validez del procedimiento de elección de la muestra y el análisis de la generalización de las conclusiones del estudio a toda la población. Respecto al área de probabilidad, en España por primera vez se trabaja con el espacio muestras de experiencias "compuestas" sencillas, en contextos concretos de la vida cotidiana, cuando en Estados Unidos ya se conocen las experiencias aleatorias compuestas una vez finalizado el 8º grado (que corresponde con 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria).

Tabla 5. Comparación de los estudios de Segundo Ciclo de E.S.O.

	España (ESO)	Estados Unidos (grados 9º a 12º)
3º ESO	Elaborar e interpretar información estadísticas teniendo en cuenta la adecuación de las tablas y gráficas empleadas, y analizar si los parámetros son más o menos significativos. Organizar, en tablas de frecuencias y gráficas, información de naturaleza estadística, atendiendo a sus aspectos técnicos, funcionales y estéticos (elección de la tabla o gráfica que mejor presenta la información). Calcular, utilizando si es necesario la calculadora o la hoja de cálculo, los parámetros centrales (media, mediana y moda) y de dispersión (recorrido y desviación típica) de una distribución. Interpretar información estadística dada en forma de tablas y gráficas. Obtener conclusiones pertinentes de una población a partir del conocimiento de sus parámetros más representativos. Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica o como resultado del recuento de posibilidades, en casos sencillos. Identificar los sucesos elementales de un experimento aleatorio sencillo y otros sucesos asociados a dicho experimento. Determinar e interpretar la probabilidad de un suceso a partir de la experimentación o del cálculo (regla de Laplace), en casos sencillos. Tomar decisiones razonables a partir de los resultados de una experimentación, simulación o, en su caso, de un recuento en casos sencillos.	*Formular preguntas que se pueden responder con datos y recolectar, organizar y presentar datos relevantes para responderlas* Entender las diferencias entre los distintos tipos de estudios y qué tipos de inferencias legítimamente se puede sacar de cada uno. Conocer las características de los estudios bien diseñados, incluida la función de asignación al azar en las encuestas y experimentos. Entender el significado de los datos de medición y los datos categóricos, de datos univariados y bivariados, y del término variable. Entender histogramas, diagramas de caja, paralelas y diagramas de dispersión y los utilizan para mostrar los datos. Calcular las estadísticas básicas y entender la diferencia entre un estadístico y un parámetro. *Seleccionar y usar métodos estadísticos apropiados para analizar datos* Para los datos de medición univariantes, ser capaz de mostrar la distribución, describir su forma, y seleccionar y calcular las estadísticas de resumen. Para los datos de medición bivariados, ser capaz de mostrar un diagrama de dispersión, describir su forma, y determinar los coeficientes de regresión, las ecuaciones de regresión y coeficientes de correlación utilizando herramientas tecnológicas. Visualizar y analizar datos de dos variables en la que al menos una variable es categórica. Reconocer cómo las transformaciones lineales de datos univariantes afectan a la forma, el centro y la dispersión. Identificar tendencias en los datos bivariados y encontrar las funciones que el modelo de los datos o transformar los datos para que puedan ser modelados.
4º ESO	Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales en distribuciones unidimensionales (discretas y continuas). Realizar el estudio cualitativo de los datos disponibles. Extraer conclusiones del uso conjunto de los parámetros estadísticos. Tener en cuenta la representatividad y la validez del procedimiento de elección de la muestra y la pertinencia de la generalización de las conclusiones del estudio a toda la población. Organizar la información estadística en tablas y gráficas y calcular los parámetros que resulten más relevantes con ayuda de la calculadora o la hoja de cálculo. Identificar el espacio muestral en experiencias simples y compuestas sencillas, en contextos concretos de la vida cotidiana. Utilizar la regla de Laplace, los diagramas de	*Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos* Utilizar simulaciones para explorar la variabilidad de las estadísticas de muestra de una población conocida y construir distribuciones de muestreo. Comprender cómo las estadísticas de la muestra reflejan los valores de los parámetros de población y el uso de distribuciones de muestreo como base para la inferencia informal. Evaluar los informes publicados que se basan en los datos por examinar el diseño del estudio, la idoneidad del análisis de datos, y la validez de las conclusiones. Entender cómo técnicas estadísticas básicas se utilizan para controlar las características del proceso en el lugar de trabajo. *Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad* Entender los conceptos de espacio y distribución de

árbol o las tablas de contingencia para calcular probabilidades. Utilizar los resultados obtenidos para la toma de decisiones razonables en el contexto de los problemas planteados. Aplicar los conceptos y técnicas de cálculo de probabilidades para resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana.	muestras de probabilidad y construir espacios de muestra y distribuciones en casos sencillos. Utilizar simulaciones para construir distribuciones empíricas de probabilidad. Calcular e interpretar el valor esperado de variables aleatorias en casos simples. Entender los conceptos de probabilidad condicional y eventos independientes. Entender cómo calcular la probabilidad de un evento compuesto.

6. Comparación del Bachillerato con los Grados 9º, 10º y 11º y 12º de Estados Unidos

Los cursos de matemáticas de Bachillerato que vamos a analizar son los pertenecientes a la rama de Humanidades y Ciencias Sociales, ya que en las matemáticas del Bachillerato Tecnológico y de Ciencias de la Salud sólo aparece la estadística en el primer curso, cuyos contenidos son prácticamente los mismos (si no inferiores) que los de 1º de Bachillerato de la rama de Sociales.

Tabla 6. Contenidos de Bachillerato.

1º	Distinguir si la relación entre los elementos de un conjunto de datos de una distribución bidimensional es de carácter funcional o aleatorio e interpretar la posible relación entre variables utilizando el coeficiente de correlación y la recta de regresión. Apreciar el grado y tipo de relación existente entre dos variables, a partir de la información grafica aportada por una nube de puntos. Extraer conclusiones apropiadas, asociando los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden. En este sentido, más importante que su mero cálculo es la interpretación del coeficiente de correlación y la recta de regresión en un contexto determinado
2º	Utilizar técnicas estadísticas elementales para tomar decisiones ante situaciones que se ajusten a una distribución de probabilidad binomial o normal. Mediante el uso de las tablas de las distribuciones normal y binomial, los alumnos son capaces de determinar la probabilidad de un suceso, analizar una situación y decidir la opción más adecuada. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios simples y compuestos, dependientes o independientes, utilizando técnicas personales de recuento, diagramas de árbol o tablas de contingencia. Estimar y calcular probabilidades asociadas a diferentes tipos de sucesos (probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes) usando de forma práctica los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números. Tomar decisiones de tipo probabilístico que no requieran la utilización de cálculos complicados. Diseñar y desarrollar estudios estadísticos de fenómenos sociales que permitan estimar parámetros con una fiabilidad y exactitud prefijadas, determinar el tipo de distribución e inferir conclusiones acerca del comportamiento de la población estudiada. Identificar si la población de estudio es normal y medir la competencia para determinar el tipo y tamaño muestral, establecer un intervalo de confianza para μ y p, según que la población sea normal o binomial, y determinar si la diferencia de medias o proporciones entre dos poblaciones o respecto de un valor determinado, es significativa. Utilizar distribuciones de probabilidad y la capacidad para inferir conclusiones a partir de los datos obtenidos. Analizar de forma critica informes estadísticos presentes en los medios de comunicación y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones.

En 1º curso de Bachillerato los contenidos que se dan esencialmente en estadística son los referentes a las distribuciones bivariantes y la correlación y regresión lineal, cuyo

objetivo no es el mero cálculo del coeficiente de correlación y la recta de regresión, sino su interpretación en un contexto determinado, como también refleja el currículo americano, en el cual se dice además que podemos servirnos de herramientas tecnológicas para facilitar la tarea (como ya se señalaba en el currículo español desde 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria con el uso de la hoja de cálculo). En cuanto a la probabilidad, vemos por primera vez las distribuciones binomial y normal y usamos recursos estadísticos para tomar las decisiones más adecuadas.

Por último, en 2º curso de Bachillerato se realizan cálculos probabilísticos muchos más avanzados. Y se estudia de qué tipo es una variable, realizando estimaciones de sus coeficientes característicos para inferir conclusiones.

En definitiva, al finalizar por tanto su etapa de instituto el estudiante debe poseer suficientes recursos como para ser capaz de analizar de forma crítica informes estadísticos presentes en los medios de comunicación y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones.

En general, casi todas las aptitudes que según el currículo americano los alumnos y alumnas deben conseguir para los grados 9º-12º están reflejadas también en el currículo español una al acabar 2º curso de Bachillerato, aunque ciertos contenidos se den con un curso de adelanto o un curso de retraso dependiendo del sistema.

Referencias

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria,* Madrid: Autor.

MEC (2007a). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria,* Madrid: Autor.

MEC (2007a). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas,* Madrid: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics,* Reston, VA; NCTM. http://standards.nctm.org/.

Evaluación de errores de profesores de matemática en tareas de alfabetización estadística y de razonamiento estadístico

Tauber, Liliana Mabel; Cravero, Mariela y Redondo, Yanina

Universidad Nacional del Litoral

Resumen

Presentamos un estudio exploratorio basado en la detección de errores efectuados por profesores de matemática y por estudiantes de profesorado. Se describen resultados de respuestas a un cuestionario de opción múltiple aplicado a dos muestras: una de profesores en ejercicio y la otra, de estudiantes de profesorado, la mayoría de ellos con formación básica en Estadística. Los ítems del cuestionario incluyen tareas de Alfabetización Estadística y de Razonamiento Estadístico. En este trabajo presentamos algunos resultados que nos muestran la existencia de errores conceptuales en las actividades de Alfabetización Estadística. Asimismo, se recogen diversas dificultades que se observan en la resolución de tareas que implican razonar estadísticamente.

Palabras clave: resúmenes estadísticos, errores de interpretación, formación de profesores, Alfabetización y razonamiento estadístico

.

1. Introducción

En la actualidad, todos los ciudadanos, reciben periódica y asiduamente información estadística a través de los medios de comunicación. Dicha información puede presentarse de diversas maneras, pero principalmente, aparece resumida en gráficos y/o tablas. Esta realidad genera la necesidad de que la educación formal, en todos sus niveles, se preocupe por enseñar a leer e interpretar la información que se presenta en tales resúmenes estadísticos. Si bien en las últimas reformas educativas realizadas en Argentina, se han incluido diversos contenidos relacionados con el tratamiento de la información, estas reformas no han llegado al nudo del problema: *la formación de los maestros y profesores que se encargan de formar a los alumnos en estos temas*.

Nuestro grupo de investigación ha tenido la posibilidad de trabajar con profesores de matemática de nivel secundario y, la experiencia, aunque enriquecedora, ha sido impactante puesto que una proporción importante de profesores en ejercicio no han tenido posibilidades de actualizar sus conocimientos estadísticos y, en consecuencia, tienen un escaso conocimiento no sólo de los contenidos que deberían enseñar sino, fundamentalmente, de las problemáticas específicas de la enseñanza y el aprendizaje de tales contenidos. Como consecuencia de esta escasa formación, en la mayoría de los casos, deciden dejar de lado la enseñanza de tales conceptos o de trabajarlos al final del año escolar con muy poca profundidad.

Es en este punto que se presenta una dicotomía entre lo que demanda a diario la sociedad y la enseñanza que se brinda en los distintos niveles educativos. Esta misma problemática se presenta a nivel universitario, tanto en carreras que utilizan la estadística como herramienta metodológica como en aquellas en las que se forman a los profesores. Acordando con las ideas de Schield (2006), algunos conceptos fundamentales de la Alfabetización Estadística no deberían dejarse de lado aún en la educación universitaria, ya que en este nivel se debería hacer una resignificación de tales conceptos (p.e.: comparación de porcentajes, interpretación de proporciones, etc.). Es en este sentido que, desde hace varios años, nuestro grupo está trabajando en pos de difundir y favorecer la alfabetización

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 273-283). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

estadística en distintos niveles educativos. Algunas de nuestras reflexiones, estudios y experiencias pueden encontrarse en Tauber (2010), Cravero, Redondo y Tauber (2012).

En consecuencia, teniendo como preocupación principal la comprensión de los conceptos fundamentales de la Alfabetización Estadística, es que presentamos esta ponencia, en la cual resumimos los resultados de la aplicación de un cuestionario que se centra en la detección de errores cometidos por profesores de matemática y estudiantes de profesorados de matemática al resolver tareas de de lectura e interpretación de tablas de distribución de frecuencias, de contingencia y gráficos.

2. Antecedentes

Este trabajo continúa a otros realizados en el Proyecto de investigación: *Alfabetización Estadística en la Educación Formal* (Bertorello, Albrecht y Tauber, 2010; Cravero, et. al., 2010), el cual se desarrolla en la Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina. Un antecedente directo lo constituye el trabajo de Boncompagni y Tauber (2009) sobre lectura e interpretación de resúmenes estadísticos en futuros profesores de matemática, así como el trabajo de Tauber (2010), sobre el análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas, en los que se ha realizado un análisis a-priori de diversos ítems incluidos en este cuestionario y en otro instrumento aplicado a alumnos universitarios de diversas carreras. Asimismo, en el mencionado trabajo se describen los resultados obtenidos en la aplicación de otro cuestionario a estudiantes de diversas carreras universitarias.

Dado que la Alfabetización Estadística lleva implícita la comprensión de diversos conceptos y procedimientos estadísticos, tales como interpretación de gráficos y de resúmenes estadísticos, interpretación de frecuencias porcentuales, probabilidad, etc, en nuestra investigación se han tenido en cuenta diversas líneas de trabajo, a saber: estudios sobre actitudes y creencias hacia la Estadística (Estrada, Batanero y Fortuny, 2003; Micheli y Arévalo, 2009, entre otros); estudios sobre la comprensión de gráficos (Curcio, 1989; Espinel, 2007; Tauber, 2006) y, estudios basados en la caracterización de los elementos que componen a la Alfabetización Estadística (Gal, 2004; Garfield, DelMas y Chance, 2003 y Ben-Zvi y Garfield, 2004, Schield, 2000, 2006).

3. Metodología

a. Objetivos

Los objetivos que nos hemos planteado al construir el cuestionario que presentamos en este trabajo, han sido los siguientes:

- Categorizar los errores que se presentan al resolver tareas que requieren de la lectura de tablas y gráficos descriptivos
- Identificar los errores evidenciados cuando se presentan cuestiones asociadas a tareas de razonamiento estadístico
- Explorar si existen diferencias en los tipos de errores evidenciados entre los estudiantes de profesorado de matemática y los profesores de matemática en ejercicio.

b. Descripción del cuestionario

Para la elaboración del cuestionario, hemos considerado algunas de las recomendaciones realizadas en trabajos referentes al estudio de actitudes acerca de la estadística (Estrada, et al., 2003), además de considerar la categorización de conceptos fundamentales de la alfabetización estadística descrita en otros trabajos (Tauber, 2010; Tauber, Bertorello y Albrecht, 2012). Este instrumento presenta 19 ítems divididos en dos

bloques que permiten obtener información de distinta índole. El primer bloque, consta de nueve ítems, a través de los cuales se recoge información general acerca de la experiencia del encuestado en relación a la enseñanza o aprendizaje de la estadística. El segundo bloque, está compuesto de tres dimensiones con 11 ítems en total. La primera dimensión, permite indagar sobre las creencias y actitudes hacia la estadística, la segunda recoge información sobre la comprensión de las medidas de tendencia central como resumen representativo de un lote de datos, y la tercera, evalúa la lectura e interpretación de información presentada en tablas y gráficos estadísticos.

En el presente trabajo planteamos la discusión de resultados de los ítems de la dimensión 3 del segundo bloque (las dimensiones 1 y 2 de este bloque han sido analizadas y discutidas parcialmente en Tauber, et.al. (2011, 2012). En esta dimensión se han incluido cinco ítems (los cuales aparecen en el Anexo que se adjunta a esta ponencia) en cuya construcción se tuvieron en cuenta los siguientes tipos de componentes en el significado de un concepto (Godino, Batanero y Font, 2007). Comprensión de las definiciones y propiedades de media y mediana. Lectura y comparación de porcentajes en una tabla de contingencia. Comprensión de las distribuciones condicionales y marginales en una tabla de contingencia. Comprensión de proporción, porcentaje y frecuencia absoluta. Lectura de porcentajes en gráficos de barras adosadas. Identificación de distribuciones marginales o condicionales en un gráfico de barras adosadas

Todos los ítems que presentamos en este trabajo tienen respuestas de opción múltiple, porque un primer objetivo fue explorar las respuestas dadas por los encuestados y, en una segunda etapa de la investigación, hemos realizado entrevistas en profundidad sobre algunos de estos sujetos. A continuación analizamos los ítems propuestos (en negrita se marca la opción correcta).

Item 14. Un objeto pequeño se pesó con un mismo instrumento, separadamente, por 9 estudiantes en una clase de física. Los pesos obtenidos por cada estudiante (en gramos) fueron:
6,2 6,0 6,0 15,3 6,1 6,3 6,2 6,15 6,2
Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Cuál de los siguientes métodos le recomendaría usar? Marque con un círculo la opción que considera más adecuada a esta situación.

a. Usar el número más común, que es 6,2
b. Usar 6,15 puesto que es el peso más preciso
c. Sumar los 9 números y dividir la suma por 9
d. **Desechar el valor 15,3; sumar los otros 8 números y dividir por 8**

Este problema es una adaptación de Cobo (2003) en cuyo trabajo se da posibilidad de respuestas abiertas. Para la elaboración de las opciones múltiples hemos tenido en cuenta los resultados encontrados en la mencionada tesis. En este caso pretendemos observar si los profesores detectan el valor alejado como un error que puede afectar profundamente el valor de la media. En consecuencia, es un problema de *razonamiento estadístico*, en el que se debe relacionar propiedades de la media con su algoritmo de cálculo y en el que se debe tomar la decisión de desechar un valor.

Item 15. Se seleccionó una muestra de 705 conductores de colectivos de larga distancia de todo el país y se registró el número de accidentes de tránsito que tuvieron durante cuatro años. La Dirección Nacional de Tránsito le encarga a usted que a partir de un análisis de los datos seleccione la medida estadística que resuma de manera más adecuada a estos datos. ¿Cuál de los siguientes métodos elegiría? (Marque con un círculo la opción elegida)

Nº de accidentes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Total
Nº de conductores	114	157	158	115	78	44	21	7	6	1	3	1	705

a. Usar el número más común, que es 2 accidentes en cuatro años.

b. Usar el número más común, que es 158 accidentes en cuatro años.

c. Sumar la cantidad de accidentes y dividir por 11.

d. Usar el número mediano de accidentes en cuatro años que es 2.

e. Sumar los productos de la cantidad de accidentes y el número de conductores, y luego dividir por 705.

f. Usar el número mediano de accidentes en cuatro años que es 158.

Este problema ha sido elaborado específicamente para este cuestionario y en la elaboración de las opciones hemos tenido en cuenta diversas propiedades asociadas a las medidas de tendencia central y a sus relaciones con una distribución de frecuencias fuertemente asimétrica. En la redacción de las opciones se tuvieron en cuenta algunas respuestas dadas por alumnos de profesorados a actividades de evaluación que planteaban situaciones similares a esta.

Los siguientes dos ítems son adaptaciones de Schield, (2000, 2006), a partir de los cuales se pretende evaluar la forma en que los profesores leen e interpretan un porcentaje correspondiente a una distribución condicional en una tabla de contingencia (ítem 17). Por otra parte, en el ítem 18, se pretende analizar si se identifica la distribución condicional sobre la que se debería realizar el cálculo correspondiente, así como la identificación del total sobre el que se debería calcular el porcentaje y, en consecuencia, las proporciones o las frecuencias absolutas. Ambos ítems están dirigidos a evaluar actividades de *alfabetización estadística* y de *razonamiento estadístico*.

Item 17. Se ha realizado un estudio entre todos los estudiantes de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la UNL para indagar, entre otras cosas, sobre el porcentaje de estudiantes que fuman discriminado por sexo.
Lee atentamente cada una de las siguientes proposiciones (a, b y c). Selecciona para cada una de ellas el7 ítem (respuesta) que represente adecuadamente el porcentaje marcado con un círculo en la tabla.

¿FUMA?	SEXO		TOTAL
	Varón	Mujer	
SI	75 %	25 %	100 %
NO	50 %	50 %	100 %

(Marca con un círculo la opción seleccionada)

a. 25% de las mujeres observadas son fumadoras

b. 25 % es el porcentaje de mujeres fumadoras de toda la población observada

c. 25 % es el porcentaje de mujeres entre las personas fumadoras.

Item 18. A partir de la tabla anterior, considera el valor marcado con el círculo y el porcentaje que aparece en la fila inferior siguiente (50%). Lee atentamente cada una de las siguientes proposiciones (a, b y c). Selecciona para cada una de ellas el ítem (respuesta) que represente adecuadamente la relación entre ambos porcentajes (Marca con un círculo la opción seleccionada).

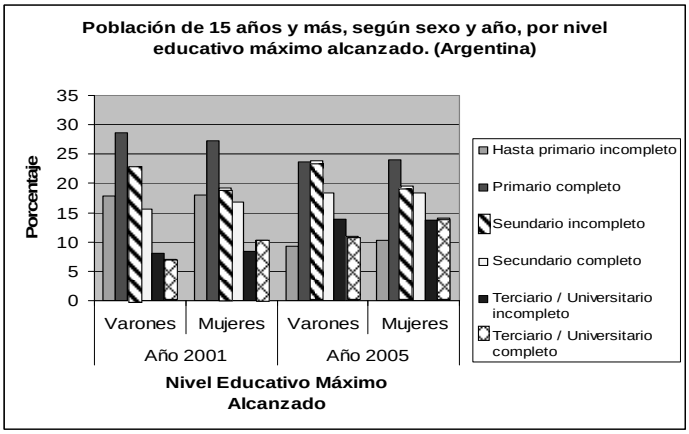
a. Podríamos indicar que en esta población, la cantidad de mujeres que no fuman es el doble de las que fuman.

b. Considerando todo el grupo observado, hay dos veces más de mujeres no fumadoras que fumadoras

c. Considerando sólo las mujeres, podemos indicar que la proporción de mujeres no fumadoras es el doble de las fumadoras.

***NOTA**: para cada opción de los ítems 17 y 18, se debe elegir entre: SÍ – NO – NO SE PUEDE DETERMINAR CON LA INFORMACION PRESENTADA – OTRO (ESPECIFIQUE)*

Item 19. A partir del censo del año 2001 y de un muestreo realizado en el año 2005, el INDEC presenta los siguientes datos sobre el nivel educativo máximo alcanzado para personas de 15 años y más, discriminados por sexo y año en el que se realizó el estudio.



En base a la información presentada en el gráfico, selecciona la opción más adecuada para cada uno de los siguientes ítems:

a. El 10 % de las mujeres, en el año 2001, tienen estudios universitarios incompletos
i. Sí **ii. No** iii. No se puede determinar con la información presentada

b. La cantidad de mujeres y varones, en el año 2001, que tienen estudios universitarios completos es aproximadamente igual
i. Sí ii. No **iii. No se puede determinar con la información presentada**

c. La Proporción de varones y mujeres con primario incompleto en el año 2001 es aproximadamente igual
i. Sí ii. No iii. No se puede determinar con la información presentada

d. La cantidad de varones con primario completo, en el año 2005, es aproximadamente igual a la cantidad de varones que en ese mismo año declaraban tener el nivel secundario incompleto.
i. Sí ii. No iii. No se puede determinar con la información presentada

En este caso se centra en la lectura directa del gráfico (ítem a) y la comparación directa de proporciones (ítem c). Ambas, actividades de alfabetización estadística. En los ítems b y d, se presenta una complejidad mayor ya que además de leer los datos (en el sentido de Curcio, 1989), también se deben considerar los totales de las distribuciones condicionales para poder indicar si se pueden o no obtener los valores absolutos y luego compararlos. Estas dos actividades relacionan elementos de la *alfabetización estadística* y del *razonamiento*.

4. Discusión de resultados

Los resultados obtenidos a partir de la aplicación del cuestionario al grupo de sujetos descrito en párrafos anteriores se presentan en las tablas incluidas en el anexo que acompaña a este trabajo, toda la descripción que realizamos a continuación se basa en dichos resultados.

De la Tabla 1(ítem 14), se desprende que el 63,6 % de los alumnos de profesorado y el 86,6% de los profesores en ejercicio han elegido la opción correcta. Esto nos indica que se ha logrado relacionar la presencia de un valor atípico en los datos y de su influencia en el cálculo de la media. Por el contrario, en el ítem 15, se ha observado una mayor proporción de respuestas incorrectas, tanto para los profesores (40%) como para los estudiantes (27,3%). Esto puede deberse a que para seleccionar la opción correcta, se debían establecer relaciones entre el tipo de variable involucrada, la distribución de frecuencias de ésta, el tipo de asimetría y todo ello asociarlo con las propiedades de las medidas de tendencia central para poder decidir finalmente que la mediana era la medida más adecuada. Además, una vez tomada la decisión de seleccionar la mediana, se debía identificar correctamente que el valor de dicha medida es 2, es decir, el valor de la variable que corresponde a dicha medida. Como se puede observar, ha sido muy baja la proporción de sujetos que seleccionaron la opción correcta, mientras que la mayoría seleccionó opciones (c y e) asociadas con la media

aritmética (63,6% de estudiantes y 53,4% de profesores), esto nos indica que no se tiene en cuenta el tipo de distribución cuando se presentan los datos en una tabla de distribución de frecuencias.

En el ítem 17, los resultados obtenidos han sido muy variables de un sub-ítem a otro. Tanto en el sub-ítem a como en el b, se presenta una diferencia notoria en el porcentaje de respuestas correctas entre estudiantes de profesorado y profesores en ejercicio, así es que en el sub-ítem a es un 36,3% de estudiantes que eligen la opción correcta (NO) versus un 53,3 % de profesores que seleccionan la misma opción. Y en el sub-ítem b, los resultados son de 18,1% para los estudiantes y 73,3% para los profesores que eligen la opción correcta (NO). En ambos sub-ítems se evalúa si se logra identificar la distribución condicional sobre la que se obtiene el porcentaje indicado y si se diferencia ésta con la distribución marginal. En el caso del sub-ítem c, no se han presentado dificultades ya que el 100% de los alumnos y el 93,3% de los profesores logra identificar la opción correcta y, por lo tanto, logra identificar sobre qué distribución condicional está calculado el porcentaje. Como vemos, estos resultados son contradictorios pero pensamos que nos permiten reafirmar varias de las cuestiones planteadas por Schield (2006), quien indica que es muy importante elaborar tareas de alfabetización estadística que permitan la interpretación y la comparación de proporciones obtenidas a partir de distintas distribuciones y también asociadas a diferentes expresiones verbales.

En el ítem 18 a, hubo un 54,5% de alumnos y un 73,3 % de profesores que seleccionaron la opción correcta (NO), indicando que la mayoría logra leer correctamente el porcentaje asociado a la distribución condicional correspondiente. En el caso del ítem 18 b, el 72,7% de los estudiantes selecciona la opción correcta (no se puede determinar) contra sólo un 20% de profesores, por lo cual se evidencia en este grupo que no logran interpretar que la consigna se refiere a un total marginal que no se especifica en la tabla presentada en la actividad. En el ítem 18.c, se ha podido encontrar la mayor dificultad, ya que sólo hubo un 18,2% de estudiantes y un 33,3% de profesores que seleccionaron la opción correcta (la cual indicaba que no se podía responder a la consigna con la información que se presentaba), indicando también que es difícil asociar un porcentaje presentado en una tabla de contingencia a la distribución (condicional o marginal) correspondiente.

En el ítem 19 a, prácticamente no se observan errores en las respuestas, lo cual era esperable dado que es una actividad de lectura directa de datos correspondiente a tareas básicas de alfabetización estadística. Por el contrario, en el sub-ítem b, la mayoría selecciona opciones incorrectas, principalmente la opción NO: 54,5% de estudiantes y 73,3% de profesores, lo que nos indica que se hace una lectura directa de las proporciones representadas en el gráfico y no se tiene en cuenta de que la proposición habla de valores absolutos que deberían calcularse además sobre totales que no conocemos (total de varones en el año 2001 y total de mujeres para el mismo año). Una cuestión similar ocurre para el ítem d, en el que sólo el 36,4% de estudiantes seleccionan la opción correcta y un 66,7% de profesores acierta. En el sub-item c, al igual que en el a, no se presentan grandes dificultades, pero como ya hemos mencionado, la actividad sólo requería de una lectura directa de los datos.

5. Reflexiones finales

De los resultados obtenidos se desprende que aquellas actividades que requieren de relaciones más complejas, en las que intervienen diversos elementos de la alfabetización y del razonamiento estadístico son más difíciles de resolver aún para los profesores de matemática en ejercicio. Esta es una implicación importante que debería tenerse en cuenta a la hora de planificar actividades de enseñanza para la formación de profesores (de matemática en nuestro caso). Al igual que Espinel (2007), vemos con cierta preocupación

que, a partir de un determinado momento hay conceptos que se consideran asimilados y es uno de los argumentos que se defienden para no enseñar a nivel universitario cuestiones asociadas a la lectura, construcción e interpretación de tablas y gráficos estadísticos. Es por ello que pretendemos seguir investigando y elaborando secuencias de enseñanza para futuros profesores de matemática que son los encargados de enseñar la estadística en el nivel secundario. Es importante que un profesor se forme adecuadamente en la problemática asociada con la alfabetización y el razonamiento estadístico para que logre formar ciudadanos estadísticamente alfabetizados.

Para finalizar, aclaramos que estos resultados son parciales ya que pretendemos triangular esta información con los datos proporcionados por las entrevistas que hemos realizado, lo cual nos permitirá ahondar en los razonamientos utilizados al seleccionar las opciones del cuestionario.

Referencias

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning and thinking: goals, definitions and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*, pp. 3-15.

Bertorello, N.; Albrecht, G. y Tauber, L. (2010). Revisión de estudios que analizan las actitudes y ansiedad respecto de la Estadística y de la Ciencia. En: *Actas de la III Reunión Pampeana de Educación Matemática.* La Pampa. Argentina.

Boncompagni, L. y Tauber, L. (2009). Lectura e interpretación de resúmenes estadísticos en futuros profesores de matemática. En: *Actas del XXXIII Coloquio Argentino de Estadística*. Catamarca. Argentina.

Cobo, B. (2003). Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Cravero, M.; Redondo, Y.; Santellán, S. y Tauber, L. (2010). Relaciones entre alfabetización científica y alfabetización estadística. En: *Actas de la III Reunión Pampeana de Educación Matemática.* La Pampa. Argentina

Cravero, M.; Redondo, Y. y Tauber, L. (2012). *Alfabetización estadística en la escuela obligatoria argentina.* Santa Fe: Ediciones UNL.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.

Espinel, M.C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. En: *Investigación en Educación Matemática XI*, pp. 99-119.

Estrada, A.; Batanero, C.; y Fortuny, J. (2003). Actitudes y estadística en profesores en formación y en ejercicio. En Actas del 27 *Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*. Lleida, 8-11 de abril. España.

Gal, I. (2004). Statistical literacy: meanings, components, responsibilities. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*, pp. 47 – 78.

Garfield, J.; Delmas, B. y Chance, B. (2003). The web based ARTIST: Assesment resource for improving statistical thinking. En: A*ssesment on Statistical Reasoning to Enhance Educational Quality of AERA Annual Meating*, Chicago.

Godino, J.; Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, Vol. 39 (1-2): 127-135.

Micheli, E. y Arévalo, E. (2009). Obstáculos en la enseñanza del pensamiento estocástico. En: Actas del XXXIII *Coloquio Argentino de Estadística*. Catamarca.

Schield, M. (2000). Statistical literacy and mathematical reasoning. *University Working Group, International Conference on Mathematics Education (ICME-9*), Tokyo.

Schield, M. (2006). Statistical literacy survey analysis: reading graphs and tables of rates percentages. *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Ed B. Phillips. Cape Town: International Association for Statistical Education. Disponible en: http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=ICOTS_7_2006.

Tauber, L. (2006). Meaning of stochastic concepts for mathematics students. *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Ed A. Rossman y B. Chance. Salvador: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education.

Tauber, L. (2010). Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas. *Ciencias Económicas. Revista de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNL*. Año 8, 01, 53 - 67.

Tauber, L.; Albrecht, G. y Bertorello, N. (2011). Estudio sobre actitudes y elementos de significado utilizados por profesores de Matemática en la resolución de tareas estadísticas. En: *Actas de XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, Recife (Brasil). Disponible en: http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/2526.pdf

Tauber, L.; Bertorello, N. y Albrecht, G. (2012). Análisis previo de dos ítems de un cuestionario que pretende detectar actitudes hacia la estadística. En: *Actas del I Congreso Nacional de Investigación en Grado INVESGRADO 2012*, Albacete, Universidad de Castilla-La Mancha.

Anexo: Tablas con resultados de la aplicación del cuestionario

Tabla 1. Frecuencias de respuestas al ítem 14

Respuesta	Estudiante	Profesor
a.	18,2 (2)	6,7 (1)
b.	0,0 (0)	0,0 (0)
c.	9,1 (1)	6,7 (1)
d.	**63,6 (7)**	**86,6 (13)**
No contesta	9,1 (1)	0,0 (0)
Total	100,0 (11)	100,0 (15)

Tabla 2. Frecuencias de respuestas al ítem 15

Respuesta	Estudiante	Profesor
a.	0,0 (0)	0,0 (0)
b.	0,0 (0)	0,0 (0)
c.	0,0 (0)	6,7 (1)
d.	**27,3 (3)**	**40,0 (6)**
e.	63,6 (7)	46,7 (7)
f.	9,1 (1)	0,0 (0)
No contesta	0,0 (0)	6,7 (1)
Total	100,0 (11)	100,0 (15)

Tabla 3. Frecuencias de respuestas al ítem 17 a.

Respuesta	Estudiante	Profesor
SI	9,1 (1)	0,0 (0)
NO	**36,3 (4)**	**53,3 (8)**
No se puede determinar	45,5 (5)	40,0 (6)
Otro	0,0 (0)	0,0 (0)
No contesta	9,1 (1)	6,7 (1)
Total	100,0 (11)	100,0 (15)

Tabla 4. Frecuencias de respuestas al ítem 17 b.

Respuesta	Estudiante	Profesor
SI	27,3 (3)	0,0 (0)
NO	**18,1 (2)**	**73,3 (11)**
No se puede determinar	45,5 (5)	20,0 (3)
Otro	0,0 (0)	0,0 (0)
No contesta	9,1 (1)	6,7 (1)
Total	100,0 (11)	100,0 (15)

Tabla 5. Frecuencias de respuestas al ítem 17 c.

Respuesta	Estudiante	Profesor
SI	**100 (11)**	**93,3 (14)**
NO	0,0 (0)	0,0 (0)
No se puede determinar	0,0 (0)	0,0 (0)
Otro	0,0 (0)	0,0 (0)
No contesta	0,0 (0)	6,7 (1)
Total	100,0 (11)	100,0 (15)

Tabla 6. Frecuencias de respuestas al ítem 18 a.

Respuesta	Estudiante	Profesor
SI	9,1 (1)	0,0 (0)
NO	**54,5 (6)**	**73,3 (11)**
No se puede determinar	27,3 (3)	13,3 (2)
Otro	0,0 (0)	0,0 (0)
No contesta	9,1 (1)	13,3 (2)
Total	100,0 (11)	100,0 (15)

Tabla 7. Frecuencias de respuestas al ítem 18 b.

Respuesta	Estudiante	Profesor
SI	0,0 (0)	13,3 (2)
NO	27,3 (3)	53,4 (8)

No se puede determinar	**72,7 (8)**	**20,0 (3)**
Otro	0,0 (0)	0,0 (0)
No contesta	0,0 (0)	13,3 (2)
Total	100,0 (11)	100,0 (15)

Tabla 8. Frecuencias de respuestas al ítem 18 c.

Respuesta	Estudiante	Profesor
SI	54,5 (6)	33,3 (5)
NO	27,3 (3)	26,7 (4)
No se puede determinar	**18,2 (2)**	**33,3 (5)**
Otro	0,0 (0)	0,0 (0)
No contesta	0,0 (0)	6,7 (1)
Total	100,0 (11)	100,0 (15)

Tabla 9. Frecuencias de respuestas al ítem 19 a.

Respuesta	Estudiante	Profesor
SI	0,0 (0)	6,7 (1)
NO	**90,9 (10)**	**93,3 (14)**
No se puede determinar	9,1 (1)	0,0 (0)
Total	100,0 (11)	100,0 (15)

Tabla 10. Frecuencias de respuestas al ítem 19 b.

Respuesta	Estudiante	Profesor
SI	9,1 (1)	0,0 (0)
NO	54,5 (6)	73,3 (11)
No se puede determinar	**36,4 (4)**	**26,7 (4)**
Total	100,0 (11)	100,0 (15)

Tabla 11. Frecuencias de respuestas al ítem 19 c.

Respuesta	Estudiante	Profesor
SI	**81,8 (9)**	**86,7 (13)**
NO	0,0 (0)	0,0 (0)
No se puede determinar	18,2 (2)	13,3 (2)
Total	100,0 (11)	100,0 (15)

Tabla 12. Frecuencias de respuestas al ítem 19 d.

Respuesta	Estudiante	Profesor

SI	**36,4 (4)**	**66,7 (10)**
NO	27,2 (3)	20,0 (3)
No se puede determinar	36,4 (4)	13,3 (2)
Total	100,0 (11)	100,0 (15)

Evaluación de respuestas a una tarea de recuento

Miguel R. Wilhelmi[1], *Olga Belletich*[1], *Aitzol Lasa*[1] *y Luis Reina*[2]

[1]Universidad Pública de Navarra
[2]I.E.S. Del Atuel, Mendoza, Argentina

Resumen

La transposición didáctica explica los procesos adaptativos del saber en la escuela. Los desarrollos didácticos han puesto el énfasis en el modo en que estos procesos condicionan las intervenciones razonadas del docente en el sistema didáctico, pero no han abordado de manera sistemática el análisis de los momentos de evaluación y de los criterios de corrección de pruebas regladas. Se discute aquí si la evaluación de la actividad matemática debe quedar determinada por un criterio absoluto de ejecución máxima o si, por el contrario, debe referirse a una norma que emana del currículo. A partir de unas respuestas tipo de una tarea de recuento, profesores en formación analizan la pertinencia de distintos esquemas de corrección. El análisis arroja una gran subjetividad en la corrección, la aceptación irreflexiva de un criterio absoluto de calificación y la inobservancia de la relación entre tarea, currículo y evaluación.

Palabras clave: Significados personales e institucionales, evaluación referida a las normas, evaluación referida al criterio, ejecución máxima, competencia pretendida, combinatoria.

1. Evaluación inicial, formativa y sumativa

Todo proceso de evaluación puede ser descrito genéricamente como el análisis de la adaptación entre los significados personales e institucionales (Godino y Batanero, 1994). En la Figura 1 se muestra un clasificación de los tipos de significados personales e institucionales.

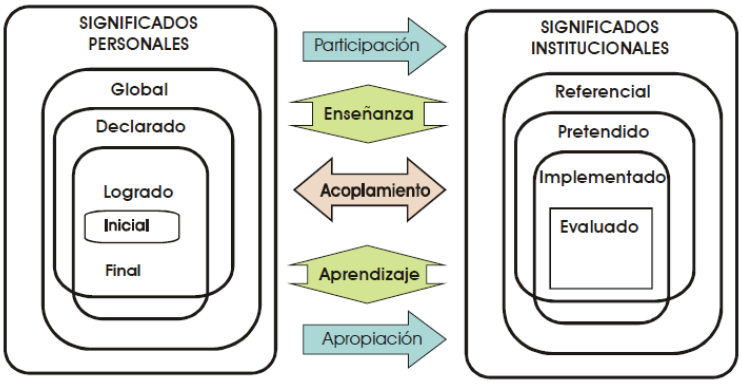


Figura 1. Significados personales e institucionales (Godino y Font, 1997)

Estos procesos adaptativos entre los significados personales e institucionales han dado origen clásicamente a la distinción de tres tipos de evaluación:

- *Inicial o de diagnóstico*, cuyo objetivo es la determinación de un marco general del acto educativo (conocimientos previos de los estudiantes, aptitud, actitud y condicionantes externos de los mismos, así como análisis de los instrumentos disponibles y de los conocimientos disciplinares y didácticos del docente para hacer evolucionar esos conocimientos previos).

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 285-292). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

- *De proceso o formativa*, cuyo objetivo es la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje. Se analiza entonces no sólo la adquisición de conocimientos, sino también se evalúa los progresos, las dificultades, los errores recurrentes y sus orígenes, la pertinencia de las decisiones pedagógicas y didácticas, la eficacia de las intervenciones y de los recursos temporales y materiales, etc.
- *Final o sumativa*, cuyo objetivo es determinar el nivel de adquisición de los objetivos de aprendizaje por parte de los estudiantes.

La evaluación inicial y final representan ambas el análisis de la adecuación entre los significados personal declarado e institucional evaluado. La evaluación inicial y final se diferencian, además del momento en que se realizan y el tipo de significado personal que sirve de referencia (previo al proceso de estudio o el resultado de éste), en el uso que se hace del análisis sobre la adecuación de significados personales e institucional. Por un lado, la evaluación inicial permite al sistema educativo, casi siempre personalizado en el docente, valorar a priori la pertinencia del proceso de estudio planificado o pretendido; por otro lado, la evaluación final es utilizada para establecer un juicio de valor sobre los significados personales logrados y para valorar la eficacia del proceso de estudio implementado.

La evaluación formativa supone el análisis sistemático de los procesos de acoplamiento entre los significados personales declarados y los institucionales implementados.

En la escuela, las restricciones institucionales[1] hacen que este entramado de significados personales e institucionales sea muchas veces simplificado de manera abusiva, identificando "evaluación" con "evaluación sumativa". La determinación de una calificación cualitativa y cuantitativa al final del proceso de estudio determina, para cada estudiante, la posición relativa en el grupo y le atribuye un cierto nivel de saber y competencia, según una escala de calificaciones previamente establecida. Esta atribución de una calificación sirve, por un lado, para sancionar o premiar según el nivel mostrado; por otro lado, valorar si el nivel de aprendizaje es suficiente para abordar con garantías los contenidos que siguen o juzgar la aptitud para la promoción a un curso superior o a otro nivel educativo.

Sin embargo, la evaluación sumativa no permite:

- Discriminar dos estudiantes con capacidades distintas. Así, por ejemplo, en un examen con *n* preguntas con la misma puntuación asignada, dos estudiantes pueden obtener la misma calificación a partir de preguntas distintas que son indicadoras de habilidades o conocimientos distintos.
- Actuar sobre los contenidos desarrollados, porque la evaluación sumativa es finalista; se valora el producto de un proceso de estudio terminado.

Aún más, es común que esta evaluación sumativa de la actividad matemática quede determinada por un criterio absoluto de ejecución máxima y no se refiera a una norma que emana del currículo. Así, se tiene la ilusión de que las producciones de los estudiantes pueden ser valoradas objetivamente, en términos absolutos, y que la medida que de ellas se realiza es un indicador no sólo de la competencia matemática del sujeto, sino también, y esta presunción es grave, de su inteligencia.

El objetivo de este trabajo es resaltar la relación entre: actividad matemática propuesta, comportamientos observados, currículo y evaluación. A partir de unas respuestas

[1] Las restricciones institucionales vienen condicionadas no sólo por las preclaras limitaciones temporales y de recursos, sino también por los conocimientos disciplinares y didácticos de los docentes o la concepción, socialmente mayoritaria, sobre el reparto de responsabilidades entre docentes y estudiantes en el acto educativo y, muy especialmente, por el estatus del saber en la escuela.

tipo de una tarea de recuento, profesores en formación analizan la pertinencia de distintos esquemas de corrección (sección 3). Antes, en la sección 2, se analiza la orientación curricular del contenido y su concreción en los libros de texto. Se finaliza con una discusión de los resultados y alguna recomendación para la formación inicial de profesores.

2. Combinatoria en el currículo y en los libros de texto

La tabla 1 muestra los contenidos y criterios de evaluación en ESO y Bachillerato sobre combinatoria. Hay que resaltar que el término "combinatoria" no se utiliza en todo el texto oficial, estableciéndose por tanto una relación implícita con los contenidos propios del campo, que, en todo caso, quedan supeditados al cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace.

Tabla 1. Contenidos y criterios de evaluación en ESO y Bachillerato sobre combinatoria (MEC, 2007a, 2007b)

Curso	Contenidos	Criterios de evaluación
3ºESO	*Bloque 1. Contenidos comunes*. Planificación y utilización de estrategias en la resolución de problemas tales como el recuento exhaustivo. *Bloque 6. Estadística y probabilidad*. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.	7. Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica o como resultado del recuento de posibilidades, en casos sencillos. 8. Planificar y utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas tales como el recuento exhaustivo.
4ºESO	*Bloque 6. Estadística y probabilidad*. Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades.	8. Aplicar los conceptos y técnicas de cálculo de probabilidades para resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana.
2º Bach. CCSS	*3. Probabilidad y estadística*. Asignación de probabilidades a sucesos. Distribuciones de probabilidad binomial y normal	5. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios simples y compuestos, dependientes o independientes, utilizando técnicas personales de recuento, diagramas de árbol o tablas de contingencia.

Por otro lado, en los libros de texto se hace una introducción lineal de la combinatoria que en general puede describirse de la siguiente forma: se inicia el estudio mediante el principio de multiplicación y los diagramas de árbol; acto seguido se propone el recuento de colecciones ordenadas ("variaciones" y "permutaciones", con y sin repetición) y no ordenadas ("combinaciones" ordinarias o sin repetición); se finaliza con la introducción de los números combinatorios y el binomio de Newton, para la realización de ejercicios de manipulación simbólica.

El trabajo central de este proceso es la resolución de problemas prototípicos de recuento, según la heurística siguiente:

1. Lee el problema.
2. Responde a las preguntas siguientes con un "sí" o un "no": ¿Influye el orden en la determinación de los casos? ¿Entran todos los elementos? ¿Se pueden repetir los elementos?
3. Según las respuestas, determina si se trata de una permutación o una variación (con o sin repetición) o bien de una combinación.

4. Determina los parámetros de la fórmula y calcula el resultado.

Esta heurística permite de manera muy restrictiva al estudiante “planificar y utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas tales como el recuento exhaustivo” y difícilmente utilizar “técnicas personales de recuento”, criterios de evaluación descritos en el Real Decreto (MEC, 2007a, 2007b).

3. Evaluación de una tarea combinatoria

Se propone una tarea de recuento sistemático que no puede ser resuelta mediante la heurística descrita en la sección anterior y que exige la puesta en marcha de técnicas de recuento exhaustivo complejas.

La corrección de resoluciones ficticias por parte de profesores en formación, en el marco del Máster en Formación de Profesorado de Secundaria, tiene por objetivo discutir la pertinencia de diversos criterios de corrección y su influencia en la calificación que se otorgaría a los estudiantes. Asimismo, se desea discutir con los profesores la conveniencia de tener un criterio de corrección absoluto de ejecución máxima o si es más propio referir la corrección a una norma que emana del currículo.

a. Descripción del experimento: problema y dinámica

La dinámica es como sigue:

1. Se propone a los profesores en formación el siguiente enunciado: “Dada una cuadrícula, ¿de cuántas formas se pueden colocar 5 cuadrados en ella si todo cuadrado coincide con al menos otro cuadrado en un lado? Por ejemplo:

 ”

En la Figura 2 se muestra todas las posibles formas: 63, si dos figuras (pentominós) son equivalentes únicamente si se solapan mediante una traslación; 12, si se acepta la equivalencia de figuras mediante traslación, giro o simetría.

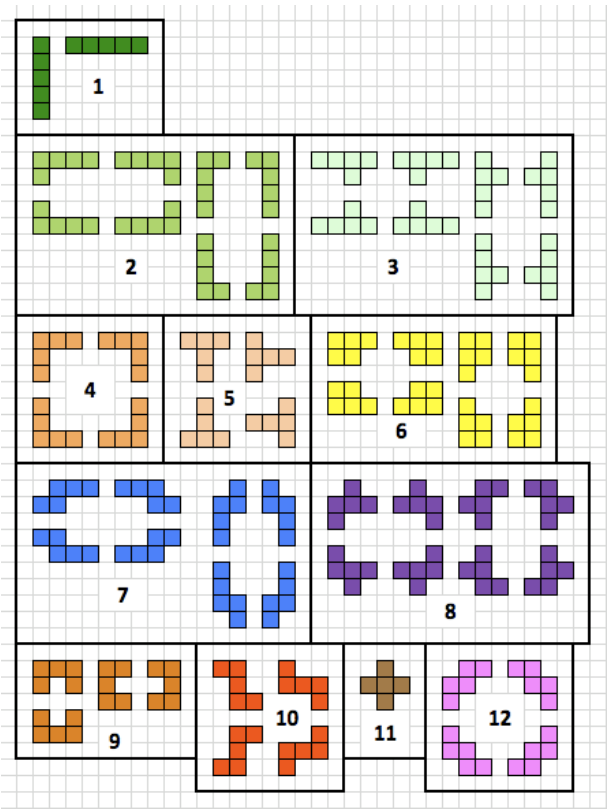


Figura 2. Recuento y clasificación de los pentominós

2. Los profesores reciben una respuesta de un estudiante (Figura 3), que deben calificar. Para ello, primero deben determinar un esquema de corrección, que implícitamente supone la realización de la tarea.

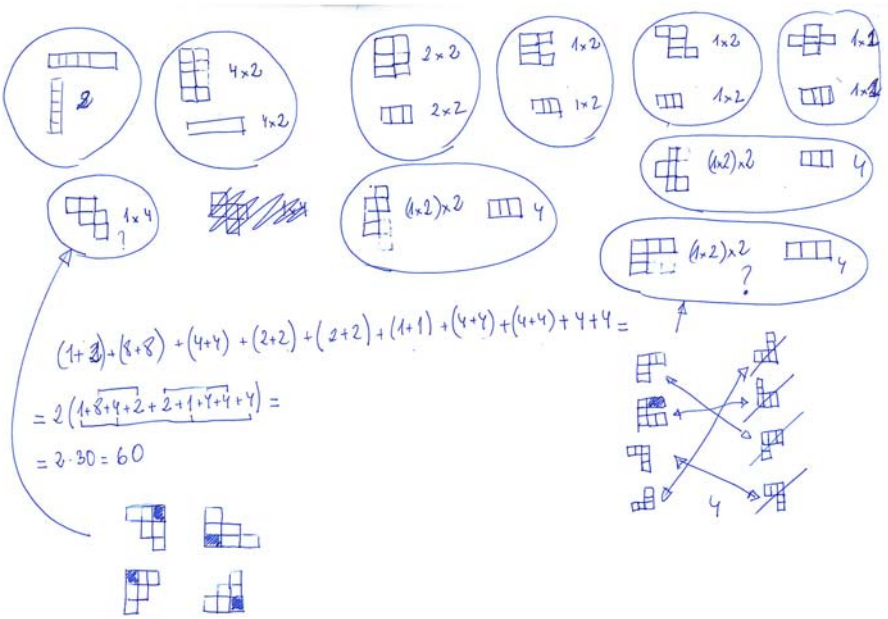


Figura 3. Respuesta tipo 1

3. Los profesores corrigen la producción 1 (figura 3), tanto con el esquema de corrección que ellos han elaborado, como con los esquemas de corrección de los otros profesores.

4. En una puesta en común se analizan las calificaciones dadas por los profesores, según los diversos esquemas de corrección, propios y ajenos.
5. Los profesores reciben una hoja con 4 respuestas adicionales (figura 4), que deben corregir con el esquema que han elaborado ellos. Según los resultados, deben decidir si elaboran o no otro esquema de corrección mejor adaptado al conjunto de las respuestas.

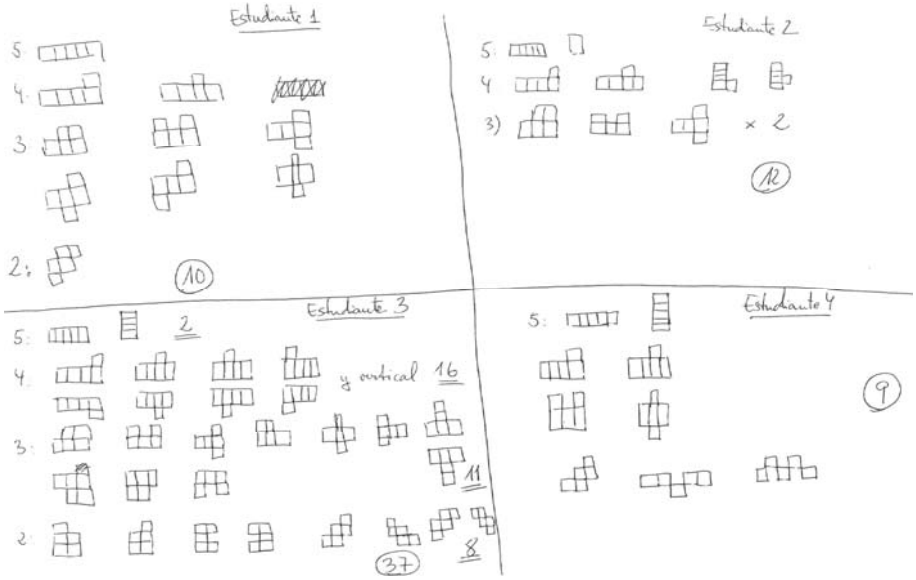


Figura 4. Respuestas ficticias de 4 estudiantes

b. Esquemas de corrección: resultados

Los esquemas de corrección de los profesores, que han sido organizados por parejas, vienen descritos sucintamente en la tabla 2. La corrección de la respuesta tipo 1 es globalmente bastante homogénea: calificación alta en todos los casos, con una diferencia máxima de 1,5puntos (p) y desviación no superior a 0,6p, mediante la utilización de un esquema propio o ajeno.

Para la corrección de las realizaciones de los estudiantes 1-4 (figura 4), todas las parejas consideran necesario modificar su esquema de corrección, para adaptarlo a las nuevas respuestas dadas. De hecho, dado que en la consigna de la tarea no se explicita si en el recuento deben considerarse o no las isometrías, se establece un debate sobre cómo evaluar producciones que pueden responder a planteamientos distintos: por un lado, el que establece la equivalencia de dos pentominós únicamente por traslaciones; por otro lado, el que determina que dos figuras son equivalentes si pueden ser solapadas mediante traslación, giro o simetría. Se acepta finalmente que ambas orientaciones deben ser aceptadas como validas y, por lo tanto, dos respuestas esencialmente distintas podrían obtener la misma calificación, incluso la máxima.

Tabla 2. Esquema 1 y 2 de corrección

Aspecto	A1	A2	B1	B2	C1	C2
Comprensión de la tarea	0	1	0	0	3	2
Estrategia: planteamiento	5	3	0	0	0	0
Resolución sistemática (penalización por omisión de casos)	0	2	0	0	4	3

Determinación de las figuras equivalentes por giros	4 [2]	1,5	0	0	0	2
Determinación de las figuras equivalentes por simetrías		1,5	0	0	0	2
Resolución global	1	0	9	9 [3]	3	1
Organización, coherencia, claridad y limpieza	0	1	1	1	0	0
Calificación de la respuesta tipo (figura 3) (esquema propio)	9,25		8,9		8	
Calificación de la respuesta tipo (figura 3) (esquema ajeno)	9 / 9		9,1 / 9,5		8 / 8	

Leyenda:
A1 y A2 (B1 y B2; C1 y C2): Esquema 1 y 2 de corrección de la pareja A (B; C).

Como se puede observar en la tabla 3, la dispersión de las calificaciones otorgadas según los esquema de corrección 2 es mayor, observándose grandes diferencias entre las notas otorgadas según los esquemas 1 y 2 de cada pareja y entre las diferentes parejas.

Tabla 3. Calificaciones otorgadas por las parejas a las respuestas según los esquemas de corrección 1 y 2

Respuesta	A1	A2	B1	B2	C1	C2
Tipo	9,25	9,4	8,9	9,05	8	8
Estudiante 1	5,5	9,5	4,7	8,3	4	3
Estudiante 2	4,5	6	2,3	5,1	4	3
Estudiante 3	8,75	7,8	7	6,9	6	6
Estudiante 4	4	3	2,5	5,4	3	1

4. Discusión de los resultados y recomendaciones para la formación inicial de profesores

Ninguna de las parejas ha otorgando una calificación de 10 a ninguna de las respuestas ni tampoco una calificación de 0. Estas notas extremas aparecen en el ideario del profesor en formación como indicadores de: ya una respuesta perfecta (10), ya una ausencia total de respuesta (0).

No hay pues referencia explícita al currículo, que actuaría de norma, sino a un criterio absoluto de ejecución máxima. Así cabe cuestionarse: Si el currículo hace una referencia tangencial a la combinatoria y la concreción en los libros de texto se reduce a una actividad estereotipada, que dista mucho de la actividad compleja propuesta, ¿por qué no otorgar una calificación máxima a una respuesta que está por encima de las expectativas de referencia?

Un ejemplo extramatemático puede ayudar a comprender mejor esta cuestión. La competencia lingüística se fija actualmente según el Marco europeo de referencia para las lenguas (http://cvc.cervantes.es/ensenanza/biblioteca_ele/marco). Si al finalizar la ESO un estudiante debe alcanzar el nivel B1 y, sin embargo, demuestra un nivel B2 o superior, ¿qué calificación obtiene? Es normal que la respuesta a esta pregunta sea 10, la máxima posible, aunque el estudiante no haya alcanzado la “perfección”.

La situación anterior es paradigmática, por cuanto se dispone de un marco externo a la escuela que puede ser utilizado como regulador. En el resto de materias, en particular en matemáticas, es el significado institucional de referencia el que debería ejercer como elemento regulador, objetivando no sólo la actividad que se realiza, sino los criterios que se establecen para su evaluación. Por otro lado, los resultados y su dispersión debe ser analizado no sólo en términos cuantitativos (calificaciones otorgadas por las parejas según

[2] No se explicita diferencia según si la tarea refleja la atención a los diferentes pentonimios según giro o simetría.
[3] A diferencia del esquema anterior, donde se penalizaban las errores (recuentos por omisión o por exceso), aquí el esquema es distinto: se otorga puntuación adicional según tareas logradas por los distintos estudiantes.

los esquemas de corrección) sino también cualitativos (valor institucional asociado: suspenso, aprobado, bien, notable o sobresaliente). De hecho, variaciones cuantitativas no muy grandes, pueden suponer una modificación sustancial de la calificación cualitativa, sobre todo si esta varía entre suspenso y aprobado.

Otro aspecto a tener en cuenta es el comportamiento de los esquemas de corrección. El segundo esquema propuesto por las parejas tiene una incidencia alcista sobre la calificación otorgada a las respuestas 1-4, no así para la respuesta tipo, que se mantiene estable y, por lo tanto, en relación con las otras, es, en cierta forma, penalizada. Este hecho refuerza la tesis según la cual el criterio de evaluación absoluto de ejecución máxima debe ser revisado.

La evaluación no es sino una valoración de una adecuación entre significados personales e institucionales. Es crucial pues, en la formación inicial de profesores, analizar los procesos de evaluación y, en particular, denunciar la supuesta objetividad de los mismos. Es preciso, muy en concreto, discutir la pertinencia de una evaluación final en la práctica "sustractiva" (reducción en la puntuación según errores u omisiones) y de "ejecución máxima" (una respuesta perfecta es tomada como referencia única), que no atiende ni al currículo ni a las capacidades de un estudiante en una determinada etapa escolar.

Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2010-14947 (MCINN-FEDER) y EDU2012-31869 (MEC, Madrid). Agradecemos la participación de los profesores en formación (por orden alfabético): Jon Arraiza Inza, Tamara Arrontes Sola, Laura de Miguel Turullols, María Pérez Prados, María Mercedes Puyal Vijuesca, Ruth Unzu Ripoll y Diego Urrutia Ollo.

Referencias

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.

Godino, J. D. y Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm. Consultado el 23 marzo 2013-

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007a). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado (BOE)* 5, de viernes 5 de enero, 677–773.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007b). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *Boletín Oficial del Estado (BOE)* 266, de martes 6 de noviembre, 45381– 45477.

Evolución del nivel competencial estadístico de los alumnos de Secundaria Obligatoria

María Vega Quirós[1], Pilar Azcárate Goded[2] y José María Cardeñoso Domingo[2]

[1]EE.PP. de la Sagrada Familia de Écija (Sevilla)
[2]Universidad de Cádiz

Resumen

En esta comunicación se pretenden ilustrar algunos resultados de la investigación realizada sobre un caso de alumnos de Secundaria Obligatoria en España, y su evolución competencial en Educación Estadística, tras trabajar el tópico mediante una metodología por proyectos. Para ello, se tomarán los datos relativos a uno de los grupos de trabajo, formado por cuatro estudiantes, y se analizará el portafolio de trabajo que produjeron como emergente cuando realizaron su investigación estadística en la que se basaba el proyecto de investigación que ellos mismos se habían propuesto. A través del tratamiento de esos datos y los instrumentos diseñados para el análisis de las competencias, nos aproximaremos a conocer la evolución competencial de estos alumnos. Los resultados proporcionados en la investigación, caracterizan la evolución competencial producida tanto de los alumnos individualmente como en grupo, lo cual nos permite comprender de alguna manera el proceso cognitivo seguido por los alumnos que les ha acompañado en dicha evolución.

Palabras clave: Competencia Estadística, Secundaria Obligatoria. Enseñanza a través de proyectos.

1. Introducción

Motivada en la importancia creciente que la Educación Estadística está adquiriendo en el curriculum español, junto a la necesidad de evaluar en términos de competencias, se realiza una investigación basada en conocer si una metodología de aula, distinta a la tradicional a la que los alumnos están acostumbrados, favorece en los alumnos una evolución competencial, tanto en materia estadística como social, positiva.

En el informe realizado para este estudio, que constituyó la tesis doctoral de uno de los autores (Vega, 2012), se presenta un estudio pormenorizado de la evolución competencial sufrida por un grupo clase de estudiantes de 3º de Educación Secundaria Obligatoria, de 14 o 15 años de edad. Esta evolución fue posible diagnosticarla basándonos, mayoritariamente, en dos actividades realizadas individualmente por los alumnos: la actividad inicial, realizada con los alumnos anteriormente al proceso instructivo; y otra, la actividad final, que realizaron al final de dicho proceso.

A través de estos instrumentos de recogida de información y a los diseñados para el análisis de la información, se llegaron a unas conclusiones que incidían en la validez de la utilización de la nueva metodología como favorecedora del desarrollo competencial por parte de los alumnos. En esta comunicación pretendemos dar sentido a la evolución sufrida por un grupo de esos alumnos, procurando conocer el proceso cognitivo y actitudinal por el que pasaron los alumnos del primer grupo de trabajo a lo largo del proceso instructivo.

Proceso de enseñanza/aprendizaje seguido.

El concepto de competencia alude a la capacidad de poner en práctica de manera integrada habilidades, conocimientos y actitudes para enfrentarse y poder resolver problemas y situaciones (Escamilla, 2008). Desde este punto de vista se hace necesario un cambio metodológico y, en consecuencia, en la evaluación de los alumnos. Evaluar por competencias pondrá el acento en el saber hacer más que en el mero contenido, dentro de un

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 293-300). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

contexto dinámico, de desarrollo progresivo (Vega, Cardeñoso y Azcárete, 2010). Siguiendo esta premisa, el proceso educativo que se desarrolló para la realización de esta investigación comenzó con dos tomas de datos para poder caracterizar el nivel competencial de partida de los alumnos, llamados cuestionario y actividad inicial.

Seguidamente se pasó al proceso instructivo, propiamente dicho, compuesto por la realización en pequeño grupo de trabajo de un proyecto de investigación estadístico. Para su seguimiento, los alumnos elaboraron dos portafolios, uno dirigido y otro relativo al proyecto de investigación autónomo que ellos mismos habían elegido.

El primer portafolio quedó compuesto por la resolución de cuatro actividades, en las que se trabaja un determinado tópico estadístico en cada una de ellas. Su realización se hizo a través del trabajo cooperativo buscando respuestas a los interrogantes planteados. Para ello, se les introdujo unos breves conocimientos teóricos para facilitar que puedieran construir el nuevo conocimiento con propiedad. Tras cada actividad, realizada en pequeño grupo, los alumnos, individualmente, cumplimentarán un cuestionario referente a sus percepciones sobre cómo ha resultado cada una de las actividades.

El segundo portafolio realizado por los alumnos, está compuesto por tres documentos. El primero de ellos, el proyecto técnico, consiste en un diario en el que los alumnos anotan los acuerdos y avances que han ido alcanzando a lo largo de las sesiones de investigación autónoma. Mientas que el segundo, el informe, consiste en la comunicación por escrito del resultado de su investigación; el tercero, el Power Point, consistió en el soporte que utilizaron para la comunicación oral del resultado de su proyecto.

Con el fin de respetar los tiempos y procesos de aprendizaje de cada grupo, entre ambos portafolios, los grupos de trabajo que iban terminando las actividades del primer portafolio, trabajan en la negoción y elaboración de la rúbrica con la que se evaluarían estos portafolios, así como en la confección de un cartel informativo en el que se recogía toda la información de tipo estadístico que se extraía de las actividades iniciales.

Tal y como se observa en la siguiente figura, el proceso de enseñanza/aprendizaje terminó con una nueva recogida de datos individuales en la actividad y cuestionario final.

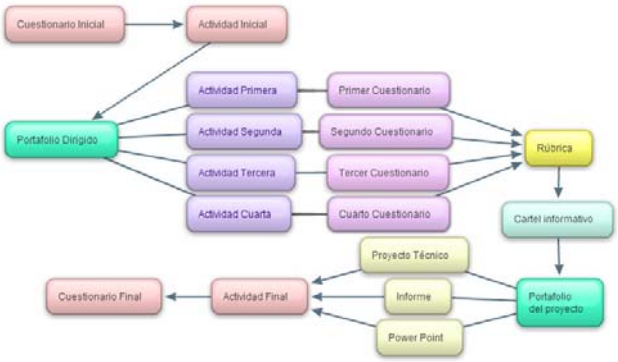


Figura 1. Mapa del proceso de enseñanza y aprendizaje puesto en práctica

Aunque tradicionalmente los portafolios se plantearon como la muestra de evidencias y resultados de logros profesionales, para este trabajo se entiende el portafolio como el informe dossier donde los grupos de trabajo van depositando sus trabajos, sus reflexiones, sus experiencias a la vez que el docente lo va evaluando y acompañando de forma interactiva en el proceso de autoaprendizaje (Cebrián, 2010). Del mismo modo, se coincide con Cebrián et al (2008) que el planteamiento de la evaluación con el uso de rúbricas es igualmente un modelo innovador que permite el profesor la evolución en sus competencias profesionales, a la vez que exige al estudiante una autoevaluación permanente al identificar los estándares o criterios a conseguir en sus actividades, y la realización de juicios que son

aplicados con estos criterios y estándares (Boud, 2000).

Por estos motivos, se utilizarán los dos portafolios y la rúbrica, realizada por el primer grupo de trabajo, para analizar el proceso que llevó a la evolución competencial que presentaron dichos alumnos al analizar los datos provenientes de los cuestionarios y actividades iníciales y finales. Dicha evolución se presentará en el siguiente apartado.

2. Evolución competencial del primer grupo de trabajo

En la Tabla 1 se observa la mejora relativa de cada componente del primer grupo de trabajo, así como del grupo visto como conjunto, respecto a las diferentes competencias estadísticas que se han tenido en cuenta en este estudio. La evolución está expresada en tantos por ciento de mejora en relación con la competencia presentada en el primer cuestionario o actividad, denominados iniciales.

Tabla 1. Mejora relativa por grupos de competencias

	Comunicación estadística	Conceptos estadísticos	Información estadística	Gráficos estadísticos	Trabajo en equipo
G1.1	0	100	245.45	--	11.89
G1.2	--	50	40.9	--	8.69
G1.3	--	-50	--	--	24.39
G1.4	50	133.33	10.71	12	38.5
G1	-30.15	40	59.09	261.53	21.05

En la tabla se han dejado libres aquellas celdas correspondientes a las competencias en las que los alumnos no presentaron ningún indicador, ya sea en la actividad inicial o final. Teniendo en cuenta esta consideración, se puede observar que los alumnos, como grupo, han sufrido una involución en el nivel de competencia del 30.15% respecto a la competencia en comunicación estadística que presentaban. En cambio, en los demás grupos competenciales, la evolución ha sido positiva, destacando entre todos ellos la correspondiente a los gráficos estadísticos con más de un 260% de evolución. Este dato, que pudiera confundir, se debe al hecho de que tres de los cuatro componentes del grupo no presentaron ningún tipo de competencia en la actividad inicial, por lo que el aumento relativo de la competencia del grupo, visto como conjunto, se magnifica.

Por otra parte, en el estudio se caracterizaron las competencias estadísticas a través de unos descriptores e indicadores que reflejaban los diferentes nivel competenciales: Reproducción, Conexión y Reflexión (Vega, 2012). En la segunda tabla, se observa la evolución de los alumnos, y del grupo como conjunto, respecto a estos descriptores de nivel a la luz de sus respuestas a la actividad inicial y a la final. Cabe señalar que, de nuevo, se han dejado huecos en las celdas correspondiendo con los alumnos que no ha presentado competencia en la actividad inicial y/o en la final, respecto a los descriptores de competencia. Con esta consideración, se observa claramente que los alumnos, como grupo, han evolucionado positivamente respecto a la competencia que presentaban en el nivel de conexión o segundo nivel, de hecho, han aumentado en más de 360% la aparición de estos descriptores. Referente al nivel de reproducción o primer nivel de competencia, no se puede determinar una evolución reseñable, ya que sólo se aprecia un leve aumento de la aparición de los descriptores de este nivel. Tal y como se podía prever, conociendo las características del alumnado y siendo la primera toma de contacto del curso con la educación estadística, no se observaron descriptores que evidenciaran el nivel de conexión o tercer nivel, ni los alumnos individualmente, ni como grupo.

Tabla 2. Mejora relativa por descriptores de competencias

	Descriptores de Primer Nivel	Descriptores de Segundo Nivel	Descriptores de Tercer Nivel
G1.1	45.23	--	--

G1.2	25.64	--	--
G1.3	-55.88	--	--
G1.4	-3.03	195	--
G1	4.44	366.67	-

3. Proceso para la evolución competencial seguido por los alumnos

Con la ayuda de los documentos realizados por los alumnos durante el periodo instructivo, se pueden extraer las siguientes conclusiones

Comunicación estadística

Una de las limitaciones que tiene hoy en día el sistema educativo español es la ratio por clase, lo cual hace que el feed-back con el profesor no sea tan directo como sería conveniente para favorecer el desarrollo competencial de los alumnos. En este sentido, uno de los grupos competenciales que se ven más negativamente afectados es el de la comunicación estadística. Puesto que los alumnos se comunican entre ellos, y no sienten la necesitad de ser rigurosos ni precisos al hacerlo, pues entre ellos no son conscientes de las ambigüedades que existen en sus respuestas. De hecho, en la siguiente figura se observa como los alumnos se proponen expresarse correctamente, aunque posteriormente este trabajo realizado por ellos no se vea reflejado en una evolución competencial positiva.

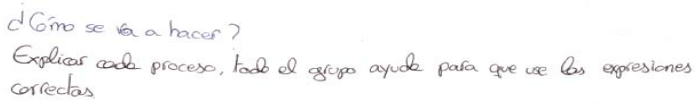


Figura 2. Propuesta de los alumnos para afrontar el proyecto de investigación por el G1

En este sentido, se hace necesaria una mayor supervisión del docente al alumno, para poder orientarles más directamente en su proceso de construcción de las herramientas que favorecerán este desarrollo competencial.

Conceptos estadísticos, información estadística y gráficos estadísticos

Tal y como se ha mostrado en el epígrafe anterior, en estos tres grupos competenciales se ha observado una evolución competencial positiva en los alumnos que componen el grupo primero, destacando en mayor medida la correspondiente a los gráficos estadísticos. Esto es debido, mayoritariamente, a la oportunidad que han tenido los estudiantes de estar en contacto con datos reales (Vega et al, 2011), recolectados por ellos mismos (Figura 3).

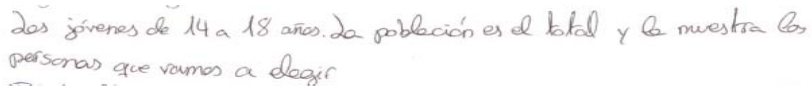


Figura 3. Población y muestra seleccionada por el G1

La utilización de datos reales es aún más relevante es en el caso de los gráficos estadísticos, ya que al estar dentro de un contexto real, hace que los datos, y el propio gráfico cobre sentido para los alumnos, consiguiendo que los estudiantes comprueben su utilidad; tal y como se observa en las figuras 4 y 5 donde los alumnos representa la utilidad que los jóvenes le dan al móvil según los datos aportado por el informe del INJUVE (2008).

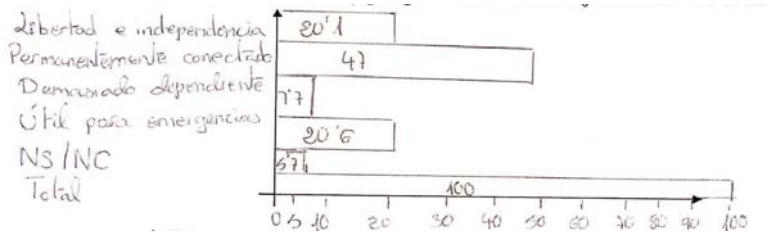


Figura 4. Diagrama de barras realizado por el G1

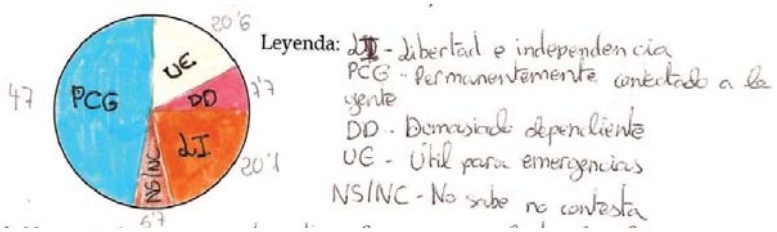


Figura 5. Diagrama de sectores por el G1

Cuando se trata de la información estadística, entendemos que es mediante el uso de ésta cuando el alumno entiende qué es lo que se desprende de ella. Para ello, en el proceso de enseñanza aprendizaje, se ha procurado que los estudiantes estén en contacto con información proveniente de diferentes medios, ya sean datos tabulares, en gráficos, literales u orales. Del mismo, modo se ha procurado que los alumnos comuniquen informaciones de tipo estadístico utilizando todos los medios anteriormente mencionados, entre los que destacamos la información oral (cuando exponen el power point en el grupo clase) o la información de tipo literal (Figura 6).

Consumo de bebidas alcohólicas entre los jóvenes:

50% de los jóvenes encuestados no consumen alcohol
50% de los jóvenes encuestados consumen alcohol. De este 50%:

-El 72% de los jóvenes consumen alcohol los fines de semana
-El 8% de los jóvenes consumen alcohol en ocasiones especiales
-El 20% de los jóvenes consumen alcohol todos los días

La moda es consumir alcohol los fines de semana

Figura 6. Información perteneciente al informe generado por el G1

Trabajo en equipo

De nuevo, se incide en la importancia que tiene la propia experiencia del alumno en su evolución personal y competencial. Por eso, es importante proporcionarles la oportunidad de trabajar colaborativamente, ya que con el interés que este tipo de trabajo despierta en los alumnos no es extraño que la evolución competencial respecto al trabajo en equipo sea positiva, tal y como se aprecia en la figura 6.

Nos vamos a esforzar en ayudarnos mutuamente.

Figura 6. Extracto del proyecto técnico realizado por el G1

4. Evolución de las actitudes matemáticas de los alumnos del primer grupo

Entendiendo las actitudes matemáticas no como creencia, sino como proceso intelectual que pretende el aprendizaje (García, 2011), las actitudes matemáticas presentan un marcado carácter cognitivo y comportamental. Desde la experiencia de aprendizaje vivida en el aula, tras observar una evolución mayoritariamente positiva respecto a las competencias estadísticas de los estudiantes, y tras revisar los portafolios realizados por los estudiantes del primer grupo, se pueden extraer las siguientes conclusiones referentes a algunas de las actitudes matemáticas que consideramos más importantes.

Flexibilidad de Pensamiento

Considerando la definición de flexibilidad de pensamiento seguida por Olea (1993) como la capacidad para buscar nuevas vías para la solución de un problema, por resolver un problema por métodos distintos o de ser capaz de cambiar el sentido de dirección de los procesos mentales; es posible argumentar que los alumnos han reforzado positivamente

dicha actitud matemática, ya que han mostrado evidencias de tener recursos para buscar estrategias alternativas y de estimar, haciendo previsiones como las que se muestran.

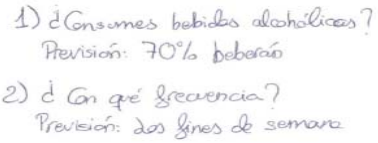


Figura 7. Extracto del proyecto técnico realizado por el G1

Coincidimos con García (2011) en que esta actitud es poco usual en los estudiantes de secundaria obligatoria cuando trabajan resolución de problemas con la metodología tradicional, ya que no sienten la necesidad de buscar nuevas estrategias de resolución, ni de atender a las estrategias utilizadas por otros compañeros. Gracias al cambio metodológico producido en el aula, se ha conseguido despertar en los estudiantes estas necesidades, además de la de reflexionar acerca de las decisiones que se toman en grupo.

Creatividad

García (2011) considera la creatividad como el hacer y comunicar nuevas ideas, partiendo de un conocimiento previo, el cual ayudará a pensar, experimentar a los alumnos de diferentes formas, tomar diferentes puntos de vista y seleccionar las alternativas más adecuadas. Con el uso del trabajo por proyectos dentro de la metodología de aula, es posible mejorar esta actitud hacia las matemáticas por parte de los alumnos. Este hecho se evidencia, por ejemplo, en el diseño de la encuesta que los alumnos tuvieron que realizar, con el fin de poder recabar los datos que le hicieran falta para el estudio:

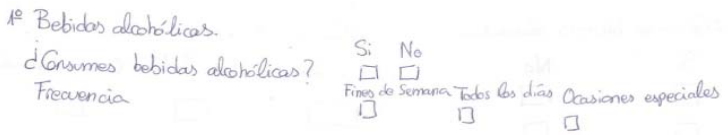


Figura 8. Parte de la encuesta confeccionada por el G1

Se ha considerado que los alumnos han aumentado su creatividad, puesto que coincidimos con la autora que los estudiantes se muestran creativos cuando al trabajar en una tarea les gusta probar distintas estrategias o caminos, aunque estos no sean los que el profesor ha propuesto y, es más, les complace seguir caminos distintos a los seguidos por la mayoría de sus compañeros.

Espíritu crítico

La actitud matemática referente al espíritu crítico define a los estudiantes que no se contentan con haber respondido a la tarea, sino que se preocupa por hacerlo correctamente, por tanto es crítico con su modo de actuar y comprueba que tanto el procedimiento como la solución son correctas y se ajustan a las demandas de la tarea. En este sentido, la rúbrica realizada por el propio grupo, nos muestra cómo son capaces de enfrentarse críticamente ante la evaluación de una tarea realizada por ellos mismos.

Criterios	Sobresaliente	Notable	Bien	Suficiente
1. Amplitud en la tarea.	Tener todas las tareas y bien corregida y organizada	Tener todas las tareas, y corregida	Tener todas las tareas	Tener la mayoría de tareas
2. Originalidad.	Tener todo muy bien organizado, con colores y esquemas	Tener todo bien organizado y con esquemas	Tener esquemas, y organizado	Tener todo copiado.

Figura 9. Parte de la rúbrica confeccionada por el G1

Autonomía

Esta actitud está íntimamente relacionada con la competencia aprender a aprender y

con el aprendizaje por descubrimiento, pues tiene autonomía el alumno que es capaz de tomar sus propias decisiones, dentro del proceso educativo, dependiendo de la meta que desee alcanzar. De nuevo, con esta metodología al permitirle al alumno asumir una actitud protagonista, se le permite construir sus conocimientos de forma autónoma, tal y como ellos mismos indican:

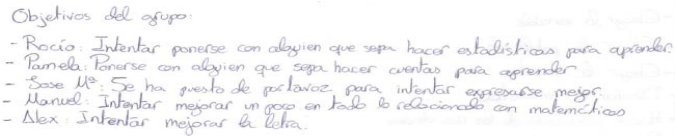

Objetivos del grupo:
- Rocío: Intentar ponerse con alguien que sepa hacer estadísticas para aprender
- Pamela: Ponerse con alguien que sepa hacer cuentas para aprender
- Sose Mª: Se ha puesto de portavoz para intentar expresarse mejor
- Manuel: Intentar mejorar un poco en todo lo relacionado con matemáticas
- Alex: Intentar mejorar la letra

Figura 10. Parte del proyecto técnico confeccionado por el G1

Sistematización

Ser sistemático o tener una actitud sistemática es importante en la resolución de problemas (García, 2011) pues, para ello, es necesario comprender el enunciado del problema y visualizar las relaciones entre los datos, el resultado esperado y los procedimientos que permitan pasar del estado inicial del problema al estado final. Con la metodología utilizada en el aula se ha ayudado al desarrollo de esta actitud, puesto que los alumnos han tenido que ponerse de acuerdo para sistematizar los pasos que debían seguir para abordar el problema de investigación al que ellos mismos se habían decido enfrentar.

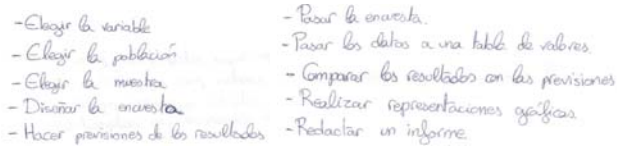

- Elegir la variable
- Elegir la población
- Elegir la muestra
- Diseñar la encuesta
- Hacer previsiones de los resultados
- Pasar la encuesta
- Pasar los datos a una tabla de valores
- Comparar los resultados con las previsiones
- Realizar representaciones gráficas
- Redactar un informe

Figura 11. Pasos a seguir por el G1para realizar el estudio estadístico

5. Conclusiones

Con esta metodología de trabajo en el aula, (hemos) se ha podido constatar que se ha favorecido una evolución positiva respecto al nivel competencial estadístico de partida que presentaban los alumnos (Vega, 2012). A este hito se le añade, al analizar el portafolio de trabajo de grupo y las hojas de respuesta individual, que esta evolución positiva repercute en las actitudes matemáticas de los alumnos, en el sentido que describe García (2011).

Por tanto, (podemos) se puede concluir que la orientación del profesor al alumnado para realizar sus propias investigaciones, favorece en ellos una evolución positiva de sus competencias, ya que la mejor forma de aprender para los alumnos es que ellos encuentren las soluciones a los problemas por sí mismos. Por tanto, debe permitirse a los alumnos que traten de encontrar soluciones a los problemas de carácter práctico por sí mismos antes de que el profesor les “enseñe” la manera de resolverlos, ya que los procesos de pensamiento y razonamiento son más importantes que el contenido específico del currículo.

Cabe señalar la falta de continuidad que este tipo de metodología de aprendizaje tiene en los alumnos en su proceso formativo, lo cual hace que lo que Orton se preguntaba en 1990 esté totalmente al día: “¿Quién sabe qué beneficios a largo plazo podrían acumularse si el descubrimiento se utilizase más, sobre todo en Secundaria, donde dominan los métodos pasivos de aprendizaje de las matemáticas?” (Orton, 1990: 113)

Referencias

Boud, D. (2000) *Understandind learning at work*. London: Rutledge.

Cebrián, M. (2010) *La evaluación formativa con e-portafolio y e-rúbrica.* Consultado el 5 de Enero de 2013 en: http://vicadc.uvigo.es/opencms/export/sites/vicadc/vicadc_gl/documentos/ciclos_conferencias/Material.ePor_eRubric.pdf

Cebrián, M., Raposo, M y Accino, J. (2008) E-portafolio en el practicum: un modelo de rúbrica. *Comunicación y Pedagogía*, 218, 8-13.

Escamilla, A. (2008) *Las competencias básicas. Claves y propuestas para su desarrollo en los centros.* Barcelona: GRAÓ.

García, M.M. (2011) *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula.* Tesis Doctoral Universidad de Almería. Disponible en: http://www.geogebra.org/en/upload/files/Tesis_MariadelMarGarciaLopez.pdf Consultado el 15 de Diciembre de 2012.

Instituto de la Juventud (2008). *Informe de la juventud en España 2008*. Madrid: Observatorio de la juventud en España.

Olea, D. J. (1993). *La evolución de la creatividad: revisión y crítica*. Torbiya, 3.

Orton, A. (1990) *Didáctica de las matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula.* Madrid: MEC y Ed. Morata.

Vega, M.M. (2012) *El aprendizaje estadístico en la Educación Secundaria Obligatoria a través de una metodología por proyectos. Estudio de caso en un aula inclusiva.* Tesis Doctoral inédita. Granada: Universidad de Granada.

Vega, M., Cardeñoso, J. M. y Azcárate, P. (2010). Research in statistical education: competence level of secondary school pupils. En C. Reading (Ed.), Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of ICOTS8, Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Vega, M., Cardeñoso, J. M.. y Azcárate, P. (2011). Statistics in life and for live. *En 2011 IASE Satellite Conference: Statistics Education and Outreach.* Dublin. Online: http://www.conkerstatistics.co.uk/iase/papers/IASE2011Paper1B.3Vegaetal.pdf.

Experiencia de implementación de múltiples estrategias de enseñanza en cursos de probabilidad y estadística para ingeniería

Giuliano, Monica; *Pérez, Silvia N.; Sacerdoti, Aldo; Gil, Myrian; Bosio, Agustín y Fernández Ussher, Juan Manuel*

DIIT Universidad Nacional de la Matanza

Resumen

La asignatura Probabilidad y Estadística puede considerarse como una de las que más dificultades presentan a los alumnos del ciclo básico de carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM). Esto motivó la implementación de múltiples estrategias de enseñanza así como la utilización de una serie de herramientas con el fin de mejorar el rendimiento académico de los alumnos. A partir de 2009 se implementaron dichos cambios y fueron evaluados a través de la perspectiva de docentes y alumnos. Los resultados muestran que ha mejorado el aprendizaje de los alumnos y han aumentado los porcentajes de aprobación. Los cambios incluyen múltiples estrategias didácticas tales como clases teórico-prácticas con soporte tecnológico y papel, autoevaluaciones, talleres de resolución de problemas, utilización de foros virtuales, análisis de datos con software Excel y utilización de simulaciones. Los resultados evidencian que los alumnos no utilizan todos los recursos disponibles mostrando preferencia por los talleres de resolución de problemas y la utilización de foros virtuales para la discusión de la guía de problemas. Las encuestas a alumnos muestran desde la implementación de las estrategias un cambio progresivo y positivo de la percepción sobre la dificultad de la asignatura y la posibilidad de aprobarla.

Palabras clave: Probabilidad y Estadística; foros virtuales; Ingeniería.

1. Introducción

En el mundo actual en el que la información es cada vez más abundante, las tecnologías de la información y comunicación se constituyen en herramientas para favorecer la formación continua al ofrecer instrumentos que permiten acceder a entornos virtuales de aprendizaje, sin el condicionamiento de tiempo y espacio que exige la enseñanza presencial. Así también posibilitan aprender en entornos virtuales participando en foros, redes temáticas, chats, etc. La web no es hoy sólo un entorno tecnológico sino también un entorno social donde las personas intercambian ideas, construyen conocimiento o establecen relaciones a diferentes niveles. Como mencionan Cabero y Llorente (2007), la web se ha convertido en un espacio para la interacción, la comunicación y el intercambio de significados entre personas. Así también otros desarrollos como blogs, wikis y foros, reúnen condiciones que los hacen útiles no sólo como medios comunicacionales, sino como recursos para construir conocimiento y aprender, lo cual requiere la predisposición de los alumnos para comunicarse a través de ellos.

La investigación que se presenta surge a partir de la necesidad de mejorar el rendimiento académico de los alumnos de la asignatura Probabilidad y Estadística (PyE) de las carreras de ingeniería del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas (DIIT) de la Universidad Nacional de la Matanza (UNLaM). La asignatura es de carácter obligatorio y se inserta en el ciclo general de materias básicas siendo común a las carreras de Ingeniería Informática, Electrónica, Industrial y Civil de la UNLaM.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 301-308). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

En la cátedra de la asignatura PyE se propuso a partir del año 2009 un cambio en las estrategias utilizadas con el objetivo de mejorar los niveles de aprendizaje y modificar la percepción de los alumnos respecto a la dificultad de la asignatura. Se realizó un mayor acompañamiento docente del proceso de aprendizaje a través de múltiples estrategias de enseñanza, entre las que se destacan la utilización de un foro virtual, la realización de talleres presenciales de resolución de problemas y la utilización de autoevaluaciones interactivas diseñadas *ad hoc*.

En este artículo se presentan los resultados de la implementación de algunos de estos recursos tecnológicos como un medio integrado a la asignatura PyE para lograr aprendizaje significativo, estimular el pensamiento crítico y la apropiación de significados.

2. Marco teórico

En la universidad es frecuente encontrarse con el modelo clásico de enseñanza descrito por Moreira (2010) como aceptado, sin cuestionamiento, por parte de profesores, alumnos y por parte de la sociedad en general. Es el modelo en que el profesor enseña, básica y fundamentalmente, diciendo a los estudiantes lo que él supone que deben saber. Ese modelo es el que Finkel (2008) describió como "dar clases narrando", al cual le contrapone el modelo de "dar clases con la boca cerrada, estimulando la búsqueda de maneras alternativas de enseñar".

Centrar la educación en el estudiante significa organizar la enseñanza de manera que se tenga en cuenta que el alumno es responsable de su propio aprendizaje a partir de las interacciones entre profesor, alumno y materiales educativos. En este modelo el profesor, que ya domina los significados aceptados en el contexto de la materia de la enseñanza, le presenta esos significados al alumno utilizando diversas estrategias de modo que éste perciba su relevancia y manifieste una intencionalidad para captarlos e interiorizarlos (Moreira 2010).

En cuanto a las estrategias de enseñanza implementadas, consideramos que se encuadran entre las que recopila Moreira (2010) como orientadoras para favorecer en el alumno a "aprender a aprender" críticamente. Entre otras recomendaciones del autor podemos mencionar: tener en cuenta el conocimiento previo del alumno, estimular a los alumnos a preguntar, utilizar distintos materiales educativos, aprovechar el error como factor de aprendizaje, implementar distintas estrategias de enseñanza, así como los materiales educativos, las estrategias de enseñanza también deben ser diversificadas.

3. Propuesta educativa

Desde la cátedra de la asignatura de Probabilidad y Estadística (PyE) del DIIT se propuso a partir del año 2009 utilizar múltiples estrategias con el objetivo de mejorar los niveles de aprendizaje. Las distintas estrategias fueron sumándose desde 2009 y aunque algunas de ellas fueron mutando según los resultados de la implementación, se mantuvieron con cambios menores la guía de trabajo prácticos y los apuntes teóricos.

3.1. Múltiples estrategias educativas

La modalidad de evaluación de la asignatura PyE consiste de dos exámenes parciales con resolución de problemas que recorren los contenidos de la materia, de modo que el trabajo de los alumnos sólo se evalúa en estas instancias. Si ambos exámenes son aprobados

con nota superior a seis, la asignatura es promovida y se considera 'aprobada'. En otro caso, si en ambos exámenes la nota es al menos cuatro, el alumno consigue la condición de asignatura 'cursada', quedando pendiente la aprobación de un último examen integrador o examen final. En caso de no conseguir un mínimo de cuatro en ambos exámenes parciales la asignatura es desaprobada.

Las estrategias didácticas propuestas por la cátedra de PyE para favorecer la aprobación de la asignatura fueron:

- Se introdujo soporte tecnológico para ilustrar las exposiciones en las clases teórico-prácticas.
- Se generaron apuntes en soporte papel conjuntamente entre los docentes.
- Se reformuló la guía de trabajos prácticos entre docentes y ayudantes de cátedra orientada a la resolución de problemas de aplicación.
- Se diseñaron autoevaluaciones interactivas con el objetivo que los alumnos se enfrentaran a los errores más comunes en las primeras unidades de la materia.
- Se ofrecieron talleres de resolución de problemas presenciales y en horarios extra-clase.
- Se creó un foro virtual (Grupo Google) para la interacción entre alumnos con orientación de los docentes.
- Se diseñaron secuencias didácticas con el uso del software Excel.
- Se organizaron cursos especiales a distancia con utilización de Excel para alumnos que hubieran cursado la asignatura más de 4 veces.

4. Metodología

La experiencia con los alumnos durante los primeros ciclos se analizó con métodos cuantitativos y cualitativos en Giuliano et al, 2011. Se tuvo en cuenta los aportes de ambos estudios como modo de obtener una visión más completa de los resultados (Cook et al. 2008). Asimismo y para completar el estudio, se analizó la perspectiva de los alumnos evidenciada a través de una encuesta voluntaria. Esta encuesta se suministró on line en todos los períodos de cursada y contó con preguntas abiertas y cerradas, incluyendo una escala de tipo Likert. Sobre la opinión de los alumnos de todos los períodos desde 2009 a 2012 se realizaron entonces análisis cuantitativos y cualitativos que complementaron los análisis de contenidos realizados a los debates. Esta muestra de encuestados es no probabilística intencional o de criterio (García de Ceretto et al. 2009) de aquellos alumnos más colaborativos y permite caracterizar al grupo de alumnos encuestados, interesados en opinar sobre la asignatura, a quienes se invitó con la consigna "tu opinión nos interesa". Sin embargo esta muestra no resulta representativa de los alumnos que cursaron la asignatura como se observó al comparar en uno de los períodos el porcentaje de alumnos que dijeron haber aprobado el primer parcial que difirió significativamente del porcentaje general.

5. Resultados

Los resultados se muestran de manera diferenciada en las siguientes secciones tomando en cuenta los siguientes ejes de análisis:

- Evaluar la respuesta de los alumnos desde la perspectiva docente teniendo en cuenta la dimensión cuantitativa de aprobación y dimensiones cualitativas de participación.

- Evaluar desde la perspectiva de los alumnos: encuesta de opinión.

5.1. Perspectiva docente

La asignatura tiene contenidos de probabilidad, variables aleatorias e inferencia estadística. En la cátedra se busca que los contenidos se signifiquen en el marco de problemas aplicados a lo social o al campo de la ingeniería, lo que implica una dificultad adicional con la interpretación de enunciados. Es de interés que los alumnos desarrollen estrategias de autorregulación del propio aprendizaje de modo que les permita "aprender a aprender", logrando el aprendizaje de los contenidos y la apropiación de significados. Esto no siempre es comprendido por los estudiantes, observándose que para algunos el objetivo se centraba sólo en la aprobación de la asignatura. Esto se tradujo en que estrategias didácticas potencialmente exitosas desde la perspectiva docente fueran mayormente menospreciadas por los alumnos, como ocurrió con las secuencias didácticas en Excel (Giuliano et al 2011).

Situación inicial de aprobación

Previo a la implementación de las estrategias mencionadas, en el ciclo 2008, sobre un total de 318 alumnos nada más que el 7% logró la condición de 'aprobado' y sólo el 10% logró la condición de 'cursada' (pendiente de examen final).

Situación de aprobación con las estrategias implementadas

Desde 2009 todos los años se realizaron encuestas a los alumnos en las cuales se consultó sobre la participación y uso de las distintas estrategias.

Se evidenció una evolución creciente de los niveles de aprobación desde la implementación de las estrategias didácticas. El año 2011 presentó una situación particular dado que se pasó del régimen de cursada anual de 2 horas semanales a un régimen cuatrimestral (4 horas semanales en un solo día). En la Tabla 1 se muestran porcentajes en cada ciclo de aprobados y cursados.

Tabla 1. Evolución de los niveles de aprobación desde 2009 hasta 2012.

Situación de aprobación	2009	2010	2011-C1	2011-C2	2012-C1	2012-C2
Presentes al 1ª parcial	194	199	204	154	160	148
Aprobados (Nota >=7)	25%	25%	20%	22%	23%	32%
Cursados (Entre 4 y 6)	25%	25%	20%	31%	33%	29%
Total no desaprobados	50%	50%	40%	53%	56%	61%

En este análisis se ha tomado como referencia el total de alumnos presentes al primer parcial dado que un alto porcentaje de alumnos (aproximadamente la mitad) abandona el curso sin rendir exámenes para lo cual aún no se han estudiado las causas. A modo de ejemplo, en el primer cuatrimestre de 2012 de 349 inscriptos sólo 160 rindieron el primer examen parcial.

La utilidad que representa el foro virtual a los alumnos es vista como indiscutible por los docentes, dado que se considera la razón principal del salto cuantitativo de los niveles de aprobación a partir de su implementación en 2009. También se destaca la utilidad de los talleres de problemas para los alumnos que eligen asistir, lo que se evidencia en constancia y alta participación en la discusión alrededor de problemas específicos planteados allí.

Aunque los foros se iniciaron en 2009, los talleres comenzaron en 2011 y en los ciclos posteriores parecen vincularse al aumento relativo de alumnos que promocionan la asignatura.

5.2. Perspectiva de los estudiantes

Desde el ciclo 2009 se realizaron encuestas a los alumnos a fin de cada período en las cuales se consultó sobre la participación y uso de las distintas estrategias. Tomando en cuenta la opinión de los alumnos la Figura 1 muestra para el ciclo 2011 que, además de la asistencia a las clases teórico-prácticas, la mayor participación se da en el foro virtual. Esta situación se mantuvo en todos los períodos.

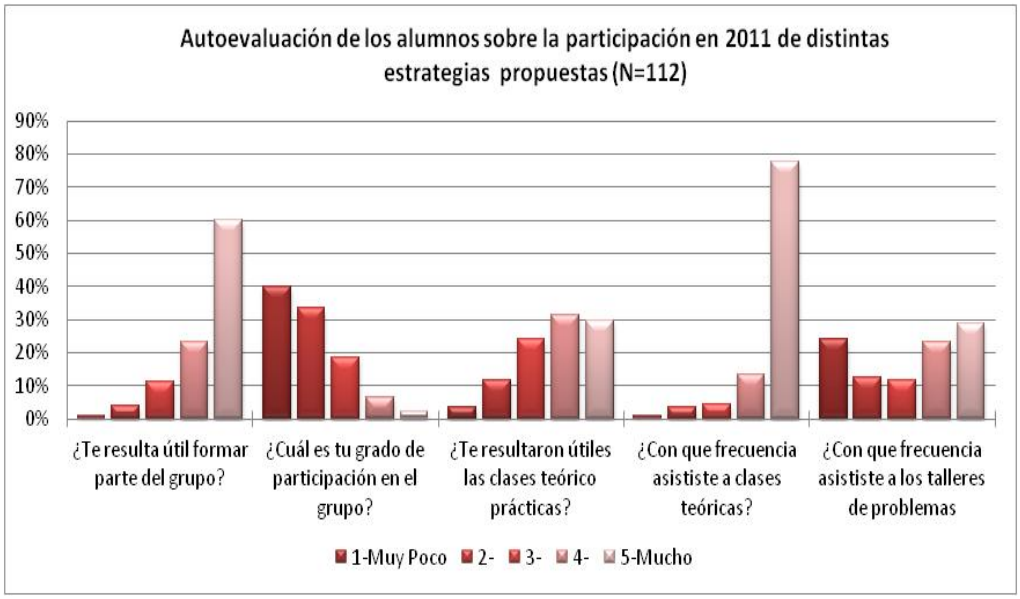


Figura 1. Participación de los alumnos en distintas estrategias en 2011.

En las respuestas abiertas de la encuesta, donde los alumnos comentan las ventajas y desventajas de las diferentes estrategias propuestas, se destaca la utilidad de los talleres de problemas. Cabe destacar que estos talleres son optativos, presenciales y están destinados al acompañamiento de los alumnos en la resolución de problemas de la guía.

En la Figura 2 se muestra para los primeros ciclos la evaluación que hacen los alumnos del tipo de participación propia y de la utilidad que les representa el foro virtual. En todos los ciclos se muestra la misma tendencia de baja participación en el foro a través de preguntas y alta participación a través de la lectura de los debates de otros alumnos y la descarga de material, participación que llamamos silenciosa. Si bien mayoritariamente consideran que su participación es baja y que lo que realizan con mayor frecuencia es mirar las resoluciones de otros, en las respuestas abiertas destacan al foro como útil y beneficioso.

Cabe mencionar además que la encuesta mostró que los alumnos no se muestran interesados en la resolución de problemas de aplicación con el software Excel y esto es acorde a lo ocurrido con las secuencias didácticas propuestas con este software en los primeros ciclos. Asimismo, las autoevaluaciones interactivas que fueran diseñadas especialmente para los temas de probabilidad no fueron mayormente utilizados por los alumnos.

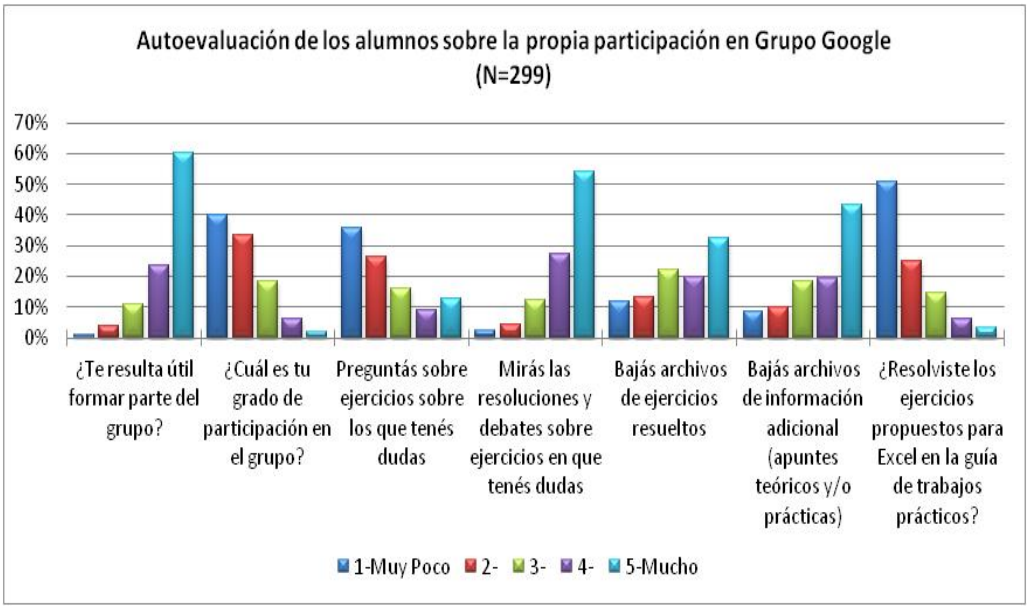


Figura 2: Participación de los alumnos en foro virtual entre 2009 Y 2011

Los resultados anteriores muestran coincidencia con los obtenidos en Giuliano 2011. En particular, en cuanto a los tipos de participación en el foro virtual o Grupo Google, se pueden distinguir los siguientes grupos:

- G1: consideran útil el foro aunque sólo observan, no participan ni bajan archivos (silenciosos).
- G2: participan activamente
- G3: consideran poco útil el foro y no participan o lo hacen ocasionalmente

El foro virtual es de participación voluntaria de modo que se sostiene gracias a los alumnos del grupo G2 y a los docentes. El aumento de la tendencia a la baja participación muestra que es necesario que los docentes intervengan para motivar la participación e incentivar que los alumnos reconozcan el valor de la misma.

En cuanto a la relación con el tipo de participación en el foro y la condición de aprobación se observa una tendencia a que los alumnos de mayor participación son los que más aprueban. Sin embargo, la condición de participación en el foro es un factor influyente en la aprobación sin serlo en forma excluyente.

6. Discusión

Desde la perspectiva docente las distintas estrategias ofrecidas no impactaron de igual forma en los resultados de aprendizaje buscados en los alumnos. Más aún, se observó que algunas no fueron siquiera tomadas en cuenta por los estudiantes: un muy bajo porcentaje realizó las autoevaluaciones o utilizaron las propuestas diseñadas para resolver con software Excel. Si bien estas estrategias que buscan el autoaprendizaje y la superación de obstáculos o conocimientos previos no fueron apreciadas por los estudiantes, se considera necesario fomentar desde otra perspectiva el autoaprendizaje por lo que se está trabajando para la implementación de plataformas autoevaluativas del modo que plantean González et al, 2006.

Los cambios en las estrategias de enseñanza de la asignatura PyE fueron evaluados a través de las percepciones de alumnos y docentes. Los resultados muestran que ha mejorado la actitud de los alumnos hacia la asignatura y han aumentado los porcentajes de aprobación llevándolo de la quinta parte en 2008, a la mitad entre 2009 y 2012, aproximadamente. Asimismo se evidencia que los estudiantes no utilizan todos los recursos disponibles, siendo más elegido el foro virtual y lo más ponderado en las respuestas abiertas los talleres de problemas, ambas estrategias pensadas para resolución de la guía de problemas.

Las respuestas abiertas de las encuestas a alumnos muestran un cambio progresivo y positivo desde 2009 de la percepción sobre la asignatura y la posibilidad de aprobarla. Queda por resolver la deserción inicial de los alumnos antes del primer parcial, así como promover una mayor utilización de soporte de software en las clases y en la resolución de problemas.

Como Sancho y Escudero (2012) observamos que los resultados obtenidos sugieren que la metodología docente implementada da a los estudiantes la oportunidad de regular su propio proceso de aprendizaje y a los docentes, la posibilidad de detectar problemáticas y reaccionar con agilidad. Tanto los foros como los talleres brindan oportunidades de aprendizaje que se reflejan en el discurso de los alumnos que finalmente obtienen buenos resultados de aprobación. Acordamos también con Garibay et al (2010) en que en los foros virtuales favorecen el trabajo colaborativo y conforman una comunidad de aprendizaje con la presencia de un docente tutor moderador que guía hacia un tratamiento profundo de los temas del debate. En nuestro caso sólo se da para los participantes activos del foro.

Agradecimientos

Este trabajo se hizo en el marco del Proyecto C121: “Modelos estadísticos y Estrategias de enseñanza”. Departamento Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas perteneciente al Programa de Incentivos Ministerio de Ciencia y Tecnología de la Nación. Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la Universidad Nacional de La Matanza.

Referencias

Cabero, J. y Llorente Cejudo, M. C. (2007) *La interacción en el aprendizaje en red: uso de herramientas, elementos de análisis y posibilidades educativas.* Universidad de Sevilla (España) AIESAD RIED 10(2), 7-123

Cook, T. y Reichardt, C. S. (1986) *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa***.** Madrid.Morata.

Finkel, D. (2008). *Dar clase de boca cerrada*. Valencia: Publicaciones de la Universitat València. Traducción para el español del original *Teaching with your mouth shut.*

García de Ceretto, J. y Giacobbe, S. (2009). *Nuevos desafíos en investigación. Teoría, métodos, técnicas e instrumentos.* Rosario. Homo Sapiens Ediciones,

Garibay, M. T., Concari, S. y Marchisio, S. (2010) Construcción de una red social mediante el foro virtual en una asignatura presencial. *XV Congreso Internacional de Tecnologías para la Educación y el Conocimiento. Redes Sociales para el aprendizaje*. Julio 2010. Madrid. España.

Giuliano, M., Pérez, S. y Sacerdoti, A. (2011). Inclusión de tecnologías de la información y comunicación en la formación estadística. *Revista d'innovació educativa Unitat d'Innovació Educativa.* 6.

González, J. A. t Muñoz, P. (2006). E-status: an Automatic Web-Based Problem generator - Applications to Statistics. *Computer Applications In Engineering Education* 14(2), 151-159.

Moreira, M. A. (2010). Abandono de la narrativa, enseñanza centrada en el alumno y aprender a aprender críticamente. Conferencia pronunciada en el *II Encuentro Nacional de Enseñanza de Ciencias de la Salud y del Ambiente*, Niterói, RJ, 12 a 15 de mayo de 2010. Disponible en http://www.if.ufrgs.br/~moreira/Abandonoesp.pdf [Consultado: 21 julio 2011]

Sancho, T. y Escudero, N. (2012). ¿Por qué una propuesta de evaluación formativa con feedback automático en una asignatura de matemáticas en línea? *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento* 9, 2, 59-79.

Exploración de conceptos de probabilidad con Geogebra

Mercado Martínez, Miguel
miguelmm@unam.mx, FES Acatlán, CCH Naucalpan – UNAM

Resumen

Se presentan hojas de trabajo en GeoGebra para la exploración y análisis de conceptos básicos de probabilidad. Primero se destaca el papel creciente del software dinámico en el escenario educativo. Este software nos permite explorar de manera dinámica conceptos y procesos matemáticos que favorecen la construcción de significados matemáticos por parte de los alumnos. En el proceso de aprendizaje de conceptos de probabilidad, no basta con conocer las diferentes reglas de la misma, es necesario realizar actividades de simulación de experimentos. A pesar de que Geogebra es un software para álgebra y geometría, también se pueden realizar simulaciones para contribuir a la comprensión de conceptos probabilísticos. En este trabajo presentamos tres hojas de trabajo en Geogebra, relacionadas respectivamente con los conceptos 1) diagramas de Venn, probabilidad condicional y Teorema de Bayes, 2) el tablero de Galton y 3) la aproximación de la distribución normal a la binomial.

Palabras clave: Palabras clave: Software dinámico, Probabilidad, Bayes, Simulación, Distribución.

1. Introducción

Los ambientes de aprendizaje basados en tecnología computacional han tenido impacto en los diferentes dominios matemáticos, entre ellos, la aritmética, el álgebra, la geometría, la estadística, el cálculo, etc. (Balacheff & Kaput, 1996). Sin embargo, se reconoce que el acceso a estos dispositivos electrónicos no garantiza que todos los estudiantes vayan a adquirir una cultura matemática; son herramientas que pueden simplificar la tarea que tienen en sus manos, pero no la resuelven (NCTM, 1989). No obstante, se considera que los estudiantes de todos los niveles educativos deberían tener acceso a las computadoras para ser usadas cuando resuelvan problemas matemáticos (NCTM, 2000). En el bachillerato de la UNAM se reconoce que el conocimiento matemático está influido por los avances tecnológicos, entre otros; y que las nuevas tecnologías contribuyen a investigar, conjeturar y verificar modelos matemáticos en el alumno (Consejo Académico del Bachillerato-UNAM, 2001).

Así, la constante creación y renovación de los recursos tecnológicos para la enseñanza, particularmente la enseñanza de las matemáticas, han influido en gran medida en la enseñanza. Si bien es cierto que los paquetes de cómputo se realizan con cierta intencionalidad, el desarrollo de su potencial educativo depende de su funcionamiento informático y de la creatividad y destreza de los usuarios, investigadores y profesores, principalmente, en lo que se refiere al diseño de actividades de aprendizaje para los estudiantes.

Noss y Hoyles (1996) ven en la computadora una ventana para mirar la manera en que los estudiantes producen significados matemáticos. En este sentido se cree que deben ser buscadas y construir actividades a desarrollar con la computadora, actividades que permitan observar características importantes de los procesos que los estudiantes llevan a cabo para darle significado a los distintos conceptos y procesos matemáticos.

La presencia de calculadoras, computadoras y software educativo modifica el entorno de la acción docente y establece nuevas condiciones para el aprendizaje, en particular de las matemáticas.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 309-317). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

En la actualidad se han desarrollado softwares Dinámicos, softwares que permiten la exploración matemática de manera dinámica, entre ellos se encuentran GeoGebra, Fathom, Cabri-Géomètre, Sketchpad, etc., aparentemente cada uno para la exploración en un campo matemático específico, por ejemplo, geometría, estadística, etc., sin embargo los campos de aplicación de algunos de los softwares es muy diversa, como lo observaremos con GeoGebra, que pareciera es para la exploración del algebra, geometría y calculo, donde exploraremos conceptos probabilísticos.

En Geometría, estos programas computacionales tienen herramientas que permiten la construcción de figuras geométricas muy diversas, desde representaciones simples como puntos y líneas, figuras más complicadas como triángulos, círculos y polígonos, hasta construcciones más elaboradas donde se pueden necesitar rectas paralelas, perpendiculares, simetrías, etc. Una vez realizada una construcción, el software tiene la facilidad de desplazar sobre la pantalla del monitor puntos, segmentos, o figuras geométricas (triángulos, círculos,…); también se pueden generar lugares geométricos y sus ecuaciones; por ejemplo, se puede observar qué figura describe el punto medio de una cuerda a un círculo cuando uno de los extremos de la cuerda se mueve alrededor del círculo. También es posible la exploración de funciones y sus gráficas, por ejemplo dada una función y = f(x), se puede tabular para diferentes valores de x, presentarlos en una tabla o observar la gráfica que se genera, otra posibilidad es la de exploración del efecto de los distintos parámetros sobre la grafica de la función.

En estadística, a partir de una base de datos se puede obtener representaciones graficas como histogramas, polígonos de frecuencias, diagramas de dispersión, etc., encontrar estadísticas básicas como media, mediana, cuartiles, etc., o llevar a cabo inferencias sobre los datos, como Intervalos de Confianza y Pruebas de Hipótesis. Todo ello de manera dinámica, o sea, cuando se agregan o eliminan datos o bien se modifican uno o más de ellos todo se actualiza de inmediato. También es posible realizar la simulación de experimentos, por ejemplo, lanzamientos de monedas o dados, toma de muestras de poblaciones, etc.

Las acciones posibles y los retornos a las construcciones, se amplían y resultan de naturaleza diferente. Se integran conocimientos matemáticos y se amplía el campo de experimentación posible, se pueden esperar nuevas posibilidades de organización de las situaciones de aprendizaje así como cambios en las conductas de los estudiantes.

Los estudiantes pueden realizar variaciones precisas e instantáneas de sus propias representaciones visuales que se producen con el uso de este tipo de software (Balacheff & Kaput, 1996), lo que les permite, en principio, realizar muchas exploraciones, probar ideas y conjeturar en una forma visual, eficiente y dinámica. Una actividad importante en el estudio de las matemáticas es que el sujeto desarrolle estrategias que le permitan formular conjeturas.

Con lo anterior en mente, en este trabajo se presenta la exploración de algunos conceptos de Probabilidad, usando el software GeoGebra. Tomaremos como punto de partida, algunos ejemplos:

2. Diagramas de Venn

Ejemplo 1: Se examinaron las tarjetas de registro de 200 estudiantes en relación a ciertos idiomas. Se encontró que 100 estudiaban francés, 80 estudiaban español y 60 ambos idiomas o sea que $P(F) = 0.5$; $P(E) = 0.4$ y $P(E \cap F) = 0.3$. Se toma un estudiante al azar:

a. Encontrar la probabilidad de que estudie francés o español.
b. $P(f \cup e) = p(f) + p(e) - p(e \cap f) = 0.5 + 0.4 - 0.3 = 0.6$
c. Encontrar la probabilidad de que de que no estudie francés ni español.

d. $P(f \cup e)^c$ = 1 - p(f ∪ e) = 1 -0.6 = 0.4, que también es $p(e^c \cap f^c) = 0.4$

e. Si sabemos que estudia francés, ¿cuál es la probabilidad de que estudie español? $P(E/F) = \frac{P(F \cap E)}{P(F)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$.

f. Si sabemos que estudia español ¿Cuál es la probabilidad de que estudie francés $P(F/E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$.

Los datos pueden ser colocados en una tabla; la Tabla 1 contiene los datos dados por el enunciado; los números resaltados con "negritas" son los valores dados, los otros números se ajustan a los totales marginales. En la Tabla 2 se presentan las probailidades correspondientes a la tabla No 1, por ejemplo $P(E^C)$ = 0.6 y $P(E \cap F^C)$ = 0.1. A partir de la tabla se pueden verificar varias reglas de probabilidad

Por ejemplo: $P(E \cap F^C) = P(E) - P(E \cap F)$ = 0.1, y se observa que $P(E^C \cap F^C)$ = 0.4, que nos permite verificar indirectamente una de las leyes de Morgan, o sea *que* $(F \cup E)^C = E^C \cap F^C$.

Tabla 1. Datos del problema

	F	F^C	Total
E	60	20	80
E^C	40	80	120
Total	100	100	200

Tabla 2. Probabilidad de los eventos

	P(F)	$P(F^C)$	Prob
P(E)	0.3	0.1	0.4
$P(E^C)$	0.2	0.4	0.6
Prob	0.5	0.5	1.0

Los resultados se pueden ver en la gráfica de la Figura 1, que se realizó con GeoGebra. Lo que es de destacar, es que con la hoja de trabajo hecha en GeoGebra, es posible realizar variaciones a las probabilidades en el ejercicio y de inmediato se ajustan los valores que resultan al aplicar las correspondientes reglas de probabilidad, como se podrá experimentar al usar la hoja en GeoGebra.

En el programa que genera el diagrama se pueden controlar los datos correspondientes a: *P(A), P(B*) y *P(A∩B),* o sea, *P(F), P(E)* y *P(E∩F)* en el ejercicio, el programa regresa *P(A|B), P(B|A), P(A'∩B'); P(F|E), P(E|F), P(F'∩E')* del ejercicio. En la figura No 1 los valores son: *P(A)* = 0.5, *P(B)* = 0.4 y *P(A∩B)* = 0.299, los resultados con el programa son: *P(A|B)* = 0.747, P(B|A) = 0.598, *P(A'∩B')* = 0.399.

Lo interesante de la hoja de trabajo en GeoGebra es que podemos hacer variaciones a los datos de entrada, *P(A), P(B)* y *P(A∩B),* al desplazar de izquierda a derecha los "deslizadores" que representan los valores de probabilidad, ajustandose los valores de *P(A|B), P(B|A), P(A'∩B'),* como se observa de las figuras. En la Figura 2 los valores dados, son: *P(A)* = 0.3, *P(B)* = 0.25 y *P(A∩B)* = 0.08, los resultados con el programa son: *P(A|B)* = 0.267, *P(B|A*) = 0.321, *P(A'∩B')* = 0.53.

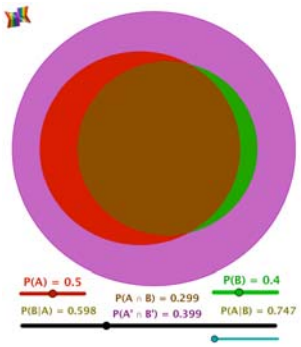


Figura 1. Diagrama de Venn

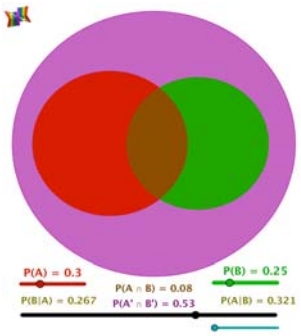


Figura 2. Diagrama de Venn

Ejemplo 2: Para una mujer americana de entre 40 y 50 años sin síntomas, tiene una probabilidad de cáncer de pecho de 8%. Si una mujer tiene cáncer la probabilidad de detectarlo es de 90%, aunque también el 7% de mujeres sanas dan positivo. Se toma una mujer americana entre 40 y 50 años, en forma aleatoria, si la prueba resulta positiva, ¿cuál es la probabilidad de que la mujer realmente tenga cancer de pecho? (Tomado de una presentación de la Dra. Carmen Batanero)

Los datos se pueden representar en el diagrama de arbol de la Figura 3:

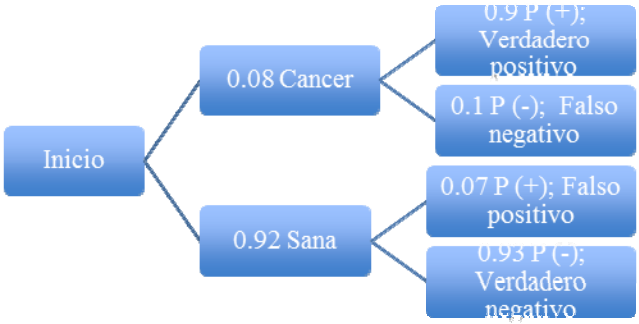


Figura 3. Diagrama de árbol del ejercicio 2

Si una persona es elegida al azar, la probabilidad de que al hacerse una prueba resulte positiva es: $P(+) = P(C)P(+/C) + P(S)P(+/S)$ = (0.08)(0.9) + (0.92)(0.07) = 0.1364

Mientras que si la prueba resulta positiva, la probabilidad de que realmente tenga cáncer es: $P(C/+) = \frac{P(C \cap +)}{P(+)} = \frac{P(C)P(+/C)}{P(+)} = \frac{(0.08)(0.9)}{0.1364} = 0.5279$

También se puede realizar una tabla con los valores dados, Tabla 3, donde los valores de las intersecciones se obtienen de la regla de probabilidad condicional: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, entonces $P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$, por lo que $P(C \cap +) = P(C)P(+/C)$ = (0.08)(0.9)=0.072. Esta situación se puede organizar en una hoja de trabajo con GeoGebra como se muestra en la Figura 4

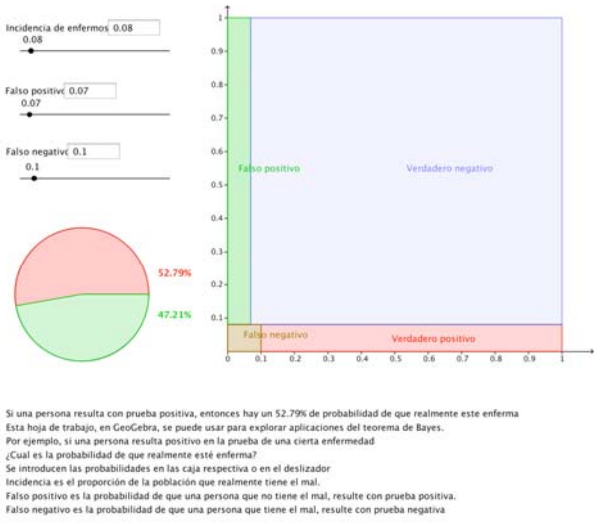


Figura 4. Aplicación del teorema de Bayes

En la anterior representación los datos de entrada son: incidencia de la enfermedad; *P(C),* falso positivo, probabilidad de prueba positiva y no tener la enfermedad; *P(+/C'),* y falso negativo, probabilidad de prueba negativa y tener la enfermedad; *P(–/C).* Estos datos de entrada pueden ser colocados en las vantanas correspondientes o desplazando los deslizadores de izquierda a derecha, obteniéndose de salida: *P(–/C)* y *P(+/C),* información relevante en este tipo de problemas, en forma gráfica y numérica.

Tabla 3. Datos

	P(C)	P(C')	Total
P(+)	0.072	0.0644	0.1364
P(-)	0.008	0.8556	0.8636
Total	0.08	0.92	1

La hoja en GeoGebra permite la exploración de una gran cantidad de situaciones que involucran el teorema de Bayes, de manera dinámica, al desplazar los deslizadores de izquierda a derecha, como se puedrá observar al interaccionar con la hoja y el GeoGebra.

3. Simulación de la Máquina de Galton

La máquina de Galton, también conocida como *quincuence*, es un dispositivo inventado por Sir Francis Galton, para demostrar que la distribución binomial se aproxima a la distribución normal. Está constituida con una tabla con numerosas filas de clavos intercalados sucesivamente que evocan al triángulo de Pascal. Desde la parte superior se dejan caer bolas que botan a la izquierda o a la derecha, en forma aleatoria, cuando chocan con los clavos. En el fondo, las bolas son coleccionadas en recipientes verticales, figura No 5. Se cuenta el número de canicas en cada celda y se calcular la frecuencia relativa, se tiene una aproximación al valor de probabilidad que se obtiene al usar la distribución binomial

Se puede considerar que el número de canicas que caen en los recipientes verticales sigue una distribución binomial porque al chocar una canica con un clavo, i) puede desplazarse a la izquierda o a la derecha, éxito o fracaso, ii) la canica chocará con n clavos, la probabilidad de desplazamiento a la izquierda (I) o a la derecha (D) es la misma en cada clavo y los eventos son independientes ya que las trayectorias I D, no dependen unas de otras, y iii) X = número de desplazamientos a la derecha, aunque también podría ser hacia la izquierda.

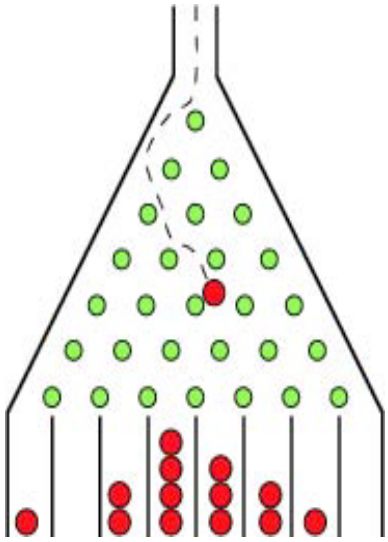


Figura 5. Máquina de Galton con 7 recipientes de canicas

En la Figura 5, Se puede deducir que el número de bolas que cae en las celdas del fondo sigue una distribución binomial con n = 7 y p = 0.5, con la variable aleatoria X = número de canicas que se desplaza hacia la derecha al chocar con los clavos, que se puede tomar como número de canicas que cae en las celdas 0, 1, 2, … 7. Así, x=0 significa que la trayectoria de la canica fue I I I I I I I; x=1, posible trayectoria I I I I I I D ó I I I I I D I ó I I I I D I I ó I I I D I I I ó I I D I I I I ó I D I I I I I ó D I I I I I I; hasta x=7 donde la trayectoria es D D D D D D D, porque la canica, por igual, puede ir a la izquierda (I) o a la derecha (D) al chocar el clavo. La probabilidad para cada celda está deda por: $P(X = x_i) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$. Entonces, la probabilidad de que la canica caiga en la celda cero, es: $P(X = 0) = \frac{7!}{0!(7-0)!} 0.5^0 0.5^{7-0}$; de que caiga en la celda uno, es $P(X = 1) = \frac{7!}{1!(7-1)!} 0.5^1 0.5^{7-1}$, y así sucesivamente. En un experimento se observará la frecuencia relativa del número de canicas que cae en cada celda y este valor se puede comparar con el valor que proporciona la distribución Binomial.

Máquina de Galton, simulada con Geogebra. La hoja de trabajo se simuló el lanzamiento de 250 bolas, Figura 6. En la parte inferior de la máquina se presenta un histograma construido con el número de bolas que cayó en cada celda, en la derecha se tiene la misma información en forma numérican, número de celda contra frecuencia. La figura presenta una ventana con la leyenda inicio, ahí se da inicio a la simulacion, si hay datos de una simulación previa los elimina; otra ventana tiene la leyenda acción que permuta con pausa, con ella se da inicio, se detiene o reinicia una simulación; indica la trayectoria de una bola; contiene un deslizador donde se puede controlar la velocidad de caida de las bolas al noverlo de izquierda a derecha; por último tiene como opciones ver el histograma binomial teórico y la gráfica de la distribución normal, ambos construidos con los parámetros del ejercicio, lo que nos permite observar visualmente como el histograma que resulta de la simulación de la máquina de Galton se aproxima a la distribución binomial, así como la aproximación de la distribución normal a la binomial.

En la hoja GeoGebra, n = 21, p = 0.5, q = 0.5 y x = 0, 1, 2, … 21, Los valores teóricos de la binomial se calculan con la fórmula $P(X = x_i) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$. Podemos comparar valores teóricos con valores experimentales, por ejemplo:

$P(X=13)=\frac{21!}{13!(21-13)!}0.5^{13}0.5^{21-13}=0.0970$; con los valores de la hoja de trabajo $P(X=13)=\frac{284}{3000}=0.0947$; ó $P(X=11)=\frac{21!}{11!(21-11)!}0.5^{11}0.5^{21-11}=0.1682$ contra $P(X=11)=\frac{506}{3000}=0.1703$

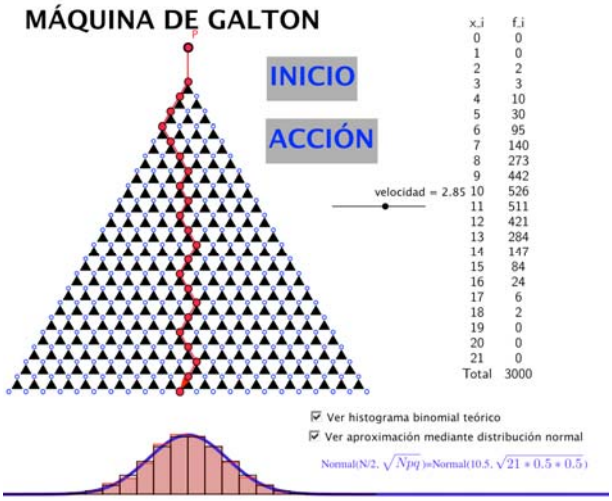


Figura 6. Simulación de la máquina de Galton con Geogebra

4. Aproximación de la distribución normal a la binomial

En el apartado anterior se pudo observar gráficamente como la distribución normal, con $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{npq}$, se aproxima a la distribuciòn binomial. En general se sabe que cuando n es “grande” y p ó q no próximos a cero o la unidad, la aproximación es buena, más especificamente, cuando $\mu = np > 5$. Mediante la hoja de trabajo en GeoGebra que se presenta en este trabajo, es posible explorar la aproximación normal a la binomial, para valores $1 \leq n \leq 20$ y para valores $0 \leq p \leq 1$, en el entendido de que los valores de n son discretos.

En la hoja de trabajo en GeoGebra Figura 7, se pueden explorar distintas situaciones para los valores de n y p. Se puede observar como para valores n no muy grandes y p cercano a 0.5, el grafico de la binomial es muy simetrico y la normal se ajusta relativamente bien, pero a medida que p se acerca a cero o la unidad el grafico es sesgado y la aproximación no es buena. La hoja de trabajo contiene un deslizador para el valor de n y otro para p, que pueden deslizarse de izquierda a derecha ajustando a los valores desados en el rango antes dicho. Grafica un histograma para la binomial y tiene como opción una casilla para observar la aproximación normal, cuanta con otras opciones, reescalar el eje “y” así como señalar regiones críticas, finalmente tiene la opción de animación de p, animate p, que explora el gráfico para un valor de n determinado y p cambia cero a uno.

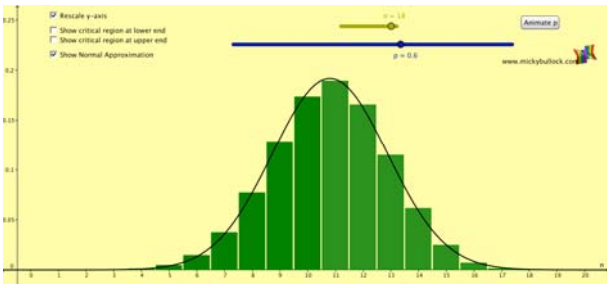


Figura 7. Aproximación de la distribución normal a la binomial

Se puede destacar que de acuerdo con Duval (1999), un estudiante comprende un concepto matemático, cuando es capáz representarlo en al menos dos registros de representación. En los ejemplos analizados hay varios registros, que son: lenguaje común, lenguaje símbolico, diagramas de Venn y tablas de contingencia.

Una de las características del GeoGebra es integrar tres diferentes registros de representación que se pueden usar simultaneamente, cuando se explora una situación de aprendizaje, estos son: algebraico y algo más, gráfico y hoja de cálculo. Se puede usar uno, o dos o los tres de manera simultanea.

Otro aspecto que es de relevancia en GeoGebra, es la capacidad que tiene para la simulación. En estadística "simulación" se puede entender como algo parecido al isomorfismo en otras ramas de las matemáticas. Consiste en poner en correspondencia dos experimentos aleatorios distintos. La condición es que a cada suceso elemental del primer experimento le corresponda uno y sólo un suceso elemental del segundo experimento, de manera que los sucesos puestos en correspondencia, en los dos experimentos, sean equiprobables. Lo importante de la simulación es que podemos operar y observar resultados del segundo experimento y utilizarlos para obtener información del primer experimento.

Por ejemplo, podemos simular el lanzamiento de una moneda con un generador de números aleatorios. Se puede generar números aleatorios entre 0 y 1, y se acuerda una regla; asignar cara si el número resulta uno, cruz si es cero; o en el nacimiento de un bebe mujer si resulta cero, varón si resulta uno. La ventaja de la simulación entonces permite condensar el experimento, además de que pueden ser desde muy sencillas como estos ejemplos, hasta procesos aleatorios complejos, como lo veremos a continuación.

Las aplicaciones anteriores vistas en este artículo, fueron recuperadas del portal de GeoGebra, www.geogebratube.org, así mismo fueron adaptadas para esta presentación, con fines didácticos en la enseñanza de Probabilidad en el nivel del bachillerato. Es posible reproducir los ejemplos, instalando el software goeogebra y lllamar a los archivos adjuntos en el anexo.

Referencias

Balacheff, N. y Kaput, J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. En A. J. Bishop et al. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education*. K.A.P., Netherlands.

Consejo Académico del Bachillerato, UNAM (2001) *Núcleo de conocimientos y formación básicos que debe proporcionar el bachillerato de la UNAM; Primera Aproximación*, UNAM, México

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

GeoGebra. WWW.geogebra.org/cms/

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for the school mathematics. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. VA: NCTM.

Noss, R. y Hoyles, R. (1996). Windows on mathematical meanings: learning cultures and computers. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Explorando compreensões sobre amostragem com uma professora utilizando o *software TinkerPlots 2.0*

Martins, Niedja Pereira; Monteiro, Carlos Eduardo Ferreira y Queiroz, Tamires Nogueira
Universidade Federal de Pernambuco

Resumo

Este artigo apresenta aspectos de um estudo de caso que enfocou a compreensão sobre amostra e amostragem por uma professora dos anos iniciais ao utilizar o *software TinkerPlots 2.0*. Buscou-se analisar a compreensão da docente a respeito de três aspectos básicos do conceito de amostra: tamanho, tipo e representatividade, ao utilizar as ferramentas do referido *software*. O processo de coleta de dados da pesquisa envolveu a participação da professora em três etapas: entrevista inicial sobre os conhecimentos a respeito do conceito de amostra e a apresentação do *TinkerPlots 2.0*; realização de atividades de amostragem aleatória simples no *software*; e entrevista final com o objetivo de identificarmos possíveis mudanças na compreensão sobre o conceito. Nos resultados, observamos que a docente modificou sua compreensão sobre amostra, identificou tamanhos e os relacionou adequadamente à representatividade nas amostras. Identificou-se a noção de representatividade ao longo das manipulações dos dados realizadas pela professora. Apesar de que ela reconheceu diferenças na distribuição dos grupos de dados, não estabeleceu relação disso com a representatividade, o tamanho da amostra ou processo de amostragem. Consideramos, então, que a possibilidade de simulação a partir da ferramenta *Sampler* e da manipulação de dados a partir da ferramenta *Plot* pôde propiciar situações de interpretação de dados estatísticos que favoreceram compreensões iniciais sobre amostragem.

Palavras chaves: Educação Estatística; Amostragem; Professores de séries iniciais; Software TinkerPlots.

.

1. Introdução

O fluxo de informações incitado pelas Tecnologias da Informação e Comunicação estimula mudanças nas linguagens e representações utilizadas no processo de comunicação (LÉVY, 2000). Pode-se afirmar que em virtude disso, o uso frequente de dados estatísticos na sociedade vem aumentando e compreendê-los torna-se uma necessidade para a efetivação da cidadania.

Sendo assim, a Educação Estatística torna-se um importante elemento da Educação Básica por possibilitar o desenvolvimento de uma atitude investigativa, reflexiva e crítica dos estudantes em uma sociedade marcada pelo acúmulo de informações (CAMPOS et al., 2011). De outro modo, a introdução da Estatística na escola pode incorporar em seus processos educativos importantes instrumentos culturais compatíveis a uma sociedade informacional.

Uma maneira que as escolas têm evidenciado para buscar atualizar suas práticas é utilizando computadores no ensino. No campo da Estatística, por exemplo, tem-se a possibilidade de realizar atividades por meio interfaces gráficas, como num *software*, o que contribui para modificar os processos de ensino e aprendizagem (Hawkins, 1997).

Em termos das atividades com amostras, a dificuldade de se trabalhar com uma quantidade grande de dados em situações de amostragem não se torna um grande problema

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 319-326). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

quando se tem disponíveis instrumentos tecnológicos que permitam a simulação dos dados para a retirada de várias estatísticas.

Refletindo sobre esse conceito, Watson (2004) argumenta que embora o raciocínio sobre ele seja fundamental para legitimar práticas de Estatística, frequentemente a amostra recebe pouca atenção no currículo escolar. A possibilidade de utilizar tecnologias da Informação e Comunicação para desenvolver atividades sobre amostragem, no entanto, pode ser uma alternativa interessante de abordá-lo no ambiente escolar.

Especificamente, alguns *softwares* de análise de dados vem sendo apontados como instrumentos que favorecem o trabalho com dados estatísticos, tal como o *software TinkerPlots 2.0* o qual oferece a possibilidade de simular dados para a construção de diferentes tipos de amostras. Neste artigo, apresentamos um recorte de uma pesquisa que buscou compreender como o conceito de amostra poderia ser desenvolvido por uma professora mediante a utilização do *software TinkerPlots*.

2. Estudos sobre Amostra e Amostragem

A amostra, quando comparada com outros conteúdos estatísticos é pouco abordada nas investigações em Educação Estatística, ao mesmo tempo em que é relevante de ser considerada na escolarização básica (Watson, 2004; Ben-Zvi et al. 2011). Watson (2004) indica que uma possível causa para que professores não realizem atividades de amostragem com seus alunos pode estar relacionada ao fato desse conceito ser componente de um tópico associado à Matemática, mas não exigir rigorosamente a realização de cálculos para serem aprendidos.

Pela importância que tal conceito apresenta no desenvolvimento de conhecimentos ligados a Estatística, alguns documentos internacionais têm preconizado seu ensino nos anos iniciais. Franklin et al. (2005) propõem o Guia para Avaliação e Instrução em Educação Estatística (GAISE), o qual estabelece algumas competências a serem desenvolvidas nos estudantes da escola básica no âmbito internacional, tais como: estabelecer investigações por amostragem; criar amostragem com seleção aleatória; reconhecer se uma amostra é ou não representativa e realizar generalizações a partir de uma amostra.

Para o trabalho com amostras, três aspectos estão intimamente relacionados e apresentam-se enquanto aspectos básicos de serem aprendidos pelas pessoas em atividades de amostragem, são eles: tamanho, representatividade e tipo de amostra.

Bolfarine e Bussab (2005) discutindo sobre a importância da definição do tamanho de uma amostra indicam que a precisão estatística de um processo por amostragem esbarra nas limitações do orçamento da pesquisa e no tamanho da amostra.

Tais preocupações tornam-se importantes, pois há sempre a necessidade de extrair amostras que sejam representativas. Podemos dizer, inclusive, que a representatividade é a condição mais importante em uma investigação quando se pretende generalizar dados. Assim, Bolfarine e Bussab (2005) expõe que uma amostra é dita representativa quando suas características se assemelham ao máximo à população investigada.

O desenvolvimento de atividades sobre amostragem exige a utilização de várias ideias relacionadas. Essas interconexões de diferentes conceitos estatísticos parecem ser fundamentais no aprendizado sobre amostra, por exemplo, Ben-Zvi et al. (2011) cita a ligação da amostra com conceitos tais como intervalo e distribuição, inferência, probabilidade, aleatoriedade e interpretação de gráficos.

Considerando esses aspectos, Prodromou (2010) realizou um estudo que investigou a compreensão de estudantes sobre a relação entre tamanho e representatividade em amostras,

utilizando a versão 1.0 do *software TinkerPlots*. Ela pode perceber, enquanto resultado, que os alunos puderam apresentar não apenas reflexões iniciais sobre tal relação, mas também sobre outros conceitos relacionados, como representatividade, variabilidade e distribuição amostral.

A utilização do *TinkerPlots* para o desenvolvimento de pesquisas sobre amostras também foi objeto de investigação de Kasak e Konold (2010) que desenvolveram um protótipo para a simulação de probabilidades junto a esse *software*.

Nas pesquisas desses autores foi observado que inicialmente os estudantes desse estudo confundiam a ideia de aleatoriedade com acaso. Ao incluir uma ferramenta que permitisse aos sujeitos acompanharem visualmente o desenho de um plano amostral, foi possível perceber um crescimento conceitual dos estudantes em relação à ideia de probabilidade contida na amostra aleatória simples. Nesse sentido, a simulação mostrou ser um elemento importante para a compreensão do conceito de amostra aleatória.

3. Compreendendo o TinkerPlots

O *TinkerPlots* é um *software* projetado para construir e manipular dados estatísticos. Ele possui ferramentas que permitem passar por todas as etapas do processo de tratamento das informações estatísticas, possibilitando aos usuários, explorar dados, representá-los, comunicá-los, formular hipóteses e dentre outros aspectos.

Estudos empíricos apontam para a eficácia do uso do *TinkerPlots* no ensino de conceitos e habilidades estatísticas com crianças a partir dos 9 anos de idade (KONOLD, 2006), pelo fato desse *software* possuir uma interface simples.

O *TinkerPlots* apresenta um menu de ferramentas no idioma inglês e traz ícones de cinco ferramentas básicas: *Cards*, *Table*, *Plot*, *Sampler* e *Text* direcionadas a construção e representação dos dados, conforme a Figura 1:

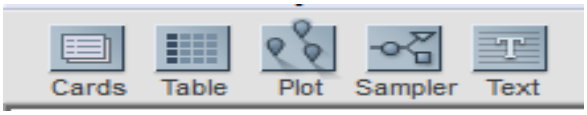


Figura 1. Ícones do menu de ferramentas do *TinkerPlots 2.0* que é apresentado na tela inicial.

A ferramenta *Cards* serve para registrar a criação de dados da pesquisa a ser realizada no *software*. Ao fazer isso, o usuário poderá inserir atributos (ou variáveis) no *Cards*. A segunda ferramenta do menu do *TinkerPlots* é a *Table*. Ao ativar essa ferramenta acionamos a distribuição dos casos incluídos na ferramenta *Cards* em uma tabela.

Na sequência, podemos acionar a ferramenta *Plot* que permite a visualização dos casos incluídos na ferramenta *Cards* numa subjanela. Ao fazer uso da ferramenta *Plot*, teremos acesso a um segundo menu de ferramentas que permite a manipulação dos dados para a construção de diferentes representações e seleção de diferentes estatísticas.



Figura 2. Menu da ferramenta *Plot* do *TinkerPlots 2.0* que é habilitado ao acionarmos o ícone *Plot* no menu inicial do software.

As principais ferramentas disponíveis para a manipulação do *Plot* são: *Separate* (separar), *Order* (ordenar) e *Stack* (empilhar). Essas ferramentas podem ser utilizadas de forma simultânea para construir diferentes representações. Do mesmo modo, é possível fazer uso de outros ícones no menu de ferramentas do *Plot* para identificar valores, estatísticas e parâmetros nos conjunto de dados, como por exemplo as ferramentas *Ref.*, *Averages* e *Counts*.

Na versão 2.0 do *TinkerPlots* foi inserida a ferramenta *Sampler* para o trabalho com probabilidade e amostra. Ela favorece a manipulação de uma grande quantidade de dados sem a necessidade de uma etapa extensa de coleta.

Os componentes básicos da Ferramenta *Sampler* incluem diferentes funções. Os principais componentes da ferramenta *Sampler* são os dispositivos que permitem a inserção das variáveis a serem selecionadas na amostra; o dispositivo *Repeat* que permite a definição do tamanho da amostra a ser extraída e o botão *Run* que permite que os dados sejam retirados do simulador aleatoriamente. A seguir, são mostradas as funções da ferramenta *Sampler* na Figura 3:

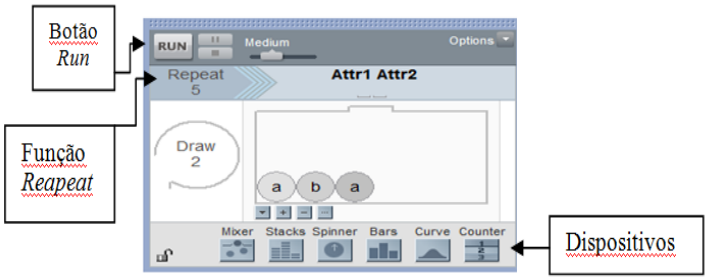


Figura 3. Aspectos da ferramenta *Sampler*.

4. Método

A abordagem metodológica foi composta por dados provenientes de diferentes instrumentos de coleta, tal qual a entrevista semi- estruturada e a videografia. Entrevistamos uma professora que, nesse estudo será chamada de Ana por questões éticas.

A coleta de dados aconteceu em três encontros. No primeiro e no terceiro encontro, a professora participante foi entrevistada com base em questões propostas por Watson (2004). Ainda no primeiro encontro foi realizada uma familiarização da professora com o *software*, na qual buscamos explorar as ferramentas do *TinkerPlots* a partir de um banco de dados que apresentavam características diversas de 24 gatos. No segundo encontro foram submetidas duas atividades sobre amostragem as quais desenvolvidas por meio do *software.*

As duas atividades tiveram como objetivo, propor uma situação na qual fossem estabelecidas relações entre o tamanho de uma amostra aleatória simples e sua representatividade. Para este artigo, fizemos um recorte para apresentar o desenvolvimento de uma das atividades (*FishPopulation*). O exercício apresentava um banco de dados com 625 peixes e informações relativas ao tipo do peixe (geneticamente modificado ou normal), ao tamanho do peixe (em centímetros) e uma identificação numérica em cada peixe. Nessa atividade, a professora foi convidada a extrair casos do simulador *Sampler* para aumentar gradativamente o tamanho da amostra e analisar o impacto do tamanho sobre a representatividade dos dados.

5. Análise dos protocolos das entrevistas

Na atividade "*FishPopulation*" a professora foi conduzida a extrair amostras crescentes de uma mesma população com N = 625 e parâmetros inicialmente desconhecidos. A intenção dessa atividade era promover a compreensão de que amostras maiores tendem a representar melhor a população e estimar níveis de confiança informais sobre as suas inferências. Inicialmente a professora apresentou pouca segurança para interpretar os dados em função da amostra conter um tamanho pequeno, como vemos no exemplo abaixo:

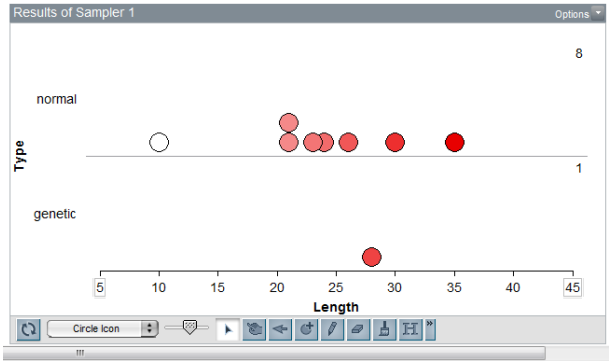


Figura 6: Representação gerada na Atividade 1 com a professora Ana demonstrando uma Amostra Aleatória Simples com $n = 9$.

P.: Olhando para cá, você pode me dizer se os peixes geneticamente modificados são maiores que os peixes normais?
A.: São maiores, não. Se a gente tirar a média... Só tem um.
P.: Só tem um, né? Então, com um só daria pra dizer?
A.: De 600? Dá nada!
P.: O que precisaria?
A.: De 600, pelo menos uns 10 por cento, né?
P.: 10 por cento?
A.: Menos?
P.: O que você acha?
A: Não sei...

Nessa extrato de entrevista é possível observar que a mesma identifica não poder avaliar se o grupo dos peixes "genéticos" são maiores que os normais em função da disparidade entre um e outro grupo, como também em função da relação entre o tamanho dessa amostra e o tamanho total da população.

Contudo, Ana não manteve essa certeza ao longo da atividade, demonstrando não compreender que para responder corretamente a questão, seria necessário considerar o tamanho dos dois grupos de peixes e não analisar casos isolados. Isso nos parece ser um erro frequente, pois ao interpretar dados de um grupo, algumas pessoas apresentam a estratégia de observar pontos extremos do gráfico para oferecer conclusões a todo conjunto de dados (Asseker, 2011).

Nesse exemplo acima com $n = 9$, a professora optou em utilizar a ferramenta média para identificar qual grupo permanecia com o comprimento maior. Por ser uma medida de tendência central e, as unidades amostrais do grupo de peixes geneticamente modificados estarem em um número inferior às unidades do grupo normal, a média não ajudou a professora a corroborar sua impressão de que os peixes normais estariam em vantagens em relação aos genéticos.

Em função dessa dificuldade, a professora apresentou interpretações que não considerou a possibilidade dos peixes geneticamente modificados serem maiores mesmo quando n = 28. A aumentou a amostra para 45 peixes e adicionou a ferramenta *Hat* que pode auxiliar na identificação do aglomerado da representação. A partir dessa função, Ana conseguiu observar que o maior concentrado dos dados se encontrava em relação à escala. Podemos ver esse momento abaixo:

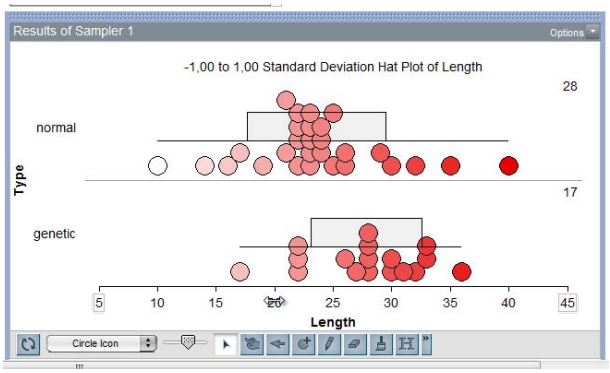


Figura 7. Demonstração do uso da ferramenta *Hat* acionada pela professora Ana para responder o questionamento da Atividade 1 com uma amostra de $n = 45$.

Pesquisadora.: Qual seria o aglomerado que demonstra um tamanho maior em centímetros?
Ana.: Esse (Geneticamente modificados).
P.: E não esse? (Normais).
A.: É.
P.: Então, eu posso dizer que os genéticos estão aglomerados num lugar que indica um tamanho maior na escala do que os normais?
A.: É. Os normais têm muito, mas estão atrás. Entendi.
P.: Então, o que você percebe? Qual é o conjunto que está maior?
A.: Os genéticos.
P.: Com essa quantidade de peixes que você pegou, você poderia dizer que essa ideia que você concluiu se aplicaria aos 625?
A.: Sim.

Nessa Figura 7 pode ser observado que a ferramenta *Hat* seleciona os aglomerados ou concentrações do gráfico permitindo observar de maneira mais clara a tendência de cada grupo. Em seguida, questionamos a professora a respeito da confiança que ela mantinha sobre esta última interpretação e, mais uma vez, a professora oferece um nível de confiança alto para sua inferência.

Somente ao indicarmos que poderíamos inserir uma quantidade maior de elementos ao *Plot* a professora conseguiu indicar explicitamente que sua confiança a respeito da inferência também aumentaria, como mostra o trecho da entrevista seguir:

P.: Você diz que tem 9, numa escala de 0 a 10, de confiança que esse resultado se aplica ali. Se ao invés de colocar mais nove, eu colocasse 50?
A.: Eu ia ter mais confiança ainda.
P.: Por quê?
A.: Porque se é mais, a gente pode ter mais certeza, né?

A professora Ana também fez uso das ferramentas *Average* (Média) e *Ruler* (Régua) sem grandes dificuldades para chegar a resposta final à questão. Mesmo quando adicionarmos todos os 625 casos da população, Ana continuou a considerar as diferenças em relação às medidas as quais ela verificou em diferentes amostras.

6. Considerações finais

A manipulação das amostras por Ana junto ao *software*, como pode ser analisado, aconteceu a partir da mediação da pesquisadora, o que significa dizer que tais resultados não podem ser tomados apenas em função das possibilidades presentes nas ferramentas do *software*.

No decorrer dessa atividade, percebemos que a professora utilizou apenas três ferramentas para generalizar dados de uma amostra à uma população: *Average* (média), *Ruler* (régua) e *Hat* (identifica a tendência dos dados). A professora pode identificar aspectos de variação nos grupos dispostos na amostra. Esse achado nos fez pensar que é possível explorar nos sujeitos a relação entre heterogeneidade/homogeneidade e representatividade em amostras.

Percebemos ainda, que a possibilidade de visualização dos dados através da ferramenta *Plot* foi um elemento que facilitou na observação das diferentes distribuições da amostra. Na medida em que se aumentava o tamanho da amostra, a professora foi estabelecendo respostas mais seguras em relação à população.

Identificamos que o trabalho com amostras crescentes no *Tinkerplots* permitiu a professora compreender que amostras menores tendem a representar de forma menos confiável os dados de uma população. Sabemos, porém, que essa compreensão expressa uma ideia parcial sobre a representatividade em amostras, uma vez que faltam compreensões a respeito do processo de seleção da amostra e da variabilidade dos dados.

Apesar da boa execução da atividade, os dados não oferecem evidências sobre como a professora concebia um fenômeno aleatório e por isso, não podemos concluir que a mesma construiu uma compreensão conceitual sobre a amostragem aleatória simples. Para outros estudos, será interessante desenvolver atividades que explorem a construção de amostras aleatórias simples a fim de que numa investigação como essa, seja possível observar suas hipóteses a respeito dos fenômenos aleatórios.

Referências

Asseker, A. (2011). *O uso do TinkerPlots para a exploração de dados por professores de escolas rurais.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

Ben-Zvi, D. et al. (2011). Children's emergent inferential reasoning about samples in an inquiry-based environment. In: *Proceedings of the Seventh Conference of the European Society For Research In Mathematics Education*, Poland, Rzeszow.

Bolfarine, H. e Bussab, W. (2005.) *Elementos de amostragem*. São Paulo: Blucher.

Campos, C. R. et. al. (2011). Educação estatística no contexto da educação crítica. *Bolema 24*, 39, 473-494.

Franklin, C. et al. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) 14 report:* Alexandria, VA: American Statistical Association,

Hawkins, A. (1997) Myth-conceptions! In J. Garfield & G. Burrill (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistic*s (pp. 1-14). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Kazak, S. e Konold, C**.** (2010) Development of ideas in data and chance through the use of tools provided by computer-based technology. In: *Proceedings of the Eigth International*

Conference on Teaching Statistics. Slovenia: International Statistical Institute, 2010. Disponível em:

http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icots8/ICOTS8_8D2_KAZAK.pdf>.

Konold, C. (2006).Handling complexity in the design of educational *software* tools. In: *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*.Salvador.

Lévy, P. Cibercultura. São Paulo: Editora 34, 2000. 260.

Prodromou, T. (2011). Students' emerging inferential reasoning about samples and sampling. In: Anais do 23 biennial conference of the australian association of mathematics teachers. Mathematics: traditions and [new] practices, 2011. Disponível em: http://www.merga.net.au/documents/RP_PRODROMOU_MERGA34-AAMT.pdf. Acesso em: 30 ago. 2012.

Watson, J. M. (2004) Developing reasoning about samples. In: Ben-Zvi, D., Garfield, J. (Org.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fases en la resolución de problemas de probabilidad condicional y variables de investigación

Huerta Palau, M. Pedro y Arnau Bresó, Joaquín

Universitat de València

Resumen

En este trabajo, basándonos en el modelo de fases de Pólya (1957) para la resolución de problemas de matemáticas y en la interpretación que hacen de ellas Puig y Cerdán (1988) para los problemas aritméticos escolares, mostramos las fases por las que transita un resolutor de problemas ternarios de probabilidad condicional (Huerta, 2009) de enunciado verbal. Por otra parte, basados en una interpretación de las variables de investigación en resolución de problemas de Kilpatrick (1975), citadas en Kulm (1979), mostramos, mediante ejemplos, cómo la identificación y observación con algún nivel de detalle de dichas fases permite definir una serie de variables dependientes para la investigación del comportamiento de un resolutor de problemas de probabilidad condicional. Los problemas que usamos de ejemplo están formulados atendiendo a un conjunto de variables independientes que pueden mostrarse influyentes en la actuación del resolutor, en particular la estructura de los datos, el formato de expresión de los mismos y el contexto en el que se formula el problema, y que les convierte en una tarea difícil para resolutores incluso con una formación alta en matemáticas (Arnau, 2012).

Palabras clave: Probabilidad condicional, problemas ternarios, resolución de problemas, fases en el proceso de resolución, variables del proceso y variables del producto.

1. Introducción

Desde hace algún tiempo, algunos trabajos proponen que la investigación en el terreno del razonamiento probabilístico se sitúe también en el campo de la resolución de problemas de matemáticas (Huerta, 2009), particularmente, el razonamiento implicado en la resolución de problemas de probabilidad condicional.

Vista la resolución de problemas de probabilidad condicional como un proceso, los resolutores, a lo largo del mismo, han de tratar con ella o bien como una cantidad conocida, por tanto informada en el problema, o bien como una cantidad desconocida, y por tanto preguntada. Así que, cuando se plantea un problema a un resolutor de lo que se trata es de enfrentarlo ante situaciones en las que la probabilidad condicionada no sea meramente la respuesta a un solicitado juicio subjetivo sobre un determinado suceso sino que sea como consecuencia del establecimiento de relaciones con otras probabilidades. Si es así, entonces los resolutores han de interpretar la probabilidad condicional y usarla, si es una cantidad conocida, o calcularla si es desconocida. Interesa entonces el significado de uso que los resolutores proporcionan a dicha probabilidad a lo largo del proceso y a su relación con el resto de probabilidades.

Por el hecho de considerar la resolución de problemas como un proceso, su observación puede hacerse, bien como dice Pólya (1957), al describirlo mediante un modelo de 4 fases, bien como dicen Puig y Cerdán (1988) quienes interpretando el modelo de Pólya amplian el número de fases permitiendo así describir el proceso de resolución con más detalle. Optamos por partir de éste último (lectura, comprensión, traducción, cálculo, solución y revisión-comprobación) ya que "la razón por optar por una subdivisión más menuda (de las fases) es que permite poner el énfasis en algunos aspectos del proceso, o

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 327-334). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

precisar mejor dónde predomina cada tipo de dificultad y, por tanto, hace posible organizar sugerencias para la instrucción en función de ello" (p. 25).

Por consiguiente, parece prometedor analizar la resolución de los problemas de probabilidad condicional con cierto detalle, del modo en que es propuesto en este trabajo, propuesta que es fruto de la experiencia en investigaciones anteriores en las que hemos actuado de este modo. No mostramos resultados de dichas investigaciones, aspectos que, no obstante, pueden encontrarse en las referencias citadas, sino que mostraremos cómo hemos observado las fases en resoluciones escritas y cómo de esta observación han surgido las variables que han servido para su posterior el análisis.

2. Objetivos

Dado que este no es un trabajo que reporte una investigación en particular, nos referiremos a los objetivos de la comunicación que presentamos y que podemos resumir en estos dos:

1. Mostrar cómo, a partir de una resolución escrita, pueden identificarse fases en el proceso de resolución de un problema de probabilidad condicional, y
2. Mostar cómo la resolución de un problema puede analizarse con la consideración de un conjunto de variables dependientes observadas en cada una de las fases anteriores.

Por tanto, dependiendo de las variables independientes que se consideren ligadas a la formulación de los problemas, por ejemplo, el número de probabilidades condicionales conocidas y/o el contexto y el formato de expresión de los datos, la probabilidad condicionada puede estar presente en todas y cada una de esas fases del proceso de resolución, ya sea de un modo explícito o implícito, en su relación con otras cantidades conocidas del problema. En este sentido, puede examinarse con un mínimo detalle el uso de dichas cantidades, de ahí el interés por describir lo que pasa en cada una de las etapas o fases del proceso de resolución.

3. Elementos teóricos previos

Los problemas a los que nos referiremos en este trabajo son los que Cerdán y Huerta (2007) llamaron problemas ternarios de probabilidad condicional. Éstos se clasifican en 4 familias de problemas, atendiendo al número de probabilidades condicionadas conocidas que pueden considerarse en un enunciado de un problema, y en 20 subfamilias si a cada una de ellas se le hace participar el número de probabilidades marginales y conjuntas adicionales que, hasta un máximo de tres, completan su formulación (Huerta, 2009). La red de relaciones entre las probabilidades condicionales, las marginales y conjuntas necesaria para resolver el problema pueden dar una idea inicial sobre grado de complejidad del problema. Así, el problema que se usará para ejemplificar lo que decimos en este trabajo es ternario, formulado con dos probabilidades marginales y una conjunta, preguntándose al fin por una probabilidad condicional. Además está formulado en un contexto particular en el que las probabilidades conocidas se expresan por medio de cantidades expresadas en porcentajes. En nuestro trabajo, toda cantidad se ve como una terna (x, S, f) en el que x es un número, S una proposición que describe a x (o si se quiere, abusando del lenguaje, x mide a S) y f el formato mediante el cual se expresa el número.

La resolución de un problema puede verse como un proceso que comienza con la lectura de su enunciado y concluye con una respuesta a la pregunta formulada. Muchos autores han tratado de describir como es este proceso, siendo el llamado modelo de las 4 fases de Pólya (1954) uno de ellos y de los más conocidos. No obstante en este trabajo se considerará una visión más fina de este modelo, a partir del propuesto por Puig y Cerdán

(1988), que permite observar el proceso de resolución de problemas aritméticos con un mayor grado de detalle y describir e intuir en qué momento de la resolución de dichos problemas aparecen o pueden aparecer las dificultades en los resolutores. Este modelo presta atención a las fases que los autores llaman de lectura, comprensión, traducción, cálculo, solución y revisión-comprobación. Partimos pues de esta visión de las fases del proceso de resolución, pues vemos la resolución de los problemas ternarios de probabilidad condicional como un caso particular de la resolución de los problemas aritmético-algebraicos en algún momento del proceso, pero con la sustancial diferencia de que en aquéllos las cantidades tienen una fuerte componente conceptual, pues no en balde se refieren bien explícitamente a probabilidades marginales, conjuntas y condicionales bien implícitamente a ellas, siendo en este caso el resolutor quien las interpreta en un sentido probabilístico o no.

En Kulm (1979) puede verse una clasificación de las variables para la investigación en resolución de problemas de matemáticas en variables independientes y variables dependientes. De éstas segundas pueden considerarse lo que en su momento se llamó variables del proceso y del producto, que en brevedad describen lo que el resolutor hace hasta justo antes de dar una respuesta al problema y lo que proporciona como tal. En el trabajo citado también se muestra como estas variables dependientes están relacionadas con las fases de Pólya. Lo que mostramos aquí es como interpretamos esto mismo para una familia particular de problema de matemáticas, los problemas ternarios de probabilidad condicional.

4. Instrumentos

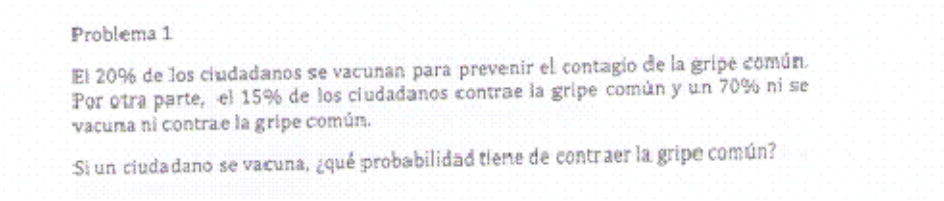
El problema de probabilidad condicional que vamos a considerar como ejemplo en este trabajo es el primero de una serie de problemas ternarios de probabilidad condicional con los que se han elaborado diferentes cuestionarios. Este problema, además, se ha formulado en versiones diferentes, dependiendo de la muestra de resolutores a los que se le ha administrado y de los objetivos particulares de la investigación en la que estaba implicado. Fundamentalmente las versiones difieren en cuanto al formato de expresión de las cantidades conocidas y desconocidas. Aunque, para lo que nos interesa en este trabajo, este hecho no es influyente. Tal vez sí en cuanto a los resultados a los que se pudiera llegar con posterioridad.

Con el fin de hacer nuestra propuesta, usaremos un par de resoluciones escritas que tomadas como ejemplo permitirán observar con algún detalle el proceso de resolución. Estas resoluciones corresponden a dos estudiantes del máster de formación del profesorado de matemáticas de la Universitat de València y se han extraído de la investigación llevada a cabo por Arnau (2012). Estos estudiantes, en el momento de proponerles la resolución de los problemas, no habían recibido enseñanza sobre didáctica de las probabilidades aunque se les supuso suficientemente preparados en este campo de las matemáticas. En el contrato entre el investigador y el resolutor, entre otras cláusulas, se les solicitó que explicasen por qué hacen las cosas como las hacen y que una vez obtenida la solución de un problema interpretasen la respuesta obtenida. En el anexo encontraran dos resoluciones escritas completas del mismo problema, que se identifica como Problema 1.

5. Resultados. De las resoluciones escritas a las variables para el análisis.

Como hemos dicho, en el anexo ~~encontramos~~ pueden verse dos resoluciones del mismo problema por estudiantes distintos. En la primera (Anexo 1) es relativamente cómodo distinguir las diferentes etapas por las que transita un resolutor competente del problema, mientras que en la segunda (Anexo 2) la actuación no puede calificarse de competente, apareciendo errores en la resolución en algún momento o fase de la resolución.

No siempre en una resolución escrita son fácilmente identificables dichas fases. El enunciado del problema se presenta en la Figura 1.


Problema 1

El 20% de los ciudadanos se vacunan para prevenir el contagio de la gripe común. Por otra parte, el 15% de los ciudadanos contrae la gripe común y un 70% ni se vacuna ni contrae la gripe común.

Si un ciudadano se vacuna, ¿qué probabilidad tiene de contraer la gripe común?

Figura 1. Enunciado de un problema ternario de probabilidad condicional (Problema 1) con dos probabilidades marginales y una conjunta conocidas. Se pregunta por una probabilidad condicionada.

En ambos casos, lo que constituye la resolución del problema, y que va a ser objeto de análisis por el investigador, es todo aquello que el resolutor escribe justo debajo de su enunciado hasta que resalta de algún modo lo que constituye para él la respuesta a la pregunta planteada.

En primer lugar (consideremos la primera resolución en Anexo 1) si trazamos una línea horizontal imaginaria justo por debajo de la primera tabla 2x2, en la que el resolutor muestra los datos conocidos, todo lo que hace para leer y comprender el problema se ubica desde el enunciado hasta dicha línea horizontal. En la segunda resolución (Anexo 2) esta fase se ubica en el espacio que queda al trazar una línea vertical imaginaria que deja a la derecha un texto escrito y a la izquierda un gráfico. En esta fase los resolutores, seguramente después de una lectura ordinaria del texto del problema, pretenden hacer una lectura analítica del mismo, es decir, centrarse en los datos conocidos y desconocidos. Consecuencia de esta lectura analítica es que uno decide abordar el problema en el campo de las probabilidades (Figura 2), mientras que el otro pretende una resolución en el propio contexto del problema. En el primero de los casos se muestra una traducción de las cantidades conocidas al sistema de signos de las probabilidades, en el otro caso no. Ambos resolutores hacen una lectura analítica y organizada de las cantidades conocidas. El primero mediante una tabla de contingencia 2x2 (Figura 3) y el segundo mediante un diagrama de Venn (Anexo 2). La enseñanza, no obstante, proporciona otros dos medios organizados para realizar lecturas analíticas: la lista organizada y el diagrama de árbol, medios que no usan ninguna de los dos resolutores.

Este primer análisis de las resoluciones sugiere la posibilidad de considerar dos tipos de variables, la que denominamos variable del *enfoque* y la que denominamos *organización de la información*. La variable del enfoque, inicialmente, puede tomar los valores *probabilístico* o *aritmético*. La variable de organización de la información puede tomar los valores: lista, tabla, árbol y diagrama de Venn, como más habituales. En efecto, puede darse el caso de que un resolutor pueda necesitar de todos estos medios de organización para interpretar correctamente la información contenida en el enunciado de un problema.

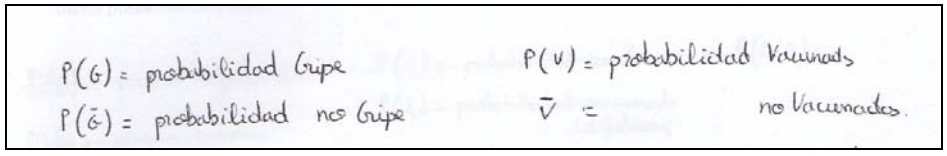


Figura 2. Sistema de signos con el que el resolutor identifica las descripciones de las cantidades (básicas) implicadas en el enunciado del problema.

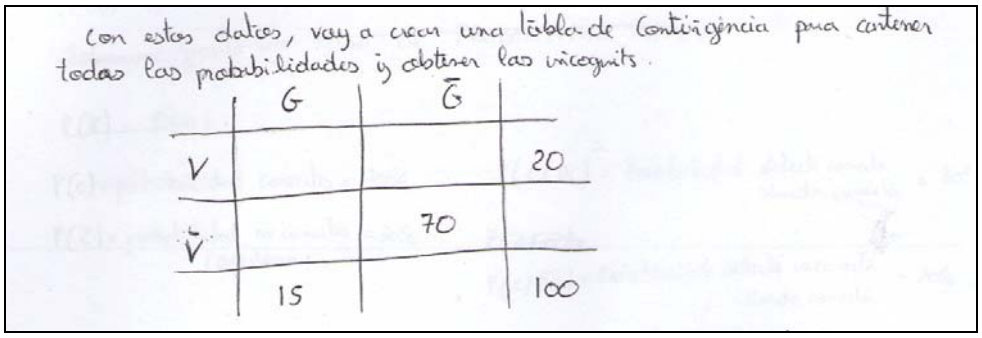


Figura 3. Tabla de contingencia 2x2 que sirve en la resolución para identificar las cantidades conocidas y desconocidas y darles un significado concreto derivado de su posición en la tabla.

Si ahora trazamos otra línea imaginaria entre la anterior y lo que parece ser la respuesta dada a la pregunta del problema, vemos otra fase en el proceso de resolución que llamamos fase de cálculos. Ésta, a su vez, la podemos distinguir en otras dos: los cálculos intermedios y el cálculo final conducente a la respuesta del problema. En la primera resolución esta distinción es muy visible, pues la primera fase de cálculos intermedios (Figura 4) comprende lo que se escribe entre las tablas 2x2 (ambas incluidas, pues no deja de ser éste el plan que el resolutor ha considerado para la resolución del problema) y el cálculo final (Figura 5) que abarca desde que el resolutor se plantea la pregunta del problema y si ésta la puede encontrar al relacionar las cantidades conocidas de que dispone y cómo hacerlo. Esto mismo es apreciable en la segunda resolución, pues hasta que el resolutor responde a la pregunta del problema obtiene, mientras, las cantidades intermedias que considera necesarias para ello. En este caso, sin embargo, la lectura organizada del problema mediante un diagrama de Venn no parece proporcionar al resolutor un plan de resolución, sino una comprensión de las cantidades conocidas y sus relaciones.

Vemos también que la observación con algún detalle de esta fase de la resolución del problema nos ha proporcionado nuevas variables para su consideración. De una parte, la presencia o no de cálculos en la resolución mediante la consideración de lo que denominamos variable *cálculos intermedios* y *cálculo final*. Puede pensarse que todo resolutor proporcionará una respuesta al problema que será una cantidad calculada. Seguramente que el lector apreciará que este problema admite una respuesta subjetiva, independientemente de los datos proporcionados por el problema, asunto que ha sido ampliamente investigado por la psicología dando lugar a los conocidos sesgos en la probabilidad condicional (la relación causal si alguien se vacuna no enferma). Claro que los cálculos pueden estar afectados de error, por lo que a estas dos variables siempre se le acompaña las variables que identifican la presencia o no de errores en dicho cálculo.

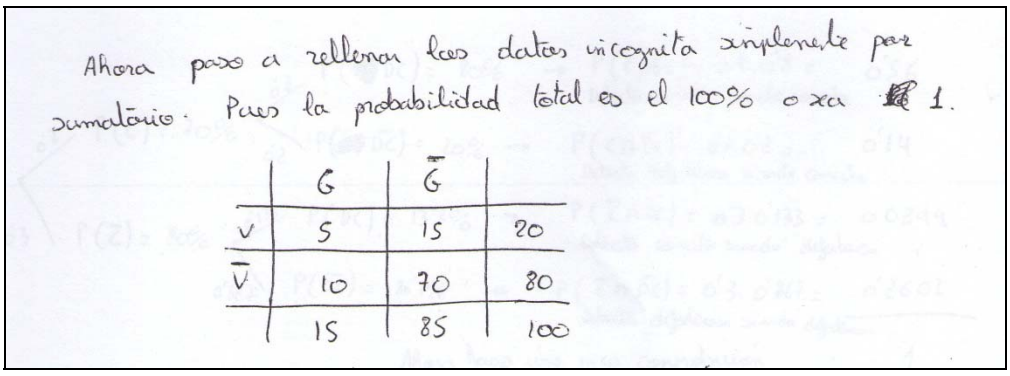


Figura 4. Tabla de contingencia 2x2 que sirve en la resolución para calcular las cantidades intermedias dándoles el significado concreto derivado de su posición en la tabla.

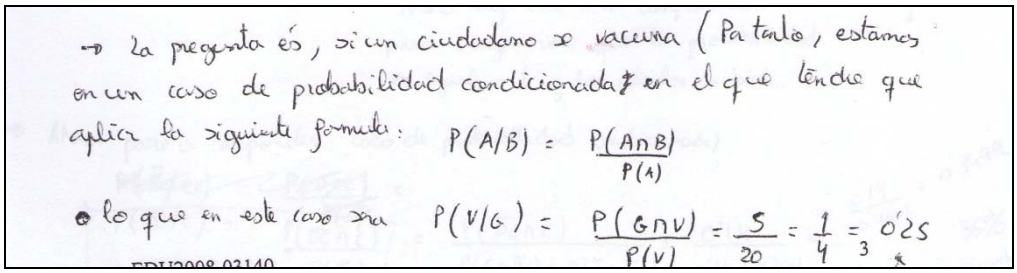


Figura 5. Fase de la resolución en el que se muestra un cálculo específico y final para responder a la pregunta formulada en el problema y la manera en la que se hace.

Lo que queda sin identificar todavía en la resolución escrita es lo que constituye la respuesta a la pregunta formulada por el problema, si es que el resolutor ha proporcionado alguna. El resolutor suele destacar ésta entre el conjunto de las cosas escritas y que constituyen la solución proporcionada (Figura 6). Otras veces ha de ser el investigador quien determine si ha habido respuesta a la pregunta formulada y qué constituye ésta. Como el problema pide una respuesta a una cantidad desconocida, se espera que el resolutor conteste en términos de cantidades, es decir, mediante las tres componentes de la cantidad: numérica, descripción y formatos adecuados. Responder en estos términos le permitirá interpretar la respuesta dada, si es el caso. Puede observarse (Figura 6) como en la primera resolución la respuesta es la cantidad (25, contraen la gripe si se vacunan, %), mientras que en la segunda (Anexo 2) es (0'05, vacunarse y coger gripe, probabilidades).

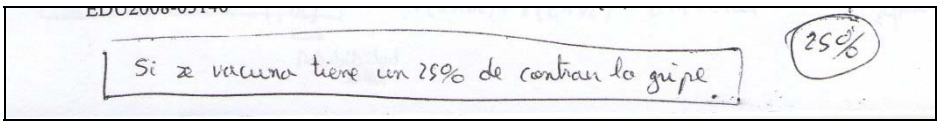


Figura 6. El resolutor resalta lo que es la respuesta a la pregunta y la interpreta mediante una cantidad.

Así pues, de nuevo, prestar atención a la fase de solución del problema nos ha proporcionado la posibilidad de analizarla desde la consideración de nuevas variables. Así, mediante la variable que llamamos *respuesta* identificamos la presencia de aquellos resolutores que dan o no una respuesta a la pregunta del problema, sea ésta del tipo que sea: calculada o asignada. La manera en la que se expresa esta respuesta la analizamos mediante la variable que llamamos *número* que identifica respuestas numéricas y, a la vez, si éstas son correctas o incorrectas, y las variables *descripción correcta* o *descripción incorrecta* (del número) que determina si hay descripción del número y cómo la calificamos.

6. Conclusiones.

En este trabajo hemos mostrado como el proceso de resolución de problemas de probabilidad condicional es un proceso complejo que puede recorrer varias etapas. Algunos estudios han mostrado como estos problemas son una tarea difícil a la que se enfrentan muchos estudiantes en diferentes niveles educativos (Carles, Cerdán, Huerta, Lonjedo y Edo, 2009; Huerta, Cerdán, Lonjedo y Edo, 2011). Es por eso que reducir su análisis y conclusiones correspondientes basándose en el hecho de si el resolutor proporciona una respuesta correcta o no a la pregunta formulada en el problema, parece cuanto menos que descorazonador por la cantidad de información que se deja de lado y que puede dar luz sobre el comportamiento que conduce al resolutor a proporcionar dicha respuesta. Es, también, una tarea compleja para el investigador que se interesa por estudiar los procesos de resolución de los problemas. Cómo convertir la información en variables para su posterior análisis. Es lo que hemos hecho aquí, mostrando como cualquier estudio sobre la resolución de los problemas de probabilidad condicional implica a un conjunto de, cuanto menos, 14

variables relacionadas, dos describiendo el enfoque de la resolución, cuatro describiendo el proceso de lectura y comprensión del enunciado, otras cuatro describiendo la presencia o no de cálculos que conducen a la respuesta del problema y por fin otras cuatro que dan cuenta de la respuesta a la pregunta formulada y la forma en que es proporcionada. Estas las consideramos básicas y con cierto carácter generalista pues pueden tomarse en consideración independientemente de los sujetos, como hacen por ejemplo, Edo y Huerta (2010) con estudiantes de secundaria y Huerta, et al. (2011) y Amorós (2012) con estudiantes ya graduados, futuros profesores de secundaria. Pero no se agotan en ellas mismas, pues dependen también del interés del investigador en profundizar en alguna de ellas en particular, como hace Arnau (2012) quién investiga no solamente si hay presencia de cálculos en la resolución sino de qué tipo son estos y si están afectados de error.

Referencias

Amorós, R. (2012). *Un ejemplo de análisis de datos mediante la inferencia bayesiana en resolución de problemas de probabilidad condicionada.* Memoria de investigación. Master de Investigación en Didácticas Específicas. Universitat de València.

Arnau, J. (2012). *Un estudio exploratorio de la resolución de problemas de probabilidad condicional centrado en la fase de cálculo*. Memoria de investigación. Master de Investigación en Didácticas Específicas. Universitat de València.

Cerdán, F.; Huerta, M. P. (2007). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática*, 19(1), 27-62.

Edo, P. & Huerta, M. P: (2010). Estudios sobre los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel N_0. Comunicación presentada en el grupo de Probabilidad y Estadística. Lleida: SEIEM. Edición en CD.

Huerta, M. P., Cerdán, F., Lonjedo, M. A., y Edo, P. (2011). Assessing difficulties of conditional probability problems. En M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 807-817. University of Rzeszów, Poland.

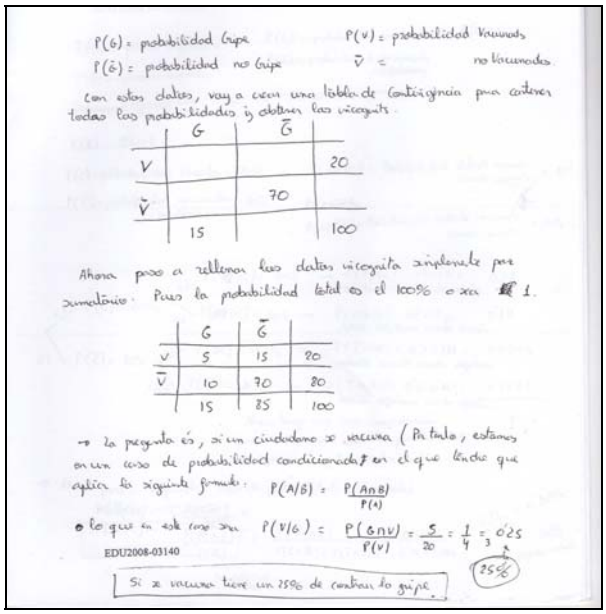
Huerta, M. P. (2009). On conditional probability problem solving research – Structures and context. En M. Borovcnik y R. Kapadia (2009), Special issue on "Research and Developments in Probability Education". *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 163-194.

Kulm, G. (1979). The classification of problem-solving research variables. En G. A. Golding y C. E. McClintock (Eds.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving* (p. 1-12). ERIC.

Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton N Y: Princeton University Press. (Traducción castellana: *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, 1965)

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Anexo I



P(G) = probabilidad Gripe P(V) = probabilidad Vacunados
P(Ḡ) = probabilidad no Gripe V̄ = no Vacunados

Con estos datos, voy a crear una tabla de contingencia para obtener todas las probabilidades y obtener las incognitas.

	G	Ḡ	
V			20
V̄		70	
	15		100

Ahora paso a rellenar los datos incognita unicamente para sumatorio. Pues la probabilidad total es el 100% o sea 1.

	G	Ḡ	
V	5	15	20
V̄	10	70	80
	15	85	100

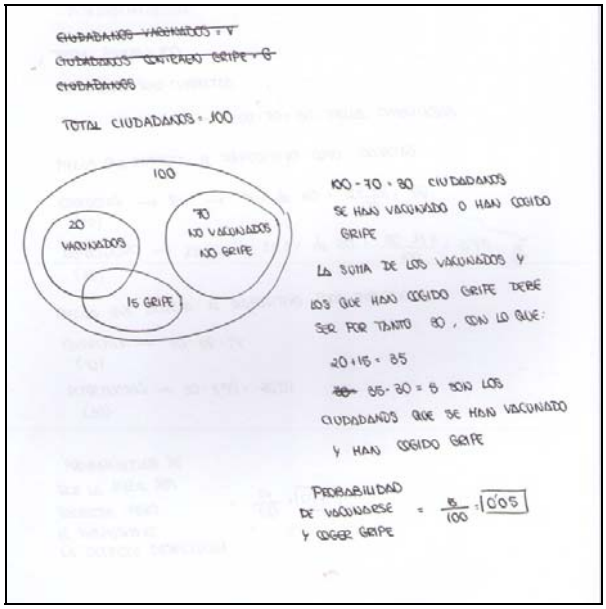
→ La pregunta es, si un ciudadano se vacuna (Pintado, estamos en un caso de probabilidad condicionada en el que tenemos que aplicar la siguiente formula: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

• Lo que en este caso sera $P(V/G) = \frac{P(G \cap V)}{P(V)} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0'25$

EDU2008-03140

Si se vacuna tiene un 25% de contraer la gripe (25%)

Anexo II



~~CIUDADANOS VACUNADOS = V~~
~~CIUDADANOS CONTRAEN GRIPE = G~~
~~CIUDADANOS~~

TOTAL CIUDADANOS = 100

100
20 VACUNADOS
70 NO VACUNADOS NO GRIPE
15 GRIPE

100 - 70 = 30 CIUDADANOS SE HAN VACUNADO O HAN COGIDO GRIPE

LA SUMA DE LOS VACUNADOS Y LOS QUE HAN COGIDO GRIPE DEBE SER POR TANTO 30, CON LO QUE:

20 + 15 = 35

~~30~~ 35 - 30 = 5 SON LOS CIUDADANOS QUE SE HAN VACUNADO Y HAN COGIDO GRIPE

PROBABILIDAD DE VACUNARSE Y COGER GRIPE = $\frac{5}{100} = 0'05$

Formação estatística dos licenciandos em matemática no Brasil

Bezerra, Lucicleide y Gitirana, Verônica

UFPE

Resumo

O presente artigo é parte de uma pesquisa de mestrado que analisa a inserção da estatística nos currículos da formação de professores nos cursos de licenciatura em matemática no Brasil, investigando qual o enfoque dado à formação para ensinar estatística. A metodologia utilizada foi análise documental em três etapas, a primeira junto ao Ministério da Educação (MEC) para mapear os cursos de Licenciatura em Matemática autorizados e a localização das Instituições de Ensino Superior (IES) e montagem de uma amostra. Na segunda etapa, analisamos as matrizes curriculares para identificarmos as disciplinas que possam abordar a formação para o Ensino da Estatística. Na terceira etapa, analisamos as ementas buscando identificar conteúdos, habilidades e competências para o ensino da Estatística incluídos nos cursos. Nossos resultados preliminares apontam a presença de disciplinas de conteúdo estatístico em todas matrizes curriculares das IES analisadas. No entanto, nenhuma das ementas já analisadas traz de forma explícita a preocupação com a Educação Estatística.

Palavras-chaves: Educação Estatística; Currículo; Formação de Professores de Matemática.

1. Introdução

Hoje a estatística está presente em nossas vidas de tal maneira que tem se tornado uma ferramenta indispensável para qualquer pessoa que viva em sociedade. Tal presença observa-se nas empresas, nos meios de comunicação de maneira geral, nos órgãos governamentais, que se utilizam da estatística no planejamento de ações e na apresentação dos seus dados através de gráficos e tabelas. É difícil encontrar uma situação em que não se possa aplicar a Estatística para solucionar problemas, para obter produtos melhores, métodos mais eficazes e mais eficientes ou para diminuir riscos.

Nas Instituições de Ensino Superior (IES) em várias áreas de formação, em muitos cursos da área de exatas, saúde, humanas e ciências sociais, tem nas suas matrizes curriculares a presença de disciplinas de estatística. A presença da estatística na sociedade trouxe consigo uma necessidade de ensino dessa ciência a um número de pessoas cada vez maior. Com isso, nos últimos anos a maioria dos países introduziu em seus programas de matemática, conteúdos de estatística, como uma das unidades curricular. (Lopes, 1998)

No Brasil, desde a década de 90, os documentos oficiais já incorporam orientações para inclusão da formação estatística como campo da Matemática escolar. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental e do Médio (BRASIL, 1997, 1998, 1999) de Matemática, assim como as Orientações Curriculares do Ensino Médio (BRASIL, 2006), contém recomendações para o ensino no bloco Tratamento de Informações, que inclui os tópicos de Probabilidade e Estatística.

O trabalho desse bloco objetiva a iniciação à Estatística e Probabilidade, visando desenvolver diversas competências, como coletar dados, organizá-los e representá-los na forma de gráficos ou tabelas, interpretá-las criticamente transformando-os em informação. Busca-se assim formar cidadãos críticos nesse mundo rodeado de informações.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura abalizam que para a licenciatura serão incluídos, no conjunto dos conteúdos

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 335-342). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

profissionais, os conteúdos da Educação Básica, consideradas as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores em nível superior, bem como as Diretrizes Nacionais para a Educação Básica e para o Ensino Médio. (BRASIL, 2001. p.6)

É preciso investigar as influências das instruções oficiais nas Instituições de Ensino Superior (IES) esclarecendo se as mesmas estão trazendo em suas matrizes curriculares disciplinas que favoreçam a formação estatística do licenciando. Dentre esse escopo, selecionamos investigar a formação Estatística para aqueles que lecionam nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, enfim as Licenciaturas em Matemática. Identificando o currículo prescrito nos cursos presenciais de formação de professor de Matemática nas disciplinas que auxiliam a formar o professor para ensinar Estatística nos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil.

2. Currículo, Diretrizes e Parâmetros Curriculares

Para Cardoso (2007), diversos autores, incluindo a International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), veem o currículo como um processo contínuo de decisões sobre os diferentes elementos que o integram e em que intervêm vários atores, fazendo uma distinção entre níveis de currículo. A ICMI (1986) apresenta os três níveis seguintes:

1. O primeiro nível diz respeito às intenções dos autores, apresentadas nos documentos oficiais: o currículo enunciado;
2. O segundo nível reporta-se à forma como as orientações curriculares oficiais são concretizadas, designadamente pelos professores: o currículo implementado;
3. O terceiro e último nível é o que os alunos realmente aprendem: o currículo adquirido.

Em 2013 completa-se dezoito anos de publicação da versão preliminar dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1995) para o Ensino Fundamental no Brasil, posteriormente publicou em 1997 e 1998, respectivamente, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1ª a 4ª séries e de 5ª a 8ª séries (equivalente do 1º ao 9º anos). Segundo Lopes (2006) o documento tinha como intenção oferecer uma proposta ministerial para a construção de uma "base comum nacional" para o Ensino Fundamental brasileiro e ser uma orientação para que as escolas formulassem seus currículos, levando em conta suas próprias realidades, tendo como objetivo do ensino de 1ª a 8ª série a formação para uma cidadania democrática, inserindo assim o Brasil no projeto de currículo nacional e no contexto da globalização de políticas educacionais.

Na seleção de conteúdos de Matemática para o ensino fundamental, traz a orientação que os currículos devem contemplar conteúdos que permitam ao cidadão tratar as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória. (BRASIL, 1997, 1998). Com a finalidade de fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente em seu dia-a-dia.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias traz que os alunos devem ter:

> Habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das

> Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas (BRASIL, p.44-45).

As propostas curriculares de matemática têm procurado justificar a importância da inserção e a relevância da estatística e da probabilidade na formação dos estudantes, uma vez que serão responsáveis pelo ensino de tal conhecimento nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Nas diretrizes curriculares para cursos de matemática não traz explicitamente orientação para os conteúdos estatísticos, menciona apenas que para a licenciatura serão incluídos, no conjunto dos conteúdos profissionais, os conteúdos da Educação Básica, consideradas as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores em nível superior, bem como as Diretrizes Nacionais para a Educação Básica e para o Ensino Médio.

4. Conhecimentos necessários à docência

O que precisa saber um professor de matemática para uma eficaz prática docente? Quais são os conhecimentos que um professor de matemática precisa ter a despeito da Educação Estatística? O estudo a respeito do conhecimento base surge na década de 80 em âmbito internacional como campo de pesquisa e tem como finalidade identificar um repertório de conhecimentos do ensino que serviriam para a elaboração de programas de formação de professores (PIRES, 2008).

Muitas são as produções na atualidade que usam tipologias e classificações diferentes para tal campo de pesquisa. Shulman (1986) e García (1992) utilizam o termo conhecimento, ao fazer referência àquilo que os professores deveriam compreender sobre a docência para favorecer um processo de ensino-aprendizagem eficiente. Shulman (1986, 1987) chama de Base de conhecimentos da docência e García (1992) de Conhecimento Profissional dos Professores.

Para Shulman (2005,p. 5), o “conhecimento sobre a docência” é aquilo que os “professores deveriam saber, fazer, compreender ou professar para converter o ensino em algo mais que uma forma de trabalho individual e para que seja considerada entre as profissões prestigiadas”; enquanto que para García (1992, p.1), é o conjunto de “conhecimentos, destrezas, atitudes, disposições que deverá possuir um professor do ensino”.

Shulman (1987) discursa sobre quais qualidades e profundidade de compressão, habilidades e capacidades, traços e sensibilidades transformam uma pessoa em um professor competente e define isto como “conhecimento base” para a docência. O autor explicita várias categorias dessa base de conhecimento (conhecimento de conteúdo específico, conhecimento pedagógico geral, conhecimento do currículo, conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento dos alunos e de suas características, conhecimentos dos contextos educacionais, conhecimento dos fins, propósitos e valores educacionais) que podem ser agrupadas em: conhecimento do conteúdo específico conhecimento pedagógico geral e conhecimento pedagógico do conteúdo.

5. Conhecimentos estatísticos

A Estatística está presente em diversas áreas do conhecimento como importante ferramenta para estudo e análise dos diversos fenômenos o que vem fortalecer que essa disciplina é transdisciplinar e caminha pelas mais variadas áreas de formação acadêmica e profissional. Para Campos (2011) apesar da importância da estatística nas mais variadas áreas, o ensino de Estatística, vem, há tempos, apresentando problemas, sendo responsável

por muitas das dificuldades enfrentadas pelos alunos em suas atividades curriculares. Segundo o autor as dificuldades pedagógicas têm incentivado pesquisadores a buscar as origens de tais dificuldades. Cazorla, Kataoka, Silva (2010) afirmam que a partir da década de 70, surgiu mundialmente um movimento que reconheceu a importância do raciocínio probabilístico, para romper com a cultura determinística nas aulas de Matemática.

No Brasil, a Estatística passa a fazer parte da estrutura curricular da disciplina de Matemática. Tais autoras afirmam ainda que a Educação Estatística surgiu da necessidade de investigar como podemos ajudar nas dificuldades dos professores nos cursos do Ensino Superior ao ensinarem conceitos e procedimentos aos usuários de Estatística. A partir dessa necessidade dar-se início em meados de 1990, uma nova área de atuação pedagógica denominada Educação Estatística (EE). Tendo essa nova área de pesquisa tem como objetivo estudar e compreender como as pessoas ensinam e aprendem Estatística.

Campos (2007) afirma que diversos autores, tais como Rumsey (2002), Garfield (1997), Chance (2002), delMas (2002), publicaram estudos nos quais eles identificam algumas das principais metas do ensino de Estatística. Esses autores defendem que o planejamento da instrução deve pender para o desenvolvimento de três importantes competências, quais sejam:

> A literacia que pode ser vista como o entendimento e a interpretação da informação estatística apresentada, o raciocínio representa a habilidade para trabalhar com as ferramentas e os conceitos aprendidos e o pensamento leva a uma compreensão global da dimensão do problema, permitindo ao aluno questionar espontaneamente a realidade observada por meio da Estatística, sem as quais não seria possível aprender ou apreender os conceitos fundamentais dessa disciplina. (Campos, 2011. p. 17-18.)

Perrenoud (1999, p. 15), compreende “competência” no sentido de capacidade de mobilizar diversos recursos cognitivos (saberes, capacidades, informações) para enfrentar, com pertinência e eficácia, uma série de situações.

6. Método

Para que pudéssemos analisar a formação estatística nas licenciaturas em matemática na modalidade presencial em todo o Brasil, fez-se necessário iniciar pelo levantamento quantitativo da população a se estudar. Nesse sentido, mapeamos as Instituições de Ensino Superior (IES) autorizadas pelo (MEC) que ofertavam tais cursos. Para tal utilizamos a técnica de análise documental.

A análise documental compreende a identificação, a verificação e a apreciação de documentos para determinado fim. Para Lüdke e André (1986) é considerado documento “quaisquer materiais escritos que possam ser utilizados como fonte de informação.” Tal técnica é utilizada na busca de identificar informações presentes nos documentos a partir de questões de interesse. Entre suas vantagens podemos citar o fato que, ela é uma fonte estável e rica na busca de informações, tem um baixo custo, complementa informações e indica problemas (GIL, 2002).

A análise documental está presente inicialmente na identificação da população feita através da análise do relatório do MEC (BRASIL, 2012) no qual selecionamos os cursos de licenciatura autorizados no Brasil. No segundo momento o levantamento do tamanho populacional de cada um dos municípios (IBGE, 2012) onde tais cursos estão presentes. Após esse levantamento populacional e realização do planejamento amostral com as variáveis do estudo que foram selecionadas por estratos, o estrato maior são as 5 Regiões, dentro desse estrato cursos de IES públicas e privadas, todos os estados e Capitais, Municípios considerados grandes e pequenos em relação a seu Estado.

A análise documental das matrizes dos 76 cursos, distribuídos em 44 IES. A análise documental das ementas das disciplinas de conteúdos estatísticos e probabilísticos e análise documental das disciplinas de conteúdos que auxiliem no conhecimento didático e conhecimento didático do conteúdo.

7. Resultados da Pesquisa

Fizemos o download do relatório do MEC (E-Mec, 2012) com a informação de todos os cursos de matemática autorizados, que totalizavam 1.163 (mil, cento e sessenta e três) sendo esses cursos de matemática (presencial e à distância), desses 930 (novecentos e trinta) cursos de licenciatura em matemática presencial, distribuídos em todos os 26 estados e no Distrito Federal, sendo 143 em processo de extinção, 87 extintos e 709 em atividade. Dentre os 709 cursos que estão em atividade selecionamos como população de nossa investigação os 356 cursos avaliados pelo ENADE-2011. Um mapeamento da distribuição geográfica desses cursos nos permitiu ver uma grande concentração dos cursos está na região sudeste com 42% dos cursos, como revela o cartograma a seguir (Figura 1).



Figura 1. Distribuição dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil por Regiões e Estados (avaliados pelo ENADE)

Esses cursos encontram-se distribuídos em 146 IES, algumas dessas IES possuem mais de um curso autorizado para a mesma localidade ou em localidades diferentes. A maior parte dos 356 cursos mapeados é da rede privada de ensino, como revela a Figura 2.

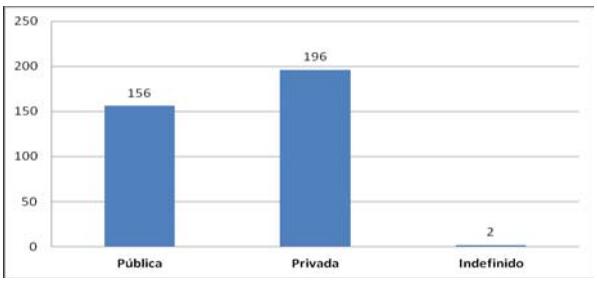


Figura 2. Distribuição dos cursos por rede de ensino. Fonte: MEC-2012

A rede pública tem um total de 9.449 vagas autorizadas com carga horária mínima de 3015 e a rede particular com 19.493 vagas autorizadas, com carga horária mínima de 2.943. Percebemos, portanto, que as IES particulares são responsáveis por 67% das vagas autorizadas em todo o Brasil. Um levantamento junto ao Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) da localização geográfica por regiões, estados e municípios e do tamanho da população de cada um dos municípios onde se localizam os 356 cursos de licenciatura em matemática, nos permitiu classificar os cursos por localização geográfica identificando os das capitais, municípios com maior população e municípios com menor população para que em nossa amostra possa conter cursos de municípios com características heterogêneas.

Após o mapeamento dos cursos autorizados, identificando a quantidade e a localização geográfica de cada um dos cursos, realizamos uma amostragem estratificada proporcional, que consiste em selecionar os elementos da amostra entre os vários estratos, em número proporcional ao tamanho de cada um dos estratos. Este método tem a vantagem de ser mais eficiente do que os métodos de amostragem simples ou sistemática, pois é mais econômico em termos de tempo e dinheiro e fornece resultados com menor probabilidade de erro associada.



Figura 3 - Distribuição dos 76 cursos da amostra por estados

Extraímos aproximadamente 22% dos cursos das 5 regiões proporcional ao total de cursos por região e estados. Nessa amostra temos representantes das 5 regiões, dentro das regiões representantes de todos os estados e do Distrito Federal, das capitais, de municípios com maiores e menores população e dentro desses estratos instituições públicas e privadas. A distribuição dessa amostra podemos ver no Figura 3.

A etapa seguinte consistiu na análise documental das matrizes curriculares das IES disponíveis nos sites de cada um dos 76 cursos que compõem nossa amostra com o objetivo de mapear as disciplinas de conteúdo estatístico e probabilístico e as disciplinas que possam ser o lócus de discussão sobre a cognição, a epistemologia, a história, as metodologias de ensino e as práticas de ensino relativas à Estatística, além do uso das novas tecnologias na estatística e no ensino e aprendizagem da estatística. Em todas as matrizes curriculares das 44 IES dos 76 cursos possuem disciplinas de conteúdos estatísticos (Ver Tabela 3).

Tabela 3. Disciplinas de conteúdos estatísticos e probabilísticos

Disciplina	Quant
Análise Combinatória e Probabilidade	1
Elementos da estatística	1
Estatística	7

Estatística Aplicada à educação	1
Estatística Descritiva	2
Estatística educacional	1
Estatística I	2
Estatística I e II	1
Estatística para licenciatura	1
Estatística probabilística	1
Introdução à estatística	2
Introdução à probabilidade	1
Métodos estatísticos	1
Probabilidade	2
Probabilidade e estatística	17
Probabilidade est I e II	2
Tratamento da Informação	1
Total	44

Classificamos as demais disciplinas dos cursos pela matriz curricular usando como critério aspectos diferenciados que podem influenciar na formação do professor para ensinar estatística, como mapeamento para localizar a partir das ementas aspectos estatístico nas disciplinas que tratam de: currículo, didática, epistemologia, história-filosofia, pesquisa, prática, psicologia e tecnologia.

Na etapa que ainda está em andamento, analisamos ementas de 8 das 44 IES dos 76 cursos selecionados. Nenhuma delas traz de forma explícita em suas ementas à preocupação com a Educação Estatística. Além disso, alguns aspectos interessantes mostram que a Estatística ainda está longe de ser vista como conteúdo da matemática na Educação Básica nos projetos de cursos de formação. Como podemos ver nessas ementas: Ementa – Matemática para educação básica-I e II Matemática para educação Básica I - Funções, Equações e Inequações, Elementares (1º grau, 2º grau, modular, exponencial, logarítmica). Aplicações.Matemática para educação Básica II - Trigonometria. Equações e Funções Trigonométricas. Progressões.

8. Algumas considerações preliminares

A partir das análises realizadas é possível perceber que as recomendações da estatística na Educação Básica e no Ensino Médio trouxe para os cursos de formação de professores de matemática a preocupação em trazer esse componente curricular para as matrizes curriculares como elemento obrigatório.

Apesar da presença da estatística como conteúdo ainda carrega a visão de formação do professor para ensinar depender exclusivamente do conhecimento conceitual, focado na Estatística no conhecimento do campo da estatística e do uso da estatística como ferramenta para a investigação educacional.

Sendo no Brasil a estatística oficialmente como parte da matemática ainda é possível notar nas ementas analisadas a falta de visão na formação da estatística como parte da matemática na educação básica. Nas disciplinas que tratam da Educação Básica, o Tratamento da Informação não se faz presente. O mapeamento de possíveis lócus de formação em educação estatística, ainda a ser averiguado.

Referencias

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamenta (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática.* Brasília

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica (1999). *Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio*. Brasília.

Brasil. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação (2001). CNE/CES. *Diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura*. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em 20/09/2010.

Brasil Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica (2006). *Orientações curriculares para o ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.* Brasília.

Campos, C. R. (2011). *Educação estatística: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática* Belo Horizonte : Autêntica Editora.

Campos, C. R. (2007). *A educação estatística: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da estatística em cursos de graduação.* Rio Claro.

Gil, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4ª edição. São Paulo. 2002.

Lopes, C. A. E. (1998).*A probabilidade e a estatística no ensino fundamental: uma análise curricular.* Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação Universidade Estadual de Campinas-

Lüdke, M.; André, M.E.D.A. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo, EPU,

Perrenoud, P. (199). *10 novas competências para ensinar*. Porto Alegre: ArtMed,

Shulman, L. (1986). *Those who understand: Knowledge growth in teaching*. Educational Researcher 15(2), 4-14

Shulman, L. S. (1987). *Knowledge and teaching: Foundation of a new reform*. Harvard Education Review, 57(1), 22.

Inferencias estadísticas informales en estudiantes mexicanos

García Ríos V. Nozair[1]

CECyT 8-IPN

Resumen

El presente trabajo es un estudio sobre inferencia estadística informal llevado a cabo con 16 estudiantes de bachillerato (15-17 años) en una escuela pública mexicana. Para explorar los niveles sobre inferencia estadística informal que podían alcanzar dichos estudiantes, se les aplicó un cuestionario con cuatro problemas que se refieren a pruebas de hipótesis sobre proporciones. Las respuestas se organizaron y analizaron con base en un marco conceptual formado por cuatro categorías. Dentro de cada categoría se hizo una clasificación de las respuestas de acuerdo a las características de dicha categoría. Como resultado, se observó que las respuestas de los estudiantes se basan más en sus creencias y en sus conocimientos personales acerca del contexto y no en los datos del problema. Las expresiones de sus afirmaciones reflejan más un lenguaje determinista que probabilista. Hay dificultad para hacer inferencias que sean consecuencia de un razonamiento adecuado, debido a que no se reconoce el modelo probabilístico o no se razona apropiadamente con él. De lo anterior, se concluye que es necesario poner mayor atención en los cursos de estadística de bachillerato; al desarrollo de un pensamiento estadístico informal en lugar de enfatizar procedimientos formales de manera prematura.

Palabras clave: Inferencia estadística, razonamiento informal.

.

1. Introducción

En las sociedades modernas, cada vez es más frecuente que las personas en sus actividades profesionales y en su vida diaria se vean en la necesidad de saber interpretar y comprender información sobre gran diversidad de temas (economía, política, negocios y finanzas, salud, demografía, deportes, etc.) y deben tomar decisiones involucrando conceptos matemáticos de carácter cuantitativo y probabilístico. Los medios de comunicación (periódicos, revistas, televisión e Internet) generalmente contienen información numérica, ya sea en forma de tablas, diagramas o gráficas. Todo ciudadano debe ser educado para leer y entender dicha información.

Garfield y Ben-Zvi (2008) consideran que el estudio de la estadística proporciona a las personas las herramientas y las ideas para enfrentarse inteligentemente a la información numérica que emerge del mundo cotidiano. Dentro de la estadística, la herramienta principal es la inferencia, pues es la que capacita para leer, entender e interpretar de manera objetiva las conclusiones derivadas de los análisis de datos. La inferencia estadística es una parte fundamental de la estadística y se define formalmente como la teoría, los métodos y la práctica de hacer juicios acerca de una población usualmente con base en la información que proporciona una muestra aleatoria.

Makar, Bakker y Ben-Zvi (2011, p. 154) señalan que “la habilidad con el manejo de datos disponibles para observar mas allá de ellos y hacer estimaciones acerca de un fenómeno desconocido es el corazón de la estadística”. Sin embargo, la amplia mayoría de cursos estadísticos escolares se enfocan al adiestramiento de los alumnos en cálculos, graficación y reglas mecánicas

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 343-357). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

aisladas, carentes de significado, contextos y de los propósitos para los cuales fueron obtenidos los datos.

Los métodos de la inferencia estadística son utilizados para obtener conclusiones acerca de una población en particular; usando datos proporcionados por una muestra como base y evidencia de dichas conclusiones. Moore (2004) afirma que hacer una inferencia estadística significa ir más allá de los datos disponibles para obtener conclusiones acerca de un "universo más amplio"; al hacer una inferencia siempre se debe tener en cuenta que la variación está siempre presente, por lo que las inferencias son inciertas.

De la literatura sobre inferencia estadística es fácil deducir que la estadística inferencial formal es un tema difícil de aprender, estudiantes e incluso profesores presentan errores conceptuales. Los informes sobre las dificultades en el estudio de la inferencia estadística formal en cursos de nivel bachillerato y universitario abundan en la literatura (por ejemplo, Garfield y Ben-Zvi, 2008; Vallecillos y Batanero, 1997; Harradine, Batanero y Rossman, 2011). Esto ha motivado el interés por estudiar la Inferencia Estadística Informal (IEI), la cual se basa en un tipo de razonamiento que está a medio camino entre el análisis exploratorio de datos y la inferencia estadística formal. El uso de la palabra informal aquí sólo pretende destacar la amplia aplicación de razonamiento deductivo y abre la posibilidad de considerar la inferencia estadística fuera de los procedimientos formales. En adelante se utilizará IEI para denotar inferencia estadística informal.

El presente trabajo es parte de la tesis de maestría del autor, donde el tema de interés se enfocó en explorar el razonamiento empleado por estudiantes de bachillerato para realizar inferencias informales en un problema que se conocen formalmente como prueba de hipótesis de proporciones. Esto se llevó a cabo mediante un cuestionario. Al razonamiento que hay detrás de la inferencia informal se le denominará razonamiento inferencial informal (RII). En adelante se utilizará RII para denotar razonamiento inferencial informal.

Las preguntas de investigación del presente trabajo son: ¿Qué elementos interviene en el razonamiento del estudiante de bachillerato al hacer inferencias estadísticas sin los métodos y técnicas formales? ¿Cuáles son las dificultades y errores que se presentan para hacer inferencias estadísticas informales de estudiantes de bachillerato?

2. Antecedentes

La IEI y el RII son temas que han tomado mucha fuerza recientemente. Muchas investigaciones acerca de estos temas han surgido en los últimos años; sin embargo, ya desde hace varias décadas, los psicólogos y los investigadores en educación matemática han estudiado y documentado las dificultades que tienen los estudiantes para comprender los conceptos relacionados con la inferencia estadística formal. Se han señalado varias razones para estas dificultades como: la lógica de la inferencia estadística, intolerancia de los estudiantes a la ambigüedad, y su incapacidad para reconocer la estructura subyacente de un problema. Otras investigaciones han sugerido que los estudiantes tienen una comprensión incompleta de los conceptos fundamentales, como la distribución, la variación, el muestreo, y las distribuciones de muestreo (Garfield & Ben-Zvi, 2008).

Caracterizaciones de la Inferencia Estadística informal (IEI) y el Razonamiento Inferencial Informal (RII)

Varios trabajos publicados en los últimos años, describen la IEI y el RII. Sin embargo, todavía no está claro lo que significan estos dos términos exactamente. Se han presentado varias definiciones.

Ben-Zvi (2006) compara el razonamiento inferencial con la argumentación, pues menciona que obtener conclusiones lógicas a partir de los datos (ya sea formal o informalmente) se acompaña

de la necesidad de proporcionar argumentos convincentes basados en el análisis de datos. Hace hincapié en la necesidad de incluir datos que sirvan como base y evidencia para este tipo de razonamiento. Pfannkuch (2006) describe el término inferencia informal como "la obtención de conclusiones a partir de datos obtenidos principalmente en mirar, comparar y razonar a partir de las distribuciones de los datos". Para Ben-Zvi, Gil y Apel (2007) el RII se refiere a las actividades cognitivas involucradas para obtener conclusiones o hacer predicciones acerca de una población de manera informal, por medio de patrones, representaciones, medidas estadísticas y modelos estadísticos de muestras aleatorias, y tomando en cuenta la fortaleza y las limitaciones de la muestra y la inferencia hecha.

En un intento de combinar estas perspectivas, Zieffler, Garfield, delMas, y Reading (2008) definen RII como "la forma en que los estudiantes usan sus conocimientos informales de estadística para crear argumentos basados en muestras observadas que sustenten las inferencias hechas sobre la población desconocida" (p.44). También crean un marco conceptual para caracterizar el RII y para sustentar el desarrollo de tareas que permitan examinar el RII natural de los estudiantes, así como el desarrollo de tal razonamiento.

Las investigaciones contienen ejemplos de dos enfoques diferentes que los investigadores han utilizado para estudiar el RII. Uno se centra en la naturaleza de este razonamiento o en los tipos de razonamiento para hacer inferencias al resolver problemas con información estadística dada. Uno de los objetivos de este tipo de estudios es examinar cómo los estudiantes razonan y hacen inferencias al resolver un problema particular, sin haber estudiado los métodos formales de la inferencia estadística. Un segundo enfoque es el estudio de la evolución del RII mientras los estudiantes toman un curso diseñado para desarrollar dicho razonamiento (por ejemplo, un curso o una unidad de enseñanza). El objetivo de este tipo de estudio es observar cómo la naturaleza del razonamiento inferencial de los estudiantes cambia mientras se les provee con recursos, herramientas y planes de estudio. El presente trabajo de tesis considera el primer enfoque donde se pretende examinar cómo los estudiantes razonan y hacen inferencias al resolver un problema particular, sin haber estudiado los métodos formales.

3. Marco conceptual

En este Capítulo se presenta un panorama general de lo que es razonamiento informal, las definiciones de IEI y RII, se explica las componentes esenciales que caracterizan la IEI, las cuales aportaran información sobre el RII de los estudiantes En este trabajo, se entiende por Marco Conceptual a un número reducido de categorías que indican los aspectos principales a tener en cuenta en el trabajo y sus posibles relaciones; así ha sido sugerida por Miles & Huberman (1994): "un marco conceptual explica, ya sea de forma gráfica o narrativa, las principales cosas que serán estudiadas, –los factores claves, conceptos o variables– y las supuestas relaciones entre ellas" (p. 18).

Razonamiento informal

El término razonamiento informal admite diferentes significados. Generalmente, se caracteriza como contario al razonamiento formal, no obstante, no hay consenso entre los investigadores. La definición de Voss, Perkins y Segal (1991) parece cumplir con las opiniones de varios investigadores. Para estos autores el razonamiento informal es el que se lleva a cabo en situaciones no deductivas que afectan todas las facetas de la vida; son esencialmente las situaciones que se dan en la vida cotidiana y en el trabajo. El razonamiento informal tiene que ver con la argumentación, donde la calidad del argumento no se determina en términos de un conjunto de reglas que indica si la conclusión es válida o no, sino que la calidad se juzga en términos de solidez, la solidez se refiere a:

- Si las razones que apoyan el argumento son verdaderas o aceptables.

- En qué medida las razones argumentadas apoyan la conclusión a la que llega el individuo.
- En qué medida se han tenido en cuenta los contra argumentos, esto es, las razones que apoyan las decisiones o posiciones diferentes que toma el individuo.

Cuando un argumento se evalúa en términos de solidez, el contenido de las afirmaciones son importantes, y la conclusión y las razones no son evaluadas solamente en forma simbólica, como lo son en el razonamiento formal (Voss et. al., 1991).

El conocimiento informal dentro del campo de educación matemática es visto o bien como un tipo de conocimiento cotidiano del mundo que los estudiantes poseen con base en las experiencias fuera de la escuela, o como un conocimiento menos formal de los temas que resultan de la enseñanza formal previa; en este trabajo es visto como la integración de ambos. Este punto de vista sugiere que es importante estudiar y considerar el papel del conocimiento informal en el estudio formal de un tema en particular, es decir, que el conocimiento informal es un punto de partida para el desarrollo de la comprensión formal (Zieffler, Garfield, delMas, & Reading, 2008).

Componentes de la Inferencia Estadística Informal (IEI)

Las componentes de análisis que se toman en este trabajo y se describen más adelante son una síntesis propuesta en dos marcos conceptuales desarrollados específicamente para estudiar y desarrollar la inferencia informal. A continuación se definirán los conceptos que se utilizaran en el presente trabajo.

El RII es la forma en que los estudiantes usan sus conocimientos para hacer y sustentar inferencias estadísticas sobre una población desconocida basadas en muestras observadas y sin utilizar los métodos o técnicas formales de la estadística inferencial, como el uso de los datos muestrales, distribución muestral, desviación estándar, puntuación estándar, intervalos de confianza, etc.

La inferencia estadística informal (IEI) es una generalización probabilística (no determinista) de datos (Makar & Rubin, 2009), y esta generalización es el producto final de un RII (Makar, Bakker & Ben-Zvi, 2011). En este sentido se está considerando que las IEI se representan mediante enunciados, mientras que el RII es el proceso que hay detrás de las afirmaciones presentes en esos enunciados.

El análisis del RII de los estudiantes se va a llevar a cabo teniendo en cuenta cuatro componentes características de la IEI; tales componentes se han seleccionado de dos trabajos importantes en el RII. Zieffler et al. (2008) consideran tres componentes 1) Hacer juicios o predicciones, 2) Utilizar conocimientos previos formales e informales, y 3) Articular argumentos y justificaciones. Las componentes 1) y 3) se refieren a la misma idea de las componentes 1 y 2 del marco Makar y Rubin (2009) que son las siguientes: 1) Conclusión más allá de los datos y 2) Uso de datos como evidencia; por lo que se consideraran las tres componentes de Makar y Rubin, y la componente 2 de Zieffler et al. Como las cuatro componentes características de la IEI. Enseguida, se describen las cuatro componentes de análisis.

1. Conclusión más allá de los datos. Esto es, hacer juicios, afirmaciones, o predicciones acerca de las poblaciones (generalizar más allá de la muestra) con base en las muestras, pero sin los procedimientos y métodos estadísticos formales. La capacidad de utilizar los datos disponibles y mirar más allá de los datos para hacer estimaciones acerca de un fenómeno incierto es la piedra angular de la estadística.
2. Uso de los datos como evidencia. Aquí se pretende observar la explicación, es decir, la articulación de argumentos y justificaciones para hacer los juicios, afirmaciones, o predicciones sobre las poblaciones sustentadas en los datos de las muestras, es decir, afirmaciones cuya evidencia son los datos. Estos pueden ser numéricos, observacionales,

descriptivos, o incluso no registrados. Lo importante es que su uso como evidencia sea aceptada en el contexto en el cual se está utilizando. Esta componente hace hincapié en la necesidad de basar las generalizaciones en los patrones de los datos disponibles, para mover el pensamiento más allá de anécdotas o creencias sobre el mundo y buscar formas más fuertes de sustento. Este énfasis en la evidencia es fundamental para el desarrollo de la comprensión de los estudiantes del gran alcance de la estadística para justificar las afirmaciones y las inferencias.

3. Uso de lenguaje probabilístico que exprese incertidumbre acerca de la conclusión. Una de las características de la estadística es la de obtener conclusiones que contienen diferentes dosis de incertidumbre. En la inferencia formal se hacen afirmaciones sobre una población con base en la información de una muestra que no tienen certeza absoluta, como lo puede tener un teorema matemático. Debido a que las conclusiones de la inferencia informal también se refieren a una población más allá de los datos disponibles, no se puede hacer en términos absolutos. Por lo tanto, una afirmación derivada de un RII debe utilizar términos o frases que modulen las afirmaciones, se dice entonces que se utiliza un lenguaje probabilístico. Éste puede ser cualquier lenguaje apropiado a la situación y al nivel de los alumnos que sugiera incertidumbre en una hipótesis especulada, que una predicción es sólo una estimación, o que la conclusión no se aplica a todos los casos.
4. Utilizar e integrar el conocimiento previo (conocimiento formal e informal) al grado en que este conocimiento esté disponible. Cualquier inferencia se hace a partir de un conjunto de datos y de una teoría (científica o personal, explícita o implícita) que permite interpretar tales datos. Tales teorías vienen del conocimiento formal o informal (creencias) de los estudiantes. El conocimiento formal puede ser sobre conceptos básicos como distribución, media aritmética, etc. Y el conocimiento informal puede ser acerca del contexto de los datos, o que una muestra puede ser muy poco común dada una hipótesis, etc.

4. Metodología

El acopio de datos se llevo a cabo mediante un cuestionario escrito aplicado a estudiantes de bachillerato. El cuestionario y los estudiantes se describen a continuación.

Los participantes fueron 16 estudiantes del tercer semestre de bachillerato de una escuela pública de la ciudad de México, con edades de entre 16 y 17 años; quienes se encontraban estudiando materias de tronco común (sin cursos de probabilidad y estadística).

El cuestionario que se aplicó para la recolección de datos consta de dos problemas (en el presente trabajo se presenta un problema) conocidos formalmente como prueba de hipótesis de proporciones, en donde se pide determinar si un tratamiento es efectivo o no con base en datos de una muestra. El problema es un experimento aleatorio simple, y dice "*ProCare Industries alguna vez ofreció un producto llamado "Gender Choice", el cual, según afirmaciones publicitarias, permitía a las parejas incrementar sus posibilidades de tener una niña. Supón que realizamos un experimento con 100 parejas que desean tener una niña, y todas ellas siguen el tratamiento de Gender Choice. Si de las 100 parejas que usaron Gender Choice, 52 tuvieron niñas ¿Qué puedes concluir acerca de Gender Choice?*". Este problema a su vez está dividido en dos partes; A y B (solo se analiza una), y lo único que varía en cada parte son los datos de la muestra de dichos problemas. Cada parte de un problema tiene en general tres preguntas, y cada una de éstas tiene asociada otra donde se le pide al estudiante que explique el porqué de su respuesta.

El problema es tomado de Triola (2004). La estructura de los problemas del cuestionario es idéntica a los originales, sólo se adaptaron las preguntas para recopilar una mayor cantidad de información y se modificaron los datos estadísticos para las partes B de cada problema, con el fin

de percibir el cambio de las respuestas respecto a los distintos datos de las muestras de los problemas.

5. ANÁLISIS DE LOS DATOS

El análisis de datos se utilizó las cuatro componentes esenciales descritas en el Capítulo cuatro para estudiar la IEI. Se transcribieron las respuestas de los estudiantes en una tabla, las respuestas de cada estudiante se identifican con una letra R y un número del 1 al 16; R1, R2,…, R16.

Más allá de los datos

Una componente esencial de la IEI es hacer una afirmación o conclusión sobre una población desconocida y se caracteriza porque *va más allá de los datos* de la muestra.

En el análisis de este problema, se clasifican las respuestas[1] considerando si van *más allá de los datos* o no. En el presente trabajo, una respuesta que sólo toma en cuenta o hace referencia a la muestra o a elementos de la misma se considera que *no va más allá de los datos*.

Tabla 1. Clasificación de las conclusiones

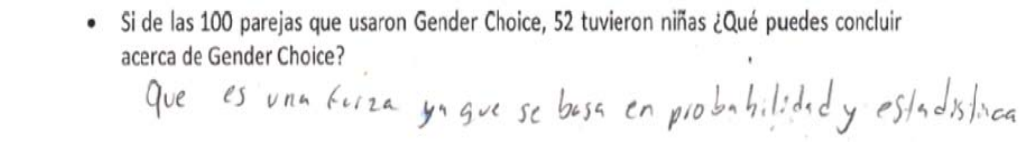
Respuestas	Clasificación de respuestas	Estudiantes
Va más allá de los datos 12 respuestas (75%)	No funciona	R1, R2, R7, R10, R12, R15
	Juzgan baja efectividad	R6, R9
	Asignan porcentaje de efectividad	R3, R5, R13
	Juzgan que puede ser efectivo	R16
No va más allá de los datos. 3 respuestas (19%)	Pudo influir en las personas	R4, R11
	Funcionó	R8
No hay respuesta. 1 (6%)	No contesto	R14

La Tabla 1 muestra la clasificación general de las respuestas dadas por los estudiantes. Doce estudiantes (75%) dan respuestas que *van más alla de los datos* de la muestra, mientras que tres respuestas (19%) *no van más allá de los datos*; un estudiante no dio respuesta.

Las respuestas de los estudiantes que *van más allá de los datos* hablan sobre la efectividad del producto en la población y no de la muestra en particular; estas respuestas se han clasificado en cuatro categorías: 1) No funciona, 2) juzgan baja efectividad, 3) asignan porcentaje de efectividad y 4) juzgan que puede ser efectivo.

No funciona. Los estudiantes que responden, concluyendo que el producto Gender Choice no funciona *van más alla de los datos*, ya que hablan del producto para cualquier elemento de la población. Los estudiantes R2 y R15 dan respuestas que pertenecen a esta categoría y se muestran a continuación.

[1]En la componente *más allá de los datos* las respuestas de los estudiantes son conclusiones, si estas conclusiones son acerca de la población se consideran inferencias.



[que es una farsa ya que se basa en probabilidad y estadística]

Figura 1. Conclusión de R2 que va más allá de los datos

Juzgan baja efectividad. Respuestas de un segundo tipo que *van más allá de los datos* son aquellas que juzgan que la efectividad del producto Gender Choice es baja, por ejemplo, la respuesta de R6 (Figura 2) dice "no es un tratamiento muy efectivo".

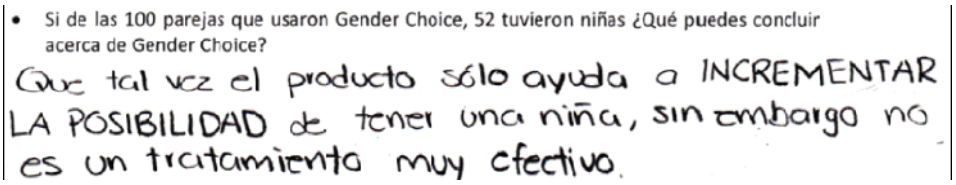


Figura 2. Ejemplo de conclusión que va más allá de los datos de R6

Asignan porcentaje de efectividad. Respuestas de un tercer tipo, asignan un grado o porcentaje de efectividad al producto Gender Choice, éstas *van más allá de los datos* porque se habla de la efectividad del producto sin hacer referencia a la muestra o a sus elementos. Un ejemplo de esta respuesta es R5, la cual se muestra en la Figura 3.

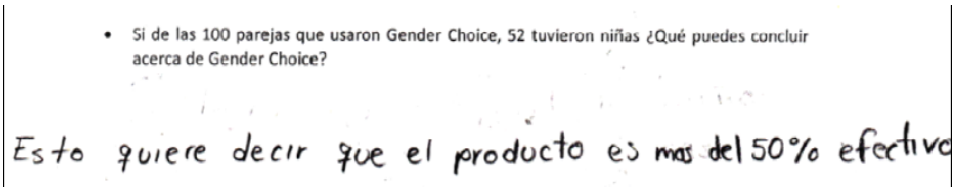


Figura 3. Ejemplo de conclusión que va más allá de los datos de R5

Juzgan que puede ser efectivo. Respuestas del cuarto tipo que van *más alla de los datos* de la muestra son aquellas donde se concluye que es posible que el producto Gender Choice sea efectivo. R16 es la única respuesta que se ubica en esta categoría (Figura. 4).

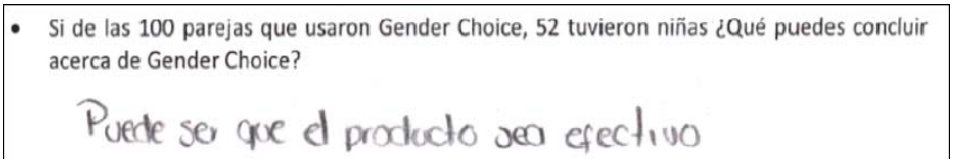


Figura 4. Ejemplo de conclusión que va más allá de los datos (R16)

Las respuestas que *no van más allá de los datos*, se dividieron en dos categorías. Cuando concluyen que el producto pudo influir de alguna manera en las personas de la muestra se agruparon en una categoría, y en la otra cuando concluyen que sí funciona el producto. Una respuesta perteneciente a la primera categoría es la dada por R4 (Figura. 5).

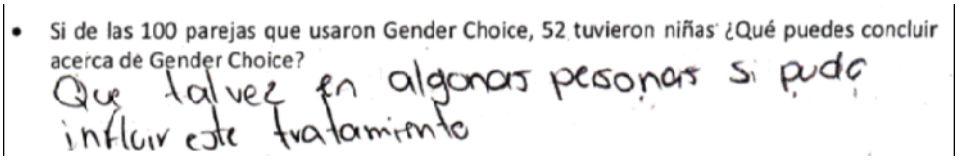


Figura 5. Ejemplo de conclusión que no va más allá de los datos (R4)

Se considera que es una conclusión que *no vas más allá de los datos* porque hace referencia sólo a las personas de la muestra.

En la segunda categoría, se ubicó la respuesta de R8 (Figura 6), quien concluye que el producto Gender Choice sí funciona, pero hace referencia al "tratamiento" por lo que se refiere a la muestra.

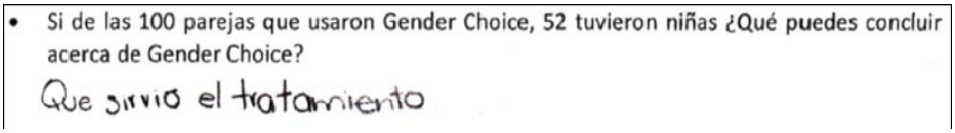


Figura 6. Ejemplo de conclusión que no va más allá de los datos (R8)

Para que un sujeto desarrolle sus inferencias informales es necesario que se atreva a hacer afirmaciones que vayan *más allá de los datos*, pues este rasgo está en el corazón de la inferencia. Al parecer, los sujetos del nivel de los estudiantes examinados, en general, no tienen dificultad para obtener conclusiones *más allá de los datos*. No obstante, hacerlo es aún poco significativo para lograr una inferencia razonablemente adecuada. Es entonces necesario explorar otras características que ofrezcan más indicios de la IEI.

Por otro lado, resultan interesantes los tipos de respuesta que se encuentran, pues los estudiantes obtienen conclusiones variadas, desde juzgar hasta asignar un porcentaje.

Datos como evidencia

La segunda componente importante de la IEI se refiere a la consideración de los datos del problema; hace hincapié en la necesidad de obtener las conclusiones con base en los datos disponibles y tomarlos como evidencia. Presupone, evitar basar la inferencia en anécdotas o creencias subjetivas sobre el mundo y, por el contrario, basarlas en los datos disponibles.

Las respuestas2 se han clasificado en dos categorías: si las justificaciones usan los datos de la muestra para sustentar las conclusiones o si no usan los datos.

En la categoría de respuestas que se basan en los datos de la muestra como evidencia para obtener las conclusiones, se observaron dos tipos: *determinista y racional probabilística*. En la categoría de respuestas que no utilizan los datos como evidencia para justificar las conclusiones obtenidas; se observó un solo tipo de justificación al cual se le llamó *justificación subjetiva*, pues está basada en creencias o teorías subjetivas.

Conviene recordar que el cuestionario utilizado en la recolección de datos el problema tiene tres preguntas que piden una justificación de la respuesta. En las respuestas a estas preguntas se observó que los argumentos para justificar una misma conclusión podían ser distintos y, por lo tanto, clasificarse en diferentes tipos, incluso algunos estudiantes cambiaron su conclusión. Algunos estudiante pasaron de hacer una argumentación basada en los datos de la muestra a una argumentación que no lo está, por ejemplo, responder con una justificación *racional probabilística* a una pregunta y utilizar una *justificación subjetivas* en otra. También, hay estudiantes que utilizan los tres tipos de justificaciones cuando usan datos como evidencia, y estudiantes que responden con una justificación *racional probabilística* a todas las preguntas.

Racional probabilística. Las justificaciones que se han tomado como *racional probabilística* hacen referencia al valor de la probabilidad del género de un nacimiento, o a una posible distribución o proporción del género en una población, y con base en este supuesto ofrecen una argumentación (que puede ser correcta o incorrecta) para aceptar o rechazar la hipótesis de que el

[2] Las respuestas en la componente *datos como evidencia* se refieren a las explicaciones o justificaciones que apoyan las conclusiones obtenidas.

producto funciona. Esta argumentación puede hacerla, ya sea comparando el valor de la probabilidad o distribución del género con la muestra, o solamente usando los datos de la muestra; de sus argumentaciones se puede deducir si consideran el estadístico de la muestra significativo o no.

R3 considera que como la mayoría de la población está formada por mujeres, la muestra está dentro de lo normal y no se debe al producto "Gender Choice" (Figura 7).

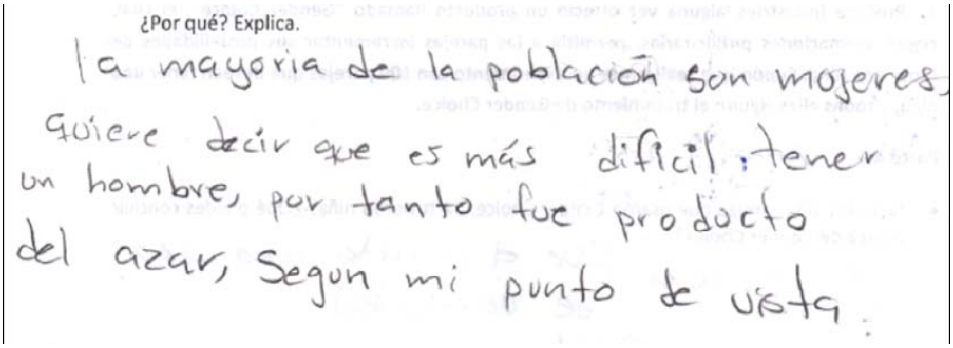


Figura 7. Ejemplo de justificación que usa datos como evidencia (R3)

Determinista. Las justificaciones consideradas como *deterministas* son aquellas en las que el estudiante pide 100% de efectividad en el producto o muy cercano para aceptar la hipótesis de que el producto funciona.

La Figura 8 muestra un ejemplo de este tipo de justificación, perteneciente a R3. Para este estudiante el producto no funciona, porque el experimento no produjo 100 niñas. Note el cambio del tipo de justificación de R3.

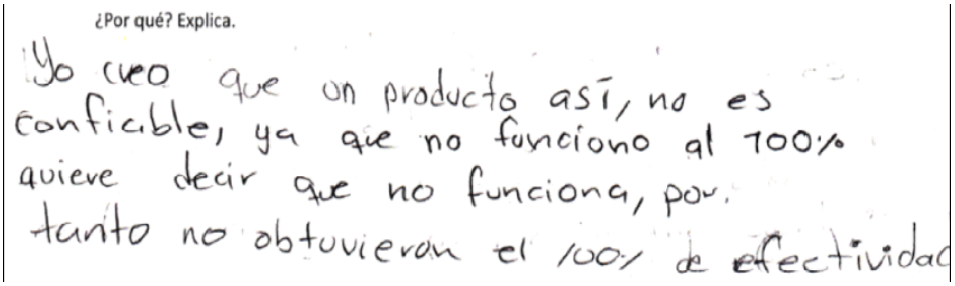


Figura 8. Ejemplo de justificación que usa datos como evidencia (R3)

Las justificaciones que se consideran como subjetivas son aquellas que no utilizan los datos de la muestra como evidencia para justificar las conclusiones hechas y que están basadas en alguna creencia o teoría subjetiva. También, se considera *justificación subjetiva* cuando aseguran que no se puede concluir nada debido a factores que inciden en el producto y que no se toman en cuenta.

En este tipo de respuestas, se observa con mayor claridad la influencia de las creencias o conocimientos del sujeto acerca del contexto del problema en sus justificaciones. La Figuras 9 muestra una respuesta clasificadas como *justificaciones subjetivas*.

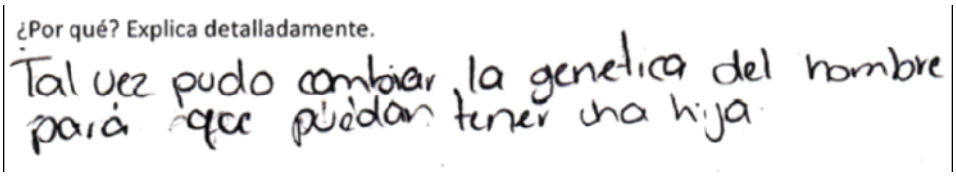


Figura 8. Ejemplo de justificación que no usa datos como evidencia (R4)

Las respuestas dentro de esta categoría muestran una variedad de conocimientos o creencias subjetivas, las cuales se han considerado como conocimientos informales. Las respuestas hablan sobre modificación de la genética, organismos, distribución del género de la población y la creencia de que el producto puede funcionar si se administra correctamente, sin tomar en cuenta los datos del experimento.

El análisis de este problema evidencia que a pesar de que más de 50% de las justificaciones están basadas en los datos de la muestra, no todas ellas son adecuadas, en el sentido de que no son una argumentación que sustente las inferencias realizadas. Sobre este hecho se hablará con más detalle en la sección seis.

El 40% de los tipos de justificaciones de las inferencias realizadas por los estudiantes se basan en creencias subjetivas y no consideran los datos del problema, el mismo porcentaje pertenecen al tipo racional probabilístico que es el tipo de respuesta más avanzada. Finalmente, el hecho de que las justificaciones de un mismo estudiante se clasifiquen en diversos tipos de respuesta indica la dificultad de alcanzar un nivel de razonamiento que evite las creencias subjetivas y se atenga solamente a los datos. Solamente tres estudiantes (19%) utilizaron exclusivamente creencias subjetivas. Estos resultados indican que el *uso de los datos como evidencia* para justificar las inferencias es una componente que está presente en la IEI de la mayoría de los estudiantes analizados. Sin embargo, las consecuencias que derivan de los datos frecuentemente no corresponden con las inferencias estadísticas correctas.

Lenguaje probabilístico

En las situaciones de muestreo, debido a la variación de las muestras y a que las conclusiones están basadas en los datos de la muestra, se suelen modular las afirmaciones con expresiones como “es muy probable”, “es posible que”, “no es seguro que”, etc., lo que evita hacer afirmaciones en términos absolutos. El lenguaje probabilístico puede ser expresiones apropiadas a la situación y al nivel de los alumnos; que sugiera incertidumbre en una hipótesis especulada. El que utiliza dicho lenguaje refleja la comprensión de que un resultado estadístico o una predicción no son contundentes o seguros. La Tabla 1 muestra la distribución de las conclusiones de los estudiantes de acuerdo con el grado de incertidumbre que expresan. Dentro de las conclusiones que expresaban algún grado de incertidumbre, es decir, que las conclusiones usaban un lenguaje probabilístico, se consideran dos tipos: *lenguaje probabilístico numérico* y *lenguaje probabilístico no numérico*.

¡Error! No hay texto con el estilo especificado en el documento. Lenguaje utilizado en las conclusiones

Lenguaje	Categorías	Respuesta	Cantidad
Probabilístico	Numérico	R3, R5, R9, R13	8 (50%) estudiantes
	No numérico	R4, R6, R11, R16	
Determinista		R1, R2, R7, R8, R10, R12, R15	7 (44%) estudiantes
No hizo inferencia		R14	1 (6%) estudiantes

Lenguaje probabilístico numérico. Las conclusiones con un *lenguaje probabilístico numérico* expresan algún grado de incertidumbre con porcentajes o proporciones. Al mencionar la efectividad del producto en un porcentaje distinto de 100% éste tiene algún grado de incertidumbre implícito. Un ejemplo de este lenguaje es la mostrada en la siguiente figura.

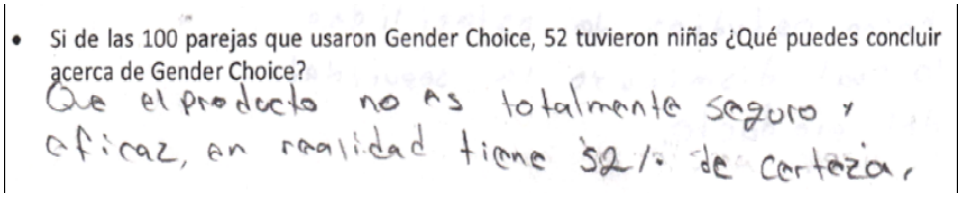


Figura 9. Ejemplo de lenguaje probabilístico (R9)

Lenguaje probabilístico no numérico. En la clasificación de *lenguaje probabilístico no numérico*, se consideraron las conclusiones que expresan algún grado de incertidumbre sólo cualitativamente; por ejemplo, la conclusión de R4 (figuras 10), usa "tal vez", esta palabra muestra incertidumbre en la conclusión hecha.

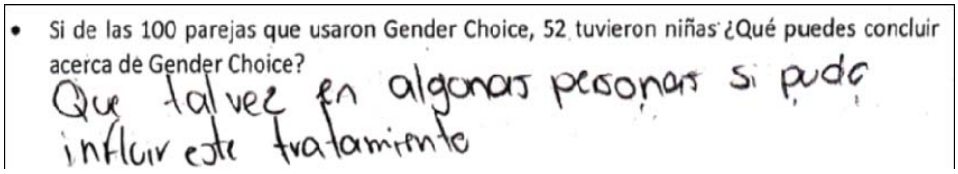


Figura 10. Ejemplo de lenguaje probabilístico (R4).

Las respuestas[3] que se consideraron dentro de *lenguaje determinista* son las que no expresan ningún grado de incertidumbre: por ejemplo, la conclusión R15 (Figura 11). La respuesta se da en términos absolutos y no sugiere ninguna posibilidad de incertidumbre en la conclusión hecha.

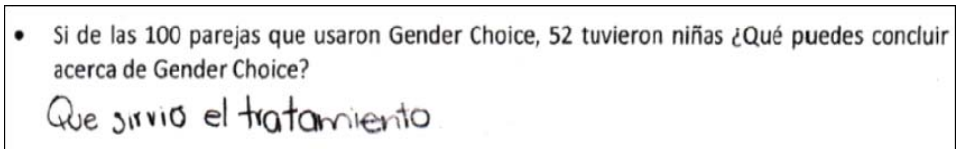


Figura 11. Ejemplo de lenguaje determinista (R15)

La conclusión anterior además de hacer uso de *lenguaje determinista* es incorrecta respecto a la hipótesis estadística del funcionamiento del producto Gender Choice.

La Tabla 3 muestra que 50% de los estudiantes expresa algún grado de incertidumbre en las inferencias. Sin embargo, solamente 5 (31%) lo expresan en una forma clara y cualitativa. Estos resultados indican que utilizar un lenguaje probabilístico es una componente que no está presente en la IEI de la mayoría de los estudiantes.

Ahora, es interesante resaltar qué conocimientos utilizan e integran los estudiantes para hacer una IEI.

Conocimientos

Otra componente fundamental en la IEI es el uso e integración de conocimientos que pueden ser formales, informales o ambos; estos conocimientos junto con los datos de la muestra forman parte de la argumentación y justificación de la inferencia. La Tabla 2 muestra los distintos tipos de conocimientos utilizados por los estudiantes.

¡Error! No hay texto con el estilo especificado en el documento.

Conocimientos	
Formal	Porcentajes, proporción.

[3] En la componente *lenguaje probabilístico* las respuestas son conclusiones, así conclusiones y respuestas son sinónimos.

Informal	Probabilidad de nacimientos femeninos, distribución o proporción del género de la población, teoría o creencia subjetiva, juzgar la significatividad del estadístico.

Las respuestas[4] que utilizaban un *conocimiento formal* por lo general se refieren a porcentajes o proporciones; estos conocimientos se obtienen en la escuela, por lo cual se consideran conocimientos formales. En la Figura 12 se presenta un ejemplo de respuesta que utiliza este tipo de conocimiento, perteneciente a R5.

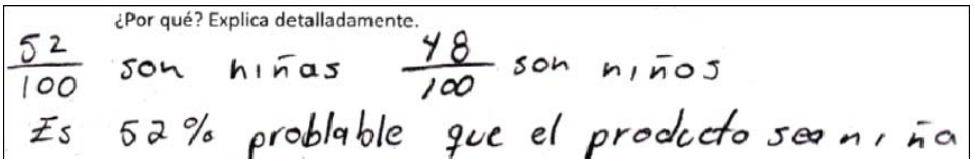


Figura 12. Ejemplo de conocimiento formal (R5)

R5 utiliza los datos de la muestra, escribe las frecuencias relativas de los nacimientos y expresa el resultado en porcentaje de probabilidad.

Como se ha mencionado anteriormente el término *conocimiento informal* es visto como el conocimiento cotidiano que los estudiantes tienen sobre la base de las experiencias fuera del conocimiento formal de la escuela. Se consideró que una respuesta utilizaba *conocimientos informales* cuando no integraba métodos o técnicas formales de estadística para la justificación de las inferencias hechas, sino que utilizaban conocimientos posiblemente provenientes de percepciones de la vida a través de creencias socialmente compartidas, informaciones, noticias o propaganda. Por ejemplo, algunos estudiantes expresaban que la mayoría de la población es mujer, o que es más probable el nacimiento de una niña a un niño. En el análisis también se consideró como *conocimiento informal* cuando juzgan si un estadístico es significativo, pues no consideran desviaciones estándar ni distribuciones muestrales.

Ejemplo de la utilización de *conocimiento informal* en la justificación de conclusiones es la mostrada en la figura 13 correspondientes a la respuesta R5.

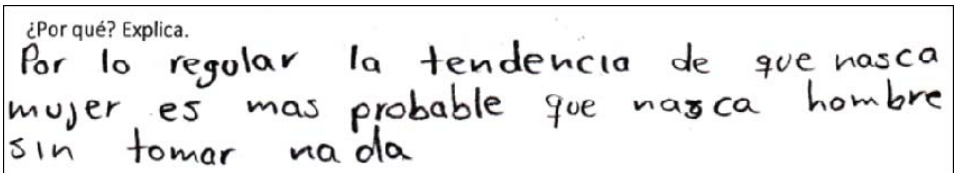


Figura 13. Ejemplo de conocimiento informal (R5)

Otro tipo de *conocimiento informal* es el utilizado para explicar el posible funcionamiento del producto Gender Choice, considerando términos como genética, organismo, cromosomas, etc. La Figura 14 muestra la justificación de R13, quien considera que la sugestión es el responsable del nacimiento de la niña, es decir, utiliza una teoría subjetiva ("sugestión del inconsciente") para explicar el funcionamiento del producto.

[4] Las respuestas en la componente *conocimientos* son las explicaciones o justificaciones empleadas para apoyar las conclusiones obtenidas

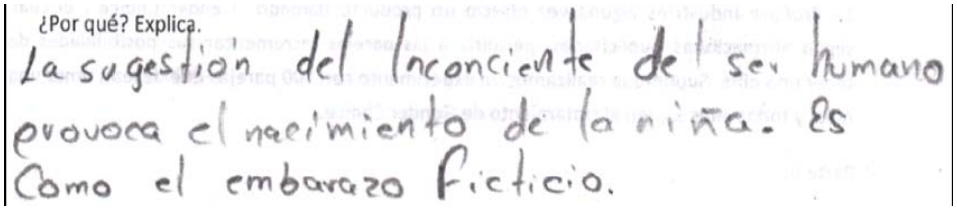


Figura 14. Ejemplo de conocimiento informal (R13)

El *conocimiento formal* utilizado por los estudiantes es adecuado, ya que sólo emplean proporciones y porcentajes, y lo hacen de manera adecuada. El conocimiento informal puede ser incorrecto por lo que provoca una inferencia incorrecta, como cuando los estudiantes creen que hay una proporción mucho mayor de mujeres en la población.

6. Conclusiones

Con base en los datos recabados y el análisis hecho en el presente estudio se responderá las preguntas de investigación.

¿Qué elementos intervienen en el razonamiento del estudiante de bachillerato al hacer inferencias estadísticas sin los métodos y técnicas formales?

En general, se detectaron cuatro tipos de razonamiento estadístico informal en las explicaciones dadas: 1) considerar un modelo o distribución inicial de referencia de la población y comparar los datos de la muestra con este modelo, 2) limitarse sólo en el porcentaje de éxitos de la hipótesis a probar y decidir con base en eso, 3) apoyar el razonamiento en el uso de creencias o teorías personales, y 4) combinar el tercer razonamiento con alguno de los razonamientos 1) o 2). Estos razonamientos son consistentes con las explicaciones encontradas en Gil y Ben-Zvi (2011).

El contexto juega un papel importante; la mayoría de estudiantes utilizaron creencias en sus explicaciones. Cuando las creencias estaban en contradicción con los datos de la muestra, por lo general, hacían las conclusiones con base en sus creencias sin considerar los datos. Este razonamiento muestra que las creencias pueden representar un obstáculo para una inferencia adecuada, por lo que es importante que los estudiantes trabajen con los datos y pasen a segundo plano sus creencias personales.

¿Cuáles son las dificultades y errores que se presentan en el razonamiento inferencial informal de estudiantes de bachillerato para hacer inferencias estadísticas?

Hay dificultad para hacer inferencias que sean consecuencia de un razonamiento adecuado. La mayoría de los estudiantes utilizan los datos de la muestra como argumento de sus inferencias, sin embargo, la dificultad radica en utilizarlos de forma conveniente, es decir, establecer argumentos que apoyen en un alto grado la conclusión a la cual se llega. El uso de *lenguaje probabilístico* también fue una dificultad, el alumno debe comprender que cualquier inferencia basada en una muestra tiene un grado de incertidumbre y éstas se aproximan cada vez más a la certidumbre conforme aumenta el tamaño de la muestra. Se presentan importantes dificultades para identificar un modelo de referencia representativo del experimento aleatorio y compararlo con estadísticos de la muestra para hacer una inferencia con cierto grado de certidumbre, esta comparación es la base para establecer un criterio sobre la significatividad de un estadístico y argumento que apoye la inferencia hecha.

El desempeño incipiente de los estudiantes de bachillerato en tareas en las que deben hacer un RII pone en evidencia la pertinencia de llevar a cabo cambios en la enseñanza de la estadística a nivel bachillerato, en la que se debería dar más peso a actividades y problemas para desarrollar las componentes aquí estudiadas del RII, en lugar del acostumbrado énfasis en los aspectos

procedimentales de la estadística. Los resultados del presente estudio y de otros similares en los que está basado, ofrecen una dirección hacia la cual conducir tales cambios.

Referencias

Batanero, C. (2000). Controversies around significance tests. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1- 2), 75-98.

Ben-Zvi, D. (2006). Scaffolding students informal inference and argumentation. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Working cooperatively in statistics education*: Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador, Brazil. Descargado de http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/2D1_BENZ.pdf

Ben-Zvi, D., Gil, E., & Apel, N. (2007). *What is hidden beyond the data? Helping young students to reason and argue about some wider universe*. Papel presentado en el Fifth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy (SRTL-5). University of Warwick, UK. Descargado de https://sites.google.com/site/danibenzvi/allpublications

Dierdorp, A., Bakker, A., Eijkelhof, H. & Maanen, J. (2011). Authentic practices as contexts for learning to draw inferences beyond correlated data. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 132-151

Gil, E. & Ben-Zvi, D. (2011). Explanations and context in the emergence of students informal inferential reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*. 13(1-2), 87-108.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students statistical reasoning*. Springer.

Harradine, A., Batanero, C. & Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School-Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 235- 246). A Joint ICMI/IASE Study

Konold, K.& Higgins, T. L. (2003). Reasoning About Data. En J. Kilpatrick; W. G. Martin & D. Shifter, (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematic* (pp. 193 –215). National Council of Teachers of Mathematics, VA, USA.

Makar, K., Bakker, A. & Ben-Zvi, D. (2011). The Reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*. 13(1-2), 152-173.

Makar, K. & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*. 8(1), 82-105.

Miles, M. & Huberman, A. (1994). *An expanded sourcebook qualitative data analysis* (2a ed.). Londres: Sage Publications.

Moore, D. (2004). *The basic practice of statistics* (3ra ed.). New York: W. H. Freeman.

Pfannkuch, M. (2006). Informal inferential reasoning. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Working cooperatively in statistics education:* Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador, Brazil. Descargado de http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/6A2_PFAN.pdf

Triola, Mario F. (2004). *Estadística*. México: Pearson educación.

Vallecillos, A. & Batanero, C. (1997). Análisis del aprendizaje de conceptos clave en el contraste de hipótesis estadísticas mediante el estudio de casos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(1), 29-48.

Voss, J. F., Perkins, D. N., & Segal, J.W. (1991). *Informal Reasoning and Education*. New Jersey:

Laurence Erlbaum Assoc.

Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R. & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistical Education Research Journal*, 7(2), 40–58.

Formação estatística dos licenciandos em matemática no Brasil

Bezerra, Lucicleide y Gitirana, Verônica

UFPE

Resumo

O presente artigo é parte de uma pesquisa de mestrado que analisa a inserção da estatística nos currículos da formação de professores nos cursos de licenciatura em matemática no Brasil, investigando qual o enfoque dado à formação para ensinar estatística. A metodologia utilizada foi análise documental em três etapas, a primeira junto ao Ministério da Educação (MEC) para mapear os cursos de Licenciatura em Matemática autorizados e a localização das Instituições de Ensino Superior (IES) e montagem de uma amostra. Na segunda etapa, analisamos as matrizes curriculares para identificarmos as disciplinas que possam abordar a formação para o Ensino da Estatística. Na terceira etapa, analisamos as ementas buscando identificar conteúdos, habilidades e competências para o ensino da Estatística incluídos nos cursos. Nossos resultados preliminares apontam a presença de disciplinas de conteúdo estatístico em todas matrizes curriculares das IES analisadas. No entanto, nenhuma das ementas já analisadas traz de forma explícita a preocupação com a Educação Estatística.

Palavras-chaves: Educação Estatística; Currículo; Formação de Professores de Matemática.

1. Introdução

Hoje a estatística está presente em nossas vidas de tal maneira que tem se tornado uma ferramenta indispensável para qualquer pessoa que viva em sociedade. Tal presença observa-se nas empresas, nos meios de comunicação de maneira geral, nos órgãos governamentais, que se utilizam da estatística no planejamento de ações e na apresentação dos seus dados através de gráficos e tabelas. É difícil encontrar uma situação em que não se possa aplicar a Estatística para solucionar problemas, para obter produtos melhores, métodos mais eficazes e mais eficientes ou para diminuir riscos.

Nas Instituições de Ensino Superior (IES) em várias áreas de formação, em muitos cursos da área de exatas, saúde, humanas e ciências sociais, tem nas suas matrizes curriculares a presença de disciplinas de estatística. A presença da estatística na sociedade trouxe consigo uma necessidade de ensino dessa ciência a um número de pessoas cada vez maior. Com isso, nos últimos anos a maioria dos países introduziu em seus programas de matemática, conteúdos de estatística, como uma das unidades curricular. (Lopes, 1998)

No Brasil, desde a década de 90, os documentos oficiais já incorporam orientações para inclusão da formação estatística como campo da Matemática escolar. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental e do Médio (BRASIL, 1997, 1998, 1999) de Matemática, assim como as Orientações Curriculares do Ensino Médio (BRASIL, 2006), contém recomendações para o ensino no bloco Tratamento de Informações, que inclui os tópicos de Probabilidade e Estatística.

O trabalho desse bloco objetiva a iniciação à Estatística e Probabilidade, visando desenvolver diversas competências, como coletar dados, organizá-los e representá-los na forma de gráficos ou tabelas, interpretá-las criticamente transformando-os em informação. Busca-se assim formar cidadãos críticos nesse mundo rodeado de informações.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura abalizam que para a licenciatura serão incluídos, no conjunto dos conteúdos

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 359-366). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

profissionais, os conteúdos da Educação Básica, consideradas as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores em nível superior, bem como as Diretrizes Nacionais para a Educação Básica e para o Ensino Médio. (BRASIL, 2001. p.6)

É preciso investigar as influências das instruções oficiais nas Instituições de Ensino Superior (IES) esclarecendo se as mesmas estão trazendo em suas matrizes curriculares disciplinas que favoreçam a formação estatística do licenciando. Dentre esse escopo, selecionamos investigar a formação Estatística para aqueles que lecionam nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, enfim as Licenciaturas em Matemática. Identificando o currículo prescrito nos cursos presenciais de formação de professor de Matemática nas disciplinas que auxiliam a formar o professor para ensinar Estatística nos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil.

2. Currículo, Diretrizes e Parâmetros Curriculares

Para Cardoso (2007), diversos autores, incluindo a International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), veem o currículo como um processo contínuo de decisões sobre os diferentes elementos que o integram e em que intervêm vários atores, fazendo uma distinção entre níveis de currículo. A ICMI (1986) apresenta os três níveis seguintes:

1. O primeiro nível diz respeito às intenções dos autores, apresentadas nos documentos oficiais: o currículo enunciado;
2. O segundo nível reporta-se à forma como as orientações curriculares oficiais são concretizadas, designadamente pelos professores: o currículo implementado;
3. O terceiro e último nível é o que os alunos realmente aprendem: o currículo adquirido.

Em 2013 completa-se dezoito anos de publicação da versão preliminar dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1995) para o Ensino Fundamental no Brasil, posteriormente publicou em 1997 e 1998, respectivamente, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1ª a 4ª séries e de 5ª a 8ª séries (equivalente do 1º ao 9º anos). Segundo Lopes (2006) o documento tinha como intenção oferecer uma proposta ministerial para a construção de uma "base comum nacional" para o Ensino Fundamental brasileiro e ser uma orientação para que as escolas formulassem seus currículos, levando em conta suas próprias realidades, tendo como objetivo do ensino de 1ª a 8ª série a formação para uma cidadania democrática, inserindo assim o Brasil no projeto de currículo nacional e no contexto da globalização de políticas educacionais.

Na seleção de conteúdos de Matemática para o ensino fundamental, traz a orientação que os currículos devem contemplar conteúdos que permitam ao cidadão tratar as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória. (BRASIL, 1997, 1998). Com a finalidade de fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente em seu dia-a-dia.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias traz que os alunos devem ter:

> Habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino

> Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas (BRASIL, p.44-45).

As propostas curriculares de matemática têm procurado justificar a importância da inserção e a relevância da estatística e da probabilidade na formação dos estudantes, uma vez que serão responsáveis pelo ensino de tal conhecimento nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Nas diretrizes curriculares para cursos de matemática não traz explicitamente orientação para os conteúdos estatísticos, menciona apenas que para a licenciatura serão incluídos, no conjunto dos conteúdos profissionais, os conteúdos da Educação Básica, consideradas as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores em nível superior, bem como as Diretrizes Nacionais para a Educação Básica e para o Ensino Médio.

4. Conhecimentos necessários à docência

O que precisa saber um professor de matemática para uma eficaz prática docente? Quais são os conhecimentos que um professor de matemática precisa ter a despeito da Educação Estatística? O estudo a respeito do conhecimento base surge na década de 80 em âmbito internacional como campo de pesquisa e tem como finalidade identificar um repertório de conhecimentos do ensino que serviriam para a elaboração de programas de formação de professores (PIRES, 2008).

Muitas são as produções na atualidade que usam tipologias e classificações diferentes para tal campo de pesquisa. Shulman (1986) e García (1992) utilizam o termo conhecimento, ao fazer referência àquilo que os professores deveriam compreender sobre a docência para favorecer um processo de ensino-aprendizagem eficiente. Shulman (1986, 1987) chama de Base de conhecimentos da docência e García (1992) de Conhecimento Profissional dos Professores.

Para Shulman (2005,p. 5), o “conhecimento sobre a docência” é aquilo que os “professores deveriam saber, fazer, compreender ou professar para converter o ensino em algo mais que uma forma de trabalho individual e para que seja considerada entre as profissões prestigiadas”; enquanto que para García (1992, p.1), é o conjunto de “conhecimentos, destrezas, atitudes, disposições que deverá possuir um professor do ensino”.

Shulman (1987) discursa sobre quais qualidades e profundidade de compressão, habilidades e capacidades, traços e sensibilidades transformam uma pessoa em um professor competente e define isto como “conhecimento base” para a docência. O autor explicita várias categorias dessa base de conhecimento (conhecimento de conteúdo específico, conhecimento pedagógico geral, conhecimento do currículo, conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento dos alunos e de suas características, conhecimentos dos contextos educacionais, conhecimento dos fins, propósitos e valores educacionais) que podem ser agrupadas em: conhecimento do conteúdo específico conhecimento pedagógico geral e conhecimento pedagógico do conteúdo.

5. Conhecimentos estatísticos

A Estatística está presente em diversas áreas do conhecimento como importante ferramenta para estudo e análise dos diversos fenômenos o que vem fortalecer que essa disciplina é transdisciplinar e caminha pelas mais variadas áreas de formação acadêmica e profissional. Para Campos (2011) apesar da importância da estatística nas mais variadas áreas, o ensino de Estatística, vem, há tempos, apresentando problemas, sendo responsável por muitas das dificuldades enfrentadas pelos alunos em suas atividades curriculares. Segundo o autor as dificuldades pedagógicas têm incentivado pesquisadores a buscar as origens de tais dificuldades. Cazorla, Kataoka, Silva (2010) afirmam que a partir da década

de 70, surgiu mundialmente um movimento que reconheceu a importância do raciocínio probabilístico, para romper com a cultura determinística nas aulas de Matemática.

No Brasil, a Estatística passa a fazer parte da estrutura curricular da disciplina de Matemática. Tais autoras afirmam ainda que a Educação Estatística surgiu da necessidade de investigar como podemos ajudar nas dificuldades dos professores nos cursos do Ensino Superior ao ensinarem conceitos e procedimentos aos usuários de Estatística. A partir dessa necessidade dar-se início em meados de 1990, uma nova área de atuação pedagógica denominada Educação Estatística (EE). Tendo essa nova área de pesquisa tem como objetivo estudar e compreender como as pessoas ensinam e aprendem Estatística.

Campos (2007) afirma que diversos autores, tais como Rumsey (2002), Garfield (1997), Chance (2002), delMas (2002), publicaram estudos nos quais eles identificam algumas das principais metas do ensino de Estatística. Esses autores defendem que o planejamento da instrução deve pender para o desenvolvimento de três importantes competências, quais sejam:

> A literacia que pode ser vista como o entendimento e a interpretação da informação estatística apresentada, o raciocínio representa a habilidade para trabalhar com as ferramentas e os conceitos aprendidos e o pensamento leva a uma compreensão global da dimensão do problema, permitindo ao aluno questionar espontaneamente a realidade observada por meio da Estatística, sem as quais não seria possível aprender ou apreender os conceitos fundamentais dessa disciplina. (Campos, 2011. p. 17-18.)

Perrenoud (1999, p. 15), compreende “competência” no sentido de capacidade de mobilizar diversos recursos cognitivos (saberes, capacidades, informações) para enfrentar, com pertinência e eficácia, uma série de situações.

6. Método

Para que pudéssemos analisar a formação estatística nas licenciaturas em matemática na modalidade presencial em todo o Brasil, fez-se necessário iniciar pelo levantamento quantitativo da população a se estudar. Nesse sentido, mapeamos as Instituições de Ensino Superior (IES) autorizadas pelo (MEC) que ofertavam tais cursos. Para tal utilizamos a técnica de análise documental.

A análise documental compreende a identificação, a verificação e a apreciação de documentos para determinado fim. Para Lüdke e André (1986) é considerado documento “quaisquer materiais escritos que possam ser utilizados como fonte de informação.” Tal técnica é utilizada na busca de identificar informações presentes nos documentos a partir de questões de interesse. Entre suas vantagens podemos citar o fato que, ela é uma fonte estável e rica na busca de informações, tem um baixo custo, complementa informações e indica problemas (GIL, 2002).

A análise documental está presente inicialmente na identificação da população feita através da análise do relatório do MEC (BRASIL, 2012) no qual selecionamos os cursos de licenciatura autorizados no Brasil. No segundo momento o levantamento do tamanho populacional de cada um dos municípios (IBGE, 2012) onde tais cursos estão presentes. Após esse levantamento populacional e realização do planejamento amostral com as variáveis do estudo que foram selecionadas por estratos, o estrato maior são as 5 Regiões, dentro desse estrato cursos de IES públicas e privadas, todos os estados e Capitais, Municípios considerados grandes e pequenos em relação a seu Estado.

A análise documental das matrizes dos 76 cursos, distribuídos em 44 IES. A análise documental das ementas das disciplinas de conteúdos estatísticos e probabilísticos e análise documental das disciplinas de conteúdos que auxiliem no conhecimento didático e conhecimento didático do conteúdo.

7. Resultados da Pesquisa

Fizemos o download do relatório do MEC (E-Mec, 2012) com a informação de todos os cursos de matemática autorizados, que totalizavam 1.163 (mil, cento e sessenta e três) sendo esses cursos de matemática (presencial e à distância), desses 930 (novecentos e trinta) cursos de licenciatura em matemática presencial, distribuídos em todos os 26 estados e no Distrito Federal, sendo 143 em processo de extinção, 87 extintos e 709 em atividade. Dentre os 709 cursos que estão em atividade selecionamos como população de nossa investigação os 356 cursos avaliados pelo ENADE-2011. Um mapeamento da distribuição geográfica desses cursos nos permitiu ver uma grande concentração dos cursos está na região sudeste com 42% dos cursos, como revela o cartograma a seguir (Figura 1).



Figura 1. Distribuição dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil por Regiões e Estados (avaliados pelo ENADE)

Esses cursos encontram-se distribuídos em 146 IES, algumas dessas IES possuem mais de um curso autorizado para a mesma localidade ou em localidades diferentes. A maior parte dos 356 cursos mapeados é da rede privada de ensino, como revela a Figura 2.

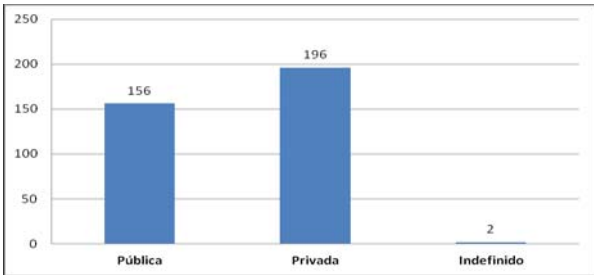


Figura 2. Distribuição dos cursos por rede de ensino. Fonte: MEC-2012

A rede pública tem um total de 9.449 vagas autorizadas com carga horária mínima de 3015 e a rede particular com 19.493 vagas autorizadas, com carga horária mínima de 2.943. Percebemos, portanto, que as IES particulares são responsáveis por 67% das vagas autorizadas em todo o Brasil. Um levantamento junto ao Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) da localização geográfica por regiões, estados e municípios e do tamanho da população de cada um dos municípios onde se localizam os 356 cursos de licenciatura em matemática, nos permitiu classificar os cursos por localização geográfica identificando os das capitais, municípios com maior população e municípios com menor população para que em nossa amostra possa conter cursos de municípios com características heterogêneas.

Após o mapeamento dos cursos autorizados, identificando a quantidade e a localização geográfica de cada um dos cursos, realizamos uma amostragem estratificada proporcional, que consiste em selecionar os elementos da amostra entre os vários estratos, em número proporcional ao tamanho de cada um dos estratos. Este método tem a vantagem de ser mais eficiente do que os métodos de amostragem simples ou sistemática, pois é mais econômico em termos de tempo e dinheiro e fornece resultados com menor probabilidade de erro associada.



Figura 3 - Distribuição dos 76 cursos da amostra por estados

Extraímos aproximadamente 22% dos cursos das 5 regiões proporcional ao total de cursos por região e estados. Nessa amostra temos representantes das 5 regiões, dentro das regiões representantes de todos os estados e do Distrito Federal, das capitais, de municípios com maiores e menores população e dentro desses estratos instituições públicas e privadas. A distribuição dessa amostra podemos ver no Figura 3.

A etapa seguinte consistiu na análise documental das matrizes curriculares das IES disponíveis nos sites de cada um dos 76 cursos que compõem nossa amostra com o objetivo de mapear as disciplinas de conteúdo estatístico e probabilístico e as disciplinas que possam ser o lócus de discussão sobre a cognição, a epistemologia, a história, as metodologias de ensino e as práticas de ensino relativas à Estatística, além do uso das novas tecnologias na estatística e no ensino e aprendizagem da estatística. Em todas as matrizes curriculares das 44 IES dos 76 cursos possuem disciplinas de conteúdos estatísticos (Ver Tabela 3).

Tabela 3. Disciplinas de conteúdos estatísticos e probabilísticos

Disciplina	Quant
Análise Combinatória e Probabilidade	1
Elementos da estatística	1
Estatística	7
Estatística Aplicada à educação	1
Estatística Descritiva	2
Estatística educacional	1
Estatística I	2
Estatística I e II	1
Estatística para licenciatura	1
Estatística probabilística	1
Introdução à estatística	2
Introdução à probabilidade	1
Métodos estatísticos	1
Probabilidade	2
Probabilidade e estatística	17
Probabilidade est I e II	2
Tratamento da Informação	1

Total	44

Classificamos as demais disciplinas dos cursos pela matriz curricular usando como critério aspectos diferenciados que podem influenciar na formação do professor para ensinar estatística, como mapeamento para localizar a partir das ementas aspectos estatístico nas disciplinas que tratam de: currículo, didática, epistemologia, história-filosofia, pesquisa, prática, psicologia e tecnologia.

Na etapa que ainda está em andamento, analisamos ementas de 8 das 44 IES dos 76 cursos selecionados. Nenhuma delas traz de forma explícita em suas ementas à preocupação com a Educação Estatística. Além disso, alguns aspectos interessantes mostram que a Estatística ainda está longe de ser vista como conteúdo da matemática na Educação Básica nos projetos de cursos de formação. Como podemos ver nessas ementas: Ementa – Matemática para educação básica-I e II Matemática para educação Básica I - Funções, Equações e Inequações, Elementares (1º grau, 2º grau, modular, exponencial, logarítmica). Aplicações.Matemática para educação Básica II - Trigonometria. Equações e Funções Trigonométricas. Progressões.

8. Algumas considerações preliminares

A partir das análises realizadas é possível perceber que as recomendações da estatística na Educação Básica e no Ensino Médio trouxe para os cursos de formação de professores de matemática a preocupação em trazer esse componente curricular para as matrizes curriculares como elemento obrigatório.

Apesar da presença da estatística como conteúdo ainda carrega a visão de formação do professor para ensinar depender exclusivamente do conhecimento conceitual, focado na Estatística no conhecimento do campo da estatística e do uso da estatística como ferramenta para a investigação educacional.

Sendo no Brasil a estatística oficialmente como parte da matemática ainda é possível notar nas ementas analisadas a falta de visão na formação da estatística como parte da matemática na educação básica. Nas disciplinas que tratam da Educação Básica, o Tratamento da Informação não se faz presente. O mapeamento de possíveis lócus de formação em educação estatística, ainda a ser averiguado.

Referencias

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamenta (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática.* Brasília

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica (1999). *Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio*. Brasília.

Brasil. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação (2001). CNE/CES. *Diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura*. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em 20/09/2010.

Brasil Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica (2006). *Orientações curriculares para o ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília.

Campos, C. R. (2011). *Educação estatística: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática* Belo Horizonte : Autêntica Editora.

Campos, C. R. (2007). *A educação estatística: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da estatística em cursos de graduação.* Rio Claro.

Gil, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4ª edição. São Paulo. 2002.

Lopes, C. A. E. (1998).*A probabilidade e a estatística no ensino fundamental: uma análise curricular*. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação Universidade Estadual de Campinas-

Lüdke, M.; André, M.E.D.A. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo, EPU,

Perrenoud, P. (199). *10 novas competências para ensinar*. Porto Alegre: ArtMed,

Shulman, L. (1986). *Those who understand: Knowledge growth in teaching*. Educational Researcher 15(2), 4-14

Shulman, L. S. (1987). *Knowledge and teaching: Foundation of a new reform*. Harvard Education Review, 57(1), 22.

La aleatoriedad desde la perspectiva de los estudiantes del profesorado de Matemática

Moreno, Amable[1]; Cardeñoso, José María[2] y González García, Francisco[3]

[1]Universidad Nacional de Cuyo
[2]Universidad de Cádiz
[3]Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo analizamos las respuestas de 583 estudiantes del Profesorado de Matemática de la provincia de Mendoza, Argentina; a un cuestionario que indaga el reconocimiento y la argumentación de la aleatoriedad de sucesos del mundo físico natural, de la vida cotidiana y de la actividad lúdica de las personas. La identificación de la naturaleza aleatoria de ciertos sucesos es importante porque constituye la base indispensable para la construcción de una estructura matemática, como es la teoría de la probabilidad, irrenunciable en la formación académica del futuro profesor de Matemática. Las técnicas estadísticas aplicadas en este trabajo al análisis de los datos fueron: análisis de la varianza y el test Tukey, Intervalos de confianza para la diferencia de medias. Los resultados obtenidos nos han permitido detectar diferencias significativas entre la afirmación y la negación de la aleatoriedad de los sucesos inciertos; sin embargo, no se ha encontrado diferencias significativas del reconocimiento respecto del contexto del suceso: físico natural, cotidiano y de juego; como así tampoco con la formación académica de los estudiantes, la edad, el sexo y la institución en la que realiza la carrera. Cuando logran reconocer los sucesos aleatorios argumentan fundamentalmente desde la imprevisibilidad del suceso. Los resultados evidencian la presencia de unas concepciones que no les permitirán abordar de forma adecuada la enseñanza de esta temática.

Palabras clave: sucesos aleatorios, categorías argumentativas, estudiantes del profesorado de Matemática, nivel académico de los estudiantes.

.

1. Introducción

En los institutos de formación docente de la provincia de Mendoza, el profesorado de Matemática se encuentra transitando un proceso de transformación curricular, según la Resolución n° 655/2011 de la Dirección General de Escuelas (D.G.E.; 2011). Esta propuesta se inscribe en el marco de la Ley Nacional de Educación y las Resoluciones del Consejo Federal de Educación. La Ley de Educación Nacional Nº 26.206 define en su Artículo 71 que:

"La formación docente tiene la finalidad de preparar profesionales capaces de enseñar, generar y transmitir los conocimientos y valores necesarios para la formación integral de las personas, el desarrollo nacional y la construcción de una sociedad más justa. Promoverá la construcción de una identidad docente basada en la autonomía profesional, el vínculo con la cultura y la sociedad contemporánea, el trabajo en equipo, el compromiso con la igualdad y la confianza en las posibilidades de aprendizaje de los/as alumnos/as".

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 367-372). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

La causa de esta reforma surgió como una necesidad ante los resultados poco satisfactorios en la escuela secundaria. Este diseño curricular plantea cinco núcleos: "lo numérico y lo aritmético", "lo geométrico", "lo algebraico", "lo analítico" y "lo probabilístico y lo estadístico".

Para el núcleo "lo probabilístico y lo estadístico" se han considerado dos asignaturas denominadas: Probabilidad y Estadística I; Probabilidad y Estadística II. Ambas con una carga horaria anual de cuatro horas cátedra. En este bloque "lo probabilístico" aparecen algunas sugerencias acerca de la importancia de la enseñanza de la probabilidad y la estadística, como el siguiente:

Los modelos probabilísticos no permiten describir sólo situaciones aleatorias sino también deterministas en las que aparece variabilidad debido a la falta de precisión en el proceso de medición…

Por lo expresado, podemos afirmar que la enseñanza acerca de la naturaleza de los fenómenos aleatorios es un objetivo ineludible para la comprensión del objeto matemático probabilidad. La revisión y reformulación de la formación en probabilidad y estadística de los profesores matemática en formación, es un tema prioritario en la provincia de Mendoza. Así lo indican los resultados de la investigación realizada por Moreno (2009).

En el presente trabajo, entendemos el conocimiento profesional como:

un conocimiento epistemológicamente diferenciado, resultado de una reelaboración e integración de diferentes saberes que pueden concebirse como un sistema de ideas en evolución, lo que permite una gradación de lo simple a lo complejo: una hipótesis de progresión que facilite dicha evolución (Porlán, Rivero y Martín del pozo; 2000).

Por lo tanto, consideramos que el estudio de las concepciones sobre la naturaleza de los fenómenos aleatorios estriba en el convencimiento de que dichas concepciones están obstaculizando una correcta interpretación de estos fenómenos. La idea es aproximarse a concepciones epistemológicamente más correctas, susceptibles de influir más correctamente en el aprendizaje de la probabilidad. Desde esta perspectiva, consideramos que las personas aprenden a partir del mundo de significados que ya tienen construidos.

Para conocer los significados que los estudiantes le atribuyen a la aleatoriedad, hemos aplicado un cuestionario a los 583 estudiantes que están cursando la carrera. El cuestionario consta de 12 ítems destinados al reconocimiento de la aleatoriedad un suceso y sus correspondientes argumentaciones. El estudiante debe afirmar o negar la aleatoriedad y justificarla.

2. Marco teórico

Nuestro marco teórico es el sistema de categorías diseñado por CARDEÑOSO (2001) para el reconocimiento de la aleatoriedad:

- Causalidad: Argumentaciones que tienen como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad explicaciones en función de los diversos factores causales o en la ausencia de posibilidad de su control.
- Multiplicidad: Argumentaciones que tienen como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad la existencia de múltiples posibilidades en el desarrollo del fenómeno.

- Incertidumbre: Argumentaciones en las que se utiliza como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad la propia imprevisibilidad del suceso, sin profundizar en su explicación o análisis.
- Subjetiva: Argumentaciones en las que utiliza como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad consideraciones referidas a la propia vivencia o creencia subjetiva.

Llamaremos ALEA11, ALEA12, ALEA13, ALEA14, ALEA10, ALEA20, ALEA21, ALEA22, ALEA23, ALEA24, ALEA00 a las categorías usadas para afirmar o para negar la aleatoriedad. Si el primer subíndice de Aij, o sea i es 1 si indica que el estudiante reconoció la aleatoriedad del suceso, si es 2 indica que no la reconoció y si es 0 que no contestó. El segundo subíndice, o sea j, indica desde que categoría realiza la argumentación; si j= 0 indica que no argumenta, si j=1 indica que ha contestado desde la causalidad, si j=2 indica que lo hizo desde la multiplicidad, si j=3 indica la incertidumbre y si j=4 indica la subjetiva.

3. Resultados

3.1. En relación con el reconocimiento de la aleatoriedad

Las respuestas de los estudiantes al cuestionario nos permiten afirmar que el 32,63% de los estudiantes niegan la aleatoriedad de los sucesos propuestos; el 66,35% afirma la aleatoriedad de los mismos y el 1,05% no contestan. Es importante destacar que de los seis ítems con mayor negación de la aleatoriedad, encontramos tres del contexto físico natural y tres del contexto cotidiano.

Los resultados obtenidos en el grupo de estudiantes del Profesorado de Biología en Moreno, Cardeñoso y González Garcia (2012), son diferentes que los encontrados en el Profesorado de Matemática; siendo mayor este reconocimiento en Biología, dado que el 70,18% afirman la aleatoriedad de los sucesos, el 28,56% niegan la aleatoriedad y no contestan sólo el 1,33%. Además, el test de student para la diferencia entre medias con varianzas iguales, nos dio un valor para la t=-3,701, g.l.=906, valor p=0,000, y un intervalo del 95% de confianza:

(-1,090; -0,335), lo que demuestra la existencia de diferencias significativas en el reconocimiento de la aleatoriedad entre los estudiantes de Matemática y los de Biología.

3.2. Relación entre el reconocimiento de la aleatoriedad y el nivel académico de los estudiantes

Si consideramos la variable, que llamaremos ALEAS: “número de ítems reconocidos como aleatorios por estudiante” y la variable “nivel propedeútico del estudiante”; podemos determinar que no existen diferencias significativas en el reconocimiento de la aleatoriedad respecto de los niveles propedéuticos. Así, encontramos que el promedio de ítems reconocidos como aleatorios por estudiante, según el nivel es:

- Primer año 7,60
- Segundo año 7,46
- Tercer año 7,37
- Cuarto año 6,83

Los intervalos de Tukey se obtuvieron con una confianza del 95% para las seis combinaciones posibles de los cuatro cursos, como se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Intervalos del 95% de confianza de Tukey

Niveles propedéuticos	*intervalos*	*Valor p*
1° año – 2° año	(-0,62; 0,90)	0,966
1° año – 3° año	(-0,47; 0,93)	0,837
1° año – 4° año	(-0,05; 1,59)	0,074
2° año – 3° año	(-0,75; 0,93)	0,993
2° año – 4° año	(-0,31; 1,58)	0,309
3° año – 4° año	(-0,36; 1,44)	0,403

3.3. Relación entre el reconocimiento de la aleatoriedad con la edad, el sexo y el instituto de los estudiantes

Para determinar si el reconocimiento de la aleatoriedad depende de la edad, hemos categorizado las edades de los estudiantes de la siguiente forma:

- de 17 a 22 años le asignamos el valor 1
- de 23 a 28 años le asignamos el valor 2
- de 29 a 34 años le asignamos el valor 3
- de 35 a 40 años le asignamos el valor 4
- de 41 a 46 años le asignamos el valor 5
- de 47 a 52 años le asignamos el valor 6
- de 53 a 57 años le asignamos el valor 7
- no contesta le asignamos el valor 0

Tomando como factor la edad, el análisis de la varianza revela que no existen diferencias significativas en el reconocimiento de la aleatoriedad en función de la edad, con un valor p=0,220.

Además, no se han encontrado diferencias significativas en el reconocimiento de la aleatoriedad, tomando como factor el instituto en el que realizan la carrera, con un valor p= 0,289. Como así tampoco existen diferencias significativas en el reconocimiento de la aleatoriedad en relación con el sexo con un valor p=0,708.

3.4 Relación entre el reconocimiento de la aleatoriedad en función del contexto

Tomando como factor el contexto y como variable dependiente la cantidad de estudiantes que reconocen la aleatoriedad en cada ítem, el análisis de varianza nos indica que el reconocimiento de la aleatoriedad no depende del contexto del fenómeno o suceso considerado, con valor p = 0,099.

3.5 Relación entre las categorías de la aleatoriedad y el contexto

Nuestro interés es conocer, en qué medida influye el contexto del suceso en la argumentación que proporciona el estudiante con respecto al reconocimiento. Para esto, hemos aplicado el análisis de la varianza multivariado, tomando como factor el contexto y como variables dependientes la cantidad de estudiantes que eligen cada una de las ocho

categorías que argumentan la aleatoriedad. Los resultados nos informan que no existen diferencias significativas en el reconocimiento de la aleatoriedad entre los tres contextos.

Sin embargo, si encontramos diferencias significativas en el uso de las distintas categorías cuando se afirma la aleatoriedad y cuando se niega la aleatoriedad.

Para detectar estas diferencias significativas entre las categorías hemos recurrido al uso de intervalos con una confianza del 95%, empleando la distribución t de student con 582 grados de libertad. Los intervalos obtenidos se muestran en la Tabla 2.

Cuando se afirma, el uso de la incertidumbre es significativamente mayor que la causalidad; la multiplicidad y la subjetiva. Mientras que, la categoría con menor aplicación es la subjetiva. Por otra parte, cuando se niega la aleatoriedad, lo hacen fundamentalmente desde la causalidad en primer lugar y en segundo lugar desde la incertidumbre (Tabla 2).

Tabla 2. Intervalos del 95% para la diferencia de las categorías

categorías	*intervalos*	*Valor p*
ALEA 13- ALEA 11	(1,929; 2,393)	0,000
ALEA 13- ALEA 12	(1,733; 2,161)	0,000
ALEA 13-ALEA 14	(3,657; 4,035)	0,000
ALEA 12-ALEA 14	(1,777; 2,021)	0,000
ALEA 21–ALEA 24	(1,395; 1,672)	0,000
ALEA 23–ALEA 24	(0,723; 0,978)	0,000

Una diferencia importante entre los estudiantes de Matemática respecto de los estudiantes de Biología, es que los primeros hacen un mayor uso de la subjetiva en general, tanto para afirmar como para negar. En Matemática, esta categoría alcanza el 3,89% de los estudiantes, mientras que en Biología lo hacen el 1,72%. Sin embargo, el grupo de los maestros andaluces alcanzan el 5%, superando a los dos grupos anteriores (Cardeñoso, 2001, p.266)

4. Discusión y conclusiones

Los estudiantes del Profesorado de Matemática no han logrado un desarrollo apropiado en el reconocimiento de la aleatoriedad, como se esperaba; el que es necesario para abordar el correcto aprendizaje de la probabilidad. Sorprendentemente este reconocimiento de la aleatoriedad va decreciendo a medida que avanzan en su formación matemática. Ocurriendo todo lo contrario en el Profesorado de Biología, en el que este reconocimiento crece, en la medida que aumenta su formación en biología. A pesar de que el diseño curricular de biología contempla una sola asignatura que trate esta temática, con una carga horaria que es la cuarta parte de la carga horaria que tienen los estudiantes de Matemática.

Por otra parte, la situación se complica aún más, si consideramos los resultados obtenidos por Serradó, Cardeñoso y Azcárate (2006), quienes ha encontrado que algunos libros de texto del nivel de secundaria no hacen un planteamiento correcto de la aleatoriedad, sino por lo contrario reafirman las concepciones deterministas.

Nuestros resultados nos permiten apoyar la aseveración de Fischbein (1990); quien afirma que hay que tener en cuenta que, más allá de las estructuras formales hay intuiciones y modelos intuitivos que influyen en las estrategias de pensamiento, en las interpretaciones y conclusiones. Por lo tanto, es importante que los futuros profesores desarrollen, junto con el razonamiento formal deductivo, un sólido sistema de intuiciones probabilísticas correctas. Para ello es necesario promover actividades que fomenten el conocimiento, análisis y confrontación de concepciones erróneas. En consecuencia reafirmamos las

consideraciones de Lavalle, Michelli y Boché (2003), quienes proponen que la formación debe incluir tareas de socialización del conocimiento y validación de resultados.

En cuanto a la aplicación de la categoría subjetiva, se ha encontrado que estos estudiantes hacen un mayor uso de la misma y un menor uso de la causalidad, respecto de los estudiantes del Profesorado de Biología. Esta información nos confirma lo que expresa Pozo (1987) existe en el pensamiento humano una tendencia ubicua a reducir la incertidumbre de los sucesos remitiéndolos a formas de discriminación más controlables; buscando explicaciones que nos permitan actuar sobre ellos. Si no las encuentran buscan explicaciones mágicas, que no es otra cosa que intentar reducir la incertidumbre de los fenómenos desconocidos. Parece ser que la magia empieza cuando termina el conocimiento causal.

Referencias

Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la Matemática escolar. Modelización de conceptos sobre la Aleatoriedad y Probabilidad.* Tesis (Doctorado en Filosofía y Ciencias de la Educación) – Facultad de Educación, Univ. de Cádiz, Cádiz, España.

Diseño Curricular del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de la Jurisdicción de Mendoza (2011). Resolución n° 655/2011. Dirección de Educación Superior. Dirección General de Escuelas.

Fischbein E. (1990). Training teachers for teaching statistics. En Hawkins Anne (Ed.), Training teachers to teach statistics. International Statistical Institute. The Netherlands.

Lavalle, A.; Micheli, E.B. y Boché, S. (2003). Juicios heurísticos sobre probabilidad en alumnos del profesorado de matemática. Sociedad Argentina de Educación Matemática. Revista Premisa. Año 5, Número 7, pp. 23-31. Disponible en: http://www.soarem.org.ar/Documentos/17%20Lavalle.pdf. Acceso en: 8 de Marzo 2013.

Moreno, A. (2009)**.** *Análisis de factores que obstaculizan la formación de competencias inherentes al pensamiento estadístico en estudiantes de nivel medio.* Proyecto de investigación aprobado y financiado por el Infod. Ministerio de Educación de la Nación. Res. N° 6 (2007).

Moreno, A.; Cardeñoso, J.M. y González García, F. (2012). Un estudio exploratorio de las tendencias de pensamiento probabilístico de los estudiantes del profesorado de biología. XVI *Simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática*. Baeza, Jaén. España.

Porlán, R.; Rivero Garcia, A. y Pozo, R.M. (2000). El conocimiento del profesorado sobre la ciencia, su enseñanza y aprendizaje. En Francisco Javier Palacios, Pedro Cañal de León (coords.), *Didáctica de las ciencias experimentales: teoría y práctica de la enseñanza de las ciencias*, pp. 507-534. Madrid: Marfil.

Pozo, J. A. (1987). *Aprendizaje de la ciencia y pensamiento causal*. Madrid: Visor.

Serradó, A.; Cardeñoso, J.M. y Azcárate, P.(2005). Las concepciones deterministas, un obstáculo para el desarrollo profesional del docente en el campo probabilístico. En: *Congreso Ibero-americano de Educaçao Matemática* ,Portugal: Porto. *Actas del V Cibem***.**

La organización de datos bidimensionales en libros de texto de Bachillerato

Gea Serrano, M. Magdalena, Batanero Bernabeu, Carmen, Cañadas de la Fuente, Gustavo R. y Arteaga Cezón, Pedro

Universidad de Granada

Resumen

Se presenta un estudio sobre el tratamiento que de la organización de datos de una variable estadística bidimensional se realiza en una muestra de ocho libros de texto de Bachillerato. Se analiza la exposición en el tema de las representaciones tabulares y gráficas, y se presenta un análisis del conjunto de tareas que se plantean al estudiante para que construya el significado de dichos objetos matemáticos. Se detectan diferencias en cuanto al tratamiento de las diferentes representaciones, con un uso preferente del registro gráfico.

Palabras clave: lenguaje matemático, situación-problema, correlación y regresión, libros de texto, Bachillerato.

1. Introducción

La estadística se hace presente en la vida diaria del ciudadano (prensa, radio, Tv, Internet, etc.) como medio y/o fin en el tratamiento y búsqueda de información. Así es que diversos autores señalan la importancia de potenciar el pensamiento estadístico en todos los sectores de la población (Wallman, 1993; Moore, 2004). En este sentido, el razonamiento covariacional constituye un elemento valioso en la toma de decisiones en ambiente de incertidumbre, campo en el que la investigación psicológica muestra el uso de intuitivas, con frecuencia incorrectas, al estimar la correlación. Por ejemplo, Chapman y Chapman (1969) denominaron "correlación ilusoria" a los sesgos producidos en la estimación de la correlación debidos a las expectativas y creencias sobre las variables de estudio.

El estudio intuitivo de la dependencia estadística, y su análisis a partir de diagramas de dispersión, se concreta, en algunos currículos, al final de la educación media, sobre los 14-15 años (por ejemplo, en NCTM, 2000). En España se realiza un estudio formal de la correlación y regresión en el primer curso de Bachillerato (16-17 años), que es la etapa de educación secundaria postobligatoria que siguen los estudiantes. En esta etapa educativa, y en las modalidades de *Ciencias y Tecnología* y *Humanidades y Ciencias Sociales* (MEC, 2007), se propone un tratamiento similar para estas nociones.

A pesar de la relevancia que la correlación y regresión adquieren en la formación de nuestros estudiantes, ya que extienden la noción de dependencia funcional y sirven de base para la comprensión de muchos otros conceptos y procedimientos estadísticos, la enseñanza de este tema no es simple. La investigación ha descrito sesgos de razonamiento y dificultades de comprensión como no apreciar la correlación inversa, tener un sentido determinista o local de la correlación o identificar correlación con causalidad (Estepa y Batanero, 1995; Estepa, 2008; Zieffler y Garfield, 2009). Dichas creencias, en algunos casos, resisten al cambio incluso después de la enseñanza (Batanero, Estepa y Godino, 1997). También se han observado errores al interpretar los coeficientes de correlación y regresión (Truran 1995, Sánchez Cobo, 1998; Sánchez Cobo, Estepa y Batanero, 2000), así como una creencia infundada en la transitividad del coeficiente de correlación (Castro-Sotos et al. 2009).

El propósito de este trabajo es estudiar el tratamiento que de la organización de datos de una variable estadística bidimensional se presenta en una muestra de libros de texto de

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 373-381). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Bachillerato. Para ello, centramos la atención en el lenguaje que se utiliza y las situaciones que se plantean al estudiante para este fin, mostrando algunas imprecisiones que podrían inducir conflictos semióticos en los estudiantes. En lo que sigue presentamos los fundamentos, métodos y resultados del estudio, finalizando con algunas conclusiones para la enseñanza.

2. Fundamentos

a. Marco teórico

Con presente estudio se observan algunos resultados de la transposición didáctica (Chevallard, 1991) de la correlación y regresión, esto es, los cambios que estas nociones sufren al incluirlas en la enseñanza de Bachillerato. Desde el currículo pretendido al implementado en el aula, una fase importante es el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores, a través de los libros de texto (Herbel, 2007).

Nuestro trabajo se apoya en el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), que postula que los objetos matemático emergen de las prácticas personales o institucionales al resolver problemas, y que estas prácticas están mediadas por el lenguaje, que es a la vez, instrumento representacional y operativo. En este sentido, el lenguaje del libro de texto, que consta no sólo de vocabulario y símbolos sino de representaciones complejas según Orton (1990), puede afectar al aprendizaje de las matemáticas, por ejemplo, si los alumnos tienen dificultad en su comprensión. A su vez, la situación-problema se concibe como parte integrante del significado institucional (personal) de las nociones de correlación y regresión, y el progreso o adquisición de estas nociones lleva asociada la resolución de un conjunto de prácticas significativas de donde estas nociones surgen (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007). Por ello, las situaciones propuestas en la enseñanza deben ser representativas de las incluidas en el significado institucional del concepto y, por otro lado, permitir contextualizar los conocimientos pretendidos, ejercitarlos y aplicarlos a situaciones relacionadas (Godino et al. 2006).

b. Antecedentes

La investigación desarrollada en cuanto a libros de texto de matemáticas es amplia, destacándose, entre otros aspectos, su influencia en las decisiones de los profesores sobre las tareas a realizar con los estudiantes (Stylianides, 2009), así como en el discurso que regula la enseñanza y aprendizaje de esta materia (Cordero y Flores, 2007). En el caso de la estadística y probabilidad encontramos algunos ejemplos como los de Ortiz (1999), Ortiz, Batanero y Serrano (2001), Cobo y Batanero (2004), Azcárate y Serradó (2006), Alvarado y Batanero (2008) y García (2011).

En cuanto a la correlación y regresión, el primer antecedente relacionado es el de Sánchez Cobo (1998), quien analiza once libros de texto de tercer curso de Bachillerato publicados desde 1987 hasta 1990, mostrando una tendencia formalista en la presentación del tema, y un uso mayoritario de ejemplos basados en representaciones gráficas, así como un fuerte sesgo en los ejemplos presentados hacia la correlación positiva. Más recientemente Lavalle, y cols. (2006) analizan la correlación y regresión en siete libros de texto argentinos de Bachillerato, observando un enfoque mayoritariamente socio-constructivista, con un nivel de profundidad adecuado, donde se plantean más actividades bajo una asociación directa que inversa y ninguna bajo propuesta del uso de recursos tecnológicos.

Para complementar los citados trabajos, analizaremos el lenguaje matemático utilizado en los textos, que fue estudiado por Ortiz, Batanero y Serrano (2001) para el caso de la probabilidad, así como las situaciones-problemas propuestas en torno a la organización, representación y lectura de datos bivariantes. Este tipo de tareas conforman el análisis previo al estudio de la dependencia y el ajuste del modelo de regresión, y su desarrollo podría ayudar al profesor a controlar el obstáculo didáctico descrito por Agnelli et al. (2009), consistente en que el estudiante use un procedimiento determinístico en

situaciones en que es adecuada la regresión, debido a la naturaleza aleatoria de los datos. En lo que sigue se presentan el método y los resultados del estudio.

3. Metodología

Se analizaron ocho libros de textos de primer curso de Bachillerato en la Modalidad de *Humanidades y Ciencias Sociales*, publicados recién implantado el currículo actual de Bachillerato (MEC, 2007), que se continúan utilizando en este nivel educativo y que se eligieron por ser los más utilizados en la enseñanza pública en Andalucía y estar publicados en editoriales de gran tradición y prestigio en España (Anexo 1). Se ha asignado un código a cada uno de estos textos para facilitar la exposición y lectura de los resultados.

Partiendo de las variables utilizadas por Ortiz, Batanero y Serrano (2001), centramos la atención en las representaciones tabulares y gráficas, y en cuanto a las situaciones problemáticas planteadas al respecto, se estudia el tipo de tarea planteada, siguiendo a Ortiz (1999), según se trate de ejemplos o ejercicios/problemas resueltos o a resolver, y en este último caso, si se plantean en el desarrollo o al finalizar el tema.

4. Resultados y discusión

a. La representación tabular y gráfica

Las tablas estadísticas ofrecen una estructuración particular de la información de una variable estadística bidimensional ya que además de organizar los datos, facilita la exploración de las diversas relaciones entre ellos (Ortiz, 1999). Todos los libros analizados reconocen su importancia, definen la tabla de doble entrada al comienzo del tema, pero no se suele utilizar en su desarrollo, siendo la representación tabular más utilizada el listado de datos en dos filas/columnas, denominada en algunos manuales tabla de frecuencias bidimensional simple ([L8], p. 248). Tan sólo tres de estos textos ofrecen un tratamiento apropiado de la organización tabular de datos ([L3], [L7] y [L4]) describiendo los pasos para construir una tabla de doble entrada, y haciendo un uso generalizado de la misma. Incluso [L3] y [L7] presentan el procedimiento para agrupar los datos de la distribución en intervalos. Aún así, los ejercicios que se plantean se basan, en su mayoría, en tablas simples, siendo una posible causa la necesidad de agilizar los cálculos debido al escaso tiempo disponible para impartir el temario.

En la Tabla 1 observamos el tratamiento diferenciado de las tablas de datos en los textos, donde cabe destacar que la mayoría de los textos analizados presentan la tabla bidimensional simple con frecuencias como conversión en filas o columnas de la tabla de doble entrada y sólo [L8] ofrece una definición explícita de esta representación. En cuanto a las representaciones gráficas utilizadas en los textos analizados, señalamos el doble uso que de ellas se realiza, primero como medio de representación gráfica de los datos de una distribución estadística bidimensional y segundo como recurso didáctico para la enseñanza del tema, ya que permite estimar la intensidad de la relación (a través de la mayor o menor dispersión de la nube de puntos), visualizar su sentido (si la relación es directa o inversa) y el tipo (lineal o no) observando su tendencia (Sánchez Cobo, 1998). En ocasiones se añade el trazado de la recta que mejor se ajusta al mismo.

Tabla 1. Representación tabular en los textos analizados

	Presencia en el tema	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
Tabla bidimensional simple	Desarrollo teórico y práctico del tema	x				x	x		
	Uso práctico	x	x	x	x	x	x	x	x
Tabla bidimensional simple con frecuencias	Conversión en columnas/filas de la tabla de doble entrada con uso eminentemente práctico		x		x	x	x	x	x

Tabla de doble entrada	Definición y uso en el tema		x	x	x			x	x	
	Definición y uso mínimo	x								
	Presencia anecdótica					x	x			

La representación gráfica mayormente utilizada es el *diagrama de dispersión o nube de puntos* (Figura 1), donde se representa los datos mediante coordenadas cartesianas. En general se introducen mediante ejemplos y se definen posteriormente. Por ejemplo, [L1] lo describe como "conjunto de datos de una distribución bidimensional representados en ejes cartesianos" (p. 226) precisando, al final del tema, que la frecuencia absoluta de cada dato no tiene que ser necesariamente uno. Tan sólo los textos [L3], [L8] y [L4] describen su construcción a partir de una tabla de doble entrada.

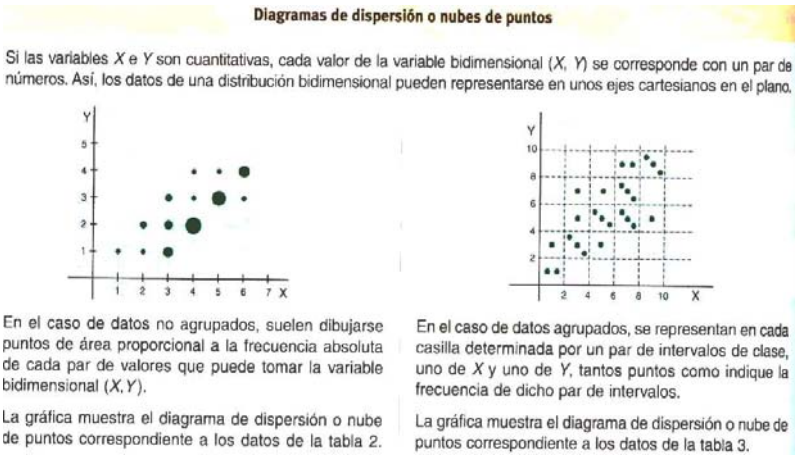


Figura 1. Diagrama de burbujas y diagrama de dispersión ([L3], p. 220)

Del análisis realizado hacemos notar, por lo general, que los textos no diferencian el diagrama de dispersión y el diagrama de burbujas, en que el diámetro de cada punto es proporcional a su frecuencia absoluta (Figura 1) y que podría utilizarse para representar simultáneamente tres variables (el diámetro) o incluso cuatro, mediante el color. En este sentido, destacamos el texto [L7], por no precisar la importancia de la proporcionalidad del grosor del punto representado y [L2] donde ni se describe, dando por supuesta la sencillez de su construcción.

Diagrama de barras tridimensional. Los textos [L1] y [L7] realizan una aproximación imprecisa a este gráfico, que no diferencian del histograma. En [L3] se define correctamente como un gráfico tridimensional utilizado para representar datos bidimensionales no agrupados en intervalos, donde para cada dato se levanta una barra de altura proporcional a su frecuencia absoluta.

Pictograma tridimensional. Sólo [L3] define este gráfico, que es tratado como una variante del diagrama de barras donde cada barra es sustituida por dibujos. Explica su construcción y la importancia de la proporcionalidad del tamaño de los dibujos a la frecuencia.

Histograma tridimensional. Tan sólo [L3] lo define correctamente como un gráfico tridimensional utilizado para representar datos bidimensionales agrupados en intervalos, donde para cada par de intervalos de clase se levanta un prisma de volumen proporcional a su frecuencia absoluta, explicando los pasos en su construcción.

En la Tabla 2 podemos observar el uso mayoritario del diagrama de dispersión, constituyendo una herramienta indispensable para la enseñanza de la correlación y regresión, y el escaso uso de otras representaciones gráficas básicas como el diagrama de barras o el histograma tridimensional. Las imprecisiones en la definición del diagrama de

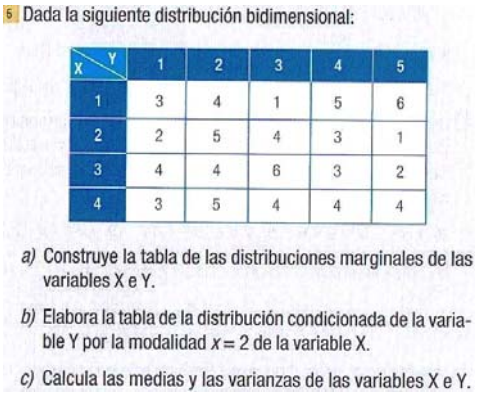
dispersión suelen ser debidas a no considerar el caso en que la frecuencia de los datos sea distinta de uno, y que la mayoría de las veces se confunde con el diagrama de burbuja.

Tabla 2. Representación gráfica en los textos analizados

	Presencia en el tema	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
Diagramas de dispersión	Definición imprecisa y con ejemplos	x	x			x	x	x	
	Definición correcta			x	x				x
	Uso esencial en el desarrollo del tema	x	x	x	x	x	x	x	x
Gráfico de burbujas	Definición imprecisa	x		x					
	No distingue del diagrama de dispersión			x	x			x	
Histograma tridimensional	Definición imprecisa	x						x	
	Definición y representación correcta			x					
Pictograma tridimensional	Definición como variante del diagrama de barras y representación correcta			x					
Gráfico de barras tridimensional	Definición imprecisa	x							
	Definición y representación correcta			x	x				
	Uso sin definición		x						

b. Situaciones-problema

Partiendo del estudio del significado de las nociones de correlación y regresión en la Historia (Estepa et al. 2012), se identifican dos campos de problemas principales, que dieron origen a estos conceptos como son el análisis de la dependencia de las variables de estudio y el ajuste del modelo de regresión a los datos. A esta clasificación añadimos un campo de problemas previo que denominamos *Organización/Reducción de datos*, que incluye actividades de construcción de la tabla de frecuencias de la distribución bidimensional, de las distribuciones marginales o condicionales (como el ejemplo presentado en la Figura 2) y de representación gráfica de la distribución bidimensional, así como las relativas a la lectura de dichas representaciones.



6 Dada la siguiente distribución bidimensional:

X \ Y	1	2	3	4	5
1	3	4	1	5	6
2	2	5	4	3	1
3	4	4	6	3	2
4	3	5	4	4	4

a) Construye la tabla de las distribuciones marginales de las variables X e Y.

b) Elabora la tabla de la distribución condicionada de la variable Y por la modalidad $x = 2$ de la variable X.

c) Calcula las medias y las varianzas de las variables X e Y.

Figura 2. Representación tabular de datos bidimensionales ([L4], p. 230)

Del análisis de las tareas se observó una tendencia a ejercitar al alumno en la representación gráfica del diagrama de dispersión, con menor incidencia de la representación tabular de los datos. Creemos que esto se debe principalmente a que las representaciones gráficas, como el diagrama de dispersión, visualizan más claramente la dependencia entre las variables. En cuanto al uso de otras representaciones como el diagrama de barras o histograma destacamos los textos [L4] y [L3]. El resto de los textos alude al diagrama de barras o histograma únicamente de modo anecdótico en sus tareas. En cuanto a la representación tabular, en los textos [L4], [L7], [L8] y [L3] se proponen tareas

relativas a distribuciones marginales, siendo únicamente el [L4] el que trata la distribución de frecuencias condicional (Figura 2).

En cuanto a la tipología de actividades que se plantean al estudiante, y al igual que en el estudio de Ortiz (1999), consideramos como ejemplo las descripciones de situaciones en que se aclara el significado de los conceptos introducidos teóricamente; y ejercicios todas aquellas actividades, resueltas o no, que se presentan al estudiante para adquirir o reforzar el aprendizaje de un objeto matemático (independientemente de que en el libro su título sea problema, actividad, ejercicio o ejemplo). Detallamos además si los ejercicios que se plantean al alumno para que resuelva se encuentran en el desarrollo del tema o al final, pues si se presentan al comienzo se puede suponer que es un verdadero problema para el estudiante, mientras que si se presenta al final sería únicamente un ejercicio de refuerzo del aprendizaje. Sánchez Cobo (1998) no realiza esta clasificación en su estudio.

Tabla 3. Frecuencias (y porcentajes) de tipos de tareas en los textos analizados

		L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
Ejercicio	Ejemplo	4(22.2)	1(4.2)	8(17.8)		2(7.1)	1(12.5)	5(7.1)	2(9.1)
	Resuelto		2(8.3)		8(21.1)	12(42.9)	2(25)	21(30)	5(22.7)
	En el tema	4(22.2)	4(16.7)	17(37.8)	5(13.2)		1(12.5)	23(32.9)	6(27.3)
	Al final del tema	10(55.6)	17(70.8)	20(44.4)	25(65.8)	14(50)	4(50)	21(30)	9(40.9)
	Total	18	24	45	38	28	8	70	22

Podemos observar (Tabla 3) la gran cantidad de tareas planteadas al final del tema, salvo en el texto [L7], con un tratamiento equilibrado en el tipo de tareas si unimos los ejemplos a los ejercicios resueltos. Esta tendencia es descrita por Ortiz (1999) en su trabajo sobre probabilidad, indicando que este exceso de ejercicios al final del tema puede corresponder a una orientación teoría-práctica en los libros de texto, tendencia que se comparte en nuestro estudio. Esta orientación parece menor en el texto [L3] y se hace más acusada en los textos [L2] y [L4]. Además, destacamos los textos [L6] y [L1] por la escasez de tareas planteadas en torno a este campo de problemas.

5. Conclusión

Nuestro análisis sugiere que los textos analizados podrían inducir un uso sesgado de la organización de datos bidimensionales, según el tratamiento de las representaciones tabular y gráfica, con tendencia hacia el registro gráfico, pero sin prestar atención al proceso de construcción de estos gráficos. Destacamos, además, el escaso uso de la tabla de doble entrada en la mayoría de los textos analizados, a favor del uso casi generalizado del listado de datos, cuya complejidad semiótica, según Arteaga (2011) es insuficiente para visualizar las tendencias de éstos.

En este sentido, y tal como recomiendan las orientaciones curriculares de las matemáticas de Bachillerato (MEC, 2007), el uso de la tecnología, como la hoja de cálculo Excel, puede servir de ayuda tanto para la mejor comprensión de estos conceptos, como para la resolución de esta tipología de problemas ya que ayudaría al estudiante a disponer, en segundos, de una o varias representaciones gráficas, y favorecer la interpretación de los resultados.

Agradecimientos

Proyecto EDU2010-14947, FPI-BES-2011-044684 (MICINN-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Agnelli, H., Konic, P., Peparelli, N. Z. y Flores, P. (2009). La función lineal obstáculo didáctico para la enseñanza de la regresión lineal. *Unión, 17* (1), 52-61.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2008). Significado del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística. *Estudios pedagógicos, XXXIV* (2), 7-28.

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la Eso. *Revista de Educación, 340*, 341-378.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1997). Evolution of students' understanding of statistical association in a computer based teaching environment, en J. B. Garfield y G. Burrill (eds.), *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics. IASE Round Table Conference Papers*, (pp. 191-205). Voorburg, The Netherlands: Internacional Statistical Institute.

Castro-Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van Den Noortgate, W. y Onghena, P. (2009). The transitivity misconception of Pearson's correlation coefficient. *Statistics Education Research Journal, 8* (2), 33-55.

Chapman, L. J. y Chapman, J. P. (1969). Illusory correlation as an obstacle to the use of valid psychodiagnostic signs. *Journal of Abnormal Psychology, 74* (3), 271-280.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 22* (1), 5-18.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 10* (1).

Estepa, A. (2008). Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias 26* (2), 257-270.

Estepa, A. y Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias, 13* (2), 155-170.

Estepa, A., Gea, M. M., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2012). Algunas notas históricas sobre la correlación y regresión y su uso en el aula. *Números, 81*, 5-14.

García, I. (2011). Análisis de los términos de inferencia estadística en bachillerato. *Números, 77*, 51-73.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9* (1), 117-150.

Herbel, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the" voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education, 38* (4), 344-369.

Lavalle, A. L., Micheli, E. B. y Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *RELIME, 9* (3), 383-406.

M.E.C. (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura de bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.* Madrid: Autor.

Moore, D. (2004). Foreword. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The callenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking*, (pp. ix-x). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

NCTM. (2000). *National Council of Teachers of Mathematics. Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: VA.

Ortiz, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma, 38,* 5-14.

Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas.* Madrid: M.E.C. y Morata.

Sánchez Cobo, F.T. (1998). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

Sánchez Cobo, F.T., Estepa, A. y Batanero, C. (2000). Un estudio experimental de la estimación de la correlación a partir de diferentes representaciones. *Enseñanza de las Ciencias, 18* (2), 297-310.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning, 11* (4), 258-288.

Truran, J. M. (1995). Some undergraduates' understanding of the meaning of a correlation coefficient, en B. Atweh, y S. Clavel (eds.), *Proceedings of the Eigteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA)*, (pp. 524-529). Darwin, Australia: Northern Territory University.

Wallman, K. K. (1993). Enhancing statistical literacy:Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association, 88* (421), 1-8.

Zieffler, A, y Garfield, J. (2009). Modeling the growth of students' covariational reasoning during an introductory statistics course. *Statistics Education Research Journal, 8 (1)*, 7-31.

Anexo 1: Textos utilizados en el análisis ordenados según editorial

[L1]. Colera, J., Oliveira, M.J., García, R. y Santaella, E. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Anaya.

[L2]. Arias, J. M. y Maza, I. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 1*. Madrid: Bruño.

[L3]. Anguera, J., Biosca, A., Espinet, M. J., Fandos, M.J., Gimeno, M. y Rey, J. (2008). *Matemáticas I aplicadas a las Ciencias Sociales.* Barcelona: Guadiel.

[L4]. Monteagudo, M. F. y Paz, J. (2008). *1º Bachillerato. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales*. Zaragoza: Luis Vives.

[L5]. Martínez, J. M., Cuadra, R., Heras, A. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. 1.º Bachillerato.* Madrid: McGraw-Hill.

[L6]. Bescós, E. y Pena, Z. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. 1 Bachillerato*. Vizcaya: Oxford University Press.

[L7]. Antonio, M., González, L., Lorenzo, J. Molano, A., del Río, J., Santos, D. y de Vicente,

M. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Santillana.

[L8]. Vizmanos, J. R., Hernández, J. y Alcaide, F. Moreno, M. y Serrano, E. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 1*. Madrid: Grupo SM.

La relación entre la variable aleatoria y la variable estadística: un análisis epistemológico disciplinar

Ruiz Hernández, Blanca y Albert Huerta, José Armando

Tecnológico de Monterrey

Resumen

La variable aleatoria es un concepto probabilístico que permite el paso del cálculo de probabilidades de eventos al estudio de las distribuciones. Una de sus principales facetas es la vinculación que mantiene con la variable estadística y que sienta las bases para el estudio de la inferencia estadística. Sin embargo, diversas investigaciones muestran las dificultades en el aprendizaje de este objeto matemático, aún en el nivel universitario.

A partir del análisis de contenido de diversos libros tanto de texto universitario de probabilidad y estadística como de otros introductorios a la teoría de probabilidad analizamos el objeto matemático variable aleatoria y la red de conceptos que giran a su alrededor. Hacemos énfasis en la relación que guardan las variables aleatoria y estadística y el papel que esta relación tiene en el proceso de modelación estadística. El propósito de nuestro estudio es obtener un acercamiento a la naturaleza epistémica de la relación entre ambos conceptos. Desde esta perspectiva, concluiremos con algunas posibles sugerencias que favorezcan la enseñanza de ambos objetos matemáticos y su relación sin desvincularlos de su naturaleza epistémica, en el nivel universitario.

Palabras clave: variable aleatoria, variable estadística, inferencia estadística, didáctica la estadística.

1. Introducción

El presente trabajo inicia con un análisis de la variable aleatoria en libros de texto universitarios. Los libros considerados tienen el propósito principal de la enseñanza de la teoría de probabilidades en niveles universitarios o de postgrado. Cuatro de ellos: Meyer (1989), Feller (1989), Wackerly, Mendenhall y Scheaffer (2002) y Devore (2011), tratan de presentar, junto con el desarrollo de la teoría probabilística, aplicaciones a la misma probabilidad en diversas áreas de la ingeniería y a sí mismos se califican de no rigurosos. Otros libros: Mood y Graybill (1963), Krickeberg (1973), Cuadras (1999) y Petrov y Mordecki (2002) describen la teoría matemática desde una perspectiva más rigurosa y sin más aplicaciones que las propias de la misma teoría. Uno más, Ríos (1967) presenta una perspectiva diferente. Su enfoque más bien va hacia la estadística, la probabilidad la maneja desde una perspectiva útil para esta última. El trabajo se complementó con otros libros que proporcionan elementos importantes para concluir nuestro análisis. Tal es el caso del libro de Boudot (1979) de corte filosófico y al de Godino, Batanero y Cañizares (1996) que trata de mostrar los temas de azar y probabilidad desde una perspectiva didáctica.

Por otra parte, la modelación de fenómenos aleatorios abordados a nivel universitario está fuertemente vinculada la variable aleatoria, pero aparecen ligados otros muchos conceptos (parámetro, estadístico, probabilidad, distribución, función), así como un lenguaje específico (verbal, simbólico y gráfico), propiedades, definiciones y argumentos específicos. Por eso, la variable aleatoria no sólo es un concepto matemático, sino una configuración de objetos matemáticos y a la vez un instrumento de modelación para la resolución de problemas en el que se requiere encontrar la regla de correspondencia que asigne valores

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 383-390). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

numéricos a los resultados de un experimento aleatorio, que cumpla con ciertos criterios matemáticos y que, a su vez, esté vinculada con un contexto real. Finalmente se muestra que el concepto de variable aleatoria es esencial para la modelación de fenómenos vinculados con el azar, a nivel universitario, y necesita mayor atención didáctica.

2. La variable aleatoria

El tema que nos ocupa parte de una situación aleatoria (experimento), cuyo resultado se puede valorar mediante una medida cuantitativa (usualmente referida a una cierta magnitud). En las situaciones aleatorias «para caracterizar el resultado de un experimento, no basta con decir que se ha producido un determinado suceso, sino que es preciso dar cuenta de las diversas medidas que se hayan efectuado. La variable aleatoria, es decir, la magnitud que 'depende del azar', es entonces indispensable» (Boudot, 1979, p. 332). La variable aleatoria es la herramienta matemática que permite pasar del estudio de sucesos aislados al estudio de las *distribuciones de probabilidad,* que son funciones reales y por lo tanto, hace posible la aplicación del análisis matemático y de otras herramientas matemáticas a la estadística (Batanero, 2001).

Una definición formal de variable aleatoria se reproduce a continuación:

> Sea (Ω, $\mathcal{A}$, P) un *espacio* de probabilidad y R el cuerpo (o campo) de los números reales. Se dice que la aplicación:
>
> $$\begin{aligned} \xi: \ \Omega &\rightarrow R \\ \omega &\rightarrow \xi(\omega) \in R \end{aligned}$$
>
> que a cada suceso elemental hace corresponder un número real, *es una variable aleatoria* si para todo número real x, se verifica la relación:
>
> $$(1) \qquad A = \{\omega \mid \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$
>
> es decir, se verifica que A es un suceso. (Cuadras, 1999, p 71-72).

Así, la definición matemática de la variable aleatoria exige que la imagen inversa de todo $\xi^{-1}(\omega)$ sea un elemento del álgebra $\mathcal{A}$, porque una vez definida una medida de probabilidad P sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, la variable aleatoria puede determinar una medida de probabilidad sobre $(R, \mathcal{B})$, en donde $\mathcal{B}$ es la sigma-álgebra construida por los conjuntos de Borel en R. De esta forma, la variable aleatoria induce una medida normada sobre los conjuntos que representan a los sucesos (Godino, Batanero y Cañizares, 1996).

Así mismo se observa que la variable aleatoria está definida para todo suceso del álgebra de sucesos, y no sólo para los puntos muestrales (elementos del conjunto Ω). Es decir se trata de una aplicación de $\mathcal{A}$ en R, lo que garantiza que la imagen inversa de cualquier elemento del conjunto imagen pertenezca a $\mathcal{A}$ y por tanto podamos posteriormente calcular su probabilidad, que estaba definida previamente sobre $\mathcal{A}$.

Un caso particular importante es el de experimentos aleatorios en los que aparentemente la variable aleatoria está implícita en los puntos muestrales. Por ejemplo, el experimento consiste en observar el tiempo de espera a un autobús, el número de llamadas telefónicas que espera un conmutador o la medida de la altura de una mujer, en tal caso $\omega = \xi(\omega)$. Sin embargo, generalmente a partir de un mismo experimento aleatorio se pueden definir diferentes variables aleatorias o bien a partir de operaciones algebraicas o analíticas entre variables (en donde se pueden incluir variables no aleatorias) se generan nuevas variables aleatorias. Por ejemplo, en el experimento aleatorio de extraer de una urna el nombre de un trabajador de una fábrica, la variable aleatoria podría ser el «número de miembros de la familia del trabajador ganador» pero también podría ser el «número de años

que tiene laborando en la fábrica el trabajador ganador» o cualquier otra característica dependiendo del motivo por el que se está interesado en efectuar esa extracción.

Entonces, la definición de la variable aleatoria está condicionada por dos contextos, el matemático y el dado por el problema. Es en este sentido que para Miller (1998) es tan importante hacer la distinción sobre la forma en que se define a la variable aleatoria en el discurso escolar. Él alerta sobre las dificultades posteriores que puede traer consigo confundir el resultado del experimento con la variable aleatoria o el espacio muestral del experimento con el conjunto de valores que puede tomar la variable.

En este sentido, una propuesta didáctica interesante es la que hace Parzen (1971). Él plantea introducir la variable aleatoria y «toda la abrumadora cantidad de nociones que hay que introducir simultáneamente» (p. 8) a través de fenómenos aleatorios con resultados numéricos (p. 172). Posteriormente, Parzen propone definir el objeto matemático variable aleatoria y aclarar que en los fenómenos aleatorios con resultados numéricos, ésta es la función identidad. Parzen pone énfasis en que «hay que aprender a reconocer y formular matemáticamente como funciones los objetos descritos verbalmente que sean variables aleatorias» (p. 300). Cuando Parzen se refiere a «la abrumadora cantidad de nociones que hay que introducir simultáneamente» a la variable aleatoria no sólo se refería a la definición de espacio probabilístico y de distribución, sino también, entre otros, a las medidas de posición central, dispersión y posición y a los momentos de la variable aleatoria. En realidad la definición de la variable aleatoria y su distribución apenas definen el modelo que auxilia en la resolución del tipo de problemas que nos ocupa. Las medidas de tendencia central, de dispersión y posición son, la mayor parte de las veces, las que proporcionan la solución directa.

3. La variable estadística y la variable aleatoria

Anteriormente se introdujo la variable aleatoria directamente a partir de la idea de experimento aleatorio. Otra introducción presentada en algunos textos es a partir de la idea de variable estadística, por ejemplo, en Ríos (1967):

> Si consideramos un experimento aleatorio *S* y realizamos un cierto número *n* de pruebas relativas al mismo, obtenemos un conjunto de observaciones, que se llama una *muestra aleatoria de extensión n.* Este conjunto de resultados dará lugar a una tabla estadística en que a unos ciertos valores de la variable corresponden una ciertas frecuencias. A tal *variable, que representa únicamente los n resultados de n realizaciones del experimento aleatorio S la denominaremos variable estadística.* (Ríos, 1967, p. 70. Las cursivas son del texto original.)

Y la variable aleatoria la concibe como el resultado de la repetición indefinida del experimento:

> Si imaginamos hechas una infinidad de pruebas relativas al experimento *S* la infinidad de resultados posibles da origen a la noción de variable aleatoria asociada al experimento *S*. En este caso la variable aleatoria toma los valores que representan los sucesos elementales posibles de dicho experimento con unas ciertas probabilidades que le corresponden. (Ríos, 1967, p. 70).

El autor explica que los conceptos concretos de muestra, frecuencia y variable estadística, llevan, por un proceso de abstracción, a los de población, probabilidad y variable aleatoria. Habla de la distribución de frecuencias o distribución acumulativa de frecuencias que, al generalizarse, dan lugar a la distribución de probabilidad y función de distribución.

Sin embargo, hay algunas acotaciones a estas definiciones que merece la pena mencionar. De acuerdo con ellas, la variable estadística se relaciona con una *muestra* de datos, en cambio la variable aleatoria se relaciona con la *población*, aunque en ambos casos se supone la existencia de un «experimento aleatorio *S*» vinculado con la recolección de los

datos. Pero esta definición sólo se aplica cuando la asignación de probabilidades es frecuencial, pues en este caso se parte de una variable estadística y es mediante un proceso de inferencia que se llega a la variable aleatoria. Cuando la asignación es clásica, por ejemplo, el espacio muestral puede provenir de un análisis teórico o bien del recuento del total de datos de la población. En tal caso, la definición de variable aleatoria no requeriría del proceso que menciona Ríos. También hay casos en la probabilidad clásica en que sería necesario trabajar con la variable estadística si se plantean problemas de muestreo. También existen variables aleatorias o estadísticas compuestas que se definen a partir de otras variables aleatorias o estadísticas.

Observemos también que Ríos establece la presencia del experimento aleatorio en la conceptualización de ambas variables. Una definición más teórica de variable aleatoria está de acuerdo en la relación que ella guarda con un experimento aleatorio, lo cual, en algunas ocasiones, no ocurre con la variable estadística. Estas situaciones serían aquellas en las que se obtiene el total de datos de la población (censo) con objetivos descriptivos. De acuerdo con la definición de variable estadística (dada **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**) habrá un experimento aleatorio que se usa para recolectar datos, pero en el caso de un censo no hay un muestreo aleatorio, puesto que todos los miembros serán seleccionados. En esta situación la definición de la variable como aleatoria o estadística no depende del número de pruebas sino del uso que se le dé a los datos. Si el objetivo es descriptivo, la variable sería estadística, sin la realización del experimento aleatorio en la recolección de los datos, pero si el objetivo fuera conocer la probabilidad de que un miembro tenga cierta característica, sería aleatoria, puesto que el experimento aleatorio involucrado estaría dado por la selección aleatoria de un miembro de esa población y el espacio muestral es conocido (obtenido empíricamente a través de la recolección total de los datos). Es decir, en esta última situación la recolección de datos no estaría dada por la repetición del experimento aleatorio. Además, en el caso de un censo, y para una variable discreta, la distribución de probabilidad aparentemente sería la misma que la distribución de frecuencias relativas: su gráfica tendría la misma forma y sus valores serían los mismos, pero conceptualmente serían muy diferentes. La gráfica y los valores de la distribución de una variable estadística, conceptualmente cambiarían por completo en el momento en que una persona esté interesada por contestarse alguna pregunta probabilística con respecto a esa población, puesto que esa misma gráfica y los mismos números representarían la distribución de una variable aleatoria. Esto podría generar confusiones en las conceptualizaciones de los estudiantes.

De manera general, la variable estadística está relacionada con la recolección de una muestra de datos y la variable aleatoria con un conocimiento del espacio probabilístico (obtenido teórica o empíricamente a través de un censo). La variable aleatoria siempre está vinculada con un experimento aleatorio, pero la estadística no necesariamente. La aleatoria está vinculada con las diversas asignaciones de probabilidad, ya sea laplaciana, frecuencial, subjetiva o alguna otra, en cambio la estadística lo está con la obtención de las frecuencias.

4. Modelación y variable aleatoria

La variable aleatoria es un modelo matemático para describir situaciones reales (Chaput, Girard y Henry, 2011) y a su vez, uno de los elementos que determinan la modelación de la función de distribución (inseparable de la variable). De este modo la variable aleatoria es un objeto matemático que describe «la realidad» y se convierte en la «realidad matemática» que se modela mediante la función de distribución.

Desde el punto de vista didáctico, la generación de modelos probabilísticos y estadísticos se enfocan al proceso de construcción de conocimiento en la escuela y en la vinculación que, a través de éste proceso, el estudiante puede establecer con la teoría científica ya instaurada. Describir el proceso de modelación que siguen los estudiantes

cuando se enfrentan a un problema en el que está en juego el objeto matemático de variable aleatoria y la teoría alrededor de él, es uno de los objetivos de la didáctica de la estadística. Lo que forzosamente deberá incluir el razonamiento con y a través de la teoría, lo cual conlleva al estudio del razonamiento con modelos probabilísticos y estadísticos, y la modelación como un proceso de enseñanza.

El razonamiento estadístico trabaja a partir del conocimiento estadístico, el conocimiento del contexto y la información proporcionada por los datos. El trabajo de modelación con la variable aleatoria requiere una síntesis entre el conocimiento del contexto y el conocimiento estadístico en donde la variable aleatoria juega un papel importante: surge del contexto y permite la matematización del problema. Para Wild y Pfannkuch (1999) los modelos son formados con datos tomados del contexto real incorporando «conocimiento experto» y en los modelos estadísticos alguna de esa información que se toma de la realidad ya son datos estadísticos. Por su parte, Coutinho (2001) retoma la modelación propuesta por Dantal (1997), quien describe el proceso de modelación deseable en el salón de clases compuesto por los siguientes pasos: (1) Observación de la realidad; (2) Descripción simplificada de la realidad; (3) Construcción de un modelo; (4) Trabajo matemático con el modelo; (5) Interpretación de resultados en la realidad. No se trata de un proceso rutinario, puesto que el estudiante no estará en posesión de todo el conocimiento matemático necesario para resolver el problema, muy al contrario, en este proceso se espera que el estudiante lo adquiera. La construcción se establece en un ritmo que se asemeja a la generación del conocimiento científico.

Por otra parte, Heitele (1975) asegura que la modelación en contexto estocástico algunas veces los mismos objetos son tomados como «realidad» y otras como «modelo». Así por ejemplo, en muchas situaciones de modelación la simetría o las frecuencias relativas son consideradas parte de la realidad, pero en otras se objeta que el concepto de simetría ya es en sí un modelo y que registrar frecuencias relativas significa cuantificar la realidad, lo cual presupone la generación de un modelo. Heitele resuelve esta aparente inconsistencia estableciendo las relaciones entre realidad y objetos matemáticos en una estructura de estratos. Esto es, sin duda los valores numéricos de los datos se pueden considerar como un modelo (una vez que se ha establecido una variable, por ejemplo), pero desde un estrato más alto, se les puede ver como parte de la realidad. Lo cual significa que se ha pasado de una realidad palpable y visible a una «nueva realidad» en la que los valores de una variable emergen como hechos reales. Este último sería el esquema de acuerdo al cual las frecuencias relativas de una variable son mapeados sobre probabilidades, concebidas en las mentes humanas dentro de un modelo matemático.

Por otro lado, Henry (1997) afirma que la construcción de modelos y su perfeccionamiento progresivo intervienen en cada fase de la resolución de problemas estadísticos, no sólo en situaciones prácticas, sino también en trabajo de desarrollo teórico. Para él, la modelación no sólo implica un proceso que requiere ser retomado una y otra vez para su mejora sino también que la resolución de un problema estadístico puede dar lugar a varios procesos de modelación sucesivos. En un cierto sentido, Henry está de acuerdo con Heitele en que la modelación puede tener distintos estratos dentro de un mismo proceso de resolución de problemas y afirma que por ello es importante diferenciar el modelo de la realidad. Tanto Heitele como Henry aportan propuestas útiles para nuestra investigación, ya que en un proceso de resolución de problemas en el que la variable aleatoria se vea involucrada, forzosamente se deberá pasar por lo menos por dos estratos de modelación, o dos procesos de modelación de acuerdo con Henry. El primero es la formulación de la variable y el segundo es la formulación de la función de distribución como modelo matemático. En ambos estratos la variable desempeñará un papel dual, en un primer estrato será el modelo obtenido y en el otro, la realidad. Esto ocurre principalmente cuando se considera la probabilidad laplaciana como modelo de asignación de probabilidades al espacio muestral.

5. Relación entre las variables estadística y aleatoria en la modelación

Por otra parte, mientras que los textos de estadística matemática o probabilidad, como Meyer (1989), enfocan la variable aleatoria únicamente desde la probabilidad clásica laplaciana para aplicar estos modelos al análisis estadístico, otros autores (como Ríos, 1967) hacen compatibles las concepciones clásica y frecuencial, para posibilitar la aplicación de la inferencia a las situaciones prácticas. Para Ríos, la teoría de probabilidades es «el modelo matemático de las regularidades que se observan en las series de frecuencias correspondientes a los fenómenos aleatorios» (p 73). Desde esta perspectiva hay dos simplificaciones de la realidad para pasar a un modelo matemático: en la primera, se eliminan resultados posibles inconvenientes o poco usuales: que un dado caiga sobre una arista, que la moneda caiga de canto, que exista una carta en blanco en un mazo de póker, etc. En la segunda, se admite la estabilidad de las frecuencias de los sucesos posibles. Es decir, que las frecuencias tienden a acercarse a un valor teórico de probabilidad. Ríos presenta la base empírica de la teoría de probabilidades a partir de la observación de la estabilidad de las frecuencias relativas que permite definir la probabilidad frecuencial y por lo tanto, en la búsqueda de su regularidad, hace uso de la variable estadística. De acuerdo con él, la realidad nos lleva a observar la estabilidad de las frecuencias y sus propiedades. Por un proceso de conceptualización pensamos en la existencia de un límite de las frecuencias relativas (probabilidad) admitiendo como axiomas las propiedades observadas empíricamente en las frecuencias relativas. Una vez admitidos estos axiomas básicos, es posible deducir todo el cálculo de probabilidades y a partir de él, los modelos que constituyen la estadística matemática de manera inmediata, con lo cual ya es posible trabajar con ellos para dar una solución al problema planteado. La última fase de la modelación sería la interpretación del modelo en la realidad para determinar la solución a las preguntas planteadas.

6. La variable aleatoria y los modelos de distribuciones

Batanero (2001) indica que un ejemplo notable de modelación estadística a partir de un problema práctico son las distribuciones de probabilidad, que permiten describir en forma sintética el comportamiento de las distribuciones empíricas de datos estadísticos y hacer predicciones sobre su comportamiento. Por su parte, Krickeberg (1973) sostiene que si estamos interesados en la variable aleatoria X, en realidad lo estamos en su función de distribución, puesto que ésta nos proporciona las probabilidades con las cuales el valor $X(\omega)$ está comprendido dentro de los diferentes conjuntos de $\mathcal{A}$ en una observación aleatoria con resultado ω. Sin embargo otros autores (Meyer, 1989; Feller, 1989) sostienen que es en la variable aleatoria en la que radica la importancia de las distribuciones de probabilidad puesto que es ésta en la que se manifiesta el espacio muestral y el experimento y por lo tanto la *realidad*.

Como regla de correspondencia y desde una perspectiva puramente matemática, la variable aleatoria podría ser arbitraria, siempre y cuando el espacio muestral definido satisfaga las condiciones establecidas en la definición (Mood y Graybill, 1963), pero desde una perspectiva de modelación, la regla de correspondencia debe tener un sentido a partir de una pregunta que se pretenda resolver.

7. Conclusiones

A lo largo del presente trabajo, se ha visto que, como un objeto matemático complejo, la variable aleatoria se relaciona con otros objetos matemáticos que tienen sus propias complejidades y que, a su vez, éstos influyen en cómo se conforma y las acepciones que de él se tengan. Desde una perspectiva educativa, esto hace que el objeto de nuestro interés sea

difícil de analizar si no se tiene una clara definición del alcance que se pretende en los estudiantes. Los libros analizados conforman una muestra de la diversidad de alcances y enfoques con los que se puede enseñar y analizar la teoría en los que se sustenta.

La visión en la escuela tendrá que ser limitada, sobre todo cuando se trata de cursos introductorios en el nivel universitario, pero también completa porque las concepciones tratadas tendrán que mostrarse como la conformación acabada de una idea que les será útil profesionalmente a nuestros estudiantes, sobretodo porque para muchos planes de estudio, los cursos introductorios son los únicos cursos de probabilidad y estadística que se imparten. El concepto explícito de la variable aleatoria como el objeto en el que está sustentado el paso de la matemática de conjuntos al análisis matemático deberá ser pospuesto para cursos más especializados o carreras más específicas, sin embargo no es deseable posponer el rol implícito que juega este concepto en la aplicación de la teoría de probabilidad y estadística matemática en cualquier profesión y en la cotidianeidad mundana. La modelación de situaciones aleatorias y el papel de la variable aleatoria en ella son clave para lograrlo, aunque la modelación tampoco es un aspecto simple. Las acepciones de los conceptos involucrados con nuestro objeto de estudio también modifican la forma en que se desarrolla el proceso al resolver un problema en el que está vinculado la variable aleatoria. Sin embargo, dentro de toda esta diversidad, se condicionan las acepciones y construcciones de la variable aleatoria sobre el significado de la probabilidad.

La teoría de la probabilidad no da cuenta de la forma en que se conforma el espacio de probabilidad. Define las condiciones de una probabilidad que llamaremos axiomática y con ello proporciona ciertas condiciones sobre las que descansa el resto de la teoría. Sin embargo, la relación de esta teoría con la realidad está dada a través de la forma en que se asigna el valor de probabilidad y por lo tanto, esta asignación también indicará como opera y surge la variable aleatoria. Es decir, los significados que aporta la teoría a la realidad y viceversa provienen de esa asignación. Por lo tanto, también es importante tratar las diferentes formas de asignar la probabilidad, al menos la clásica y la frecuencial, y relacionarlas con la noción de variable aleatoria.

Referencias

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Grupo de investigación en educación estadística.

Boudot, M. (1979). *Lógica inductiva y probabilidad*. Madrid: Paraninfo.

Chaput, B., Girard, J. C. y Henry, M. (2011). Modeling and simulations in statistics education. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.) (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenges for Teaching and Teacher Education*. A Joint ICMI/IASE Study (pp. 85-95). New York: Springer.

Coutinho, C. (2001). *Introduction aux situations aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre-II*. Tesis Doctoral. Universidad de Grenoble.

Cuadras, C. (1999). *Problemas de probabilidades y estadística*. (Vol. 1). Barcelona: EUB.

Dantal, B. (1997). Les enjeux de la modélisation en probabilité. *En Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 57-59). Reims: Commission Inter-IREM.

Devore, J. (2011). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. México: Cengage Learning.

Feller, W. (1989). *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones* (Vol. 1). México: Limusa.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1996). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6(3), 187-205.

Henry, M. (1997). Notion de modéle et modélization en l'enseignement. En *Enseigner les probabilités au lycée*, Commission Inter-IREM, Reims, 77-84.

Krickeberg, K. (1973). *Teoría de la probabilidad*. Barcelona: Teide.

Meyer, P. (1989). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. México: SITESA: Addison Wesley Iberoamericana.

Miller, T. K. (1998). The random variable concept in introductory statistics. En L. Pereira-Mendoza (Ed.). *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 1221-1222). Singapur: IASE.

Mood, A. y Graybill, F. (1963). *Introducción a la teoría de la estadística*. Madrid: Aguilar.

Parzen, E. (1971). *Teoría moderna de probabilidades y sus aplicaciones*. México: Limusa.

Petrov, V. y Mordecki, E. (2002). *Teoría de probabilidades*. Moscú: Editorial URSS.

Ríos, S. (1967). *Métodos estadísticos*. Madrid: Del Castillo.

Wackerly, D., Mendenhall, W. y Scheaffer L. (2002). Estadística matemática con aplicaciones. México: Thompson.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (con discussion). *International Statistical Review*, 67 (3), 223-265.

Las preguntas del examen de estadística descriptiva

Salcedo, Audy

Universidad Central de Venezuela

Resumen

En este estudio se presentan los resultados del análisis de un conjunto de preguntas pertenecientes a exámenes de estadística descriptiva elaborados por distintos profesores. Se les pidió a profesores los exámenes utilizados en los dos últimos semestres para la evaluación de los aprendizajes en la asignatura Estadística Aplicada a la Educación. Se recibieron 58 exámenes que contenían 648 preguntas, las cuales fueron clasificadas utilizando la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1982) y las definiciones de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico (delMas, Ooms, Garfield y Chance, 2006); además fueron catalogadas por el puntaje asignado en la evaluación y el nivel de dificultad estimado. Los resultados indican que las preguntas de estadística descriptiva analizadas son en su mayoría valoradas con puntuaciones bajas, tienen un bajo nivel de dificultad y son de baja exigencia cognitiva, según las taxonomías utilizadas. Parece razonable suponer que preguntas como las analizadas ayudan a promover una visión mecanicista de la estadística descriptiva.

Palabras clave: Preguntas estadística descriptiva, Taxonomía SOLO, alfabetización estadística, razonamiento estadístico y pensamiento estadístico

1. Introducción

Este trabajo tiene como objetivo el análisis de un conjunto de preguntas pertenecientes a exámenes de estadística descriptiva elaborados por distintos profesores de la asignatura Estadística Aplicada a la Educación.

En la evaluación de los aprendizajes, el examen (o prueba escrita) es el instrumento de evaluación dominante en la educación universitaria. Salcedo Galvis (2010) señala que, a pesar de los cambios que han acompañado a la evaluación, el examen es el instrumento de evaluación predominante en Venezuela. Entonces, es innegable el peso que tiene el examen para la toma de decisiones en la promoción y acreditación de los alumnos en la educación universitaria, particularmente en las asignaturas del área cuantitativa, donde, por tradición, es el principal instrumento de evaluación. Es por ello que esta investigación se centra en los exámenes de Estadística como objeto de estudio, sin subvalorar otros instrumentos de evaluación.

La investigación en evaluación en Educación Estadística (EE) ha recibido mayor atención en los últimos años, fundamentalmente para conocer el tipo de respuesta que proporcionan los estudiantes. La taxonomía Student Observed Learning Outcomes (SOLO), propuesta por Biggs y Collis (1982), es una de las utilizadas para categorizar las habilidades cognitivas alcanzadas por los estudiantes, y se aplicada a diferentes áreas de conocimientos. Educadores estadísticos han propuesto taxonomías para caracterizar la ejecución de los estudiantes en tópicos específicos de la Estadística, por ejemplo, Watson y Moritz (2000), Vallecillos y Moreno (2006) y Landín y Sánchez (2010).

Todos estos modelos buscan describir el nivel cognoscitivo alcanzado por el estudiante a partir de sus respuestas, no obstante, ellas dependen del tipo de pregunta que formule el profesor. Cada examen, expresado en las distintas preguntas que lo conforman,

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 391-396). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

contiene una muestra de las habilidades cognitivas que el docente desea conocer si el estudiante logró desarrollar. Por lo tanto, el conjunto de exámenes utilizados en una asignatura, durante un lapso académico, puede proporcionar información sobre las habilidades cognitivas que se pretenden desarrollar en esa materia. De acuerdo con la recomendación de GAISE (ASA, 2010), los cursos iniciales de Estadística para no especialistas, como es el caso que nos ocupa, deben hacer énfasis en la Alfabetización Estadística con miras a desarrollar el Pensamiento Estadístico. Es por ello que en esta investigación se analizan los exámenes aplicados en la asignatura Estadística, se trata el caso particular de la carrera de Educación. Con ello se pretende explicitar las decisiones tomadas por un grupo de profesores en el diseño de sus exámenes para identificar tendencias en cuanto a las habilidades cognitivas que pretenden evaluar.

2. La investigación

A profesores que dictan asignaturas de Estadística, en la carrera de Educación, se les solicitó el conjunto de exámenes utilizados en dos últimos semestres, para la evaluación de los aprendizajes en esa asignatura. Se recibió respuesta de 10 profesores, quienes proporcionaron 58 exámenes que contenían 648 preguntas. Los profesores tienen entre 4 y 20 años de experiencia dictando la asignatura. Todas las preguntas fueron resueltas para poder establecer con claridad los procesos cognoscitivos que implicaban y luego poder clasificarlas.

Las preguntas se clasificaron de acuerdo con el nivel de dificultad estimado según juicio de experto, y las habilidades cognitivas que pretenden evaluar, para lo cual se utilizó una adaptación de la taxonomía SOLO y las definiciones de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico de delMas, Garfield, Ooms, y Chance (2007). Además, se consideró la puntuación asignada por el profesor a cada pregunta. En el caso de la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1982), se realizó una adaptación para estimar el nivel de respuesta que aspira el profesor que proporcione el estudiante. Las definiciones utilizadas son:

- Nivel uniestructural. Preguntas que contienen datos informativos explícitos, que al ser extraídos directamente del enunciado, permiten encontrar la respuesta. La comprensión de la información sugiere el procedimiento a utilizar para la solución de la pregunta.
- Nivel multiestructural. La pregunta requiere de la utilización de dos o más informaciones, que se obtienen directamente del enunciado. Se utiliza un procedimiento conocido, que surge a partir de la comprensión de la información del enunciado, para generar la respuesta. Los datos se procesan de forma secuencial para generar una nueva información.
- Nivel relacional. La pregunta requiere del análisis de la información, establecer relaciones entre los diferentes elementos usados para integrarla y generar implicaciones, consecuencias, predicciones o conclusiones a partir de elementos del contexto. La forma de solución de la pregunta no es evidente.
- Nivel de abstracción extendida. La pregunta exige la utilización de un principio general y abstracto que puede ser inferido del análisis de la información presente en el enunciado, e integrar información adquirida para generar una nueva que permite solucionar la situación.

Las preguntas también se clasificaron desde un marco más específico de la Educación Estadística, a partir de las definiciones de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico de delMas et al (2007):

- Alfabetización estadística (AE). La pregunta indaga sobre el conocimiento del significado de términos estadísticos, utilización del lenguaje básico y los instrumentos de la Estadística, la comprensión del uso de símbolos, reconocimiento e interpretación

de la representación de datos, conocer el desarrollo de la capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, así como comunicar ideas estadísticas.

- Razonamiento estadístico. Se dirige a conocer si el estudiante comprende las ideas estadísticas, explica los procesos estadísticos e interpreta cabalmente los resultados estadísticos. Implica la conexión de dos o más conceptos estadísticos y da sentido a la información estadística. Se trata de hacer interpretaciones basadas en conjuntos de datos, las representaciones de los datos o resúmenes estadísticos de los datos.
- Pensamiento estadístico (PE). Se pregunta sobre el conocimiento del proceso de investigación estadística; entender cómo los modelos son usados para simular fenómenos aleatorios. Reconocer cómo, cuándo y por qué pueden ser utilizados los instrumentos de inferencia estadística existentes. Comprensión de la naturaleza del muestreo, cómo hacer inferencias a partir a las muestras y cómo diseñar experimentos con el fin de establecer causalidad. La capacidad de entender y utilizar el contexto de un problema, de planificar y evaluar investigaciones y extraer conclusiones. Implica la comprensión de por qué y cómo se realizan las investigaciones.

Las preguntas también fueron clasificadas por la puntuación asignada y se estimó su nivel de dificultad, mediante el juicio de experto a partir de la consideración del porcentaje teórico de respuestas correctas que se podría lograr en la aplicación del examen. Las categorías utilizadas son: muy fácil (100% – 81%), fácil (80% – 61%), promedio (60% – 41%), difícil (40% – 21%) y muy difícil (20% – 1%).

Para validar la calificación realizada se les proporcionó a dos profesores de estadística el conjunto de preguntas, las respuestas y las definiciones utilizadas para la clasificación. Los profesores realizaron de forma individual su propia clasificación, se encontró divergencia en aproximadamente el 38% de las preguntas respecto a la realizada por el autor. Se discutió con los dos profesores sobre las preguntas donde hubo divergencias, hasta lograr un acuerdo sobre su clasificación.

3. Los resultados

La casi totalidad de las preguntas tienen 3 o menos puntos, en exámenes con 20 como puntuación máxima. Es importante destacar que se encontraron casos atípicos y extremos que tienen puntuaciones entre 4 y 15 puntos. El 75% de las preguntas tienen 2 puntos o menos, por lo tanto, se puede pensar que la mayoría de las preguntas son de baja exigencia cognitiva, probablemente referidas a la reproducción de información o aplicación de procedimientos básicos de cálculo.

En relación con el nivel de dificultad, estimado por juicio de experto, según el porcentaje de estudiante que se espera responda correctamente. El 81,1% de las preguntas se catalogaron como Muy fácil o fácil, por lo tanto se espera que sean respondidas correctamente por al menos el 80% de los estudiantes. El 17,3% de las preguntas se clasificó como de dificultad promedio (60% – 41% respuestas correctas esperadas) y el 1,5% como difícil (40% – 21%), no se encontraron preguntas Muy difíciles. Este resultado parece consistente con el referido a las puntuaciones con que son valoradas las respuestas.

La Tabla 1 muestra los resultados de las preguntas clasificadas mediante la adaptación de la taxonomía SOLO, con lo cual se puede estimar el máximo nivel de respuesta que podría evidenciar el estudiante al proporcionar sus respuestas.

Tabla 1. Preguntas clasificadas por taxonomía SOLO

Nivel	Frecuencia	Porcentaje
Uniestructural (UN)	498	77,1
Multiestructural (NM)	141	21,8
Relacional (NR)	7	1,1
Abstracción extendida (NAE)	0	0,0

Total	646	100

En la casi totalidad de las preguntas analizadas el estudiante solo requiere de habilidades cognitivas bajas para dar la respuesta correcta. En más del 75% de las preguntas se puede ofrecer la respuesta recordando información o al aplicar un procedimiento o algoritmo, previamente conocido, con el uso de la información que se encuentra explícita en el enunciado. Pareciera, entonces, que este grupo de preguntas son fundamentalmente para conocer si los estudiantes pueden recordar o reproducir información proporcionada en clase (*NU*), así como clasificar o describir la comprensión de hechos sin sistematizarlos (*NM*). Obsérvese que las preguntas del NR y el NAE son prácticamente inexistentes, lo cual indica que lo prioritario es el cálculo y los procesos mecánicos. A continuación, presentamos ejemplos de preguntas clasificadas en cada uno de los niveles.

Uniestructural

Pregunta 392. ¿Qué medidas de posición deberíamos calcular si deseamos obtener los puntajes de la prueba para el 50% central? (1 pto.)

Pregunta 460. Las siguientes, son las calificaciones de un grupo de 20 estudiantes de un curso de Estadística: 12 15 10 13 16 12 18 18 20 8 6 17 14 1 8 6 7 5 4 12. Se requiere que Ud. construya una distribución de frecuencias de 5 clases. (1,5 ptos.)

Multiestructural

Pregunta 6. A continuación se presentan las calificaciones obtenidas por los alumnos de las sección 12 de Estadística III, en la primera prueba parcial del semestre 2004-II.

Notas	4-6	7-9	10-12	13-15	16-18
Alumnos	3	8	9	15	12

Calcule e interprete el coeficiente de variación (3 ptos)

Pregunta 241. Un investigador está interesado en conocer si existe relación entre el género y el gusto por cocinar. Se pregunto a 90 personas con los siguientes resultados: 40 pertenecen al sexo masculino y 20 de los opinan que les gustan cocinar, de las mujeres encuestadas a 15 no les gusta cocinar. Calcula el coeficiente de correlación apropiado para establecer si existe relación lineal entre las variables e intérprete los resultados. (3 ptos).

Relacional

Pregunta 305. A continuación se presentan las calificaciones del primer parcial de Estadística aplicada a la Educación: 17 13 08 15 14 11 13 18 19 20 14 17 16 18 12 16 14 15 19 17 02 04 19 10 06 18. Si un estudiante obtuvo una calificación de 14 puntos, ¿cómo se encuentra él con respecto a su grupo? (2 ptos.)

De acuerdo con la clasificación, se considera que el 91,5% de las preguntas examinadas evalúa logros en la *Alfabetización Estadística*, mientras que un 8,5% lo hace en *Razonamiento Estadístico*, no se clasificaron preguntas en *Pensamiento Estadístico*.

Tabla 2. Preguntas clasificadas por el aprendizaje esperado

Nivel de Dificultad	Frecuencia	Porcentaje
Alfabetización (AE)	591	91,5
Razonamiento (RE)	55	8,5
Pensamiento (PE)	0	0,0
Total	646	100

La mayoría de las preguntas se ubica en el nivel más bajo de la taxonomía utilizada, son preguntas que buscan conocer si el estudiante comprende y utiliza de forma adecuada el lenguaje básico de la Estadística y sus instrumentos. Este resultado parece corresponderse con las recomendaciones de GAISE (ASA, 2010), en las que se indica que en los cursos iniciales de Estadística se debe hacer énfasis en la *AE*, no obstante, deja de lado los otros niveles de la taxonomía, por lo menos en las evaluaciones escritas examinadas. Por tratarse de un curso básico, es lógico que se haga énfasis en la *AE*, pero no debería descuidarse los niveles más profundos de habilidades cognitivas. A continuación ejemplos de las preguntas en categoría:

Alfabetización

Pregunta 3. ¿Cómo interpretaría usted un coeficiente de Kurtosis de – 0.216 puntos? (1 pto.)

Pregunta 11. La rama de la estadística que solo describe las características de un grupo, sin hacer inferencias o predicciones de las características poblacionales a partir del análisis de estas se denomina:_____(0,5 ptos)

Pregunta 232. Los siguientes datos corresponden a las calificaciones obtenidas por un grupo de 24 estudiantes de la escuela de educación, en los exámenes finales de Estadística I y II durante el año escolar 2003. A partir de los datos presentados, dibuje el diagrama de dispersión y analice el tipo de relación existente. (3 puntos)

Estadística I: 06, 12, 16, 10, 10, 09, 10, 15, 10, 11, 19, 12

Estadística II: 09, 11, 16, 13, 12, 08, 11, 13, 10, 15, 20, 14

Razonamiento

Pregunta 340. A continuación se presentan los resultados de la Prueba de Aptitud Académica de 36 estudiantes de quinto año de bachillerato del Colegio San José para las secciones A y B. Concluya con respecto al rendimiento de los estudiantes en ambas secciones en la Prueba de Aptitud Académica. (3 puntos)

	A	B
N		
Media		
Mediana	60,00	61,50
Modo		
Desviación		
Varianza	96,879	103,820
Asimetría (α^3)	0,386	
Kurtosis (α^4)		-1,650
Valor mínimo	46	44
Valor máximo	75	73

A	B
65	70
73	62
52	30
48	72
74	66
61	66
60	51
75	48
47	46
73	30
48	44
53	73
46	61
60	66
56	46
60	71
50	66
60	55

4. Conclusiones

Las preguntas analizadas son en su mayoría valoradas con puntuaciones bajas, casi todas tienen 3 puntos o menos, exámenes con 20 como puntuación máxima, con un bajo nivel de dificultad. Las habilidades cognitivas evaluadas mediante las preguntas se corresponden con los niveles más bajos de las taxonomías utilizadas.

La mayoría de las preguntas se consideran de *AE* en el *NU*, por lo tanto, se puede afirmar que buscan evaluar habilidades referidas a la reproducción de conocimiento y procedimientos algorítmicos sencillos. Se está preguntando aspectos muy básicos de la *AE*. Son escasas las preguntas que buscan evaluar el conocimiento profundo y la aplicación de las ideas Estadísticas. Estos resultados sugieren que en general las preguntas de estadística descriptiva analizadas son de bajo nivel de dificultad y baja exigencia cognitiva. Es posible

que ese sea el nivel del curso previsto en los programas de estudio, que sean decisiones particulares de los profesores o que simplemente es la práctica institucional.

Es probable que la ausencia de preguntas de *PE* se deba a que su definición tiene un sesgo hacia los procesos de inferencia estadística, pero también puede deberse a que en estos exámenes de estadística descriptiva, no se incluyan aspectos como: por qué y cómo se realizan las investigaciones, utilizar el contexto de un problema, evaluar resultados de investigaciones.

Parece razonable suponer que las preguntas de bajo nivel cognitivo ayudan a promover una perspectiva mecanicista de la estadística descriptiva. Si esos cursos no tienen previstas actividades de aprendizaje y evaluación de alto nivel cognitivo, muy posiblemente los estudiantes no logren una visión más integral de esta rama de la Estadística y de su utilidad para la investigación en Educación.

Referencias

American Statistical Association. (2010). Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education – GAISE. College Report. [En línea], http://www.amstat.org/education/gaise/GaiseCollege_Full.pdf

Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.

delMas, R., Garfield, J., Ooms, A. y Chance, B. (2007). Assessing students' conceptual understanding after a first course in statistics. *Statistics Education Research Journal*, *6*(2), 28 – 58.

Landín, P. R. y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa, 12* (3). [En línea], http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewArticle/4842.

Salcedo Galvis, H. (2010). La evaluación educativa y su desarrollo como disciplina y profesión: presencia en Venezuela. *Revista de Pedagogía*, 31 (89), 331 – 378.

Vallecillos, A. y Moreno, A. (2006). Estudio teórico y experimental sobre el aprendizaje de conceptos y procedimientos inferenciales en secundaria. *Tarbiya: revista de investigación e innovación educativa*. 38, 61 – 78.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning, 2*, 11 – 50.

Los gráficos estadísticos en las directrices curriculares para la Educación Primaria en España y Colombia

Castellanos Sánchez, María Teresa[1], *Arteaga Cezón, Pedro* [2]
[1]Universidad de los Llanos
[2]Universidad de Granada

Resumen

En la actualidad mucha información estadística es presentada a través de gráficos tanto en los medios de comunicación como en otros ámbitos de la actividad humana, en este sentido se hace necesario que los ciudadanos sean capaces de tratar críticamente información estadística presentada a través de gráficos, además la comprensión gráfica, forma parte de la cultura estadística que toda persona bien formada debería tener.

Directrices curriculares tanto a nivel nacional como internacional se hacen eco de esta necesidad, incluyendo el trabajo con estadística desde los primeros cursos de la Educación primaria. En este trabajo, nuestro objetivo principal es analizar los currículos oficiales de Colombia y España y ver cómo se afronta el trabajo con gráficos estadísticos en la escuela primaria, realizando comparación de los mismos para resaltar las similitudes y las diferencias significativas encontradas.

La comunicación comienza con la importancia de la estadística en los planes curriculares, para seguir con un análisis de ambos currículos, continuando con un estudio comparado de cómo se aborda el trabajo con gráficos estadísticos en la escuela primaria en dichos documentos. Se finaliza con conclusiones e indicaciones que pueden ser de utilidad para profesores y profesores en formación de primaria.

Palabras clave: Currículo, Gráficos Estadísticos, Sistemas de Datos, Tratamiento de la Información.

.

1. Introducción

Una de las principales preocupaciones de la educación es dotar a los estudiantes de competencias que les permitan desenvolverse en una sociedad que exige a los ciudadanos estar bien informados, en este sentido, la capacidad para leer y entender datos estadísticos es una necesidad social producto del desarrollo de la estadística como disciplina científica desde finales del siglo XIX.

Arteaga (2011) indica que, en la actualidad, mucha de la información presente en los medios de comunicación e Internet está en forma de gráficos estadísticos, por ello, es importante que los ciudadanos sean capaces de tratar con este tipo de información que encontraran en distintos ámbitos de su vida. En este sentido, cita a diversos autores, que ponen de manifiesto la importancia de que los ciudadanos tengan buenos niveles de cultura estadística (por ejemplo, Gal, 2002; Watson, 2006).

Toda esta importancia, pone de manifiesto la inclusión de temas relacionados con la estadística y en particular con los gráficos y tablas, principalmente para el tratamiento de la información y el análisis de datos, en las directrices curriculares tanto a nivel internacional (NTCM, 2000; Franklin y cols., 2005; MEN 2006.) como a nivel nacional en España, para la Educación primaria.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 397-404). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Por este motivo en este trabajo nos interesamos en el análisis detallado de los currículos oficiales para la educación primaria de España y Colombia. Uno de nuestros objetivos es ver cómo se aborda en dichos documentos el trabajo con temas relacionados a la estadística y en particular con tablas y gráficos estadísticos desde los primeros cursos, además, de realizar un análisis comparativo de ambos currículos. Pretendemos con esto poner en evidencia la importancia actual que se da en las directrices curriculares a temas de tratamiento de la información y el análisis de datos; y hacer una llamada de atención a la necesidad de formar profesores de educación primaria, tanto en temas relacionados con el contenido de matemática así como aspectos didácticos del contenido.

2. Antecedentes de investigación

En este apartado vamos a resumir algunas de las investigaciones en las que se pone de manifiesto la importancia de la educación estadística en nuestra sociedad y destacamos algunas de las relacionadas con los gráficos estadísticos, que nos servirán de utilidad a la hora de analizar las directrices curriculares de España y Colombia. Partimos del trabajo de síntesis de Arteaga, Batanero y Contreras (2011) y de las referencias incluidas en el mismo.

Una de las nociones importantes es la de cultura estadística, que según Gal (2002, p.2-3) se trata de dos competencias relacionadas: una es la habilidad para evaluar críticamente e interpretar la información estadística, apoyados en datos o fenómenos que son observados en diferentes contextos, sin limitarse a ellos y la otra es la habilidad para discutir y comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas. Según autores como Ridgway, Nicholson y McCusker (2008) el gran desarrollo de las nuevas tecnologías en nuestra sociedad hacen necesario que los ciudadanos sean capaces de tratar con información estadística presentada de maneras muy diversas, por lo tanto aseguran que la necesidad de que los ciudadanos sean estadísticamente cultos nunca había sido mayor.

Friel, Curcio y Bright (2001) definen comprensión gráfica como las habilidades que las personas que han de leer un gráfico tienen que poner en juego para entender el significado del mismo. Wu (2004) basándose en el estudio de Friel y colaboradores define un marco conceptual con cuatro componentes sobre la comprensión de gráficos estadísticos: lectura, interpretación, construcción y evaluación de gráficos.

Por su parte, Watson (2006), plantea desarrollar en los estudiantes el conocimiento básico de los conceptos de estadística y probabilidad presentando contextos amplios que enfrenten a los niños en la comprensión de los razonamientos y argumentos estadísticos. En relación a los gráficos estadísticos, la autora pone de manifiesto que son muchas las habilidades necesarias para llegar a desarrollar una buena comprensión gráfica debido en parte a que el desarrollo de esta está relacionado con distintos elementos del currículo de matemáticas como porcentajes, proporcionalidad, fracciones, geometría, etc.

Debido a todo esto, se hace necesario la educación de los niños en relación a la estadística y en particular en relación a los gráficos estadísticos. A continuación vamos a analizar cómo los currículos internacionales se hacen eco de esta necesidad incluyendo la estadística y el trabajo con gráficos desde primeros cursos de educación primaria.

3. Estadística y directrices curriculares internacionales

En los estándares NCTM (1991) se establecieron, pautas y recomendaciones, dirigidas a los profesores, sobre la manera de afrontar la enseñanza y aprendizaje de la estadística en la escuela tanto en términos genéricos, como en cada tópico específico, como es el caso de la representación de datos. En este sentido, se propone que los alumnos se involucren en la recogida, organización y descripción de los datos y sean capaces de

construir, leer e interpretar gráficas, así como analizar tendencias y proponer conjeturas y predicciones a partir de los datos.

Así, la Estadística y el análisis de datos se incorporaron como un componente principal de la matemática escolar durante los 90s (NCTM, 1991). Este cambio creó una enorme necesidad de programas para el desarrollo profesional de profesores en torno al análisis de datos tanto para aquellos profesores que no tuvieran experiencia con los problemas y situaciones de análisis de datos que tenían que enseñar, hasta los profesores con una amplia experiencia docente.

Posteriormente, los estándares NCTM (2000) justifican el bloque de análisis de datos y probabilidad debido a la cantidad de datos disponibles para la toma de decisiones tanto en campos de la vida cotidiana como del terreno profesional. Inspirado en dichos estándares, en el proyecto GAISE (Franklin y cols., 2005) se destaca como principal objetivo para la enseñanza, la alfabetización estadística. El proyecto además recomienda formar desde los primeros niveles de Educación (incluye Infantil) a los estudiantes para que desarrollen habilidades estadística y ellos puedan: razonar a partir de datos empíricos; comprendan y explicar la variación de los datos; percibir, cuantificar y justificar el comportamiento de los datos.

Es necesario mencionar, que el incremento de los contenidos de Estadística en las escuelas de secundaria y en la Educación Superior ha conducido a varios intentos de estandarizar el currículo en estadística. En 2007 la American Statistical Association (ASA) publicó el reporte denominado Pautas para la Evaluación e Instrucción en Educación Estadística, desde preescolar hasta universidad. (Franklin et al., 2005).

Por último, no podemos dejar de lado la importancia que se le ha dado a la incertidumbre en el marco de la Evaluación PISA (OECD, 2009) y, al pensamiento aleatorio y al análisis de datos en las pruebas SABER- Colombia; donde se observa las capacidades de los estudiantes para descifrar, representar en términos matemáticos y predecir resultados en situaciones que implican el manejo de datos de distinta naturaleza.

Hemos visto en los apartes anteriores las recomendaciones internacionales, donde en los últimos 20 años se sugiere la enseñanza de la estadística en la escuela, sin embargo, encontramos que la tendencia a introducirla con niños cada vez más pequeños y a hacer más significativa su enseñanza, es reciente (Arteaga, 2011).

4. Estadística en los currículos de Colombia y España

A continuación vamos a analizar los currículos oficiales para la Educación Primaria en España y Colombia en relación a la enseñanza de la Estadística y en particular en relación a los gráficos estadísticos.

4.1. Currículo de España

En España la Educación primaria tiene carácter obligatorio y gratuito, comprende seis cursos organizados en tres ciclos de dos cursos cada uno, los alumnos se incorporan al primer curso el año que cumplan seis años. En este currículo, una de las áreas de conocimiento es la de Matemáticas dentro de la cual se incorpora un nuevo bloque de contenido (Bloque 4), llamado Tratamiento de la información, azar y probabilidad (MEC, 2006).

El objetivo principal de dicho bloque de contenido es utilizar las técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones del entorno; representarla de forma gráfica y numérica que les permitan a los estudiantes formarse un juicio sobre la misma.

Así mismo, este objetivo se concreta con los principales propósitos recomendados para este bloque de contenido (MEC, 2006): (1) Conectar los contenidos con actividades que implican su uso en otras áreas de conocimiento; (2) Comprender la información que proviene de los medios de comunicación; (3) Suscitar el interés por los conocimientos básicos de la estadística; (4) Proporcionar al estudiante herramientas para la toma de decisiones, en los contextos de las matemáticas y de otras áreas; (5) Iniciar en el uso crítico de la información recibida por diferentes medios; (6) Favorecer la presentación de los datos de forma ordenada y gráfica, y (7) Permitir descubrir que las matemáticas facilitan la resolución de problemas de la vida diaria.

En estos documentos, se propone un enfoque metodológico en el que se presenta la estadística con un instrumento útil para resolver problemas y no como un conjunto de técnicas descontextualizadas. Como ya dijimos anteriormente, en nuestro trabajo el foco de interés es cómo se aborda el trabajo con gráficos estadísticos, información que resumimos a continuación en la tabla 1.

Tabla 1: Contenidos relacionados con los gráficos estadísticos en el currículo Español

Primer Ciclo.	Segundo Ciclo	Tercer Ciclo
- Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos. - Utilización de técnicas elementales para la recogida, clasificación, ordenación y registro de datos de datos en contextos familiares y cercanos. - La representación gráfica: diagramas de barras. - Disposición favorable para interpretar y producir información que utiliza una forma gráfica de representación.	- Iniciación al uso de estrategias eficaces de recuento de datos. - Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. - Lectura e interpretación de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana. - Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares	- Recogida y registro de datos utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. - Distintas formas de representar la información. - Tipos de gráficos estadísticos. Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos. - La media aritmética, la moda y el rango, aplicación a situaciones familiares.

Podemos apreciar que para el primer ciclo los indicadores propuestos corresponden a actividades sencillas de lectura e interpretación de gráficos; estrategias para la recolección de la información y representación de gráficos elementales. En el segundo ciclo se incluye las tablas y el registro de datos utilizando la encuesta se espera llega hasta la descripción de los gráficos. El tercer ciclo aborda el estudio de las medidas de tendencia central con variable discreta donde los gráficos sirven de instrumento para hacer análisis de estas medidas, en este último nivel los estudiantes deben hacer representaciones y juicios críticos de ellas.

Aquí se observa que antes de la construcción de graficas se da importancia a las tareas de planificación, recogida de la información, uso de técnicas de recuento y de manipulación de los datos. Estas tareas al igual que los cálculos que con los datos se puedan realizar, constituyen los procesos previos a su representación y que son necesarios para que el estudiante pueda expresar conclusiones de la información expuesta en un gráfico o en una tabla.

4.2. Currículo de Colombia

En Colombia, la Educación primaria al igual que en España tiene carácter obligatorio y gratuito, comprende cinco cursos organizados en dos niveles; el primer nivel lo comprenden los grados 1º. 2º, y 3º; y el segundo nivel los grados 4º, y 5º, los alumnos se incorporan al grado primero con seis años de edad cumplidos, justo después de haber cursado el grado de transición (Nivel Pre-escolar).

Dentro del área del matemáticas, en dicho currículo se incluye un bloque llamado pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, cuyo objetivo principal es decidir la pertinencia de la información necesaria, la forma de recogerla, de representarla y de interpretarla para obtener respuestas que lleven a nuevas hipótesis y exploraciones enriquecidas. También se enfatizan las fuentes para la recolección de datos, como consultas, entrevistas, observaciones, así como las evaluaciones sobre veracidad de los datos, distorsiones, sesgos, lagunas omisiones, y la evaluación de la actitud ética de quien recoge los datos y su responsabilidad social. (MEN, 2006)

Para concretar el objetivo general de este bloque se destacan como propósitos: (1) Explorar e interpretar datos, (2) Buscar e identificar tendencias, (3) Analizar y reflexionar sobre la naturaleza de los datos, (4) Analizar la estructura y formato de los datos, (5) Trabajar con problemas abiertos, para encontrar diferentes interpretaciones y tomar decisiones, (6) Reflexionar sobre el conjunto de los datos para proponer diferentes inferencias y (7) analizar la verosimilitud de los datos, dando lugar al trabajo con el pensamiento inductivo.

El enfoque de los sistemas de datos, prioriza la recolección y el análisis de datos, como actividad que da sentido a la enseñanza de la estadística en la educación básica y media, buscando habilidades para desarrollar la alfabetización y el pensamiento estadístico que permitan dar respuestas a preguntas que se hacen los niños sobre el mundo físico.

En relación a los gráficos estadísticos, se propone para los cursos de la Educación básica (primaria- secundaria) el trabajo, análisis y comprensión de gráficos de sectores, histogramas y diagramas de árbol, a partir de ellas los estudiantes pueden tomar decisiones sin recurrir al cálculo. Además se recomiendan actividades globalizadoras que permitan encontrar relaciones interdisciplinares con otras áreas poniendo en evidencia conocimientos relacionados con las matemáticas como los números, las mediciones, la estimación y estrategias de resolución de problemas.

Desde los estándares básicos de competencia (MEN, 2006) reproducimos en la tabla 2 los indicadores para el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, en particular hemos escogido aquí los relacionados con los gráficos estadísticos.

Tabla 2: Estándares de competencia para gráficos estadísticos en el currículo Colombiano

Nivel uno	Nivel dos

Grado primero, segundo y tercero	Grado Tercero y cuarto
- Clasifico y organizo datos, de acuerdo a cualidades y atributos los presento en tablas.	- Represento datos, usando tablas y graficas (pictogramas, graficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares).
- Interpreto cualitativamente datos referidos a situaciones del entorno.	- Comparo diferentes representaciones del mismo conjunto de datos.
- Describo situaciones o eventos a partir de un conjunto de datos.	- Interpreto información presentada en tablas y graficas. (Pictogramas, graficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares).
- Represento datos relativos a mi entorno, usando objetos concretos pictogramas y diagramas de barras.	- Describo la manera como parecen distribuirse los distintos datos de un conjunto de ello y la comparo con la manera como se distribuyen en otros conjuntos de datos.
- Identifico regularidad y tendencias en un conjunto de datos.	
- Resuelvo y formulo preguntas que requieran para su solución coleccionar y analizar datos del entorno próximo	- Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.

Podemos observar en los indicadores propuestos para el primer nivel una secuencia para abordar los gráficos estadísticos, se exige organizar la información, pasar por la descripción de la misma y representarla en gráficos sencillos, los desempeños anteriores garantizan que los estudiantes puedan hacer comparaciones y establecer análisis para dar respuesta a situaciones con el tratamiento de la información planteada.

En el cuarto y quinto curso se amplía la gama de gráficos, se usan estos para establecer comparaciones e interpretaciones de la información y producir expresiones críticas y justificadas a los interrogantes planteados. Estos dos niveles muestran implícitamente que los niños conozcan y apliquen estrategias como la formulación de preguntas relevantes, basadas en sus experiencias e intereses, y después registren lo obtenido y hagan predicciones a partir de ellos.

5. Comparación currículos oficiales de España y Colombia en relación a los gráficos estadísticos

Siguiendo las ideas planteadas anteriormente, consideramos que se hace necesario realizar una comparación entre los principales contenidos propuestos para el trabajo con gráficos estadísticos en la escuela primaria.

En una comparación de ambos currículos (ver tablas 1 y 2) se puede observar que ambos han incorporado contenidos relacionados con los gráficos estadísticos desde primeros cursos, además de tratar tareas que buscan que los niños y niñas desarrollen habilidades de lectura e interpretación de datos estadísticos, con el propósito de fomentar la capacidad para el manejo de información estadística.

Como coincidencias de ambos currículos queremos también destacar las siguientes: (1) Interpretar gráficos sencillos de situaciones familiares, (2) Reconocer gráficamente informaciones cuantificables, (3) Hacer recuento de datos y representar el resultado utilizando los gráficos estadísticos más adecuados a la situación; (4) Recoger y registrar una información que se pueda cuantificar y utilizar algunos recursos sencillos de representación gráfica para comprender y comunicar la información así expresada.

Por último comparando la información resumida en las tablas 1 y 2 se observan las siguientes coincidencias que implican tareas comunes en los dos currículos: (1) Organizar información; (2) Elaborar, interpretar y valorar distintas representaciones gráficas: pictogramas, barras e histogramas, relacionadas con el contexto y la vida cotidiana de los

estudiante. (3) Resolver problemas que incluyen interpretar los resultados de diversas representaciones gráficas. (4) Valorar y analizar críticamente los problemas que incluyen el análisis de datos.

Este análisis comparativo nos ha mostrado que ambos currículos de España y Colombia, en la publicación de sus últimos currículos oficiales, se tuvo en cuenta las recomendaciones internacionales tanto curriculares como a nivel de investigación, de incluir la estadística desde la formación primaria de los niños. No destacamos ninguna diferencia significativa entre ambos currículos en relación al trabajo con gráficos estadísticos.

6. Conclusiones

A modo de conclusión, podemos decir que los currículos de España y Colombia coinciden para el nivel de educación básica primaria con un propósito central para la enseñanza de la estadística que puede verse en sus contenidos, los dos currículos abordan: (1) el estudio de los datos estadísticos, (2) las variables discretas, (3) la construcción y comprensión de tablas y graficas y, (4) los parámetros estadísticos.

Las directrices curriculares de España y Colombia coinciden en manifestar que la representación grafica (tablas y gráficas) es esencial en el estudio del tratamiento de la información y los sistemas de datos, por lo cual se da importancia a la comprensión y lectura de gráficos y tablas antes que a los procedimientos y cálculos con los datos.

Cabe destacar que las directrices curriculares de ambos países recomiendan el trabajo con gráficos estadísticos desde primeros cursos, y las actividades que se recomiendan en relación a los mismos tienen en cuenta tanto la construcción como la lectura e interpretación de los mismos, componentes esenciales de la comprensión gráfica según Wu, (2004).

Todas estas recomendaciones pasan por la formación estadística de los futuros profesores de educación primaria que serán los que tengan que abordar el trabajo con gráficos en su futuro laboral.

Reconocimiento:

Proyecto EDU2010-14947 (MCINN-FEDER)

Referencias

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada

Arteaga, P., Batanero, C., y Contreras, J.M. (2011). Gráficos estadísticos en la educación primaria y la formación de profesores. *Invisa* 12, 123-135

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association. On line: www.amstat.org/Education/gaise/.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education* 32(2), 124-158.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review* 70(1), 1-25.

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación primaria*.

MEN (2006) *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y*

ciudadanas. Bogotá: Magisterio.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics. Reston,* VA: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics. Reston*, VA: Autor.

OECD (2009). Learning mathematics for life: A perspective from PISA. Disponible en www.oecd.org.

Ridgway, J., Nicholson, J. y McCusker, S. (2008). Mapping new statistical Literacies and Iliteracies. Trabajo presentado en el *11th International Congress on Mathematics Education*, Monterrey, Mexico.

Watson, J.M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wu, Y. (2004, Julio). Singapore secondary school students´understanding of statistical graphs. Trabajo presentado en el *10th International Congress on Mathematics Education*. Copenhagen, Dinamarca.

Metodologías activas en el análisis multivariante

Gutiérrez Jáimez, Ramón, Gutiérrez Sánchez, Ramón y Linares Pérez, Josefa

Universidad de Granada

Resumen

La enseñanza de la Estadística tradicionalmente se ha desarrollado de una manera clásica en donde las clases prácticas consisten únicamente en la resolución de breves ejercicios teóricos o con una pequeña cantidad de datos. Evidentemente en asignaturas de tipo teórico este sistema es aplicable aún, pero en otras asignaturas, como pueden ser las Técnicas de Análisis Multivariante, el estudio de ejemplos reales y las conclusiones que se obtiene de ellos puede ser más interesantes que los propios resultados teóricos. Consideramos que en estas asignaturas es necesaria la introducción de una metodología de enseñanza activa donde el alumno se encuentre ante ejemplos similares a los que tendrá en su vida profesional. Para ello proponemos una metodología activa basada en la resolución de problemas estadísticos publicados por investigadores de la Universidad de Granada. Obtuvimos un repertorio de casos prácticos de Estadística clasificados por la técnica concreta que aplican junto con un breve resumen de la los conceptos teóricos necesarios. Con este repertorio, el alumno podrá replicar el experimento estadístico e intentar obtener los mismo resultados, pudiendo incluso acudir al investigador de referencia para comentar los resultados. Así mismo el alumno puede observar la importancia de la Estadística en el avance del conocimiento en diferentes ramas de la Ciencia

Palabras clave: Metodologías activas, Metodologías basadas en casos; Metodología basada en Ejemplos; Artículos JCR

.

1. Introducción

En este trabajo vamos a describir una metodología de enseñanza de Estadística que se está llevando a cabo por los autores. Esta se inscribe, principalmente en la línea de mejora global de la Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadística y del Grado en Estadística.

Por otro lado, a pesar del contenido teórico-práctico de muchas de las asignaturas de esta titulación, la mayor parte de las asignaturas se centran en una amplia explicación de los contenidos teóricos de cada técnica en estudio, sin una aplicación práctica o en el mejor de los casos, el alumno recibe breves ejemplos con muy pocos datos y muy "preparados" como ejemplo de la técnica en estudio.

Es fundamental para la formación del futuro estadístico profesional, el conocimiento, tanto de las bases teóricas de las asignaturas como la correcta elección, aplicación e interpretación de la técnica adecuada en un caso real de aplicación. Además teniendo en cuenta que en la práctica real de la Estadística, lo normal es el uso simultáneo de muchas técnicas en un mismo caso real estudiado, resulta que un punto clave en la mejora de la formación del alumno de la titulación es que sea capaz de ver de manera conjunta, complementaria y con carácter crítico, el mayor número posible de dichas técnicas.

Por otro lado, el uso de técnicas estadísticas aplicadas es fundamental en la aplicación de datos reales tanto en el mundo empresarial como en la investigación universitaria o no universitaria. Hoy en día no se concibe "sacar al mercado" cualquier tipo de estudio, sin que una metodología estadística o probabilística avale los resultados presentados. Y en muchos

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 405-408). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

casos los alumnos no han realizado en ninguna asignatura ejemplos concretos con este tipo de datos que, a la postre, será con los que tengan que trabajar.

En este contexto se deriva el objetivo básico de la metodología de enseñanza que proponemos que es lograr una formación práctica que englobe simultáneamente el uso de distintas técnicas o al menos un grupo de ellas aplicadas a casos reales y la iniciación a la formación investigadora de los estudiantes en el ámbito de la Estadística y la Probabilidad.

2. Descripción y objetivos de la experiencia

El grado en Estadística y la Licenciatura en CC. TT. Estadísticas se centran en asignaturas de tres tipos: herramientas, teóricas y teórico-practicas. Nos vamos a centrar en el tercer tipo de asignaturas, las teórico-practicas aunque sin olvidar las de carácter eminentemente científico o teórico.

El objetivo principal es la mejora de la aplicación práctica de técnicas estadísticas. Para ello construimos un repertorio (Base de Datos) de ejemplos reales de estadística aplicada en la que, en cada uno de ellos, al alumno se le presente un problema real, los datos, la metodología técnica de aplicación y su resolución. Para ello aprovechamos el potencial investigador de la Universidad de Granada en ámbitos de conocimiento muy amplios.

Este repertorio consistirá en dos aspectos; Tesis Doctorales y artículos JCR publicados en el periodo 2006-2012. Este repertorio se presenta organizado por grandes áreas de investigación, Centros y Departamentos al que pertenezcan los autores respectivos y las técnicas concretas que utilizan. Es además de acceso fácil por parte de profesores y alumnos interesados. Evidentemente nos centrarnos en Tesis Doctorales de la UGR, ya que son de libre acceso por parte del profesorado de la UGR y en artículos del JCR de revistas de libre acceso.

Esta base de datos puede ser aplicada, en principio en cualquier asignatura de tipo teórico-práctico del Grado en Estadística o CC.TT Estadísticas, pero también a cualquier asignatura que se presente en un contexto estadístico aplicado como pueden ser asignaturas de Sociología de Análisis de Datos, de Económicas como Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, Técnicas de Investigación de Mercado, etc. Pero también puede ser usada como apoyo en el segundo grupo de asignaturas comentadas anteriormente, en asignaturas teóricas, ya que este repertorio incluirá Tesis Doctorales o artículos de investigadores del propio departamento de Estadística e Investigación Operativa desarrolladas en el periodo 2006-2012.

Esta base de datos se presenta en una página web, con el nombre del artículo, la revista, la afiliación del profesor y un fichero PDF con el artículo.

Como ya hemos comentado el objetivo de esta metodología es facilitar al alumno un método de trabajo con el que cubra todas las COMPETENCIAS que debe tener, relacionadas con el mayor número de técnicas estadística que conlleve los siguientes pasos:

1. Conocer la técnica aplicada.
2. Saber aplicar la técnica correspondiente.
3. Aplicarla a datos reales o a ejemplos teóricos.
4. Analizar los resultados o llegar a conclusiones teóricas.

Si el profesor es capaz de enseñar al alumno a aplicar los cuatro pasos anteriores, el estudiante tendrá todas las *competencias* y *habilidades* necesarias como estadístico y estará perfectamente cualificado y preparado para el mercado laboral o para la investigación. (Zabalza y Zabalza, 2010).

Una última habilidad que se obtendrá es que diferenciaremos entre dos tipos de ficheros o de ejemplos en nuestra base de datos, como son las tesis doctorales o artículos en revistas del área JCR. En el segundo de los casos, las revista JCR, están escritas en su mayor parte en inglés, por lo que el alumno tendrá que hacer un doble esfuerzo, por un lado el seguimiento de la técnica y su comprensión y por otro el entender un lenguaje científico técnico matemático. Por lo tanto se forzará al alumno a mejorar esta habilidad que aunque no está inscrita en los objetivos de la asignatura o de la titulación es muy deseable que se dé en los alumnos.

3. Metodología

La metodología de enseñanza es la siguiente, la base de datos con los ejemplos reales de estadística, está a disposición de los profesores con docencia en la Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas (en extinción), en el Grado en Estadística o con interés en esta línea de enseñanza. Como ya hemos comentado esta base de datos contiene tanto el fichero pdf con los artículos como la afiliación de los responsables del cada artículo o los directores de tesis (los doctorandos pueden no mantener su vinculación con la Universidad de Granada).

Una vez que el profesorado ha recibido la base de datos, aplicará distintas metodologías dependiendo del tipo de asignaturas a las que apliquemos el Proyecto. Estas metodologías serán:

- Metodología basada en Ejemplos: Esta metodología consiste en hacer transitar al estudiante (de manera abreviada) por caminos similares a los que transitó el científico para llegar a sus conclusiones, donde el alumno no sólo se apropia del conocimiento, sino de la lógica de la ciencia en cuestión.
- Basada en Casos: Primero se explicará brevemente los fundamentos teóricos de la técnica para posteriormente presentar casos de aplicación, que el alumno tendrá que replicar o aplicar a datos similares o actualizados. Evidentemente de esta manera salvaremos el vacío entre teoría y problemas.

La descripción completa de estas metodologías puede verse en (Astigarra, 2009; Benito y Cruz, 2005 o Campos et al 2008).

Los pasos de aplicación de la metodología propuesta serán:

1. El profesor tiene a su disposición la Base de Datos con los archivos correspondientes de los ejemplos reales de estadística.
2. El profesor expone en forma de de lección magistral los temas o partes de ellos que él considere fundamentales.
3. Se elije, dependiendo del tipo de asignatura, entre una de las mecánicas de enseñanza activa entre las que hemos visto anteriormente.
4. Los alumnos forman grupos de trabajo autónomo.
5. Intentan resolver de igual modo los planteamientos teóricos o replicar los experimentos de los artículos. En caso de cualquier inconveniente, el alumno tiene la ventaja de disponer de la afiliación (Departamento, email,…) del investigador pudiendo recurrir a ellos para su consulta además, evidentemente, de cualquier otro medio bibliográfico.
6. Serán evaluados.

4. Ejemplo

Para ilustrar esta metodología, proponemos el siguiente ejemplo. En la dirección (http://www.ugr.es/~ramongs/articulos%20en%20pdf/parasitologyre.pdf) se encuentra un artículo de investigadores de la Universidad de Granada, pertenecientes a los departamentos de Parasitología y Estadística. En este artículo se estudian las características bioquímicas de un conjunto de Trypanosomas de Méjico y Perú. La publicación tiene una primera parte de metodología parasitóloga de estudio, sin embargo las conclusiones de caracterización de esos tripanosomas no son posibles sin un Análisis Cluster. Esta técnica es una de las más importantes del Análisis Multivariante

La metodología que proponemos consistirá en facilitar este artículo al alumno. Este estará en la base de datos en la categoría de Análisis Multivariante y subgrupo de Análisis Cluster. En ese momento el profesor, dependiendo de la mecánica que elija (basada en ejemplos o en casos) facilitará al alumno la información necesaria para la réplica del experimento (estadísticamente hablando) o el alumno buscará al investigador principal para que le facilite los datos del experimento. Una vez obtenidos los datos, el estudiante intentará obtener las mismas conclusiones que los investigadores.

5. Resultados

Esta metodología docente se ha desarrollado en el curso actual (2012/2013). Al final del primer cuatrimestre se les realizó un breve test de conocimientos para comprobar si habían adquirido un mayor nivel en las competencias y habilidades requeridas en las asignaturas en las que se ha aplicado en relación al curso 2011/2012. Los resultados fueron satisfactorios obteniéndose mejores resultados en los alumnos y una mayor satisfacción en el desarrollo, más dinámico, de este curso frente al anterior.

Referencias

ANECA: Verifica, Grado en Estadística

Astigarra, J (2009) *Metodologías activas para la docencia en las ciencias económicas y jurídicas: una experiencia de innovación docente en un contexto difícil.* Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza.

Benito A, y Cruz, A. (2005). *Nuevas claves para la docencia universitaria en el Espacio Europeo de Educación Superior*. Madrid: Narcea.

Campos, M. L., Conde, J. L., Pérez, M. P., Newman, M. P., Newman V.;, yViciana, V. (2008). *Orientaciones metodológicas para la adaptación al Espacio Europeo de Educación Superior en la Titulación de Educación Infantil*. Granada: Sider.

Zabalza, M. A. y Zabalza, M. (2010). *Planificación de la docencia en la Universidad.* Madrid: Narcea.

Niveles de razonamiento frente a problemas binomiales

Mayén Galicia, Silvia, Salazar Nájera, Ariana y Sánchez Sánchez, Ernesto

Cinvestav

Resumen

Este trabajo es parte de un estudio en el que se exploran los razonamientos que estudiantes de bachillerato y profesores en formación dan frente a tareas de probabilidad relacionadas con la fórmula binomial. Se muestran resultados del análisis de respuestas a dos problemas de tipo binomial que se aplicaron a tres grupos de sujetos con diferentes características: el grupo A, de 31 estudiantes de segundo año de bachillerato, quienes no habían estudiado probabilidad; grupo B, de 28 estudiantes de tercer año, y grupo C, de 18 profesores de secundaria en formación, ambos con un curso previo de estadística y probabilidad. Para el análisis se identificaron los elementos de conocimiento necesarios para resolver cada tarea y con ellos se elaboró una jerarquía hipotética aplicando la taxonomía SOLO. Después se analizaron las respuestas a los problemas basadas en dicha jerarquía y se hicieron los ajustes con base en las dificultades para clasificar todas las respuestas. Se obtuvo así una jerarquía de razonamiento para cada problema que da cuenta del desempeño general de los grupos. Se observaron notorias diferencias entre los estudiantes del grupo A y los grupos B y C. Se concluye, por un lado, que el progreso en el desempeño de problemas en los que la herramienta es la fórmula binomial depende de la instrucción que reciben los estudiantes. Por otro, que el elemento de conocimiento fundamental que hace la diferencia en la calidad de las respuestas de los estudiantes es el uso de diagramas de árbol, el desarrollo de los cuales lleva a las combinaciones y a la regla del producto y, ambas a su vez, al domino de la fórmula binomial.

Palabras clave: binomial, razonamiento, jerarquía, estudiantes de bachillerato, profesores en formación.

1. Introducción

La distribución binomial es la más importante distribución discreta y forma parte del contenido de los temas del currículo de matemáticas de bachillerato y de cualquier curso introductorio de probabilidad y estadística. Los objetivos de la mayoría de programas de bachillerato establecen que los estudiantes aprendan a construir distribuciones de probabilidad de variables aleatorias elementales; a calcular e interpretar su valor esperado y su variancia; y a utilizar distribuciones en la solución de problemas (Jones, Langrall y Mooney, 2007). Esto presupone una comprensión y dominio de la fórmula binomial y de los elementos de conocimiento que la constituyen.

Es escasa la literatura de investigación empírica que informa sobre el razonamiento de la fórmula binomial. Van Dooren et al. (2003) exploran la presencia de la ilusión de linealidad y muestran que hay estudiantes de bachillerato que a pesar de haber llevado cursos de probabilidad, caen en este sesgo cuando se les plantea problemas binomiales, cuyo enunciado contiene datos que aparentan ser o son proporcionales. Abrahamson (2009a) realiza tres estudios de caso sobre el razonamiento de estudiantes universitarios frente a una situación simple de probabilidad hipergeométrica (la cual es casi-binomial). En Abrahamson (2009b y 2009c) se reporta una entrevista a profundidad con un niño de 11.5 años; utiliza dispositivos de mediación cuya comprensión requiere diferente niveles de abstracción. Landín y Sánchez (2010) informan de las respuestas de 66 estudiantes de bachillerato a 4 tareas relacionadas con la fórmula binomial. Tres de esas tareas inducían un sesgo cognitivo. Proponen una jerarquía para evaluar las respuestas de los estudiantes a tareas

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 409-416). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

relacionadas con la fórmula binomial. En Sánchez y Landín (2011), se describe un proceso para mejorar la fiabilidad de la jerarquía de razonamiento reportada en Landín y Sánchez (2010). El objetivo del presente estudio es explorar el pensamiento de los estudiantes frente a problemas binomiales y determinar los elementos de conocimiento clave que utilizan para resolverlos, así como presentar un cuadro que muestre la gama de razonamientos que se presentan, desde aquellos muy alejados de la solución hasta los más sofisticados.

2. Marco conceptual

El razonamiento de estudiantes frente a una tarea refleja la comprensión conceptual que han alcanzado y se expresa en el uso de elementos de conocimiento relacionados con la tarea y con el (o los) concepto (s) en cuestión. Las inferencias y explicaciones que realizan estudiantes de un grupo de una edad similar y del mismo nivel educativo al resolver una tarea se pueden organizar en una jerarquía para dar cuenta de los diferentes grados de integración de esos elementos; los procedimientos más eficientes que desarrollan algunos estudiantes del grupo son un indicio, sin ser determinante, de los niveles de desempeño que pueden ser alcanzados por los sujetos de ese rango de edad y nivel educativo; mientras que los niveles inferiores ofrecen indicaciones de las dificultades que encuentran y los conocimientos clave que permiten superarlas y mejorar sus niveles de desempeño. En la literatura de educación estadística frecuentemente se ha aplicado la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1991) para el análisis o evaluación de diferentes conceptos probabilísticos y estadísticos o se han presentado propuestas de jerarquías inspiradas en SOLO. Tarr y Jones (1997) presentan una jerarquía de las nociones de probabilidad condicional e independencia; en Jones, Thornton, Langrall, y Tarr (1999) se extiende a tareas de espacio muestral, probabilidad teórica, probabilidad experimental, comparación de probabilidades, independencia y probabilidad condicional. En este trabajo se propone una jerarquía elaborada a partir de la intención de organizar respuestas de los estudiantes a problemas relacionados con la fórmula binomial.

3. Metodología

Sujetos: La muestra se compone de 77 estudiantes pertenecientes a tres grupos, uno de 31 estudiantes de bachillerato sin curso previo de probabilidad; uno de 28 estudiantes de bachillerato y otro de 18 profesores de secundaria en formación inicial, ambos con estudios previos de probabilidad.

Instrumento: Problemas 7 y 9 de un cuestionario de 10 problemas de probabilidad, ambos son tareas de aplicación binomial, que como rasgo particular contienen eventos no equiprobables representados con porcentajes y números decimales (respectivamente) en experimentos de azar. El problema 7 es una aplicación directa de la fórmula B(5; 0.7, 3). En el problema 9 se requiere el cálculo del valor esperado de la binomial $np=8\times 0.7= 5.6$. Luego calcular B(8; 0.7, 5) y B(8; 0.7; 6), comparar y elegir el segundo que tiene mayor probabilidad. A continuación se presentan:

7. Un tirador tiene 70% de probabilidad de pegar en el blanco y 30% de fallar. Dispara 5 veces ¿Cuál es su probabilidad de pegar al blanco exactamente 3 veces?

9. Se lanzan 8 monedas en las que la probabilidad de salir "sol" es 0.7.
a.¿Cuál es el número de soles que tiene mayor probabilidad de ocurrir?

b. Calcula la probabilidad de que salga dicho número.

Procedimiento de aplicación y de análisis de datos: Los problemas se aplicaron a los estudiantes de la muestra en presencia de sus profesores y de los investigadores. El proceso de análisis de las respuestas es de tipo cualitativo y cíclico; consiste en una revisión sistemática de todas las respuestas para formar un sistema de categorías hasta clasificarlas

en los diferentes niveles jerárquicos de la taxonomía SOLO *(preestructural, uniestructural, multiestructural y relacional)* en función de los elementos de conocimiento que se ponen en juego y de la precisión de su ejecución, en particular, a la regla del producto y la fórmula binomial. Se obtuvo una nueva jerarquía de cada problema, en la que se incluyen sub-categorías para cada nivel.

4. Resultados

Se presentan los resultados del análisis de las respuestas de ambos problemas en los dos siguientes apartados. Incluyen las tablas que exhiben la jerarquía obtenida para cada problema, así como las respuestas que caracterizan cada nivel jerárquico con un ejemplo representativo de cada categoría o sub-categoría. Se completa el análisis con una tabla de frecuencias.

Resultados del análisis al problema 7. Los resultados por categoría de este problema se presentan en la Tabla 1 que incluye el nivel jerárquico de la taxonomía SOLO y las sub-categorías que lo forman, así como la descripción de la respuesta típica escrita acerca de elementos de conocimiento encontrados.

Tabla 1. Jerarquía obtenida del problema 7

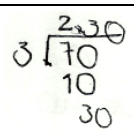
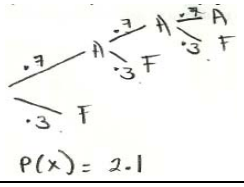
Nivel SOLO y Sub-categorías	Respuesta
Preestrucutral	
P1	Respuesta no relacionada con la situación.
P2	Exhibe cierto conocimiento pertinente pero sin ningún fin.
Uniestructural	
U1	Realiza un diagrama de árbol inadecuado o incompleto.
U2	Elabora un diagrama de árbol completo, pero cuenta incorrectamente los casos posibles o los favorables o ambos.
U3	Hace un diagrama de árbol, cuenta casos posibles y favorables. Determina la probabilidad mediante Laplace pero asumiendo equiprobabilidad de los eventos.
MultiestructuralM1	Reconoce la situación de Bernoulli, aplica la regla del producto considerando probabilidades de éxitos y fracasos sin tomar en cuenta posibles combinaciones.
Relacional	Realiza un diagrama de árbol, extrae la lista completa de los casos posibles y
R1	favorables y aplica la regla del producto y la regla de la suma.
R2	Realiza un diagrama de árbol, extrae la lista completa de los casos posibles y aplica la regla del producto y de la suma, luego confirma su resultado con la fórmula de combinaciones.

A continuación se presentan ejemplos de cada nivel y sub-categoría definidos en la Tabla 1.

Respuestas de nivel Preestructural. En el primer ejemplo (P1), la respuesta tiene una relación ajena a la situación; mientras que en el segundo (P2), la respuesta muestra que el estudiante sabe que requiere un diagrama de árbol, pero desconoce las normas de su construcción:

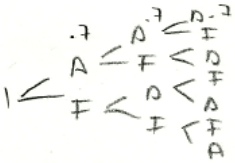
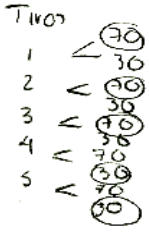
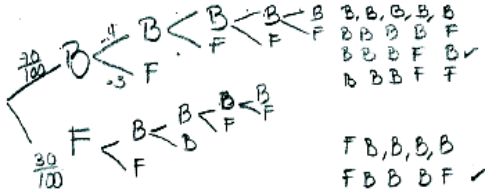
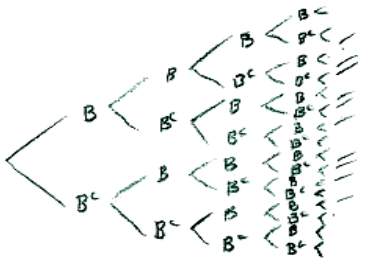
Tabla 2. Ejemplos de respuesta de nivel preestructural

Categoría	Respuesta	Descripción

P1	*70% / 3=23 porciento de pegar exactamente en el blanco. Dividir su posibilidad de una sola vez entre los 3 veces.*		Respuesta no relacionada con la situación. Sólo toma en cuenta la probabilidad dada de pegar en el blanco y la divide entre 3.
P2			Presenta un diagrama de árbol inadecuado. Su respuesta es 2.1 pero no la justifica. Al parecer, multiplica (7)*(.3) ó (3)*(.7)

Respuestas de nivel Uniestructural. En este nivel las respuestas son parciales, pero los estudiantes identifican alguno de los elementos del problema: *combinan diagramas de árbol con la regla del producto, diagramas de árbol o árboles de probabilidad con regla de Laplace,* ya sea correcta o incorrectamente, como las siguientes:

Tabla 3. Ejemplos de respuesta de nivel uniestructural

Categoría	Respuesta		Descripción
U1	 *3/5 Probabilidad (.7)(.7)(.7)=0.343=34%*		Presenta un diagrama de árbol inadecuado. Considera sólo los casos de éxito aplicando la regla del producto.
U2	 *R= P = 2/32*		Presenta un diagrama de árbol y una lista de casos posibles incompletos; Obtiene la probabilidad mediante la regla de Laplace considerando todos los casos posibles, pero no todos los casos favorables, ni tampoco usa las probabilidades dadas en el problema.
U3		*La probabilidad de pegar al blanco exactamente 3 veces es de 10/32.*	Realiza un diagrama de árbol del cual extrae una lista completa de los casos posibles y obtiene correctamente el número de casos favorables. Determina la probabilidad mediante Laplace, pero cae en el sesgo de la equiprobabilidad, pues no toma en cuenta probabilidades dadas en el problema.

Respuestas de nivel Multiestructural. De toda la muestra de estudiantes solo apareció esta respuesta incluida en este nivel. En ella se utiliza la *regla del producto,* sin embargo, no considera las combinaciones posibles. El avance respecto a los anteriores es que aplica la regla del producto sin necesidad de utilizar diagrama de árbol.

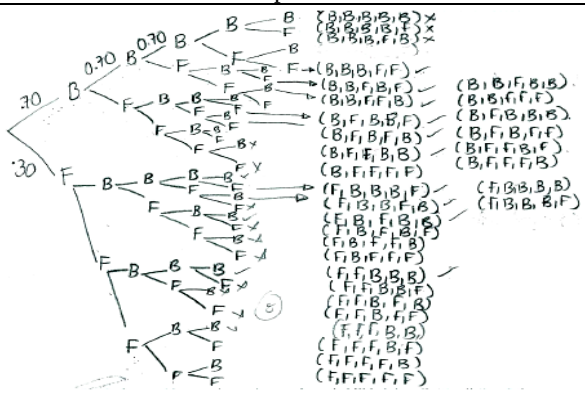
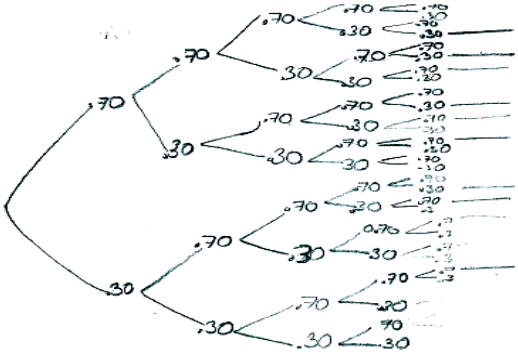
Tabla 4. Ejemplos de respuesta de nivel multiestructural

Categoría	Respuesta	Descripción
M1	*P(pegar 3 y fallar 2) = (0.7) (0.7) (0.7) (0.3) (0.3) = 0.03087*	Aplica la regla del producto considerando probabilidades de 3 éxitos y 2 fracasos, pero no toma en cuenta las posibles combinaciones.

Respuestas de nivel Relacional. También de este nivel se obtuvo dos sub-categorías: R1 y R2 y sólo se encontraron dos respuestas, que aunque incluyen todos los elementos del

problema: *diagramas de árbol, situación de Bernoulli, regla del producto y fórmula de combinaciones,* son distintos, pero están relacionados, como se muestra a continuación:

Tabla 5. Ejemplos de respuesta de nivel relacional

Categoría	Respuesta	Descripción
R1	 *P = (.7) (.7) (.7) (.3) (.3) = 0.03087* *P(dar al blanco 3 veces) = (0.03087)(10); P = 0.3087*	Realiza un diagrama de árbol del cual extrae una lista completa de los casos posibles. Aplica la regla del producto para obtener la probabilidad del evento (PPPFF; P-pegar, F-fallar); luego multiplica por el número de casos posibles.
R2	 10 casos donde le da al blanco 3 veces, si cada una tiene probabilidad de $(0.7)^3(0.3)^2 = 0.03087$. P(E) = 10(0.03087). P(E) = 0.3087. $_5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\times4\times3!}{3!\times2!} = \frac{20}{2}$ $_5C_3 = 10$	Realiza un diagrama de árbol, del cual extrae una lista completa de los casos posibles. Aplica la regla del producto para obtener la probabilidad del evento (PPPFF; P-pegar, F-fallar); luego multiplica por los casos favorables. Al final, confirma su resultado con la fórmula de combinaciones.

Una vez aclarado cómo se clasificaron las respuestas, se exponen en la Tabla 6 las frecuencias de respuestas que fueron clasificadas en cada nivel y sub-categoría.

Tabla 6. Frecuencia de respuestas por categoría de los tres grupos en el problema 7

Categoría	P1	P2	U1	U2	U3	M1	R1	R2	Nc	Total
Grupo A	15	5	1	7	-	-	-	-	3	31
Grupo B	2	6	7	3	5	-	-	-	5	28
Grupo C	2	4	1	4	4	1	1	1	-	18
Total	19	15	9	14	9	1	1	1	8	77

Se debe notar que en el grupo A (estudiantes sin curso previo), 20 respuestas se ubicaron en nivel preestructural y sólo 8 llegan al uniestructural; en el grupo B, 8 respuestas son de tipo preestructural y 15 uniestructural, y en el grupo C, hay 6 respuestas de nivel preestructural, 9 uniestructural, la única multiestructural y 2 relacionales.

Resultados del análisis al problema 9. Presentan el mismo esquema que el anterior.

Tabla 7. Jerarquía obtenida del ítem 9

Nivel SOLO y Sub-categorías	Respuesta
Preestructural	
P1	Respuesta no relacionada con el problema; sin justificación u opinión personal.
P2	Respuestas basadas en algún sesgo.
Uniestructural	Demuestra la probabilidad dada mediante definición clásica (Laplace).
U1	
U2	Respuesta parcial o parcialmente correcta.
Multiestructural	Respuesta correcta (no modula variabilidad). Obtiene el valor esperado, es decir, relaciona la probabilidad de obtener águila con el número de repeticiones realizadas; usa la fórmula de la frecuencia esperada.
M1	

Respuestas de nivel Preestructural. En este nivel las respuestas están muy lejos de la solución y del método para obtenerla. A continuación se presentan dos ejemplos:

Tabla 8. Ejemplos de respuesta de nivel preestructural

Categoría	Respuesta	Descripción
P1	*a) 7 soles.* *b) P(s) = .7* $\frac{7}{10}x\frac{7}{10}x\frac{7}{10}x\frac{7}{10}x\frac{7}{10}x\frac{7}{10}x\frac{7}{10}x\frac{7}{10} = \frac{7^8}{10^8}$ .7	Respuesta que no se relaciona con el problema. Realiza operaciones sin ninguna relación con algún procedimiento correcto.
P2	*el mayor # de soles que podrían salir son 5 a 4 soles. La probabilidad es de la mitad a que me salga sol o águila*	En esta respuesta sólo se formula una afirmación, y, no toma en cuenta los datos del problema.

Respuestas de nivel Uniestructural. Estas respuestas se caracterizan por reconocer al menos un elemento del problema, como en los siguientes casos:

Tabla 9. Ejemplos de respuesta de nivel uniestructural

Categoría	Respuesta	Descripción
U1	*6 o 7* *Porque su probabilidad es 0.7 mientras que aguila 0.3 durante 8 tiros*	La respuesta es parcialmente correcta e intenta justificarla con base en la probabilidad dada.
U2	*6 soles* *8*7=5.6 redondeo y es 6* *de 8 veces solo multiplico* *.8 veces por* la probabilidad .7	Respuesta es correcta. Obtiene el valor esperado y redondea; pero no calcula probabilidades para verificar.

Respuestas de nivel Multiestructural. Sólo dos respuestas se clasificaron en este nivel, uno se presenta a continuación.

Tabla 10. Ejemplos de respuesta de nivel multiestructural

Categoría	Respuesta	Descripción

M1	1 – 8 .7 – S.6 *a) R = 5 soles* *b) R = 0.16807* *P(5 soles) =(.7) (.7) (.7) (.7) (.7).= 0.16807*	Respuesta parcialmente correcta. Obtiene el valor esperado: relaciona la probabilidad de obtener águila con el número de repeticiones realizadas mediante una regla de tres y calcula su probabilidad tomando en cuenta sólo casos de éxito, sin combinaciones.

La Tabla 11 concentra la frecuencia de respuestas a este problema por nivel jerárquico y grupo de estudiantes.

Tabla 11. Frecuencia de respuestas por categoría de los tres grupos en el problema 9

Categoría	P1	P2	U1	U2	U3	M1	R1	R2	Nc	Total
Grupo A	15	5	1	7	-	-	-	-	3	31
Grupo B	2	6	7	3	5	-	-	-	5	28
Grupo C	2	4	1	4	4	1	1	1	-	18
Total	19	15	9	14	9	1	1	1	8	77

La frecuencia de respuestas a este problema nos indica que ha sido difícil para los estudiantes, al igual que el problema 7. Naturalmente, tienen más deficiencias los estudiantes que no han estudiado probabilidad. En el grupo B, ya hay respuestas parciales, pero sólo identifican un elemento, con 10 respuestas de tipo uniestructural. En cuanto al grupo C, como se esperaba, los resultados mejoran, ya que aunque la mayoría son de nivel uniestructural, ya aparece una respuesta multiestructural y 2 del nivel relacional.

5. Conclusiones

En progreso en el desempeño de problemas en los que la herramienta es la fórmula binomial dependen de la instrucción que reciben los estudiantes. En efecto, se observan una creciente calidad de respuestas de ambas preguntas en los grupos de acuerdo al orden siguiente: las respuestas de los que no han llevado probabilidad se concentran predominantemente en el nivel Prestructural. Mientras que las respuestas de los grupos B y C, que han llevado el curso, se concentran en su mayoría en el nivel Uniestructural, sin embargo, en el grupo C se presentan algunos casos que llegan a Multiestructural y Relacional. No obstante, el desempeño general logrado por estos grupos (B y C) dista aún de los objetivos que se proponen los cursos, pues lo deseable sería que sus respuestas fueran de nivel Relacional.

La organización de las respuestas de acuerdo a los niveles de la taxonomía SOLO ha permitido detectar los elementos clave que permiten a los estudiantes ofrecer respuestas de mejor calidad y, por lo tanto, tener mejor comprensión y posibilidades de desarrollar sus razonamientos en problemas binomiales. El elemento de conocimiento central que permite a los estudiantes organizar sus conocimientos y razonamientos sobre la situación es el diagrama de árbol. Aunque es posible que sea por el tipo de enseñanza que llevaron los sujetos examinados, el uso de diagrama de árbol fue el principal elemento de conocimiento que hizo la diferencia entre las respuestas del nivel Prestructural y las Uniestructurales. Es muy probable que la posesión de esta herramienta y el concepto de probabilidad clásica, les permita a los estudiantes percibir cuándo una situación-problema es de tipo binomial.

El progreso a partir de esta herramienta se logra cuando se construyen los dos elementos de conocimiento más: las combinaciones y la regla del producto. Se puede apreciar que los estudiantes que alcanzan la solución lo hacen gracias a que con la ayuda del diagrama de árbol pudieron organizar y contar los casos favorables; los estudiantes más avanzados esquematizan este procedimiento dando lugar al uso de la fórmula para calcular combinaciones. Por otro lado, el recurso del diagrama de árbol se vuelve inoperante para situaciones donde *n* es grande (como n=8 del segundo problema). En estos casos, la regla del producto sustituye al uso del árbol para contar; el árbol entonces se puede utilizar sólo

en un instrumento para organizar de manera general la situación y no para calcular. Cuando los estudiantes son capaces de prescindir del diagrama de árbol y resolver los problemas, es muy probable que hayan encapsulado o esquematizado todo el procedimiento en la fórmula de las combinaciones.

Referencias

Abrahamson, D. (2009a). Embodied design: constructing means for constructing meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), 27-47.

Abrahamson, D. (2009b). Orchestrating semiotic leaps from tacit to cultural quantitative reasoning –the case of anticipating experimental outcomes of a cuasi-binomial random generator. *Cognition and Instruction*, 27(3), 175-224.

Abrahamson, D. (2009c). A students synthesis of tacita and mathematical knowledge as a researcher's lens on bridging learning theory. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3),195-226. [Disponible en: www.iejme.com]

Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H. A. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement* (pp. 57-76). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Landín, P. R. y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa, 12*(3). Disponible en: http://www.revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewArticle/4842.

Jones, G.A., Langrall, C.W. y Mooney, E.S. (2007). Research in probability. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (*909-955).* Charlotte, NC, USA: Information Age-NCTM.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W. y Tarr, J. E. (1999). Understanding students probabilistic reasoning. En L. V.Stiff & F. R.Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (1999 yearbook, pp. 146-155). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Salazar, A. (2013). *Razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato y profesores en formación sobre la regla del producto y distribución binomial.* Tesis de Maestría. Cinvestav.

Sánchez, E. y Landín, P. (2011). Fiabilidad de una jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico acerca de la distribución binomial. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV,* Ciudad Real, España.

Tarr, J. E. y Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students´ thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, 9 (1), 39-59.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53 (2), 113-138.

Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a una situación básica de variable aleatoria y distribución

García, Jaime y Sánchez, Ernesto

Cinvestav

Resumen

En el presente artículo se estudia el razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato a través de sus respuestas a preguntas referidas a una situación básica inscrita en el tema de variable aleatoria y distribución de probabilidades. Un cuestionario de 13 preguntas, sobre una situación-problema llamada *A la Suerte*, se aplicó a 24 estudiantes. El problema era predecir el comportamiento de sorteos de tipo binomial (n = 3, p = ½) con el fin de observar si los estudiantes perciben y consideran aspectos de dos elementos principales, a saber: aleatoriedad y la distribución de los resultados (0, 1, 2). Las respuestas se analizaron desde la taxonomía SOLO, es decir, se organizan en cinco categorías: Prestructural, Uniestructural, Multiestructural, Relacional y Abstracto Extendido. El análisis muestra que la mayoría de los estudiantes perciben la característica de la binomial de tener mayor probabilidad en valores centrales que en sus valores extremos y poco menos de la mitad expresa en sus gráficas la aleatoriedad del fenómeno.

Palabras clave: Razonamiento Probabilístico; Distribución; Variable Aleatoria; Aleatoriedad.

.

1. Introducción

El aprendizaje del razonamiento probabilístico es uno de los objetivos importantes de la educación matemática de los niveles básicos y pre-universitarios (Jones, Langrall y Mooney, 2007). La probabilidad es una de las ideas fundamentales de la estadística (Burril y Bielher, 2011). Se han llevado a cabo una gran cantidad de investigaciones sobre razonamiento probabilístico que se centran en alguno de los conceptos o procedimientos que forman el campo probabilístico: aleatoriedad, espacio muestral, enfoque clásico y enfoque frecuencial de probabilidad, combinatoria, etc. No obstante, se han hecho pocas exploraciones sobre problemas que intenten desarrollar el razonamiento de probabilidad tomando como punto de partida la noción de distribución de probabilidad.

Pfannkuch y Reading (2006) formulan 11 preguntas para indicar hacia dónde debieran los investigadores dirigir sus esfuerzos en lo que concierne al desarrollo de la noción de distribución por los estudiantes, entre ellas se encuentran las siguientes: ¿Cuáles son las formas y representaciones más simples de una distribución que pueden entender los estudiantes? ¿Cómo se desarrolla el razonamiento acerca de distribuciones desde sus formas o aspectos más simples a unos más complejos? ¿Cuáles son las dificultades que los estudiantes encuentran cuando trabajan, analizan e interpretan distribuciones? En este estudio se propone una situación de probabilidad en la que se busca avanzar en la respuesta a la segunda de estas preguntas: el razonamiento en una situación simple de distribución binomial y con estudiantes de bachillerato. Su respuesta puede ofrecer claves para responder las otras.

2. Marco Conceptual

El *contenido* que se explora en este estudio es la noción de *distribución binomial* que abarca el de la *variable aleatoria* correspondiente. Ésta presenta un patrón que varía en los

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 417-424). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

valores enteros entre cero y N, y se caracteriza por tener pocas ocurrencias en sus valores extremos y más ocurrencias conforme la variable se desplaza hacia un valor intermedio. Esta distribución se forma al repetir N veces un experimento de Bernoulli y observar el número de éxitos que se presentan. El espacio muestral asociado a la distribución está formado por 2^N secuencias de E^s (éxitos) y F^s (fracasos) de tamaño N; la variable aleatoria "el número de éxitos" genera una partición de eventos del espacio muestral cuyas probabilidades se distribuyen en forma binomial.

Se entiende por *razonamiento* al proceso de formular juicios o aserciones a partir de otras proposiciones ya conocidas u observaciones de un fenómeno. Asumimos que la gente se forma conceptos como consecuencia de su participación en las actividades sociales de dar y pedir razones, es decir, gracias al razonamiento se configuran y consolidan los conceptos (Brandom, 2002, Bakker y Derry, 2011). En consecuencia, conviene proponer tareas o situaciones-problema que propicien el razonamiento de los estudiantes; por ejemplo, en el campo de la probabilidad, tareas en situaciones de incertidumbre que logren captar el interés de los estudiantes, que lo enfrenten a algunas 'grandes ideas' de la probabilidad (Gal, 2005) y que le exijan realizar razonamientos probabilísticos; tales tareas deben involucrar a los estudiantes en procesos de estimación de la propensión de ocurrencia de eventos y de su predicción y representación y no restringirse sólo a problemas de cálculo.

Una manera de describir el razonamiento acerca de la distribución binomial desde sus formas o aspectos más simples a otras algo más complejos es analizando y organizando en una *jerarquía* las respuestas de estudiantes a una tarea. La taxonomía SOLO es útil para tal propósito. Ésta se propuso para evaluar la calidad de los aprendizajes de los estudiantes, pero ha sido también una herramienta para elaborar jerarquías de desarrollo del razonamiento (Jones, Thornton, Langrall y Tarr, 1999). Permite identificar elementos de conocimiento que los estudiantes utilizan como recursos para formar razonamientos. El propósito del presente artículo es describir el razonamiento de los estudiantes frente a una tarea binomial simple a través de una jerarquía utilizando la taxonomía SOLO.

3. Metodología

Participantes. Veinticuatro estudiantes de un grupo de primer semestre (15-16 años) del CCH-UNAM, el profesor titular del grupo y dos investigadores (autores del presente artículo). Los estudiantes no habían recibido ningún tipo de enseñanza formal de probabilidad y estadística; además, no recibieron información respecto el propósito del estudio.

Instrumento. Un cuestionario de 13 preguntas, sobre una situación-problema inscrita en el tema de variable aleatoria y distribución de probabilidades llamada *"A la Suerte"*. El problema era predecir el comportamiento de sorteos de tipo binomial ($n = 3$, $p = ½$) con el fin de observar si los estudiantes perciben y consideran aspectos de dos elementos principales, a saber: aleatoriedad y la distribución de los resultados (0, 1, 2). La situación-problema estaba relacionada con el sorteo del control de la TV en una familia de tres integrantes (Ana, Carlos y Beto) a través de un mecanismo aleatorio, el lanzamiento de dos monedas, de tal forma que si no salían águilas ganaba Ana, si salía una águila ganaba Beto y si salían dos águilas ganaba Carlos. La finalidad del problema era predecir el comportamiento de los sorteos para decidir si todos los miembros de la familia podían tener la misma frecuencia de éxito a largo plazo. Por las limitaciones de espacio, en este informe sólo se expondrá y comentará la pregunta 6 de la situación-problema, la cual se presenta en la Figura 1.

> 6. ¿Cómo piensas que serían los resultados para 40 días? Dibuja las barras de los posibles resultados en cada inciso, teniendo en cuenta la escala dada. Escribe el número de veces o el porcentaje, según sea el caso, sobre cada barra.

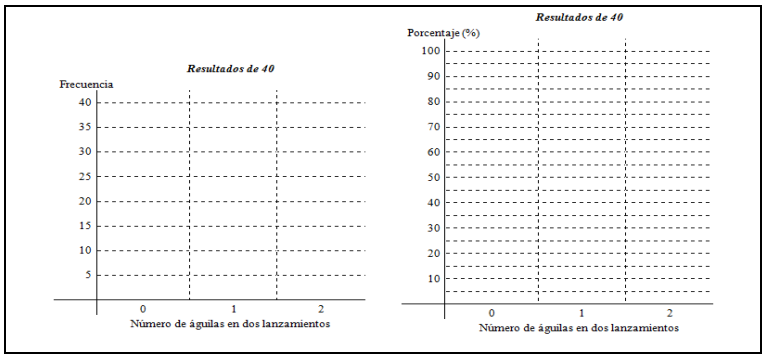


Figura 1. Pregunta 6

Procedimientos. El docente presenta a sus estudiantes la situación-problema, les pide leerlas en forma individual y grupal, les permite que realicen algunos ensayos para propiciar una familiarización con la situación aleatoria y puedan opinar, hacer predicciones, argumentar y proponer ideas en el cuestionario. La aplicación duró 1 hora aproximadamente.

4. Análisis y Resultados

Una forma de percibir y considerar aspectos de dos elementos principales, a saber: aleatoriedad y la distribución de resultados (0, 1, 2), es observar los gráficos propuestos por los estudiantes ante una predicción.

Para la pregunta 6, referente a predicciones a corto plazo sobre distribuciones de frecuencia en términos de valores absolutos y relativos (%) del experimento del lanzamiento de dos monedas para 40 sorteos, se tuvieron en cuenta las siguientes componentes para evaluar la respuesta de cada estudiante:

- *Componente (a).* Distribuye las frecuencias absolutas y relativas teniendo en cuenta el número de sorteos (la suma de frecuencias es igual al tamaño de la muestra) y el 100% (la suma de las frecuencias relativas es igual al 100%), respectivamente.
- *Componente (b).* Asigna mayor frecuencia absoluta y relativa al evento con mayor probabilidad (1 águila) (mediante un enfoque clásico o mediante una apreciación subjetiva).
- *Componente (c).* Asigna cuando menos dos distintas frecuencias a los valores esperados de los eventos, en ambos gráficos, considerando la variabilidad. Esta componente es controvertida porque los estudiantes pueden asignar valores distintos a los esperados por causas diferentes a la de considerar la variabilidad. Hay quienes considerarían una expresión de mayor conocimiento aquellas respuestas que reflejaran los valores esperados, pero como ha puesto en evidencia Shaughnessy (1997) ésta no es necesariamente una respuesta que tenga en cuenta la naturaleza aleatoria del experimento.
- *Componente (d).* Representa adecuadamente los valores de frecuencia entre ambos gráficos, conservando la proporción de los resultados en las dos escalas.

Con el fin de analizar y clasificar las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta 6 (consideraron las cuatro componentes antes descritas) se tienen los siguientes niveles de la taxonomía SOLO:

- *Prestructural (P)*: No tiene en cuenta ninguna de las componentes de la pregunta.
- *Uniestructural (U)*: Tiene en cuenta una sola de las cuatro componentes de la pregunta: “a”, “b”, “c” o “d”.
- *Multiestructural (M)*: Tiene en cuenta sólo dos de las cuatro componentes de la pregunta: “ab”, “ac”, “ad”, “bc”, “bd” o “cd”.

- *Relacional (R)*: Tiene en cuenta sólo tres de las cuatro componentes de la pregunta: “abc”, “abd”, “acd” o “bcd”.
- *Abstracto Extendido (AE)*: Tiene en cuenta las cuatro componentes de la pregunta: “abcd”.

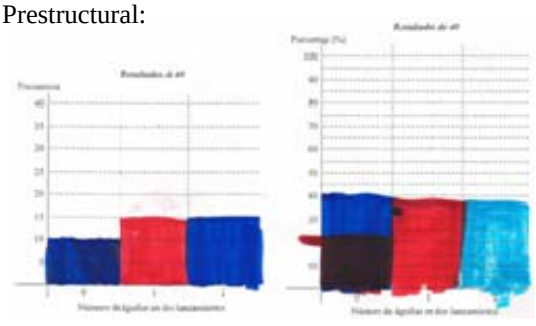
La Tabla 1 presenta la clasificación de los estudiantes de acuerdo a su nivel y a las componentes involucradas en su respuesta. En la Tabla 2 se presenta una ejemplificación del tipo de respuestas dadas por los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento, seguida de una breve justificación sobre esta clasificación.

Tabla 1. Clasificación de acuerdo a nivel y componente

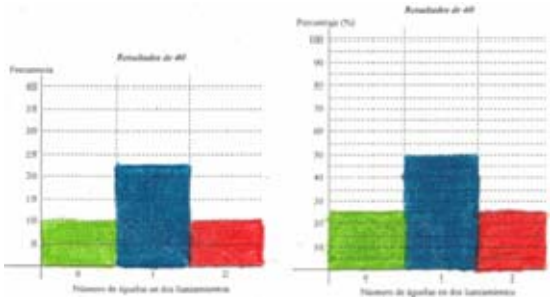
Nivel	Componente	Participantes	Total
Prestructural	-	2	2
Uniestructural	b	5	8
	c	3	
Multiestructural	ab	1	4
	bc	2	
	ac	1	
Relacional	abd	6	9
	abc	2	
	bcd	1	
Abstracto Extendido	abcd	1	1
Total		24	24

Como se observa, respecto a la primera componente (a), 11/24 estudiantes distribuyen adecuadamente las frecuencias teniendo en cuenta que la suma de frecuencias absolutas y relativas asignadas corresponden al tamaño de la muestra (40 sorteos) y al 100%, respectivamente; respecto a la segunda componente (b), 18/24 estudiantes asignaron mayor frecuencia al evento más probable (consciente o inconscientemente) en las dos distribuciones; respecto al tercer componente (c), 10/34 estudiantes tuvieron en cuenta en asignar cuando menos dos distintas frecuencias a los valores esperados de los eventos en ambas distribuciones considerando la variabilidad; finalmente, respecto a la cuarta componente (d), sólo 8/24 presentan adecuadamente los valores de frecuencia entre ambos gráficos, conservando la proporción adecuada de sus resultados en ambas escalas. Esto refleja una gran dificultad en el manejo de esta última componente.

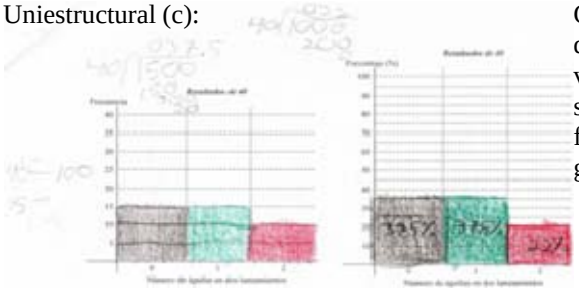
Tabla 1. Ejemplificación de acuerdo a nivel y componente

Nivel y Componente con Respuesta del Estudiante	Descripción
Prestructural: 	La suma de las frecuencias absolutas es el número total de sorteos; sin embargo, no tiene en cuenta que la suma de frecuencias relativas es el 100%. No considera la variabilidad. Manifiesta sesgo de equiprobabilidad al asignar mismas frecuencias relativas. No asigna mayor frecuencia absoluta y relativa al evento con mayor probabilidad. El segundo gráfico no es proporcional al primero. Se favorece al evento más probable (b), pero no tiene en cuenta que la suma de las frecuencias sea el número total de sorteos, ni la segundo gráfico es proporcional al primero. No ofrece rasgos que indiquen la variabilidad.

Uniestructural (b):

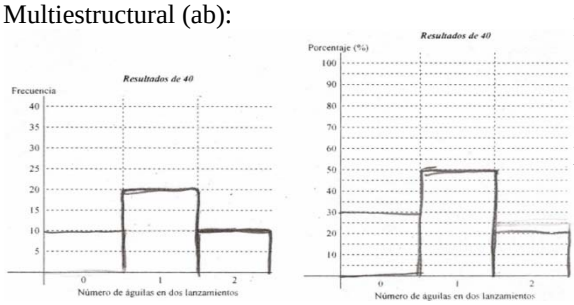


Uniestructural (c):



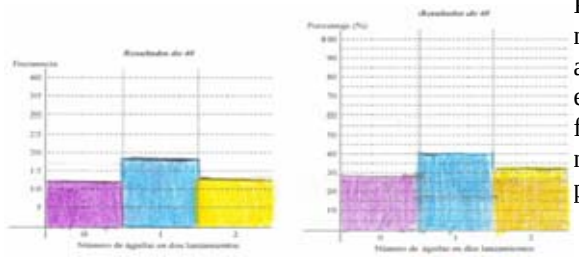
Considera la variabilidad al manifestar al menos dos distintas frecuencias absolutas y relativas a los valores esperados (c). No tiene en cuenta que la suma de frecuencias relativas es el 100%. No favorece al evento más probable. El segundo gráfico no es proporcional al primero.

Multiestructural (ab):



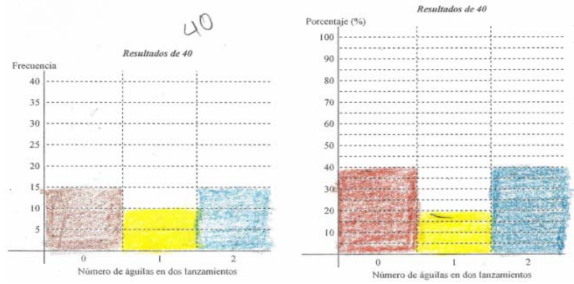
La suma de frecuencias absolutas y relativas es correcta (a), y favorece al evento más probable (b). Considera la variabilidad sólo en el gráfico de frecuencias relativas. El segundo gráfico no es proporcional al primero.

Multiestructural (bc):



Propone gráficos muy similares. Favorece al evento más probable (b) y considera la variabilidad al asignar dos distintas frecuencias a los valores esperados (c). No tiene en cuenta que la suma de frecuencias asignadas corresponda al tamaño de la muestra (40 sorteos). El segundo gráfico no es proporcional al primero.

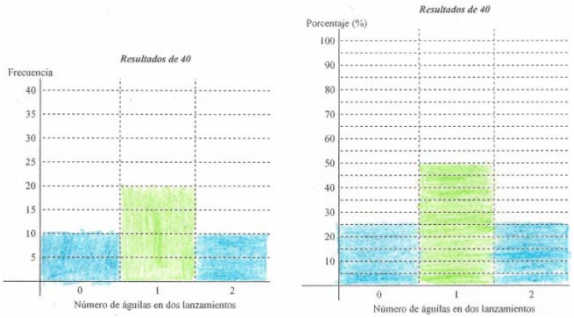
Multiestructural (ac):



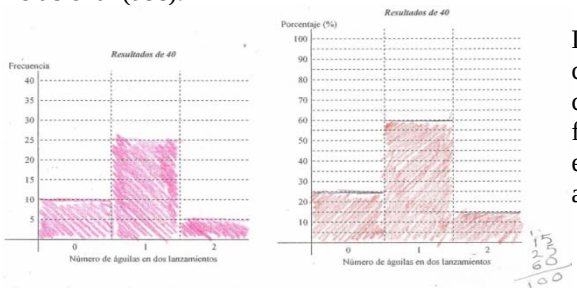
La suma de frecuencias absolutas y relativas es correcta (a), y considera la variabilidad al asignar distintas frecuencias a los valores esperados (c). No favorece el evento más probable (1 águila), al contrario favorece a los eventos 0 águilas y 2 águilas. Sus gráficos no conservan proporción en sus resultados en ambas escalas.

Relacional (abd):

La suma de frecuencias absolutas y relativas es correcta (a), favorece al evento más probable (b) y sus gráficos conservan una proporción adecuada en sus resultados en ambas escalas (d). Sin embargo, no considera la variabilidad al no asignar frecuencias distintas a los valores esperados.

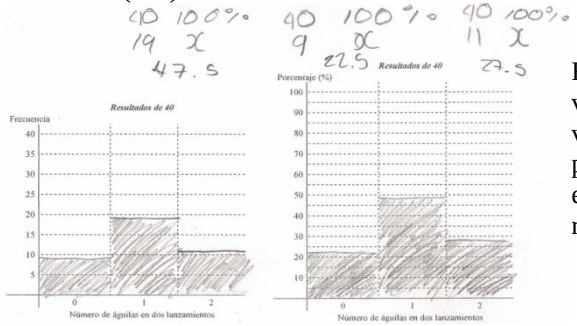


Relacional (abc):



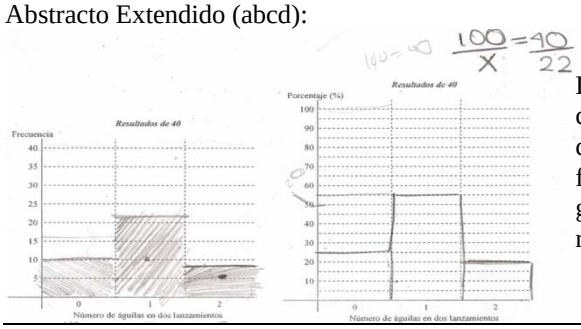
La suma de frecuencias absolutas y relativas es correcta (a), favorece al evento más probable (b) y considera la variabilidad al asignar distintas frecuencias a los valores esperados (c). Sin embargo, sus gráficos no conservan proporción adecuada en sus resultados en ambas escalas.

Relacional (bcd):



Favorece al evento más probable (b), considera la variabilidad al asignar distintas frecuencias a los valores esperados y sus gráficos conservan una proporción adecuada en sus resultados en ambas escalas (d). Sin embargo, la suma de frecuencias relativas es incorrecta.

Abstracto Extendido (abcd):



La suma de frecuencias absolutas y relativas es correcta (a), favorece al evento más probable (b), considera la variabilidad al asignar distintas frecuencias a los valores esperados (c) y sus gráficos conservan una proporción adecuada en sus resultados en ambas escalas (d).

Analizando los niveles de respuesta, se observa que la mayor parte de los estudiantes reflejan respuestas en el nivel relacional (38%) y en el nivel uniestructural (33%); pocos reflejan respuestas en el nivel multiestructural (17%) y en el nivel prestructural (8%); y sólo un estudiante (4%) refleja su respuesta en un nivel abstracto extendido.

5. Discusión y Conclusiones

En este estudio se puede apreciar cómo los estudiantes de nivel bachillerato expresan mediante un gráfico sus creencias o conocimientos sobre la situación en la que se pone en juego una distribución binomial simple. Se observa que 18 estudiantes del grupo encuestado tiene la noción de que “obtener un águila” o el valor “1” es el evento más probable, lo cual es una idea importante ligada a la distribución binomial. Sólo la mitad de los estudiantes tiene cuidado de reflejar en la gráfica que la suma de las frecuencias absolutas es 40; se deben tomar precauciones en la enseñanza para tratar con este descuido, pues puede dificultar la comprensión de que la suma de las probabilidades de todos los valores de una

distribución debe ser 1. La manera en que observamos la componente que hemos llamado la 'consideración de la variación' puede suscitar controversias ya que su manifestación puede ser resultado de causas diferentes a la precepción del estudiante de aleatoriedad y la variación correspondiente. No obstante, pensamos que algunos estudiantes pueden expresar valores aproximados a los esperados teniendo en cuenta que es una experiencia aleatoria y no es natural esperar que en 40 repeticiones ocurran exactamente el número de eventos que predice la probabilidad. Con esto en mente, 10 estudiantes reflejaron en su propuesta variantes ligeras a los valores esperados. Finalmente, la componente en que menos acertaron los estudiantes, sólo 8 de 24, fue en controlar que sus dos gráficos fueran consistentes, una teniendo en cuenta como base 40 ensayos y la otra en porcentajes. Es probable que muchos hayan asumido que no tenían por qué hacerlas proporcionales si no sólo aproximadas, otros quizá sí tengan problemas para traducir las frecuencias a sus respectivas proporciones. Esta operación de normalizar las frecuencias absolutas es de gran importancia para entender las distribuciones de probabilidad.

La mayoría de los estudiantes perciben la característica de la binomial de tener mayor probabilidad en valores centrales que en sus valores extremos y poco menos de la mitad expresa en sus gráficas la aleatoriedad del fenómeno. Enfatizamos este aspecto porque consideramos que una comprensión adecuada de una distribución de probabilidades nunca debe separarse de la idea de que expresa un fenómeno de incertidumbre en cuyas manifestaciones (repeticiones de sorteos de acuerdo a la distribución) se debe reflejar la aleatoriedad y la variación. Las otras componentes también es importante señalarlas para que la noción de distribución se construya de manera coherente.

Referencias

Bakker, A. y Gravemeijer, K. P. E. (2004). Leraning to reason about distribution. En D. Ben – Zvi & J. Garfield (Eds.). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Press.

Bakker, A. y Derry, J. (2011). Lessons from inferentialism for statistics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1-2), 15-26.

Burril, G. y Bielher, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burril, C. Reading (Eds.). *Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study.* New York: Springer.

Brandom, R.B. (2000). *Articulating reasons: An introduction to inferentialism*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gal. I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). New York: Springer.

Jones, G.A., Langrall, C.W. y Mooney, E.S. (2007). Research in probability. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 909-955). Charlotte, NC, USA: Information Age-NCTM.

Jones, G.A., Thornton, C.A., Langrall, C.W., y Tarr, J.E. (1999). Understanding students' probabilistic reasoning. En L.V. Stiff y F.R. Curcio, (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* [1999 Yearbook]. Reston, VA: NCTM.

Pfannkuch y Reading (2006). Reasoning about distribution: a complex process. *Statistical Education Research Journal*, *5*(2), pp. 4-9.

Shaughnessy, J.M. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. En F. Biddulph y K. Carr (Eds.), *People in Mathematics Education* (Proceedings of the 20th annual conference of Mathematics Education Research Group of Australasia, vol

1, pp. 6-22). Waikato, NZ: MERGA.

Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre problemas binomiales

Pedro Rubén Landín Vargas

Cinvestav

Resumen

Desde una perspectiva de la relación entre el desarrollo cognitivo y la enseñanza, se describen aspectos del proceso mediante el cual estudiantes de bachillerato llegan a conocer y usar la función de probabilidad binomial e investiga la influencia de los sesgos cognitivos en dicho proceso. Para ello, se diseñó un cuestionario con ocho problemas: tres que pueden inducir un sesgo; tres problemas equivalentes, cuya redacción evita cualquier sesgo y dos problemas típicos de libros de texto. Una jerarquía de razonamiento, adaptada a partir de la taxonomía SOLO, fue usada para clasificar las respuestas. Los resultados muestran que los componentes de conocimiento (definición clásica de probabilidad, regla del producto, combinaciones y fórmula de probabilidad binomial) son indicadores de transición entre los niveles. Además, la influencia de los sesgos es menor cuando la instrucción es mayor.

Palabras clave: jerarquía, niveles SOLO, razonamiento probabilístico, distribución binomial.

1. Introducción

Como la distribución binomial es una de las distribuciones de probabilidad discretas más importantes y el tema es parte del currículo de bachillerato y también de los primeros cursos universitarios de estadística, es pertinente ampliar las investigaciones sobre el tema. Además, la investigación sobre la comprensión de problemas binomiales se vuelve más compleja debido a que se ha encontrado que la gente responde a ciertos tipos de problemas de probabilidad influenciada por sesgos cognitivos, como representatividad, disponibilidad, la ilusión de linealidad, suposición de equiprobabilidad, etc. (Fischbein y Schnarch, 1997; Batanero y Sánchez, 2005). En consecuencia, es importante describir y analizar cómo los estudiantes, que han aprendido algunas técnicas de probabilidad, enfrentan problemas que pueden influenciar su respuesta hacia un sesgo cognitivo. ¿Son las respuestas de estos estudiantes similares a aquéllas de quienes no han estudiado probabilidad?

Además, para propósitos de enseñanza, no sólo es importante revelar la relación entre aprendizaje y sesgo cognitivo sino también comprender cómo adquieren los estudiantes el conocimiento de probabilidad, a través de un curso. Una forma para describir la adquisición de conocimiento es por medio de jerarquías; con ellas se pretende describir cómo y en qué orden los estudiantes aprenden cierto tipo de conocimiento (Hart, 1981). En este artículo, se usa una jerarquía para responder la interrogante: ¿Cómo aprenden los estudiantes la función de probabilidad binomial?

2. Antecedentes

Dos tipos de estudios se relacionan con este trabajo: uno sobre la elaboración de jerarquías de razonamiento probabilístico, y otro acerca del aprendizaje de la función de probabilidad binomial. La taxonomía SOLO ("Structure of Observed Learning Outcome") se ha usado frecuentemente para analizar o evaluar la comprensión de conceptos estadísticos o probabilísticos resultantes en una jerarquía. Por ejemplo, Jones, Thornton, Langrall y Tarr

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 425-431). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

(1999) propusieron una jerarquía sobre espacio muestra, probabilidad experimental y teórica, comparación de probabilidades, probabilidad condicional e independencia.

Por otro lado, Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens, y Verschaffel (2003) exploran, en el contexto del razonamiento probabilístico, la presencia de un sesgo que llaman *la ilusión de la linealidad*. Éste consiste en la "tendencia fuerte a aplicar modelos lineales o proporcionales en cualquier lado, aún en situaciones donde no son aplicables" (p. 113); por ejemplo, en geometría, tener la creencia de que el área de un cuadrado de lado 2 es dos veces el área de un cuadrado de lado 1. Los autores muestran que estudiantes de bachillerato, a pesar de la instrucción en probabilidad, caen en este sesgo también, cuando se les plantean problemas de distribución binomial de probabilidad, cuyo enunciado contiene variables (*n*, *k*, $P(X = k)$, etc.) que aparentan ser o son proporcionales.

3. Marco conceptual

La taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1982, 1991) se usó para definir una jerarquía que describa el razonamiento sobre la probabilidad binomial y analizar las respuestas al test. De acuerdo con Biggs y Collis (1991) cinco niveles de abstracción o modos de funcionamiento pueden ser distinguidos para describir el desarrollo del niño: sensoriomotor, icónico, simbólico-concreto, formal y post-formal. Dentro de cada modo, las respuestas llegan a ser crecientemente complejas y este crecimiento puede ser descrito en términos de niveles; los niveles de SOLO son: uniestructural (U) cuando la respuesta incluye sólo un componente relevante del concepto o tarea, multiestructural (M) cuando incluye dos o más componentes no relacionados o con relaciones espurias y relacional (R) cuando incluye muchos componentes con relaciones genuinas entre ellas. Dos niveles adicionales llamados *preestructural y abstracto extendido* conectan con el modo previo y siguiente, respectivamente.

Para los fines de este trabajo se consideró pertinente introducir algunas modificaciones a la taxonomía anterior. La taxonomía SOLO nos permite clasificar respuestas de los estudiantes de acuerdo a si presentan rasgos de elementos de conocimiento pertinentes para su solución. Sin embargo, en algunas respuestas de los estudiantes se muestran ciertos elementos de conocimiento pero de manera muy desordenada y con muchos errores. Esto llevó a Sánchez y Landín (2011) a redefinir una jerarquía SOLO para problemas binomiales, agregando componentes de desempeño. La taxonomía SOLO no prescribe qué hacer con los errores de forma que la jerarquía propuesta no está alineada con ella, esta es la razón por la que se prefirió los niveles numéricos de 1 a 5, en lugar de los niveles SOLO.

4. Metodología

En este estudio, el cuestionario usado en un estudio previo (Landín y Sánchez, 2010) fue reestructurado, aplicado a un nuevo grupo de estudiantes y los resultados clasificados con la jerarquía reestructurada.

Participantes. 26 estudiantes (17-18 años) de bachillerato.

Instrumentos. Dos cuestionarios (pretest y postest) con dos ítems comunes fueron elaborados con intención de colectar información acerca del razonamiento de los estudiantes sobre los componentes de la función de probabilidad binomial. En este trabajo sólo se analiza el problema 3 del cuestionario:

> *Problema 3*. ¿Qué es más probable?:
> a) obtener 1 águila en 2 volados
> b) obtener 2 águilas en 4 volados
> c) son igualmente probables
> Justifica tu respuesta:

Objetivo. En esta pregunta no se representan las secuencias "AA, AS, …" y "AAAA, AAAS, …" en el enunciado del problema, de manera que el estudiante necesita proponer una representación; de acuerdo a ésta (verbal o simbólica) se pueden observar indicios acerca del nivel en el que se ha interiorizado el esquema binomial. Además, la redacción del problema puede inducir al sesgo de la "ilusión de la linealidad" al considerar, erróneamente, que *k* y *n*, varían en proporción directa.

Procedimiento. Los datos de este estudio fueron obtenidos de un curso ordinario de probabilidad y estadística en una escuela preparatoria pública de México. El profesor fue uno de los autores (PRL), quien introdujo temas de probabilidad en dos sesiones semanales de 105 minutos, durante cuatro meses. La enseñanza combinó conferencias, actividades de resolución de problemas con papel y lápiz (los estudiantes eran estimulados a explicar sus procedimientos al resto del grupo) y mediante Excel.

La jerarquía. La jerarquía propuesta en Sánchez y Landín (2011) es descrita en la Tabla 1.

Tabla 1. Niveles de razonamiento para la función de probabilidad binomial

	Características de las respuestas
Nivel 1	Las respuestas son idiosincráticas o influenciadas por sesgo cognitivo (como representatividad, la ilusión de linealidad, la suposición incorrecta de equiprobabilidad u otras). Se pueden presentar rasgos de componentes de conocimiento pero sin coherencia o con gran cantidad de errores.
Nivel 2	Las respuestas están basadas en una descripción del espacio muestral, posiblemente incompleto, y el uso de la definición clásica de probabilidad. Se puede usar la regla del producto pero con errores u omisión de cálculos. Calcula el número de combinaciones a partir de listas o usa la fórmula pero con omisión de cálculos
Nivel 3	Las respuestas correctas están caracterizadas por el uso de la definición clásica de probabilidad o procedimientos combinatorios, en cualquier caso respaldados por diagramas de árbol. Se puede usar la regla del producto para obtener respuestas parciales y correctas. El número de combinaciones se puede obtener mediante el Triángulo de Pascal; también la fórmula de los coeficientes binomiales puede ser usada con cálculos incorrectos. La fórmula de probabilidad binomial se usa con omisión de cálculos.
Nivel 4	Las respuestas correctas son caracterizadas por el uso de la regla del producto y procedimientos combinatorios, acompañados o no por diagramas de árbol. La fórmula de combinaciones es usada para calcular, al menos parcialmente, coeficientes binomiales. El uso de la fórmula de probabilidad binomial puede generar respuestas con algunos errores de cálculo o respuestas parciales y correctas.
Nivel 5	El uso correcto de la fórmula de probabilidad binomial es mostrado en este nivel. Los valores de los parámetros (*n, p, k*) son identificados, sustituidos en la fórmula y los cálculos son bien hechos.

5. Resultados

En este apartado se muestran ejemplos de cómo se clasificaron las respuestas al problema 3 de acuerdo con la jerarquía de la Tabla 1; al final se presentan las gráficas de frecuencia de respuestas a las preguntas 3 y 7, según su nivel de razonamiento.

Las respuestas al problema 3 del postest fueron clasificadas en los diferentes niveles de la jerarquía. Tal problema requiere el modelo binomial para lograr su solución y formó parte también del pretest, por lo que es útil para comparar el desempeño de los estudiantes antes y después de la enseñanza.

Nivel 1. Es similar al nivel subjetivo de Jones et al. (1999) y el nivel preestructural de Biggs y Collis (1991). El procedimiento mostrado en la respuesta del estudiante 13 al problema 3 (Figura 1), está basado en la ilusión de la linealidad (se considera una proporcionalidad directa entre los parámetros *n*, *k*).

"Son eventos con la misma probabilidad porque son equivalentes:

1 águila en dos volados $= \frac{1}{2} = 0.5$

2 águilas en 4 volados $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$"

Figura 1. Respuesta al problema 3 en el nivel 1

Nivel 2. Es parecido al nivel transicional de la jerarquía de Jones et al. (1999) y en algunos aspectos al uniestructural de Biggs y Collis (1991). En la Figura 2, al responder al problema 3, el estudiante 7 construyó un diagrama de árbol para los dos eventos y posiblemente compara los casos favorables de cada experimento, concluyendo incorrectamente la opción b.

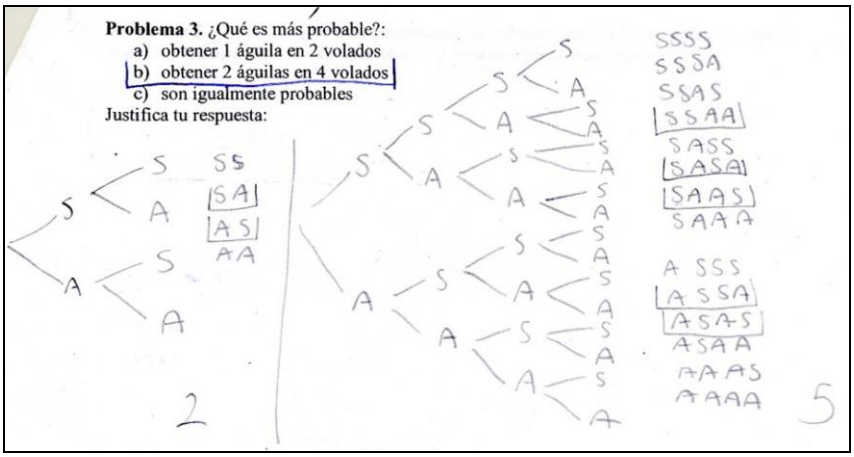


Figura 2. Respuesta al problema 3 en nivel 2.

Nivel 3. Este es similar al *nivel cuantitativo informal* de Jones et al (1999) y *multiestructural* de Biggs y Collis (1991). El estudiante 6, al contestar el problema 3 (Figura 3), construyó dos diagramas de árbol de probabilidad, identificó en ellos los resultados favorables y calculó sus probabilidades mediante la regla de la adición o definición de Laplace.

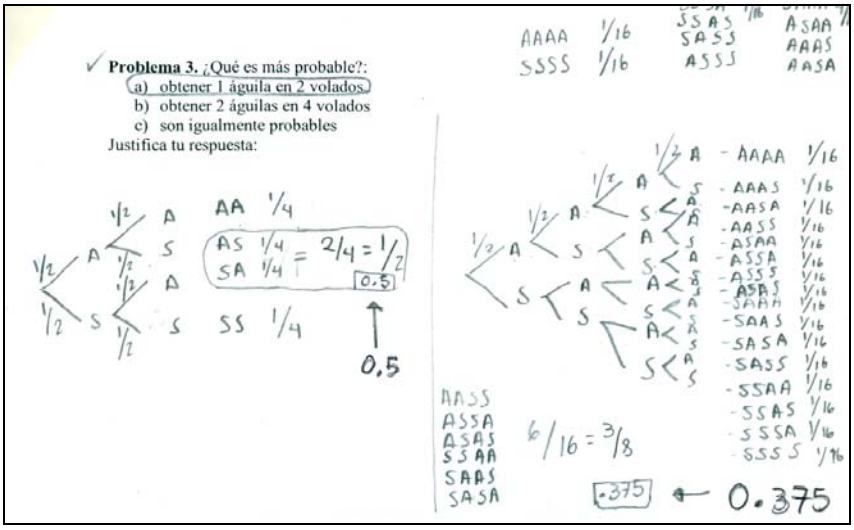


Figura 3. Respuesta al problema 3 en nivel 3.

Nivel 4. Es parecido al nivel numérico de Jones et al. (1999) y al nivel relacional de Biggs y Collis. En su respuesta al problema 3, el estudiante 22 (Figura 4) construyó dos diagramas de árbol de probabilidad, identificó los resultados favorables, usó la regla del producto y calculó las probabilidades de los eventos comparados. Se observa que usó nomenclatura funcional algebraica para indicar las probabilidades de resultados.

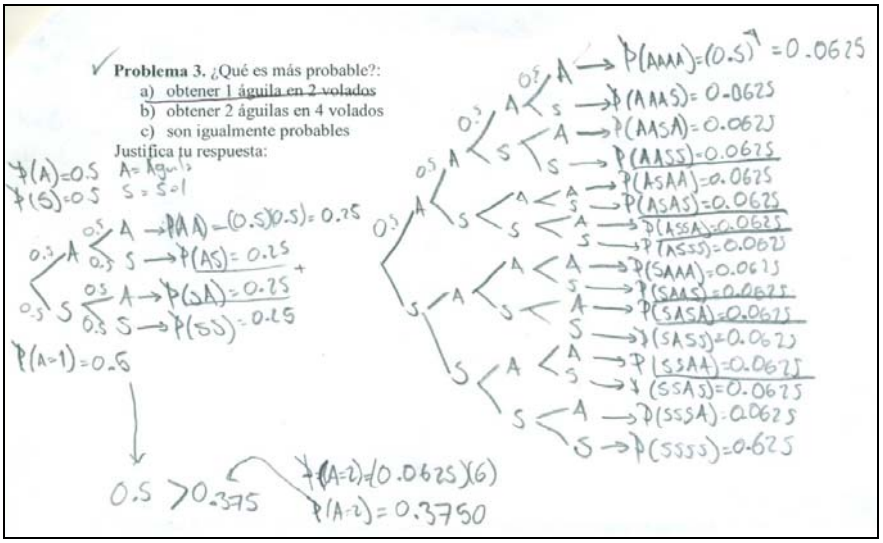


Figura 4. Respuesta al problema 3 clasificada en nivel 4

Nivel 5. Es similar al abstracto extendido de Biggs y Collis (1991). Sólo algunas respuestas a los problemas 4 y 7 fueron clasificadas en este nivel. En su respuesta al problema 7 (Figura 5), el estudiante 17 identifica correctamente los valores de los parámetros (*n*, *p*, *k*) de la fórmula de probabilidad binomial y, a través de ésta, calcula los valores de probabilidad solicitados. No tiene errores de ejecución.

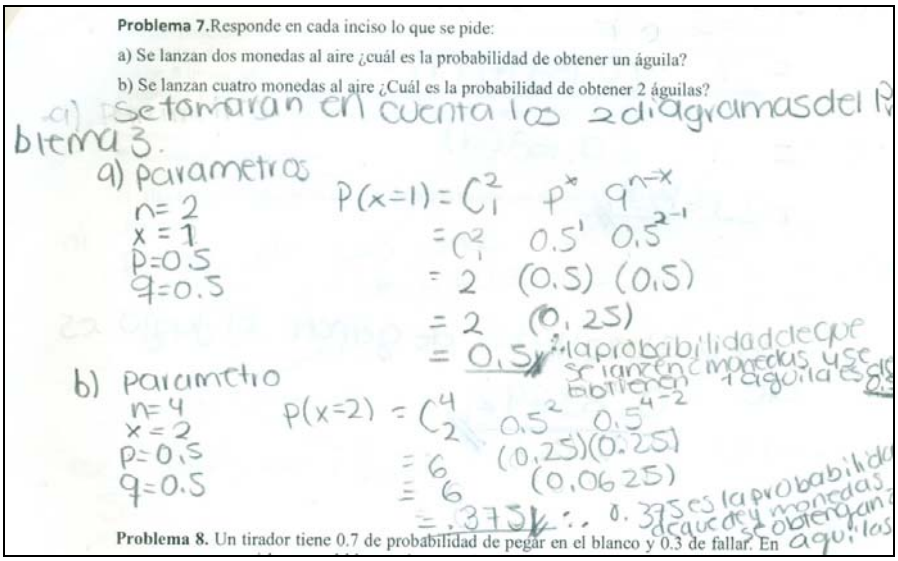


Figura 5. Respuesta al problema 7 clasificada en nivel 5

En la Figura 6 se presentan las frecuencias de respuestas por nivel a los problemas 3 y 7 del cuestionario (equivalentes estructuralmente). En ambos casos, al menos el 50% de tales respuestas fueron clasificadas en los niveles 3, 4 o 5. En poco más de la tercera parte de las respuestas posiblemente influyó el sesgo de la ilusión de la linealidad, a pesar de que los estudiantes llevaron lecciones de probabilidad. La similitud en las frecuencias

correspondientes a cada nivel, muestra la fortaleza de tal sesgo antes y después de la enseñanza (Van Dooren et al., 2003).

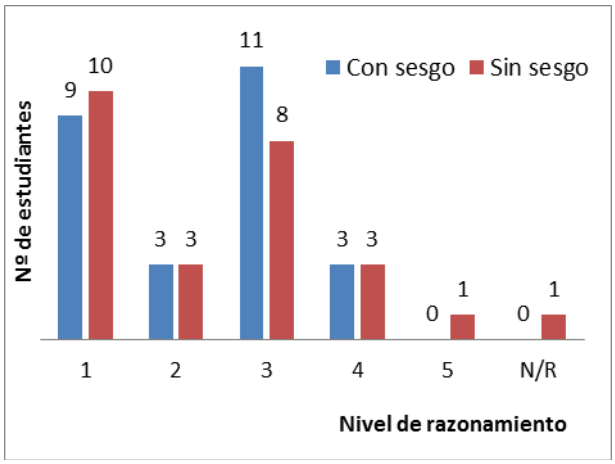


Figura 6. Frecuencias de respuesta, por nivel de razonamiento, a problemas equivalentes (3 y 7)

Como era esperado, el efecto del curso es notorio al comparar las respuestas al problema 3 dadas antes y después del estudio del tópico binomial (Figura 7); esto se muestra en que mientras en el pretest 96% de las respuestas fueron clasificadas en nivel 1, en el postest tal porcentaje se reduce al 35%. La principal característica que distingue la mayoría de las respuestas dadas antes de aquéllas dadas después de la instrucción es que en éstas fueron usados los diagramas de árbol.

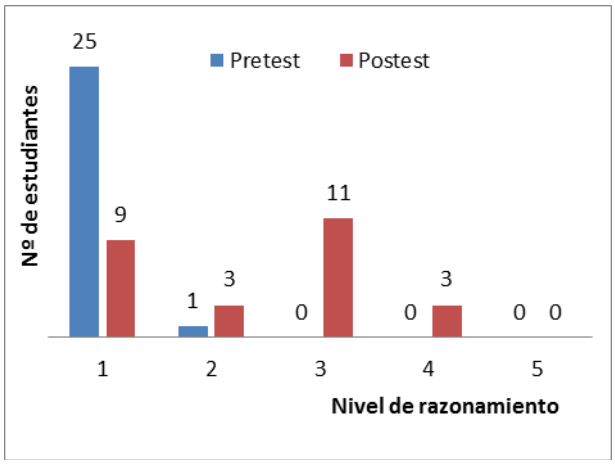


Figura 7. Frecuencias de respuesta, antes y después del curso, por nivel de razonamiento

6. Conclusiones

El desempeño de los estudiantes en problemas binomiales está basado en la articulación de muchos componentes de conocimiento, especialmente, la regla del producto de probabilidades y combinaciones; éstas en la forma de arreglos de tamaño n de éxitos y fracasos. El diagrama de árbol parece una herramienta que hace viable la adquisición de estos conceptos. La comprensión del funcionamiento de un diagrama de árbol ayuda a comprender la regla del producto de probabilidades y permite contar y tener control del número de secuencias de tamaño n de un número determinado de éxitos y fracasos. La siguiente etapa para mejorar la comprensión de la fórmula de probabilidad binomial es concebir y usar las combinaciones y la regla del producto (cuando no se apoyan en un diagrama de árbol es una muestra de que han comprendido dicha fórmula y sólo lo utilizan como un esquema general de organización y no como un instrumento de cálculo); el nivel de razonamiento que abarca esta comprensión es logrado por pocos estudiantes. Por otro

lado, a diferencia de los problemas cerrados que se plantean en la investigación de Van Dooren et al. (2003), el uso de problemas abiertos y de una jerarquía para clasificar las respuestas ha permitido detallar el razonamiento de los estudiantes para comprender la función de probabilidad binomial.

Se considera que la redacción de los problemas influye la calidad de las respuestas cuando los estudiantes no habían tenido instrucción (para responder al problema 3 se recurre a la ilusión de la linealidad).Después de la enseñanza, tal influencia disminuye pero se observan dificultades debido a un uso inmaduro o inconexo de los componentes de conocimiento.

Entre las implicaciones para la enseñanza y aprendizaje, la jerarquía propuesta puede ser útil para facilitar la comprensión de conceptos básicos de probabilidad que ayudan a una mejor comprensión de la función de probabilidad binomial y otros temas relacionados.

Referencias

Batanero, C. y Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school student's conceptions and misconceptions about probability? En G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, pp. 241-266. New York: Springer.

Biggs, J. y Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning. The SOLO taxonomy*. Capítulo 2, pp. 17-31. New York: Academic Press Inc.

Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H. A. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement*, pp. 57-76. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Fischbein, E. y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28* (1), 96-105.

Hart, K. (1981). Hierarchies in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 205-218.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W. y Tarr, J. E. (1999). Understanding students probabilistic reasoning. En L. V.Stiff & F. R.Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (1999 yearbook, pp. 146-155). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Landín, P. R. y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa*, *12*(3). On line: http://www.revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewArticle/4842.

Sánchez, E. y Landín, P. (2011). Fiabilidad de una jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico acerca de la distribución binomial. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*, Ciudad Real, España.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *53* (2), 113-138.

Nuevos métodos para la enseñanza de muestreo con R: el paquete 'TeachingSampling'

Arcos, Antonio, Rueda, María del Mar, Molina, David

Universidad de Granada

Resumen

Que la forma de enseñar ha experimentado cambios muy importantes en los últimos años es un hecho evidente. Los continuos avances en materia científica y, sobre todo, el vertiginoso progreso de la tecnología han motivado una revisión de los métodos de enseñanza y las técnicas didácticas tradicionales que ha desembocado en la actualización de todos ellos con el fin de adaptarlos a las necesidades presentes.

Esta renovación metodológica, que ha afectado a todas las áreas de conocimiento sin excepción, puede constatarse, por ejemplo, en la reciente inclusión en el software científico de módulos específicos para la enseñanza de contenidos. El paquete TeachingSampling, incluido dentro de la librería de paquetes del programa estadístico R, constituye un buen ejemplo de ello.

En este trabajo se desarrollará un análisis detallado de las principales funciones del paquete TeachingSampling, el cual se acompañará de ejemplos prácticos para ilustrar su funcionamiento.

Palabras clave: muestreo en poblaciones finitas, R, TeachingSampling.

1. Introducción

La forma de enseñar ha cambiado. Para comprobarlo, basta con volver la vista atrás unos años y comparar los métodos y materiales que se empleaban entonces con los que se utilizan ahora. La irrupción de la tecnología en las aulas ha sido la principal responsable de que las técnicas docentes que se venían utilizando hasta hace unos pocos años hayan quedado obsoletas. Si a esto le sumamos que la sociedad actual demanda profesionales cada vez más formados en aspectos prácticos y que sepan enfrentarse a problemas reales más allá de los teóricos, la renovación metodológica que la enseñanza viene experimentando de un tiempo a esta parte no solo queda sobradamente justificada, sino que se hace necesaria.

Estos cambios han quedado puestos de manifiesto en todos los niveles educativos. Ya en la educación primaria es cada vez más habitual que los alumnos dispongan de ordenadores o tablets para ayudarles en su aprendizaje, lo cual, hasta hace poco, era casi impensable. Por otra parte, a nivel universitario, las tradicionales lecciones magistrales en el aula se complementan ahora con seminarios prácticos que completan la formación del alumno, enseñándole el manejo de software propio de su especialidad.

Por todo ello, ha proliferado una gran cantidad de software informático para el apoyo a la docencia y, para el software ya existente, se han desarrollado nuevas funcionalidades para el mismo fin. Dentro de este segundo grupo se encuadra R. R es un programa de carácter libre para el análisis estadístico de datos. Pero es algo más que eso: R constituye un poderoso entorno de programación que permite al usuario la creación de nuevas funciones que satisfagan sus necesidades específicas ante un determinado problema. Precisamente esta flexibilidad junto a su gratuidad han hecho que la popularidad de R aumente enormemente entre la comunidad científica, convirtiéndolo en uno de los programas estadísticos más utilizados, en detrimento de la mayoría del software comercial.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 433-438). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Otra de las ventajas que R proporciona a sus usuarios es la posibilidad de extender su configuración básica mediante la instalación de paquetes. Un paquete no es más que un conjunto de funciones, desarrolladas habitualmente por investigadores y especialistas en el ámbito de la estadística, relativas a una temática común. Actualmente, existen un total de 4142 paquetes disponibles para su instalación. Una pequeña parte de ellos, los denominados paquetes básicos, forman parte de la instalación inicial del programa, mientras que el resto son de instalación opcional. Los paquetes ofrecen una gama de funcionalidades muy amplia: desde análisis estadísticos complejos hasta herramientas para la elaboración de gráficos. También hay otros paquetes que proporcionan herramientas para la enseñanza y el autoaprendizaje de contenidos, como, por ejemplo, 'TeachingSampling'. En la siguiente sección analizaremos en profundidad las funciones de este paquete.

2. El paquete 'TeachingSampling'

El paquete 'TeachingSampling' de R (Gutiérrez Rojas, 2009) es un conjunto de herramientas para el muestreo y la estimación de parámetros. Según palabras del propio autor, "el paquete 'TeachingSampling' fue pensado como protagonista en la enseñanza del muestreo y en el aula de clase".

La primera versión del paquete (0.7.6) se lanzó en marzo de 2009. Durante los siguientes años vieron la luz nuevas versiones que corregían errores e incluían funciones adicionales; hasta llegar a la séptima versión (2.0.1), lanzada en abril de 2011, la cual es la más reciente versión de 'TeachingSampling' de que se dispone a día de hoy. En la tabla 1 se muestra cada una de las versiones del paquete junto con su fecha de lanzamiento.

Tabla 1. Versiones de 'TeachingSampling'

	Fecha de lanzamiento
0.7.6	5 de marzo de 2009
0.8.1	24 de mayo de 2009
1.0.2	3 de septiembre de 2009
1.1.9	18 de enero de 2010
1.4.9	11 de marzo de 2010
1.7.9	24 de julio de 2010
2.0.1	1 de abril de 2011

La última versión de 'TeachingSampling' cuenta con un total de 45 funciones. Un buen número de ellas tiene por objeto la extracción de muestras bajo diversos diseños muestrales. Así, por ejemplo, mediante las funciones *S.WR* y *S.SI* se puede obtener una muestra aleatoria simple con y sin reemplazamiento, respectivamente.

Igualmente, se pueden seleccionar muestras a partir de diseños muestrales más complejos, como el muestreo sistemático (mediante la función *S.SY*), el muestreo de Poisson (por medio de la función *S.PO*) o el muestreo con probabilidades proporcionales al tamaño, ya sea con o sin reposición (a través de la funciones *S.PPS* y *S.piPS*, respectivamente), por mencionar algunos. Una vez que la muestra ha sido seleccionada, 'TeachingSampling' hace posible la estimación de parámetros ya que, para cada técnica de muestreo, dispone de una función que calcula una estimación del total poblacional, su varianza estimada y su coeficiente de variación estimado. Por tanto, es muy habitual en la práctica que las funciones de selección de muestras y de estimación de parámetros se utilicen secuencialmente, tal y como veremos en el ejemplo que propondremos en la siguiente sección.

El paquete incluye, además, algunas funciones elementales relativas a la teoría del muestreo en poblaciones finitas, entre las que se encuentran *HH*, para el cálculo del estimador de Hansen-Hurwitz (1943) y *HT* y *varHT*, que permiten la obtención del estimador de Horvitz-Thompson (1952) y su varianza. Del mismo modo, a partir de las probabilidades de selección, del tamaño de la población y del tamaño de la muestra se

pueden calcular las probabilidades de inclusión de primer y segundo orden para diseños muestrales de tamaño fijo sin reemplazamiento mediante el empleo de las funciones *Pik* y *Pikl*. Cuando el diseño muestral de tamaño fijo es un diseño con probabilidades proporcionales al tamaño, la función *PikPPS* posibilita el cálculo de las probabilidades de inclusión de primer orden. Una última función interesante que 'TeachinSampling' incorpora en relación a las probabilidades de inclusión es *PikHol*, mediante la cual se pueden obtener las probabilidades de inclusión óptimas de primer orden según la aproximación de Holmberg (2002).

Otro de los puntos fuertes del paquete son sus herramientas para la elaboración de diseños muestrales, con o sin reemplazamiento. Así, dada una población cualquiera de individuos, la función *SupportRS* permite calcular el conjunto de todas las posibles muestras sin reemplazamiento de cualquier tamaño, esto es, su soporte. Si se especifica un tamaño muestral concreto, se pueden emplear las funciones *SupportWR* o *Support* para obtener todas las muestras con o sin reemplazamiento de ese tamaño que se pueden extraer de la población de individuos considerada. Las funciones *IkRS*, *IkWR* e *Ik* complementan a las anteriores, proporcionando como salida sendas matrices binarias, con elementos a_{ij}, en las que las i filas recogen cada una de las posibles muestras dada una población, mientras que las j columnas representan los elementos de dicha población. En aquellos casos en que el j-ésimo individuo pertenezca a la i-ésima muestra, el elemento a_{ij} tomará el valor 1, siendo este valor 0 en cualquier otro caso. Como ya ocurrió con las funciones para el cálculo del soporte, el uso de una u otra función dependerá del tipo de diseño que se considere. Para diseños sin reemplazamiento en los que no se especifica el número de elementos de la muestra, se usa la función *IkRS*. Si, por el contrario, se cuenta con un tamaño muestral concreto, la función a usar es *Ik* cuando el diseño no permite el reemplazo de las unidades o *IkWR* en caso contrario.

Para diseños con reemplazo, 'TeachingSampling' incluye algunas funciones adicionales, como son *OrderWR* y *nk*. La primera de ellas permite obtener el conjunto de todas las muestras, dado el tamaño de las mismas, cuando se considera un diseño muestral ordenado con reemplazamiento. Nótese que todas las funciones descritas hasta ahora no tenían en cuenta el orden de las muestras seleccionadas. Por su parte, mediante *nk* podemos determinar el número de veces que cada elemento de una población aparece en cada posible muestra en un diseño no ordenado con reemplazo.

El paquete también incluye dos conjuntos de datos propios, bautizados por el autor como *Lucy* y *Marco*, los cuales se usan en los ejemplos que se incluyen en el manual de uso del paquete para mostrar el funcionamiento de la mayoría de las funciones que lo integran.

En la siguiente sección, se darán unas nociones básicas para la instalación del paquete y se aplicarán algunas de las funciones consideradas a lo largo de esta sección a un conjunto de datos reales.

3. Una aplicación práctica

Para instalar el paquete mientras se está ejecutando una sesión de R, se puede usar el comando *install.packages ("TeachingSampling").* Para cargarlo, se emplea este otro comando: *library("TeachingSampling")*. Al ejecutar el comando *help(package = TeachinSampling)*, se obtiene una lista con todas las funciones del paquete. Si se necesita información adicional sobre alguna función en particular, se puede utilizar el comando *help(nombre)*, sustituyendo *nombre* por el nombre concreto de la función a consultar.

Para mostrar cómo funcionan algunas de las utilidades de 'TeachingSampling', se va a considerar el conjunto de datos formado por las siguientes variables:

- *provincia*. Nombre de cada una de las 52 provincias españolas, incluyendo las ciudades autónomas de Ceuta y Melilla.

- *poblacion*. Población total.
- *pib*. Producto interior bruto per cápita, en euros.

Se supondrá que el conjunto de datos ha sido leído correctamente y se ha almacenado en la variable *datos*.

```
datos <– read.table ("provincias.txt", header = T)
```

Comenzaremos seleccionando, por ejemplo, una muestra aleatoria simple sin reemplazamiento de tamaño 8 para estimar la media del producto interior bruto español a partir de la información que nos proporcione.

```
muestra <– S.SI (52, 8)
```

Se puede consultar qué elementos han sido seleccionados en la muestra mediante la siguiente orden

```
datos_muestra <– datos[muestra,]
```

El siguiente paso consiste es utilizar la función *E.SI* para calcular la estimación del total de la variable de interés.

```
E.SI(52,8,datos_muestra$pib)
```

Los resultados de la ejecución de la orden anterior en nuestro caso pueden consultarse en la figura 1.

```
                              y
Estimation 1.119645e+06
Variance   8.947985e+09
CVE        8.448556e+00
```

Figura 1. Estimación mediante muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento

Puesto que la estimación que buscamos es la de la media de la variable y no la de su total, habrá que ajustar los resultados que se obtengan de la ejecución de la función anterior, teniendo en cuenta las relaciones entre las estimaciones del total y de la media de una variable, para así conseguir los valores deseados.

Nos proponemos ahora la estimación de la misma cantidad pero considerando un muestreo sin reemplazo con probabilidades proporcionales al tamaño en el que la muestra de provincias se va a seleccionar teniendo en cuenta la población de cada una de ellas. Así, las provincias con mayor número de habitantes tendrán una probabilidad mayor de formar parte de la muestra que aquellas otras menos habitadas.

```
muestra <– S.piPS (8, datos$poblacion)
```

Aprovechamos que la función *S.piPS* devuelve tanto las unidades seleccionadas en la muestras como sus probabilidades de inclusión y las almacenamos en variables diferentes: ambas nos serán necesarias a lo largo del proceso de estimación.

```
unidades_seleccionadas <– muestra[,1]
probabilidades_seleccion <– muestra[,2]
```

La información referente a las unidades seleccionadas se puede consultar ejecutando el siguiente comando

```
datos_muestra <– datos[unidades_seleccionadas,]
```

A continuación, estimamos el total de la variable de interés mediante la función *E.piPS*. Para ello, necesitaremos hacer uso de las probabilidades de inclusión previamente calculadas.

E.piPS (datos_muestra$pib, probabilidades_seleccion)

```
                              y
Estimation 7.150583e+05
Variance   1.583873e+10
CVE        1.760025e+01
```

Figura 2. Estimación mediante muestreo con probabilidades proporcionales al tamaño sin reemplazamiento

Los resultados que se obtienen son los que se muestran en la figura 2. Ya solo queda ajustar los resultados de forma adecuada para llegar a la estimación buscada, tal y como se ha comentado anteriormente.

Restrinjámonos ahora al conjunto de datos relativos a las provincias gallegas únicamente.

datos_galicia <– read.table ("provincias_galicia.txt", header = T)

Supongamos que nos gustaría extraer todas las posibles muestras sin reemplazamiento que se pueden obtener de esta población, sea cual sea el tamaño de las mismas. Para ello, habríamos de emplear la siguiente orden

SupportRS (4, ID = datos_galicia$provincia)

La salida que se obtendría sería la que se muestra en la figura 3. En ella vemos que, efectivamente, se consideran desde la muestra vacía hasta la muestra que incluye todos los elementos de la población, esto es, el censo.

```
      [,1]          [,2]          [,3]          [,4]
 [1,] NA            NA            NA            NA
 [2,] "ACoruña"     NA            NA            NA
 [3,] "Lugo"        NA            NA            NA
 [4,] "Ourense"     NA            NA            NA
 [5,] "Pontevedra"  NA            NA            NA
 [6,] "ACoruña"     "Lugo"        NA            NA
 [7,] "ACoruña"     "Ourense"     NA            NA
 [8,] "ACoruña"     "Pontevedra"  NA            NA
 [9,] "Lugo"        "Ourense"     NA            NA
[10,] "Lugo"        "Pontevedra"  NA            NA
[11,] "Ourense"     "Pontevedra"  NA            NA
[12,] "ACoruña"     "Lugo"        "Ourense"     NA
[13,] "ACoruña"     "Lugo"        "Pontevedra"  NA
[14,] "ACoruña"     "Ourense"     "Pontevedra"  NA
[15,] "Lugo"        "Ourense"     "Pontevedra"  NA
[16,] "ACoruña"     "Lugo"        "Ourense"     "Pontevedra"
```

Figura 3. Conjunto de todas las muestras sin reemplazamiento para los datos de las provincias de Galicia

Si el reemplazamiento estuviera permitido, y se quisiera seleccionar una muestra de tamaño 2, ¿cuáles serían las opciones posibles? Para responder a esta pregunta, ejecutaríamos el siguiente comando:

SupportWR (4, 2, ID = datos_galicia$provincia)

el cual proporcionaría como salida las 10 muestras que se recogen en la figura 4.

```
      [,1]         [,2]
 [1,] "ACoruña"    "ACoruña"
 [2,] "ACoruña"    "Lugo"
 [3,] "ACoruña"    "Ourense"
 [4,] "ACoruña"    "Pontevedra"
 [5,] "Lugo"       "Lugo"
 [6,] "Lugo"       "Ourense"
 [7,] "Lugo"       "Pontevedra"
 [8,] "Ourense"    "Ourense"
 [9,] "Ourense"    "Pontevedra"
[10,] "Pontevedra" "Pontevedra"
```

Figura 4. Conjunto de todas las muestras de tamaño 2 con reemplazamiento para el conjunto de datos de las provincias de Galicia

4. Conclusiones

El paquete 'TeachingSampling' de R constituye una herramienta que permite a sus usuarios un primer acercamiento a la teoría del muestreo en poblaciones finitas. Puesto que incluye una gran parte de las funciones básicas relativas al muestreo en poblaciones finitas, su uso resulta idóneo en cursos o asignaturas de carácter introductorio sobre esta materia, en los que el docente podría emplearlo, por ejemplo, para ilustrar la teoría expuesta en el aula. Además, dada su sencillez, también se puede utilizar en el aprendizaje autónomo.

En caso de que fuera necesario el empleo de diseños muestrales más complejos o la utilización de herramientas para la calibración o para el tratamiento de la no respuesta, 'TeachingSampling' puede complementarse con las funciones del paquete 'sampling' (Matei y Tillé, 2009)

Referencias

Gutiérrez Rojas, A. (2009). Manual de uso del paquete 'TeachingSampling'. Extraído el 22 de marzo de 2013, de http://cran.r-project.org/web/packages/TeachingSampling/TeachingSampling.pdf

Hansen, M. H. y Hurwitz, W. N. (1943). "On the theory of sampling from finite populations". *Annals of Mathematical Statistics, 14*: 333-362.

Holmberg, A. (2002). "On the choice of sampling design under GREG estimation in multiparameter surveys", *R&D Report 2002:1, Statistic Sweden*

Horvitz,D. G. y Thompson, D. J. (1952). "A generalization of sampling without replacement from a finite universe", *Journal of the American Statistical Association*, 47: 663–685

Matei, A. y Tillé, Y. (2009). Manual de uso del paquete 'sampling'. Extraído el 22 de marzo de 2013, de http://cran.r-project.org/web/packages/sampling/sampling.pdf

O conhecimento didático do professor no ensino da variação estatística[1]

Quintas, Sandra[1]; Tomás Ferreira, Rosa[2] y Oliveira, Hélia[1]

[1]Universidade de Lisboa
[2]Universidade do Porto & CMUP

Resumo

O presente estudo tem como objetivo contribuir para a compreensão do conhecimento didático do professor que ensina Estatística no ensino secundário. Mais especificamente pretende-se compreender a prática profissional de uma professora de Matemática, no que diz respeito ao ensino da variação estatística, nomeadamente quando ensina as medidas de localização e a medida de dispersão desvio-padrão numa turma do 10.º ano. Este estudo permite evidenciar o caráter interrelacionado dos domínios do conhecimento didático do professor. A professora revela algumas dificuldades no ensino da variação ao nível dos conceitos e seu aprofundamento, sendo evidente a importância do domínio do conhecimento do processo instrucional.

Palavras-chave: conhecimento didático do professor; ensino secundário; Estatística; variação.

1. Introdução

A investigação recente aponta a emergência de um conjunto de ideias essenciais para o ensino da Estatística: dados, variação, distribuição, representação, entre outros, que os alunos devem conhecer no final do ensino secundário (Burrill & Biehler, 2011). Vários autores reconhecem a variabilidade como uma ideia fundamental na Estatística e no seu ensino (por exemplo, Wild & Pfannkuch, 1999; Shaughnessy, 2006; Garfield & Ben-Zvi, 2008). Contudo, os alunos têm dificuldades em raciocinar sobre a variabilidade, dificuldades essas que não residem na aprendizagem do cálculo de medidas formais de variabilidade, tais como, amplitude, amplitude inter-quartil e desvio-padrão, mas na compreensão de diferentes representações dos conceitos envolvidos nesses cálculos, assim como nas relações destes conceitos com outros conceitos estatísticos (Garfield & Ben-Zvi, 2008). Ajudar os alunos a desenvolver as suas noções intuitivas de centro e de variabilidade e a integrar esses conceitos quando lidam com dados e quando os analisam são algumas sugestões dadas aos professores por Shaughnessy (2006) e que procuram ir ao encontro das dificuldades manifestadas pelos alunos.

Para ensinar Estatística os professores devem possuir um conhecimento profundo da área; no entanto, isto não é suficiente para garantir um ensino efetivo (Ponte & Chapman, 2006). Na perspetiva de Ponte (1999, 2012), o conhecimento profissional do professor inclui diversos aspetos, tendo principal relevância os que se referem à prática letiva. Ponte (1999) designa por *conhecimento didático* o conhecimento do professor orientado sobretudo para situações da prática; porém, o conhecimento didático do professor também se baseia em "conhecimentos de natureza teórica" (p. 68) (sobre a matemática, seu ensino e educação em geral) e de "natureza social e experiencial" (p. 68) (em relação aos alunos, suas ações, dinâmica de sala de aula), envolvendo o conhecimento do contexto (escola, comunidade e sociedade) e o conhecimento de si mesmo. Sánchez, Silva e Coutinho (2011) sugerem o estudo do conhecimento profissional do professor quando ensina a variação estatística como

[1] Estudo realizado no âmbito do Projeto DSL – Developing statistical literacy: Student learning and teacher education, apoiado pela FCT-Fundação para a Ciência e a Tecnologia (contrato PTDC/CPE-CED/117933/2010).

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 439-446). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

um assunto urgente. Este estudo, o qual é parte de uma investigação mais ampla, pretende dar uma contribuição para esta temática, ao analisar o conhecimento didático em Estatística de uma professora, Lia, no ensino da variação no ensino secundário, considerando como os vários domínios do conhecimento se evidenciam na sua prática.

2. O Conhecimento Didático do Professor em Estatística

O modelo do conhecimento didático do professor de Ponte (1999, 2012), particularmente inspirado nos trabalhos de Schön (1983) e de Elbaz (1983), inclui quatro domínios que orientam diretamente a prática lectiva. Cada domínio é aqui descrito no âmbito da Estatística, procurando enfatizar a sua especificidade tendo em conta elementos destacados por vários autores na literatura desta área, nomeadamente as componentes do conhecimento do professor para ensinar Estatística apontadas por Batanero e Godino (2005), bem como as referidas por Wild e Pfannkuch (1999) no que diz respeito aos aspetos fundamentais do pensamento estatístico.

O primeiro domínio diz respeito ao *conhecimento dos conteúdos de ensino*. É essencialmente focado nas interpretações dos professores da disciplina e inclui a compreensão dos conceitos e procedimentos estatísticos, as formas de raciocínio, de argumentação e de validação. Este conhecimento também inclui a capacidade de reflexão epistemológica sobre o significado dos conceitos e procedimentos e sobre a natureza do conhecimento estatístico (Batanero & Godino, 2005). O professor deve estar familiarizado com elementos específicos da Estatística e desenvolver intuições com vista a uma compreensão mais formal desses elementos, nomeadamente quanto aos aspetos centrais do pensamento estatístico (Wild & Pfannkuck, 1999; Shaughnessy, 2006), tais como o reconhecimento da necessidade dos dados, a atenção à variação e a *transnumeração*, entre outros.

Um segundo domínio do conhecimento didático do professor diz respeito ao *conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem*, o que inclui o conhecimento das suas dificuldades, erros e obstáculos e das estratégias usadas na resolução de problemas. Este domínio também inclui o conhecimento dos alunos como pessoas, seus interesses, formas de agir e de aprender. É igualmente relevante que o professor tenha uma perceção do nível de compreensão que os alunos possuem ou alcançam relativamente aos diferentes conceitos (Ponte, 1999; Batanero & Godino, 2005).

O *conhecimento do currículo* é o terceiro domínio do conhecimento didático do professor na aceção de Ponte (1999, 2012), incluindo o conhecimento das grandes finalidades e objetivos do currículo escolar e sua articulação vertical e horizontal. O conhecimento do currículo envolve ainda o conhecimento de materiais e formas de avaliação. Salienta-se, do enquadramento curricular português do ensino secundário, o papel ativo dos alunos na construção dos seus conhecimentos matemáticos e estatísticos (DES, 2001).

Por fim, o quarto domínio do conhecimento didático do professor corresponde ao *conhecimento do processo instrucional*, compreendendo a planificação, a condução e avaliação do processo de ensino-aprendizagem (Ponte, 1999). É através deste conhecimento que o professor organiza a sua prática letiva e dá resposta às diversas situações de interação com os alunos. Este domínio envolve também a capacidade de adaptação dos conteúdos nos diferentes níveis de ensino, de análise de diversos recursos metodológicos e de uma boa comunicação em sala de aula. Este domínio envolve ainda a capacidade de propor tarefas que tenham em conta os conhecimentos prévios dos alunos, num sentido abrangente, e os objetivos de aprendizagem que se pretende alcançar, bem como de apreciar as respostas dos alunos aos trabalhos propostos, responder às suas questões e dar-lhes feedback (Batanero & Godino, 2005). O conhecimento do processo instrucional constitui o núcleo central deste modelo do conhecimento didático do professor, dado que as decisões principais que

orientam a prática e regulam o processo de ensino relacionam-se com este domínio (Ponte, 2012).

3. O Ensino e Aprendizagem da Variação Estatística

O facto de muitos professores de Matemática terem uma formação limitada em Estatística, sem uma experiência significativa do processo de análise de dados, dificulta o desenvolvimento do seu pensamento estatístico, o que tem repercussões na sua prática (Ben-Zvi & Garfield, 2004). Esta, frequentemente, centra-se mais em cálculos e procedimentos do que na análise de dados e interpretação de resultados (Rossman, Chance & Medina, 2006). Sánchez e colaboradores (2011) referem que, no contexto escolar, por vezes, não é dada atenção suficiente às explicações e ao uso da terminologia.

Por sua vez, Wild e Pfannkuch (1999) descrevem a *consideração da variação* como a capacidade de medir e modelar a variação e tomar decisões sobre os dados. Este aspeto, que é um dos principais do pensamento estatístico, envolve também a capacidade de procurar e descrever padrões na variação e de tentar compreendê-los em relação ao contexto. O termo *variação* descreve ou mede a mudança na variável, enquanto o termo *variabilidade* se refere ao fenómeno de mudança na variável (Reading & Shaughnessy, 2004). Nesta comunicação pela sua proximidade, estes conceitos são usados indiferentemente para expressar as duas ideias.

Vários estudos afirmam que os alunos enfrentam sérias dificuldades em entender algumas medidas de variabilidade. Garfield e Ben-Zvi (2008), por exemplo, sugerem que, de modo a que os alunos desenvolvam o seu raciocínio sobre variabilidade de uma forma mais eficiente, as suas atividades estatísticas iniciais devem partir da compreensão de ideias informais (por exemplo, através da análise de diferenças nos valores dos dados, da análise da dispersão dos dados em gráficos ou da comparação de gráficos) para a compreensão e interpretação de ideias formais de variabilidade (por exemplo, o desvio-padrão como medida da distância média à média, os factores que podem fazer com que o desvio-padrão seja maior ou menor). Os conceitos de distribuição, média e desvio à média são essenciais para se alcançar uma noção significativa de desvio-padrão (Sánchez et al., 2011), os quais, por seu turno, são também importantes para a compreensão da variação. É crucial que os professores ajudem os alunos a formar e desenvolver as suas ideias intuitivas sobre os conceitos estatísticos com vista a uma compreensão mais sofisticada desses conceitos.

4. Método e Contexto

Este estudo insere-se numa investigação mais ampla, qualitativa e de índole interpretativa que incide sobre o conhecimento didático do professor em Estatística. Esta comunicação refere-se a uma das professoras participantes, Lia, um dos três estudos de caso dessa investigação. Lia é licenciada em Matemática-Ramo Educacional, leciona Matemática há cerca de 17 anos e tem experiência com o ensino secundário. Para a recolha dos dados que informam esta comunicação foram usados diversos instrumentos, nomeadamente: (1) observação participante, com registo áudio e vídeo de oito aulas sobre Estatística lecionadas no último período letivo na disciplina de Matemática A numa turma de 10.º ano constituída por 24 alunos; (2) realização de duas entrevistas semi-estruturadas à professora Lia com registo áudio, antes e após a realização das aulas observadas; e (3) recolha documental dos materiais utilizados pela professora nestas aulas, designadamente fichas de trabalho. A análise de dados foi efetuada de forma descritiva e interpretativa, ponderando e articulando os diversos elementos recolhidos. Esta análise foi guiada por quatro categorias predefinidas, que correspondem a cada um dos domínios do modelo de conhecimento didático do professor de Ponte (1999; 2012).

O ambiente na sala de aula desta turma pode ser caracterizado como informal, com um ritmo de trabalho fortemente imposto pela professora. Habitualmente, qualquer conceito a ser desenvolvido na aula é introduzido por esta que apresenta a sua definição formal e de seguida mostra um exemplo de aplicação. Após a exposição dos assuntos, em que ocorre alguma interação com os alunos, estes trabalham nas tarefas propostas, individualmente ou aos pares. Habitualmente, as tarefas propostas são selecionadas do manual ou de fichas de trabalho realizadas pela professora e distribuídas nas aulas. Essas tarefas foram, na sua maioria, resolvidas no quadro por um aluno e depois corrigidas pela professora, por vezes, em interação com alguns alunos. No ensino da unidade de Estatística, Lia seguiu a sequência de conteúdos sugerida no programa de Matemática do ensino secundário (DES, 2001): (1) generalidades sobre Estatística (evolução histórica, objetivo e utilidade); população, amostra, amostragem - algumas ideias intuitivas; o procedimento estatístico: a estatística descritiva e a estatística inferencial; (2) organização de dados quantitativos e qualitativos (processo de sumarização dos dados numericamente e graficamente); (3) introdução ao estudo das distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva).

5. Resultados

Segundo Lia, o tema curricular de 10.º ano de Estatística é adequado em termos de conteúdos que apresenta, embora ache que deveriam ser explorados mais aprofundadamente. Para tal, na sua opinião, seria preciso dar mais oportunidades aos alunos para experienciar os conteúdos e mais tempo para os consolidar. No entanto, Lia considera que habitualmente não há tempo para se ensinar a Estatística desta maneira porque são os outros temas do programa de Matemática do 10.º ano que são avaliados no exame. Deste modo, a professora dá prioridade aos outros temas na sua prática de ensino.

A professora introduziu o conceito de média na sala de aula como um procedimento para obter um valor: "A média de um conjunto [numérico] de dados obtém-se calculando a soma de todos os dados e dividindo a soma obtida pelo número desses dados". Acrescentou, no entanto, que "é a medida mais usada para resumir e comparar distribuições, por um lado, e, por outro, é afetada ou enviesada pela existência de alguns *outliers*". Lia explicou a última parte desta afirmação assim: "Quando há um valor muito alto (ou um valor muito baixo) a média pode realmente não ser um valor representativo do conjunto de dados". Portanto, a professora aproveitou para apontar uma propriedade desta medida central, que é o facto de ser pouco resistente a *outliers*, e também associou este conceito à ideia de "valor representativo" mas que não desenvolveu. Nas situações exploradas em aula, os alunos abordaram o conceito de média apenas através do cálculo do algoritmo com ou sem o apoio da calculadora.

Com base na experiência que tem do ensino da Estatística no 10.º ano, observa que os alunos têm muitas dificuldades em interpretar os resultados estatísticos, apontando, por exemplo, que interpretar "o resultado da média ou de um desvio padrão face a uma situação problemática (…) tinha de se ter mais tempo para ser praticado [na sala de aula]…para ser desenvolvido (…) se a tarefa for realmente do tipo *calcula, determina, faz*… eles já sabendo como é que aquilo se faz… fazem e não vão ter grandes dificuldades. Mas, se for para interpretar resultados (…) sentem mesmo dificuldades". Contudo, Lia considera que os alunos demonstram alguma capacidade em interpretar gráficos e tabelas, bem como em organizar dados em gráficos e tabelas. Para ajudar os alunos a desenvolver essas capacidades de interpretação, nomeadamente ao nível dos conceitos, propôs uma tarefa que designou por "Qual a melhor turma?" (fig. 1). A professora mencionou que, ao construir esta tarefa, teve algum cuidado na seleção dos valores das classificações dos alunos para que, por exemplo, os resultados dos valores da média das duas turmas fossem próximos, o que poderia levar os alunos a sentir a necessidade de procurar outras medidas estatísticas ou representações gráficas que os pudessem ajudar a responder à questão colocada, de modo mais convincente. Pretendia, assim, que:

os alunos chegassem à conclusão de que as medidas de localização, pelo menos, média, moda e mediana não iam servir… não iam ser grande garantia para eles tirarem conclusões (…). A média [das duas turmas] era praticamente a mesma (…) a moda não representava absolutamente nada. A moda da turma B era 19 [valores], acho eu, a moda da turma A era 9 [valores]. [com isto] A que conclusões iriam chegar? [Estas três medidas] podem ajudar, mas nalgumas distribuições não nos ajudam grande coisa (…) não são representativas. Então ao introduzir os quartis e quando fizeram realmente os diagramas [de extremos e quartis] deram muito diferentes (…) [deste modo, os alunos] tiveram, se calhar, mais noção da distribuição de dados de cada uma…uma noção real.

As classificações, em pontos, de duas turmas de 10.º ano num teste de avaliação estão representadas abaixo:

Turma A: 10; 20; 30; 31; 41; 45; 45; 53; 76; 76; 90; 90; 90; 97; 97; 98; 100; 100; 117; 118; 119; 120; 130.

Turma B: 10; 27; 35; 38; 39; 40; 42; 43; 44; 49; 53; 59; 60; 62; 68; 69; 70; 76; 77; 94; 190; 190; 198; 199.

a. Para cada uma das turmas calcula: média; moda; mediana; 1.º quartil; 3.º quartil.

b. Para cada turma constrói um diagrama de extremos e quartis.

c. Analisa os resultados obtidos e compara-os tendo em conta todas as medidas que determinaste.

Figura 1. Tarefa "Qual a melhor turma?"

Na sala de aula, a resolução desta tarefa foi bastante conduzida pela professora, que tinha a intenção de introduzir pela primeira vez a noção de quartil e ensinar a construir e a interpretar o diagrama de extremos e quartis; assim, a tarefa incluía uma aplicação deste conceito novo para os alunos. Na sua resolução, os alunos de uma maneira geral chegaram aos valores corretos de média, moda e mediana (Turma A: 78, 90, 90; turma B: 76,3; 59,5; 190, respectivamente). No entanto, quando confrontados pela professora, se com estas estatísticas já poderiam decidir qual a melhor turma, houve um aluno que referiu que a melhor turma seria a A pelo facto de a média ser mais alta mas outros alunos mencionaram ser esta a melhor turma devido à sua mediana ser mais alta. Nessa altura a professora pediu para que analisassem os dados não só através de uma estatística e que fossem à procura de mais características para melhor argumentarem na decisão. A explicação sobre como se determinavam os quartis e se construía o diagrama de extremos e quartis foi dada pela professora, recorrendo a exemplos com vários conjuntos de dados. Na última alínea, os alunos evidenciaram dificuldades na interpretação das estatísticas previamente calculadas e na sua relação com o contexto da tarefa. Consciente disso, Lia dirigiu-se à turma:

Prof.: Vocês podem falar nas medidas de localização mas têm de começar a interpretar… [E pensar] se eu fosse professor qual delas é que preferia? Qual é a mediana da turma A?

Vários alunos: 90 [pontos]

Prof.: Isto quer dizer que 50% da turma, nem refiro para cima, teve abaixo de 59,5 pontos (…) Na turma B os alunos são todos fracos?

Alguns alunos: Há 3. Há 4. [bons]

Prof.: Quantos se destacam? 4 alunos? Eu posso dizer que esta turma, em termos de conhecimentos, é heterogénea. [Nesta situação] Existe uma diversidade maior [de notas]. Há alunos muito bons e alunos muito fracos. E na turma A, existem alunos muito bons? São mais homogéneos, a nível de conhecimentos… existe uma maior concentração entre 9 e 10 [referindo-se aos valores do segundo e terceiro quartis, respetivamente, quando observa o diagrama de extremos e quartis].

Neste excerto, Lia explicita que os alunos devem ter o cuidado de incluir as interpretações às medidas estatísticas calculadas, ilustrando como se interpreta para o caso da mediana. Também insiste que façam inferências mais globais tendo em conta esses resultados e o contexto. Ao analisar a amplitude entre os 2.º e 3.º quartis na turma A, Lia refere que "existe uma maior concentração de dados", querendo transmitir que esses dados estão mais concentrados ou mais próximos entre si, em vez de que nesse intervalo há um maior conjunto de dados. Nesta situação específica, Lia não foi muito clara no que pretendia afirmar.

Ao refletir numa entrevista sobre as noções intuitivas que os alunos adquirem acerca da média e mediana, Lia considera que, por vezes, fazem "uma certa confusão" entre estas duas medidas. Na sua opinião, a noção intuitiva com que habitualmente ficam de mediana é de que "é o valor que divide a distribuição". Quanto à média, os alunos encaram-na como um valor central, "intermédio entre o mínimo e o máximo (…) acaba por estar mais relacionada com o cálculo" e com o facto de que "muitas vezes, não é muito representativa", no sentido que pode não ser adequada para tirar conclusões.

Lia também propôs na sala de aula uma tarefa com vista a introduzir o conceito de desvio-padrão, voltando a criar uma situação problemática idêntica à tarefa "Qual a melhor turma?", na qual a determinação das medidas de localização das notas de matemática de duas irmãs que frequentaram a mesma turma do secundário (Joana: 13; 16; 10; 12; 14; 13; 13; e Mariana: 13; 13; 8; 18; 13; 7; 19) não iria facilitar a decisão sobre qual seria a melhor aluna (o valor da média, moda e mediana era o mesmo:13 valores). Mais uma vez, o propósito da professora era realçar a necessidade de se introduzirem outras medidas, desta vez, medidas de dispersão, tais como a amplitude, a amplitude interquartil e o desvio-padrão, para se poder tirar mais conclusões sobre os dados. Lia refere: "Achei que deveriam ter algum contacto com a fórmula do desvio-padrão (…) para terem noção de que a variância…o desvio-padrão vai neste caso medir a variabilidade de um conjunto de dados relativamente à média". Esta definição (informal) sobre o desvio-padrão foi a única explorada sobre este conceito, pela professora nas aulas observadas, para além da fórmula de cálculo. Os alunos calcularam à mão os valores do desvio-padrão para os dados de cada irmã e obtiveram os valores corretos (Joana e Mariana, com desvios-padrão de 1,69 e 4,17, respetivamente). A professora propõe então a comparação dos dois valores de desvio-padrão:

> **Prof.:** Vamos comparar os dois valores? O que concluimos daqui sobre o desvio-padrão?
>
> **Pilar:** O da Mariana [4,17]… afasta-se mais da média.
>
> **Prof.:** Exatamente. Há maior variabilidade de dados relativamente à média [na situação da Mariana]. No outro caso [da Joana] temos notas mais concentradas da média. (…) Perceberam?

Neste excerto, a professora concorda com a resposta da aluna, apesar de não parecer ser uma resposta muito clara, e fornece uma explicação relacionada com a definição de desvio-padrão que deu na aula. Refere-se à maior ou menor variabilidade dos dados relativamente à média que influencia o maior ou menor valor de desvio-padrão, respetivamente, mas não fica claro se os alunos apreenderam o sentido que a professora lhes procura transmitir.

Quer na tarefa "Qual a melhor turma?" quer nesta, a professora preocupou-se que os alunos fizessem análises com recurso a mais do que uma estatística (uso da *transnumeração*) e que interpretassem esses resultados individuais. Contudo, a interpretação do resultado de uma média, por parte dos alunos, não surgiu de modo explícito nas aulas, ao contrário do que se verificou para a mediana e para a moda. Na tarefa "Qual a melhor turma?", a insistência de Lia para que os alunos fizessem inferências mais globais, tendo em conta esses resultados e o contexto, foi mais notória. Esta situação pode estar relacionada com o facto de ter sido a primeira tarefa trabalhada nesse sentido e com o facto de a professora ter a intenção de atenuar a tendência dos alunos de suportarem as suas respostas

apenas no valor da média ou da mediana. A amplitude e amplitude interquartil foram outras medidas de dispersão tidas em conta na tarefa sobre o desvio-padrão, contudo, nas aulas observadas, não emergiram outras propriedades desta medida de dispersão.

6. Discussão e conclusão

Analisamos agora as dimensões do conhecimento didático de Lia que emergem da sua prática letiva no tema da Estatística no ensino secundário com particular incidência no ensino da variação. No seu *processo instrucional*, Lia parece dar relevância a que os alunos conheçam as medidas de localização e medidas de variabilidade e saibam interpretar a maioria destes valores numéricos. Procura que os alunos ensaiem diferentes representações relacionando-as entre si e interpretando cada uma delas. De facto, Lia evidencia considerar importante o uso da *transnumeração* para analisar a *variação* nos dados, de modo a alcançar-se conclusões melhor fundamentadas. Os aspetos do pensamento estatístico, *transnumeração* e *variação* (Wild & Pfannkuch, 1999), bem como a importância de se estabelecer a ligação entre os resultados e o contexto (Wild & Pfannkuch, 1999) parecem estar, de algum modo, presentes no seu *conhecimento dos conteúdos em Estatística*. Contudo, na sala de aula, não foram desenvolvidas mais ideias intuitivas dos conceitos de média e desvio-padrão para além das registadas neste trabalho. Consequentemente, a compreensão de ideias formais de variabilidade (Garfield & Ben-Zvi, 2008) como sugerido na literatura, não parece ter sido totalmente conseguido, o que levanta algumas questões importantes relativamente ao seu conhecimento do *processo instrucional* no ensino da variação. Esta situação poderá estar relacionada com a compreensão formal que a própria professora possui desses conceitos, evidente quando fornece as suas definições e explicações ou quando reflete sobre ideias intuitivas que os alunos deverão alcançar com estes conceitos. Por exemplo, há outras ideias relacionadas com a variação que poderiam ter sido objeto de reflexão nas aulas de Lia: a soma dos desvios em relação à média é zero ou o desvio-padrão como medida da distância média à média (Garfield & Ben-Zvi, 2008).

O conhecimento dos *alunos e dos seus processos de aprendizagem* como resultado da sua experiência no ensino da Estatística dá-lhe a convicção de que os alunos têm dificuldades de interpretação dos conceitos estatísticos (Garfield & Ben-Zvi, 2008) e mais facilidade na realização de representações estatísticas (gráficas e numéricas). Quanto ao conhecimento do *currículo*, Lia revela conhecer o programa, contudo o tempo de lecionação que dedica à Estatística não permite que os alunos desenvolvam os conhecimentos estatísticos de modo profundo.

Esta análise da prática letiva de Lia dá evidência do lugar central que o domínio do conhecimento do *processo instrucional* ocupa no conhecimento didático do professor (Ponte, 2012), e da sua estreita articulação com os outros domínios. Este estudo evidencia algumas dificuldades da professora no ensino da variação, pelo que a análise em curso de outros dois estudos casos, permitirá perceber em que medida esta é uma temática que necessita de maior atenção no programa do ensino secundário e na formação de professores.

Referências

Batanero, C., & Godino, J. (2005). Perspectivas de la educatión estadística como área de investigación. In R. Luengo (Ed.), *Líneas de investigácion en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 203-226). Badajoz. Universidad de Extremadura.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions and challenges. In D. Ben-Zvi, & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Burrill, G., & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. In C. Batanero, G. Burril, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in*

school-challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study (pp. 57-70). New York: Springer.

DES (2001). *Programa de matemática A, 10.º ano*. Lisboa: ME, Departamento do Ensino Secundário. Disponível em: http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinosecundario/

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. London: Croom Helm.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). Learning to reason about variability. In J. Garfield & D. Ben-Zvi (Eds.), *Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice* (pp. 201-214). Dordrecht: Springer.

Ponte, J. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In J. Tavares, A. Pereira, A. Pedro, & H. Sá (Eds.), *Investigar e formar em educação: Actas do congresso da SPCE* (pp. 59-72). Porto: SPCE.

Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarollo profesional del professorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoria, critica y prática de la educación matemática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutiérrez & P. Boeno (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present, and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Reading, C., & Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. In D. Ben-Zvi, & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Rossman, A., Chance, B., & Medina, E. (2006). Some important comparisons between Statistics and Mathematics, and why teachers should care. In G. Burrill (Ed.), *Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 323-334). Reston, VA: NCTM.

Sánchez, E., Silva, C., & Coutinho, C. (2011). Teachers' understanding of variation. In C. Batanero, G. Burril, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school-challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study* (pp. 211-221). New York: Springer.

Scheaffer, R. (2000). Statistics for a new century. In M. J. Burke & F. R. Curcio (Eds.), *Learning mathematics for a new century* (pp. 158-173). Reston, VA: NCTM.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action.* New York, NY: Basic Books.

Shaughnessy, J. M. (2006). Research on students' understanding of some big concepts. In G. Burrill (Ed.), *Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 77-95). Reston, VA: NCTM.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67* (3), 223-265.

O conhecimento estatístico para ensinar de dois futuros professores a partir da análise de episódios de sala de aula

Henriques, A. y Oliveira, H.

Universidade de Lisboa

Resumo

Este estudo debruça-se sobre o conhecimento estatístico para ensinar através de investigações de futuros professores do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário. Estudamos o conhecimento de dois futuros professores, Manuel e Maria, a partir da sua análise escrita de episódios de sala de aula incidindo sobre uma investigação estatística, tendo por base um quadro teórico que articula dois domínios: o conhecimento estatístico para ensinar e o pensamento estatístico. Os resultados mostram as potencialidades do modelo conceptual adotado e das discussões de casos de sala de aula para fornecer informação útil sobre o conhecimento que estes futuros professores estão a desenvolver. Ambos os futuros professores fazem afirmações que se relacionam com aspetos importantes do modelo do conhecimento adotado mas que são, por vezes, demasiado gerais e pouco concretizadas, mostrando-se ainda pouco eficazes para apoiar o raciocínio dos alunos na realização de uma investigação estatística, sobretudo em relação às categorias do pensamento que exigem um diálogo entre dados e contexto. Em comparação com Manuel, Maria mostrou um conhecimento estatístico para ensinar mais abrangente na maioria das componentes do modelo.

Palavras-chave: Conhecimento estatístico para ensinar; Formação inicial de professores; Investigações estatísticas; Pensamento estatístico.

1. Introdução

As mudanças curriculares, em Portugal, têm acompanhado a crescente importância atribuída à Estatística e, neste sentido, valorizam um ensino através de investigações estatísticas, que vá mais além do conhecimento matemático e da compreensão dos conceitos e procedimentos e que permita desenvolver o pensamento estatístico dos alunos (Ben-Zvi & Garfield, 2004; GAISE, 2005; ME, 2007). Esta alteração de perspetivas revela-se bastante desafiadora para os professores dado que no ensino da Estatística têm sido, principalmente, valorizados a aprendizagem de representações de dados e o cálculo de medidas estatísticas, sendo menos abordados alguns aspetos fundamentais inerentes ao método estatístico, mais complexos, como a formulação de questões ou o planeamento e recolha de dados (Shaughnessy, 2007). Estas dificuldades evidenciam a necessidade de dar atenção à formação inicial dos professores, ajudando-os a desenvolver uma profunda compreensão do próprio processo estatístico e um conhecimento estatístico para ensinar este tema (Burgess, 2011).

Vários estudos têm revelado as dificuldades dos professores em desenvolver investigações estatísticas com os alunos pois tendem a focar-se em aspetos procedimentais, perdendo oportunidades para desenvolver o pensamento estatístico dos alunos (Burgess, 2009; Heaton & Mickelson, 2002). Existe, assim, a necessidade de desenvolver o conhecimento do professor relativo ao ensino de investigações estatísticas na formação inicial, uma área que tem recebido pouca atenção da investigação. Neste estudo analisamos os aspetos do conhecimento estatístico para ensinar através de investigações que dois futuros professores de 3.º ciclo e ensino secundário revelam quando analisam episódios de

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 447-454). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

sala de aula, de forma a identificar as componentes do conhecimento do professor que precisam de mais atenção nas disciplinas da formação inicial.

2. Conhecimento estatístico para ensinar

Diversos modelos têm vindo a ser desenvolvidos relativamente ao conhecimento que o professor necessita para ensinar Matemática. No entanto, Shulman (1986) defende que o conhecimento do professor deve ser estudado em função da disciplina que ensina, uma vez que cada área de conhecimento possui especificidades próprias. Embora a Estatística esteja integrada nos currículos de Matemática, vários investigadores têm argumentado a favor da sua especificidade, dadas as reconhecidas diferenças entre o pensamento estatístico e o raciocínio matemático (delMas, 2004). Neste sentido, Groth (2007) argumenta que, habitualmente, essas diferenças não são contempladas na investigação sobre o conhecimento do professor mas reconhece as potencialidades dos modelos sobre o conhecimento para ensinar Matemática na definição de um modelo de conhecimento para ensinar Estatística.

Burgess (2009) propõe um quadro teórico para examinar o conhecimento profissional do professor que tem em conta as necessidades específicas do ensino e aprendizagem da Estatística. O quadro proposto parte das dimensões de conhecimento matemático para ensinar descritas por Ball, Thames e Phelps (2005) que consideram dois tipos de conhecimento do conteúdo (CC) – conhecimento comum do conteúdo (CCC), conhecimento especializado do conteúdo (CEC) – e dois tipos de conhecimento pedagógico do conteúdo (CPC) – conhecimento do conteúdo e dos alunos (CCA), conhecimento do conteúdo para ensinar (CCE). O primeiro, CCC, refere-se a um tipo de conhecimento que não é característico apenas do professor mas comum às profissões que fazem uso do conhecimento estatístico. O segundo, CEC, tem a ver com a capacidade do professor de analisar a adequabilidade das produções dos alunos às situações e inclui a capacidade de justificar os processos e representações utilizadas. O CCA combina o conhecimento dos alunos com o conhecimento sobre Estatística, permitindo ao professor antecipar o que os alunos pensam sobre um determinado aspeto de um conteúdo, as dificuldades esperadas e as suas motivações. Finalmente, o CCE concilia o conhecimento estatístico com as metodologias adequadas para ensinar cada tópico de forma a promover a aprendizagem dos alunos. Refere-se também à capacidade do professor selecionar tarefas apropriadas aos objetivos definidos e de as sequenciar, assim como de reconhecer as vantagens e desvantagens no uso de diferentes representações. Estas dimensões do conhecimento são depois cruzadas com as componentes do pensamento estatístico de Wild e PfannKuch (1999) que inclui, no que diz respeito aos tipos de pensamento, a necessidade de dados, transnumeração, consideração da variação, raciocínio com modelos e integração da estatística e do contexto. Juntamente com estes tipos de pensamento fundamentais, há outros mais gerais que podem ser considerados parte da resolução de problemas (mas não exclusivamente da resolução de problemas estatísticos): o ciclo investigativo (problema, plano, dados, análise e conclusões) e o ciclo interrogativo (gerar, procurar, interpretar, criticar e julgar). A integração destes dois domínios revela a singularidade deste quadro de análise, descrito detalhadamente em Burgess (2009), que vai além dos quadros existentes para o domínio da Matemática, uma vez que aborda o trabalho especificamente estatístico.

3. Contexto e Métodos

O estudo que apresentamos foca-se no conhecimento estatístico para ensinar que futuros professores do 3.º ciclo e do ensino secundário evidenciam, nas suas reflexões escritas, no final de um módulo de uma disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática (MEM) lecionada pelas autoras. Esta disciplina discute, de uma perspetiva didática, os principais temas do currículo de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário. Foram dedicadas 16 horas ao tema do ensino da Estatística durante as quais os

futuros professores tiveram oportunidade de desenvolver conhecimento sobre como ensinar investigações estatísticas.

Assumindo que a análise de casos de sala de aula tem grande potencial na preparação de professores para a tomada de decisões pedagógicas em ambientes complexos de sala de aula (Groth & Xu, 2011), os futuros professores analisaram, de modo autónomo, um caso de sala de aula respeitante a uma investigação que envolve a análise de dados de censos da população de três países (USA, Quénia e Japão). As discussões relatadas nos episódios de sala de aula propostos para análise (retirados de Shaughnessy, Chance & Kranendonk, 2009) fornecem uma visão das tentativas de um professor levar os alunos a desenvolver o seu raciocínio estatístico, em diferentes etapas da investigação. Os alunos usaram uma variedade de representações dos dados das populações, como tabelas, histogramas e diagrama de extremos e quartis e algumas medidas estatísticas, como percentagens, medianas e quartis e focaram-se na descoberta e explicação de padrões nos dados e nas diferenças ou semelhanças entre as distribuições das idades da população dos três países. Os 10 futuros professores foram solicitados a realizar uma reflexão escrita tendo por base a análise de episódios de sala de aula, focada nos conceitos principais abordados e no raciocínio estatístico dos alunos, no desenvolvimento da investigação estatística e no papel do professor nesses processos. As suas reflexões escritas foram analisadas de forma descritiva e interpretativa, tendo por base o quadro conceptual de Burgess (2011) para caracterizar o conhecimento estatístico para ensinar através de investigações, usando três dimensões do conhecimento do professor - conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento do conteúdo e dos alunos e conhecimento do conteúdo para ensinar - em relação às categorias do pensamento estatístico. Na análise de dados, estes tipos de conhecimento serão referidos pelas suas siglas portuguesas, respetivamente CEC, CCA e CCE. No entanto, uma vez que o estudo incide sobre a análise que os futuros professores fazem de situações de sala de aula, e não sobre a sua prática letiva, a dimensão das disposições não foi contemplada na análise.

Na presente comunicação centramo-nos no conhecimento estatístico para ensinar de dois futuros professores envolvidos no estudo, Maria e Manuel, que apresentam 'perfis' distintos em relação às categorias do pensamento estatístico (Tabela 1), ilustrados através de excertos das suas reflexões.

4. Conhecimento estatístico para ensinar de Maria e Manuel

Na tabela 1 estão resumidos os aspetos do conhecimento estatístico para ensinar que foram identificados nas reflexões escritas de Maria e de Manuel (células sombreadas). Associada a cada uma das células existe, frequentemente, uma diversidade de conhecimentos pertinentes para o pensamento estatístico. Assim, pelo facto de uma célula evidenciar a presença de conhecimento em relação a uma categoria do pensamento estatístico, não se pode assumir que os futuros professores têm um conhecimento completo de todos os seus aspetos. Da mesma forma, uma célula em branco não significa, necessariamente, que os futuros professores não tenham conhecimento relativo a essa dimensão do pensamento estatístico, mas apenas que não o evidenciaram nas suas reflexões.

Tabela 1. Perfis de Maria (esquerda) e Manuel (direita)

		CC	CPC			CC	CPC	
		CEC	CCA	CCE		CEC	CCA	CCE
Tipos de Pensamento	Necessidade de dados	■		■				
	Transnumeração	■	■	■		■		■
	Variação		■					
	Raciocínio com modelos	■	■	■		■	■	■
	Integração da estatística e contexto	■						
Ciclo Investigativo		■	■	■		■		■
		■		■		■		■

Ciclo interrogativo							

a. **Conhecimento especializado do conteúdo**.

Esta dimensão do conhecimento foi o que mais se evidenciou, em vários momentos das reflexões dos dois futuros professores, indicando que têm capacidade de analisar as ideias dos alunos e avaliar se são adequadas em relação ao seu conhecimento estatístico em várias categorias do pensamento. Por exemplo, relativamente à *transnumeração*, tanto Maria como Manuel foram capazes de reconhecer a adequabilidade de certas medidas para sumariar os dados. A este propósito, Manuel refere que "as tabelas são utilizadas para organizar os dados e apresentá-los de maneira mais simples. Os gráficos permitem uma melhor visualização e uma análise mais detalhada dos dados apresentados" e Maria afirma que "podem ser usadas outras medidas, os quartis, que localizam outros pontos da distribuição dos dados e que servem para definir a variabilidade existente entre os dados". No *raciocínio com modelos*, os futuros professores revelam compreender a importância da utilização de modelos apropriados (gráficos, tabelas, medidas sumárias e uso da tecnologia) para dar sentido aos dados e ajudar os alunos a desenvolver o seu raciocínio, argumentando da seguinte forma, no caso de Manuel: "O Diagrama de extremos e quartis, sendo um tipo de representação gráfica em que se combinam algumas características importantes da amostra (a mediana, variabilidade, simetria), (…) foi considerado o seu grande potencial para visualizar os dados".

Embora não seja possível avaliar a capacidade dos futuros professores realizarem a sua própria investigação estatística, tanto Maria como Manuel evidenciam conhecimento especializado do conteúdo em relação ao *ciclo investigativo* ao identificar e caracterizar as fases de uma investigação e ao avaliar a sua presença no trabalho desenvolvido pelos alunos no episódio de sala de aula. Os futuros professores referem, a este respeito, que "se implementasse este problema tentaria partir de uma situação em que incluísse (…) a formulação das questões a investigar; a recolha dos dados e a interpretação dos resultados, concebendo assim uma verdadeira investigação estatística" (Manuel) e que "uma investigação estatística (…), tendo duas fases iniciais que neste texto são pouco desenvolvidas. Estou a referir-me à 'definição do problema e formulação de questões a investigar' e 'Planificação e realização da recolha de dados" (Maria).

Quando os dois futuros professores comentam um momento do episódio de sala de aula em que é evidenciado o envolvimento dos alunos no *ciclo interrogativo*, também evidenciam conhecimento especializado do conteúdo em relação a esta categoria. Maria refere que "ao acrescentarem as percentagens nas tabelas, os alunos (…) estabelecem relações e comparações entre os dados assim como fazem também interpretações levantando conjeturas em relação ao passado" e Manuel comenta que "procura-se descobrir que regularidades [os dados] encerram, (…) que questões se podem formular a seu respeito na interpretação dos resultados, incentivando-se [os alunos a] exprimir de conclusões referentes aos dados, e de possíveis generalizações para além dos dados".

O conhecimento especializado do conteúdo em relação à *necessidade dos dados* e à *integração da estatística e contexto* é evidenciado apenas por Maria. Na sua reflexão escrita, a futura professora compreende que os dados disponíveis não são adequados nem suficientes para responder às questões formuladas pelos alunos e concorda com a necessidade de levá-los a procurar dados que fundamentem o seu raciocínio estatístico. A este propósito, salienta uma passagem no episódio de sala de aula em que "o professor (…) está a mostrar aos alunos que por vezes são necessários mais dados para se chegar a melhores conclusões". Além disso, Maria identifica situações no episódio de sala de aula em que os alunos formulam conjeturas com base no que as estatísticas revelam e no contexto, como no excerto seguinte: "Ao acrescentarem as percentagens nas tabelas, os alunos (…) estabelecem relações e comparações entre os dados assim como fazem também interpretações levantando conjeturas em relação ao passado. (…) A análise e interpretação dos dados levaram-nos a estabelecer novas relações e conjeturas".

Esta dimensão do conhecimento não surgiu em relação à *variação*, em nenhum dos futuros professores, o que pode indiciar, por um lado, que este conceito é novo para eles e, por isso, ainda não estão suficientemente despertos para a sua importância no desenvolvimento do pensamento dos alunos e, por outro lado, que as características dos episódios de sala de aula analisados, onde as situações em que os alunos lidam com variação são limitados porque os dados são referentes a populações em vez de amostras, podem ter limitado a possibilidade de mobilizarem tal tipo de conhecimento.

b. **Conhecimento do conteúdo e dos alunos**.

Esta dimensão do conhecimento está pouco presente nas reflexões dos futuros professores, possivelmente devido ao reduzido contacto que tiveram, até ao momento, com os alunos em sala de aula. Manuel só evidencia este tipo de conhecimento em relação ao *raciocínio com modelos*, quando reconhece as dificuldades dos alunos na utilização do diagrama de extremos e quartis: "Sendo um tipo de representação gráfica em que se realçam algumas características importantes da amostra (a mediana, variabilidade, simetria), (…) originou dificuldades aos alunos na sua interpretação". Maria, por seu lado, é capaz de identificar vários desafios e reconhecer as principais dificuldades dos alunos na realização de investigações estatísticas, sobretudo em relação às categorias do pensamento que não exijam um diálogo entre dados e contexto. Em relação à *transnumeração*, a futura professora antecipa as dificuldades e conceções erradas que os alunos podem apresentar na utilização de diversas representações e na seleção da mais adequada para representar os dados, quando afirma, na sua reflexão: "Para muitos alunos não é fácil perceber que o histograma representa os dados através das áreas das barras e não das alturas". A futura professora prevê, igualmente, as dificuldades destes ao lidarem com a *variação* dos dados, referindo: "Com um tão grande volume de dados é possível que os alunos tenham alguma dificuldade, nomeadamente na procura de regularidade entre os dados e a identificação de diferenças no sentido de descrever (…) a [sua] variabilidade". Maria também é capaz de interpretar o discurso dos alunos e tirar ilações e antecipar as suas dificuldades no *raciocínio com modelos*, como evidenciado no seu comentário: "Em relação ao diagrama de extremos e quartis um aluno diz explicitamente que 'fornecem um modelo eficiente para se ver a variabilidade da população. Acho que visualmente é a forma mais forte de se representar os dados'". Maria também se afirma favoravelmente surpreendida com o trabalho desenvolvido pelos alunos no episódio de sala de aula, uma vez que está consciente dos aspetos do *ciclo investigativo* que são problemáticos ou desafiantes para eles: "Não tenho experiência de trabalhar com alunos no âmbito da [investigação] estatística, mas de qualquer modo fiquei surpreendida com estas intervenções na sala de aula".

c. **Conhecimento do conteúdo para ensinar.**

Em relação a esta dimensão de conhecimento, os futuros professores são capazes de reconhecer as vantagens de diferentes abordagens metodológicas para ajudar os alunos a desenvolver o seu pensamento estatístico em várias categorias. Por exemplo, Manuel critica a abordagem do professor do episódio de sala de aula, considerando que limitou o desenvolvimento das capacidades de *transnumeração* dos alunos: "Partindo dos dados disponibilizados por uma tabela, unicamente numéricos (frequência absoluta), penso que o professor liderou demasiado a investigação, (…) pretendia-se que os alunos descobrissem formas de organizar e resumir os dados". Maria vai mais longe e sugere o uso de uma abordagem diferente: "Perguntar aos alunos se achavam que fazia sentido os dados estarem organizados em classes. Em que circunstâncias se organizam dados em classes? Deste modo iria recordar conceitos relativos ao tipo de variáveis". Em relação ao desenvolvimento do *raciocínio com modelos* nos alunos, os dois futuros professores já concordam com a abordagem adotada pelo professor do episódio de sala de aula em análise, quando apresenta em paralelo os diagramas de extremos e quartis relativamente a três populações que estavam a ser comparadas. O excerto seguinte da reflexão de Maria exemplifica os comentários de ambos: "[É] uma forma mais fácil de comparar estas três amostras, fazendo sobressair as

semelhanças e diferenças entre a forma como os dados se distribuem, permitindo comparar a localização da mediana e dos quartis para as diferentes amostras (…)". Além disso, tanto Maria como Manuel defendem e justificam o uso da tecnologia para facilitar a construção de representações gráficas e o cálculo de medidas, permitindo que os alunos se foquem na aprendizagem dos conceitos, como evidenciado na reflexão do futuro professor: "[Irei] utilizar as tecnologias de informação e comunicação, como meio facilitador do uso de uma grande variedade de formas de representação, (…) potenciando a discussão de ideias, a tomada de decisão".

Em relação ao *ciclo investigativo*, esta dimensão do conhecimento só se evidencia, de forma implícita, quando Manuel reconhece a importância da realização de investigações estatísticas para desenvolver o raciocínio dos alunos ou quando Maria associa o sucesso dos alunos (que a surpreendeu) a um trabalho regular e específico realizado pelo professor na sala de aula, usando um conjunto de estratégias didáticas que descreve e parece conhecer: "Suponho que, da parte deste professor, tem havido um trabalho continuado, nomeadamente realizando atividades de investigação e tarefas que enfatizam o raciocínio, o pensamento estatístico, a interpretação e a capacidade crítica de reflexão".

Ambos os futuros professores comentam um momento do episódio de sala de aula em que é evidenciado o envolvimento dos alunos no *ciclo interrogativo*. Por exemplo, Manuel refere: "Incentivando-se [os alunos a] exprimir conclusões referentes aos dados, e possíveis generalizações para além dos dados, seria um bom ponto de partida para novas questões que podiam servir de base a novas investigações".

Apenas Maria evidencia conhecimento do conteúdo para ensinar em relação à categoria *necessidade dos dados*, reconhecendo a importância das discussões para desenvolver nos alunos essa compreensão: "Deve discutir-se com os alunos a informação que é necessária para tomar uma decisão válida ou tirar uma conclusão fundamentada". A ausência de evidências desta dimensão do conhecimento em relação à *variação* e *integração da estatística e contexto*, nas reflexões de ambos os futuros professores, pode estar relacionada com as características da tarefa e as dificuldades, já referidas acima, que foram observadas no seu conhecimento especializado do conteúdo ou com a falta de experiência de lecionação.

5. A concluir

Neste estudo, o modelo conceptual adotado, originalmente construído para descrever o conhecimento estatístico para ensinar de professores (Burgess, 2011), revelou-se útil também para descrever parte das dimensões do conhecimento estatístico para ensinar dos futuros professores. Os resultados deste estudo confirmam o potencial das discussões de sala de aula (Groth & Xu, 2011) como contexto didático, levando os futuros professor a pensar como professores e, particularmente, em como ensinar investigações estatísticas.

De um modo geral, os elementos emergentes fornecem boas indicações relativamente ao conhecimento dos futuros professores, no que diz respeito ao desenvolvimento de investigações e pensamento estatístico, que são aspetos recomendados para o ensino da estatística, atualmente (Ben-Zvi & Garfield, 2004). Os 'perfis' construídos para cada um dos futuros professores revelaram-se diferentes, com Maria a mostrar, comparativamente com Manuel, um conhecimento estatístico para ensinar mais abrangente em relação às diversas categorias do pensamento estatístico. Os resultados parecem evidenciar, igualmente, a importância do conhecimento especializado do conteúdo, com uma presença reduzida na reflexão de Manuel, no conhecimento pedagógico do conteúdo, que está limitado às categorias do pensamento estatístico em que os futuros professores também evidenciam conhecimento específico do conteúdo. Além disso, o grau de profundidade e a abrangência dos aspetos do conhecimento estatístico para ensinar que emergem nas suas reflexões são ainda um pouco limitados. De facto, possivelmente decorrendo das limitações do conteúdo das questões orientadoras para a reflexão e da falta de um interlocutor, os futuros

professores fazem afirmações que se relacionam com aspetos do modelo do conhecimento adotado mas que são, por vezes, demasiado gerais e pouco concretizadas, mostrando-se ainda pouco eficazes para apoiar o raciocínio dos alunos na realização de uma investigação estatística. Como referem Groth e Xu (2011), o que se exige do professor, nesse contexto, são argumentos viáveis e defensáveis, o que remete para um outro nível e natureza da argumentação.

O ensino da Estatística através de investigações é um aspeto recente nas orientações curriculares e, como tal, os futuros professores não o experienciaram na sua aprendizagem. É, pois, importante que durante a sua formação inicial sejam confrontados com situações em que tenham que realizar as suas próprias investigações, ampliando o seu próprio conhecimento comum do conteúdo e, consequentemente, o seu conhecimento especializado do conteúdo (Burgess, 2009). Esta abordagem é, aliás, recomendada e usada por vários investigadores (Heaton & Mickelson, 2002) mas pode requerer mais tempo para a Estatística, articulada com a sua didática, na formação inicial. Este estudo constitui, contudo, apenas uma primeira etapa para compreendermos tais potencialidades na formação inicial de professores. O facto de os futuros professores terem neste momento uma reduzida experiência de lecionação, em particular, no tema da Estatística, limita bastante o desenvolvimento de importantes categorias do seu conhecimento pedagógico do conteúdo, em particular o conhecimento do conteúdo e dos alunos, relativamente ao pensamento estatístico. A articulação entre a formação no âmbito da didática da Estatística e a prática de ensino supervisionada poderá contribuir de forma mais sustentada para o aprofundamento do seu conhecimento estatístico para ensinar, nos vários domínios referidos.

Agradecimento. Estudo realizado no âmbito do Projeto DSL – *Developing statistical literacy: Student learning and teacher education*, apoiado pela FCT-Fundação para a Ciência e a Tecnologia (contrato PTDC/CPE-CED/117933/2010).

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2005). *Articulating domains of mathematical knowledge for teaching*. Retirado a 15 dezembro de 2012 de http://wwwpersonal.umich.edu/~dball/Presentations/RecentPresentations/041405_MKT_AERA.pdf

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. B. (2004). Statistical literacy, reasoning and thinking: Goals, definitions, and challenges. In D. Ben-Zvi & J. B. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 3-16). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Burgess, T. A. (2009). Teacher knowledge and statistics: What types of knowledge are used in the primary classroom? *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(1&2), 3–24.

Burgess, T. A. (2011). Teacher knowledge of and for statistical investigations. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 259-270). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

delMas, R. C. (2004). A comparison of mathematical and statistical reasoning. In D. Ben-Zvi & J. B. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 79-96). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

GAISE Report (2005). Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education. In *(GAISE) Report, A curriculum framework for Prek-12 Statistics Education*. Retirado a 13 de junho de 2010 de http://it.stlawu.edu/~rlock/gaise/

Groth, R. E. (2007). Towards a conceptualization of statistical knowledge for teaching. *Journal*

for research in Mathematics Education, 38(5), 427-437.

Groth, R. E., & Xu, S. (2011). Preparing teachers through case analyses. In C. Batanero, G. Burrill, and C. Reading (eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 371-382). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Heaton, R. M., & Mickelson, W. T. (2002). The learning and teaching of statistical investigation in teaching and teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(1), 35-59.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa do original de 1998).

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. Lester (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Greenwich, CT: Information Age Publishing and NCTM.

Shaughnessy, J. M., Chance, B., & Kranendonk, H. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and Sense Making in Statistics and Probability*. Reston, VA: NCTM.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

O desenvolvimento de investigações estatísticas: Um estudo com futuros professores e educadores[1]

Santos, Raquel y Ponte, João Pedro

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Resumo

Nesta comunicação apresentamos resultados de uma análise de relatórios escritos de investigações estatísticas realizadas por 12 grupos de futuros professores primários e educadores de infância durante uma unidade curricular da sua formação inicial (Licenciatura em Educação Básica) em Portugal. Os resultados mostram que alguns formandos já revelam alguma preocupação em planear investigação estatísticas adequadas a crianças, mas também que existe ainda alguma falta de experiência nos diversos passos da investigação. Isso sugere que durante a sua formação inicial, o foco nas investigações estatísticas deverá ser mais alargado e abrangente.

Palavras chave: Investigação estatística, formação de professores

1. Introdução

Os documentos curriculares oficiais em Portugal para a Educação Pré-Escolar e o Ensino Básico (ME, 2007) colocam uma grande ênfase na Estatística, reconhecendo a sua grande importância na sociedade, nomeadamente na tomada de decisões (Wild & Pfannkuch, 1999). Para se mudar a forma como é ensinada a Estatística de modo a que os futuros cidadãos tenham sentido crítico sobre a informação que os rodeia é necessário que os professores possuam um forte conhecimento deste tema.

As investigações estatísticas constituem uma importante forma de trabalho dos alunos, que os envolve ativamente no processo de aprendizagem. Na realização de uma investigação, os alunos escolhem um tema de interesse, definem objetivos, selecionam instrumentos de recolha de dados, escolhem amostras, recolhem, analisam e interpretam dados para responder às questões propostas (Batanero & Godino, 2005). Desse modo, adquirem capacidade de apreciar a importância e a dificuldade do trabalho em Estatística e o interesse deste tema na resolução de problemas da vida real. Ensinar através de investigações estatísticas proporciona também a identificação das dificuldades dos alunos, mesmo em conceitos e ideias que se assumem bem consolidados (Ponte, 2007).

É importante que os futuros professores passem eles próprios por experiências com investigações estatísticas antes de as levarem para a sala de aula (Heaton & Mickelson, 2002; Makar & Fielding-Wells, 2011). Para os apoiar nessa sua aprendizagem, torna-se então necessário compreender de que forma os futuros professores e educadores realizam essas investigações. Especificamente, queremos analisar nos seus relatórios de investigações estatísticas: (i) os temas escolhidos pelos futuros professores e as razões que os levaram a esses temas; (ii) as suas concepções em relação à realização das investigações que propuseram para os futuros alunos e (iii) as dificuldades porque passaram durante a sua realização.

[1] Trabalho financiado por fundos nacionais FCT – Organização para a Ciência e Tecnologia, através do projeto *Developing Statistical Literacy* (PTDC/CPECED/117933/2010).

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 455-462). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

2. Quadro conceptual

Diversos autores apontam o valor da realização de investigações estatísticas para promover o desenvolvimento do conhecimento estatístico dos alunos (CBMS, 2001; Groth, 2006; Heaton & Mickelson, 2002), nomeadamente "enquanto produtores e consumidores de informação estatística" (Fernandes, 2009, p. 4). Estas investigações podem ainda promover a interdisciplinaridade, as competências de comunicação e argumentação e a leitura e interpretação da realidade numa perspetiva menos egocêntrica (Sousa, 2002). Durante uma investigação estatística realizam-se os passos do ciclo PPDAC (Problema, Plano, Dados, Análise e Conclusão) referido por Wild e Pfannkuch (1999), num ambiente propício e promotor da aprendizagem (Ponte, 2007). No entanto, são escassos os estudos que abordam a realização de investigações estatísticas em sala de aula, muito menos com futuros professores e educadores de infância.

Como referem Makar e Fielding-Wells (2011), a fase de colocação do problema é muito importante, uma vez que a questão de investigação funciona como um gancho inicial e foco para toda a investigação. Na sua perspetiva, estas questões devem motivar os alunos, relacionar-se com os seus interesses, ter uma natureza competitiva e um nível cognitivo desafiante, mas alcançável. Esta fase é, muitas vezes, esquecida em sala de aula centrando-se as tarefas nas outras fases do ciclo (Nunes, 2008; Ribeiro, 2005). Num entanto, um estudo de Heaton e Mickelson (2002) com futuros professores (1.º ao 6.º ano) e educadores de infância revela que a colocação de questões de investigação é um processo complexo e, por vezes, problemático. Neste caso, os futuros professores colocaram muitas vezes questões muito simples ("quantas vezes") sem um propósito claro para além da obtenção de resposta. Quando realizaram investigações estatísticas com crianças, estes formandos trabalharam temas de Ciências, Ciências Sociais e Literatura, mas a síntese dos dados não passou de um sumário descritivo de fatos gerados, sem um propósito mais alargado. No entanto, tal como noutros estudos, houve um cuidado em selecionar temas envolvendo dados dos alunos ou com eles relacionados (Nunes, 2008; Ribeiro, 2005). Esse cuidado, segundo Batanero (2000), ajuda a promover o significado, a motivação e o interesse dos alunos. Outros fatores importantes na escolha da investigação a realizar são o intervalo de idades, o desenvolvimento matemático e a experiência anterior dos alunos com investigações (Ponte, 2001).

O planeamento da investigação estatística, segunda fase do ciclo PPDAC, remete para uma das partes chave do conhecimento estatístico básico de Gal (2002): conhecimento do porquê da necessidade de dados e como estes podem ser produzidos. É nesta fase que se devem colocar as questões do tipo "O estudo é apropriado?", "Usa-se uma amostra?", "Como se escolhe a amostra?" e "A amostra é enviesada?". O planeamento pode também trazer algumas dificuldades, demonstradas, pelo menos, em alunos do 7.º ano (Carvalho, 2004).

Nas fases de recolha e análise de dados é necessário familiaridade com conceitos e ideias relacionadas com a estatística descritiva e com representações gráficas e tabulares, outras duas partes chave do conhecimento estatístico básico de Gal (2002). As representações gráficas são objecto de estudo e de interesse em todos os níveis da educação estatística (González & Pinto, 2008). Finalmente, numa última fase do ciclo investigativo, o CBMS (2001) refere importante considerar se as questões iniciais foram, de facto, respondidas, ou, se é necessário, reformular tanto as questões como os procedimentos de recolha de dados e analisar novos dados, tirando finalmente conclusões e comunicando resultados. Associado a esta fase está o conhecimento de como conclusões estatísticas e inferências são alcançadas (Gal, 2002). Todo o ciclo investigativo torna-se então fundamental e a compreensão das suas diversas componentes proporciona bases para interpretar citações formuladas por estudos em áreas como a medicina e política (Groth, 2006).

3. Metodologia

Os participantes neste estudo são futuros professores do 1.º e 2.º ciclos (alunos com idades 6-9 e 10-11) e educadores de infância a frequentar uma Licenciatura em Educação Básica numa Escola Superior de Educação de Portugal. No 2.º ano dos seus estudos, em 2010/11, tiveram a única unidade curricular da Licenciatura dedicada ao desenvolvimento do conhecimento estatístico. Nessa unidade curricular, trabalharam os conceitos estatísticos através de problemas e tarefas exploratórias e realizaram investigações estatísticas, individuais e em grupo (de 2 e 3 formandos). Para além de uma apresentação no final do semestre, foi-lhes pedido um relatório escrito dessas investigações, contendo uma introdução (motivação para o tema/questão inicial e pertinência), organização de dados, análise, interpretação, conclusão e reflexão sobre o trabalho desenvolvido (incluindo uma breve discussão acerca da exequibilidade da investigação estatística com futuros alunos). Antes do final do trabalho, cada grupo recebeu do professor feedback que consistia em questões para os ajudar a refletir sobre o trabalho desenvolvido. Depois da apresentação receberam uma nota final quantitativa contemplando todo o processo e produto final. Os 36 futuros professores que frequentaram a unidade curricular organizaram-se em 16 grupos (6 na turma de regime diurno – D – e 10 na de regime pós-laboral – PL). 21 desses 36 formandos autorizaram a participação neste estudo, perfazendo 12 grupos. Realizaram investigações estatísticas através de questionários com 12 a 25 questões, onde cerca de 70% envolvia variáveis qualitativas. Nesta comunicação examinamos estes relatórios escritos, através de uma análise dos dados exploratória e interpretativa, sendo usados códigos para identificar os relatórios dos grupos (G1-G10) e a turma (D/PL).

4. Resultados e discussão

Fase 1: Problema. Nesta primeira fase, os grupos tinham de escolher um problema ou levantar uma questão inicial para apoiar o resto da investigação estatística. Todos os grupos iniciaram esta fase com a escolha de um tema em áreas como Ciências e Ciências Sociais em tópicos como desporto, reciclagem, gastronomia, consumo de água, alimentação, ocupação de tempos livres, brincadeiras, hábitos e rotinas, sendo de notar uma certa semelhança com os tópicos escolhidos pelos formandos do estudo de Heaton e Mickelson (2002). Estas escolhas incidem sobre temas atuais muito falados na sociedade, como sugere a seguinte frase de um grupo: "visto que ao olharmos para a atualidade da nossa sociedade foi fácil a escolha do tema, dado que se fala muito em obesidade, principalmente em obesidade infantil facto muito preocupante" (G7PL, p. 4). Os grupos também escolheram alguns temas por serem do interesse das crianças, revelando que pretendem motivar os alunos com as suas escolhas:

> Esta foi a nossa opção porque pretendíamos que o tema do trabalho estivesse relacionado com os interesses das crianças. Pois como futuras educadoras/professoras julgamos fundamental saber não só quais são as actividades que as crianças preferem realizar nos seus tempos livres, como também quanto tempo lhes dedicam e com quem o fazem. (G6D, p. 3)

Os formandos deste grupo, para além de terem em conta as crianças, também escolhem o tema tendo em atenção o seu futuro enquanto professoras e educadoras de infância. Outros temas não foram tão baseados no público-alvo, mas sim no interesse dos formandos do próprio grupo: "Esta escolha deveu-se a uma certa curiosidade, da nossa parte, por saber como seriam os hábitos de consumo de água de pessoas de diversas idades, em duas regiões distintas" (G5D, p. 3).

Deste modo, as razões que levam à escolha de um tema para a realização de uma investigação estatística são diversificadas. Apenas um grupo fez esta escolha em forma de pergunta, tendo todos os outros citado apenas o tema. Nesse caso, a falta de uma questão orientadora dificulta a realização da investigação, podendo prejudicar até a elaboração de conclusões. O grupo que fez a questão escolheu "quais as brincadeiras favoritas nestas

faixas etárias" (G2PL, p. 3). No entanto, nem este grupo nem os outros grupos realizaram investigações estatísticas com um nível de envolvimento cognitivo desafiante (Makar & Fielding-Wells, 2011), não indo além da descrição de factos gerados: "A realização deste trabalho proporcionou-nos conhecimento dos gostos das crianças e das suas opções no que diz respeito às brincadeiras que realizam" (G2PL, p. 28). Isto pode significar que faltou algum elemento que levasse os participantes a um de envolvimento mais forte e profundo.

Curiosamente, os únicos dois grupos que fizeram investigações estatísticas com tema imposto (perfil do visitante do festival da gastronomia), foram os que na sua conclusão foram mais além e sugerem implicações do estudo baseadas nos resultados: "Visto que a maioria dos inquiridos visita o festival devido às tasquinhas a Câmara podia proporcionar uma maior variedade de tasquinhas e não tanto nos restaurantes, pois não é o motivo mais forte pelo qual as pessoas procuram o festival (...)" (G3D, p. 42). Para este grupo, a investigação teve um propósito mais alargado, não necessariamente para o grupo, mas sim para a Câmara Municipal da localidade que aplicou os resultados numa melhoria do festival. Quando os resultados das investigações tem consequências ou implicações, o trabalho do grupo torna-se mais ativo e envolvente e os participantes mostram muito mais interesse no que fazem:

> A educadora aproveitou o estudo feito em relação aos hábitos de leitura, começando por motivar os pais a contar uma história em casa e fazer um fantoche alusivo à história, para depois a criança recontar essa mesma história aos amigos com a ajuda da educadora. (G1PL, p. 36)

Estes resultados mostram que alguns grupos conseguem fazer investigações estatísticas com alguma relevância e, principalmente, com consequências e implicações de diversas formas e que a escolha do tema ou elaboração da questão inicial é, de facto, o momento fulcral do ciclo investigativo.

Fases 2 e 3: Plano e Dados. No planeamento das investigações estatísticas, os grupos construíram questionários de modo a dar resposta à sua questão ou para ficar a conhecer dados sobre o tema que escolheram. Alguns dos grupos mostraram dificuldade em formular questões simples, diretas e claras. Perguntas com opções de resposta para que os inquiridos escolherem foram, sem dúvida, as mais frequentes, mas nalguns casos a sua formulação foi problemática. No exemplo "Toma o pequeno almoço? ☐Sempre ☐Às vezes ☐Raramente" (G7PL, questionário) podemos observar que este grupo tenta fazer uma pergunta simples e direta, mas as opções que coloca não são relativas à questão em causa, mas sim à questão "com que frequência toma o pequeno-almoço". Outro caso de desacordo entre a questão e as opções é o exemplo "O local onde habita está equipado com ecopontos? ☐Não ☐Sim ☐Quantos?" (G2D, questionário), em que uma das opções de resposta é uma nova pergunta. Isto aconteceu noutros grupos e foi claro que uma das dificuldades dos formandos foi em restringir o número de dados a pedir em cada questão para uma unidade, pois tentar pedir mais do que uma informação numa mesma pergunta cria confusão a quem responde. Ainda com dados qualitativos e com questões de resposta múltipla, é interessante o exemplo "Usas molhos à refeição? ☐Às vezes ☐Sempre ☐Nunca" (G10PL, questionário), que mostra falta de atenção à característica ordinal das variáveis, criando também confusão a quem responde.

Com variáveis quantitativas também alguns grupos tentaram construir questões de escolha múltipla, que se revelou sempre problemático. No exemplo "Se respondeste sim na pergunta anterior diz quantos desportos praticas? ☐1 ☐2 ☐3 ☐Ou mais" (G3PL, questionário), o grupo encontrou dificuldades na altura da organização e interpretação de dados, tendo surgido a questão se esta variável seria quantitativa ou qualitativa. O grupo acabou por tratar este dado como qualitativo, não conseguindo deste modo determinar um maior número de medidas estatísticas. Outro erro com a construção de hipóteses de resposta em variáveis quantitativas surgiu numa questão relativa à quantidade de água que se bebe num dia em que um grupo que deu as duas opções "☐Menos de 1L ☐Mais de 1L" (G7PL,

questionário), o que não contempla todas as respostas possíveis, excluindo a resposta 1L.

Finalmente, verificámos que quando alguns grupos fazem perguntas sobre determinado tema e a sua intenção é verificar os conhecimentos de quem responde, há uma tendência para construir questões que podem levar a determinadas respostas. Por exemplo, na questão "Tem consciência de que a água é um bem essencial que faltará no futuro? ☐Sim ☐Não" (G5D, questionário), o inquirido é levado a responder que sim, dado o alerta contido na pergunta.

Fase 4: Análise. Depois dos dados recolhidos, os grupos organizaram e interpretaram todas as variáveis utilizando o Excel. O uso desta ferramenta criou algumas dificuldades nos formandos: "Como o Microsoft Excel não é uma ferramenta muito utilizada por mim para a realização de trabalhos, não conhecia todas as suas funcionalidades e não sabia trabalhar com elas" (G6PL, p. 30). Um dos problemas foi na realização de gráficos:

> Os gráficos foram também algo em que sentimos dificuldade, pois nem sempre os resultados estavam de acordo com os representados nas tabelas. Os eixos eram um pormenor que tínhamos de ter em conta pois nem todos começavam do mesmo valor (ni). (G3D, p. 43)

Esta afirmação leva-nos a pensar que, por falta de conhecimento sobre o funcionamento apropriado do Excel, os gráficos obtidos pelo grupo não estariam de acordo com o esperado por eles, em especial os eixos, uma vez que o software define automaticamente os extremos e as unidades destes.

Para alguns grupos foi também problemático lembrar as fórmulas a utilizar com o Excel. O comentário de um dos grupos "Outra das dificuldades com que nos deparámos foi na realização de algumas fórmulas, pois algumas delas já não nos lembrávamos de como se faziam" (G5D, p. 34) revela que estes formandos tentaram memorizar as fórmulas do Excel ou os passos necessários, sem realmente compreenderem o que estavam a fazer.

Para além de obstáculos relacionados com o uso do software, outra dificuldade dos formandos nesta fase do ciclo é a decisão do que é importante e possível fazer para cada conjunto de dados. Isto aconteceu na escolha de gráficos, como refere um relatório "Tivemos apenas algumas dificuldades na construção dos gráficos, tal como o melhor para apresentarmos as diferentes respostas, para melhor se comparar os valores" (G1D, p. 34). Também se verificou na escolha de tabelas e medidas: "Para a realização deste estudo não encontrámos dificuldades/obstáculos por parte da amostra, mas sim na elaboração do trabalho aquando a interpretação dos dados, relativamente ao tipo de tabelas e de medidas possíveis de calcular" (G10PL, p. 25). Isto demonstra que muitos dos conhecimentos que estes formandos adquirem durante a unidade curricular é, infelizmente, muito automatizado, não compreendo realmente o porquê dos procedimentos.

Fase 5: Conclusão. Na fase de conclusão das investigações estatísticas, para além de uma conclusão sobre o tema ou resposta à questão inicial e de uma reflexão sobre o trabalho realizado, os formandos necessitavam de discutir a possível exequibilidade do tema/questão inicial escolhido para uma investigação estatística com futuros alunos. Foram poucos os formandos (apenas 7 grupos) que incluíram esta discussão nos seus relatórios de investigação e muitos que o fizeram discutiram sobretudo se era possível e exequível fazer a mesma investigação estatística que tinham feito:

> Este projecto poderá ser realizado com futuros alunos, desde que estes tenham conhecimento dos conceitos presentes no trabalho, como a moda, média, mediana , quartis, entre outros. Este tipo de projecto permitirá a realização, por parte dos alunos, de tabelas de frequência e a construção de gráficos. Eventualmente, os alunos podem precisar de ter conhecimento de Excel. (G4D, p. 34)

Isto revela naturalmente a falta de experiência profissional destes futuros professores e educadores, uma vez que uma investigação como a que realizaram (com tabelas de frequências, gráficos, medidas de localização, medidas de dispersão e regressões lineares) só seria possível com alunos muitos mais velhos do que aqueles que estes formandos poderão

ensinar. Adicionalmente, demonstra a falta de flexibilidade e de adaptação de materiais mais complexos para crianças mais novas, uma vez que com quase todos os temas escolhidos se poderiam ter feito adaptações nesse sentido. No entanto, alguns grupos deram respostas muito interessantes:

> Relativamente à exequibilidade de um trabalho de estatística com futuros alunos pensamos ser possível com alunos a partir do 5.º ano, pois eles poderão fazer vários tipos de estudos que se adequem às suas idades, poderão até, mesmo, realizar um estudo referente aos consumos de água em casa e de pessoas conhecidas e, com a ajuda de professores e de modo simples, tirar algumas conclusões interessantes. Porém é, também, possível realizar estudos de estatística com crianças mais novas, a partir do 2.º ano de escolaridade pensamos já ser possível realizar estudos estatísticos, no entanto com temas mais acessíveis e simples para determinada idade. (G5D, p. 34)

Os formandos deste grupo demonstram serem capazes de adaptar a investigação estatística que desenvolveram acerca de consumos de água a alunos do 2.º ciclo, apesar de acharem que seria um tema demasiado complexo para alunos do 2.º ano. Por outro lado, falta-lhes claramente experiência acerca de investigações estatísticas com crianças mais novas (por exemplo, no jardim de infância). Outra afirmação interessante dos formandos de um dos grupos é a seguinte: "Este tema é bastante pedagógico quando inserido em sala de aula, permitindo assim, o inquérito saber a importância dada pelas crianças a este tema, bem como a sua participação no processo de reciclagem" (G2D, p. 2). Esta afirmação sugere a ideia de que os formandos, tal como aconteceu com outros grupos, pensam na investigação estatística em sala de aula como uma maneira de estudar certos temas não matemáticos e, especialmente, sensibilizar as crianças para esses temas. A afirmação "Gostei bastante de elaborar este trabalho, levou-me a perceber que alguns trabalhos que eram feitos em jardim de infância era já a trabalhar estatística" (G1PL, p. 36) dos formandos de um dos grupos aponta para uma fraca experiência de sala de aula por parte destes participantes. No entanto, é muito positivo que alguns grupos já conseguem pensar na realização de investigações estatísticas através de interdisciplinaridade de forma a trabalhar temas interessantes para as crianças e de as sensibilizar para uma sociedade mais consciente.

5. Conclusão

Os temas escolhidos pelos participantes para realizarem as investigações estatísticas vão muito ao encontro das Ciências, talvez por ser um conteúdo que trabalham no mesmo semestre em que fazem esta investigação. De qualquer forma, a sua escolha está sobretudo relacionada com os interesses das crianças ou com os seus próprios interesses. É notório, no entanto, a sua dificuldade em iniciar uma investigação estatística com uma questão inicial apropriada a responder no passo das conclusões e que ajudaria fortemente no planeamento da investigação. Isto provavelmente deve-se à sua dificuldade em construir questões motivantes e desafiantes, mas exequíveis e alcançáveis.. O trabalho com os futuros professores para os ajudar a perceber a diferença entre uma boa e uma má questão de investigação é algo a desenvolver no futuro.

A construção de perguntas para os diversos objetivos das investigações estatísticas parece levantar também alguns problemas, primeiro pelo facto de se querer recolher mais do que um dado numa questão, depois porque se tenta dar opções de resposta para facilitar o trabalho do inquirido e que nem sempre estão de acordo com a própria questão e, por último, porque a própria pergunta contém já uma tendência de resposta. Também parece ser necessário algum trabalho de apoio à elaboração de questões para questionários, para desenvolver nos formandos a capacidade de formularem questões diretas, simples e com opções de resposta apropriadas. No entanto, os participantes certamente aprenderam com estes erros quando tiveram que analisar as respostas que obtiveram e, no futuro, terão de pensar com mais cuidado este passo. Como um dos relatórios refere "aprendemos que tudo tem de ser pensado previamente e com objectivos definidos" (G3D, p. 43).

Outro aspeto digno de realce é a complexidade da investigação e o seu propósito. Para a maioria dos grupos, a investigação estatística apenas serviu para descrever factos sobre determinado tema. No entanto, para alguns grupos, de alguma forma, os resultados tiveram algum impacto, foram úteis e a investigação teve um fim para além da realização de um trabalho de avaliação para uma unidade curricular. Ficou demonstrado aqui que, quando existem estas consequências e ou implicações, os formandos se envolvem mais no trabalho e ficam, de facto, mais motivados.

Finalmente, em relação às concepções que os formandos possuem acerca da realização de investigações com crianças, a sua falta de experiência faz com que por vezes não consigam adaptar o que realizaram para crianças mais novas. No entanto, já se mostra algum cuidado em escolher temas de interesse para as crianças e uma ideia de como usar investigações estatísticas interdisciplinares para as familiarizar e sensibilizar em relação a esses temas. Como refere Oliveira (2004), "é no decurso da sua formação que o futuro professor começa a consolidar as suas perspectivas sobre a profissão e a criar uma imagem de si próprio enquanto professor" (p. 115). Assim, achamos que estes futuros professores e educadores já demonstram algum desenvolvimento das suas perspetivas enquanto professores, mas que, certamente, necessitam de muito mais experiência com investigações estatísticas para ser tornarem profissionais competentes.

Referências

Batanero, C. (2000). Dificultades de los estudiantes en los conceptos estadísticos elementales: el caso de las medidas de posición central. In C. Loureiro, F. Oliveira & L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp. 31-48). Lisboa: SPE, APM, DEIO da FCUL.

Batanero, C., & Godino, J. D. (2005). Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. In R. Luengo (Ed.). *Líneas de investigación en Didáctica de las* Matemáticas (pp. 203-226). Badajoz: Universidad de Extremadura.

Carvalho, C. (2004). Um olhar da psicologia pelas dificuldades dos alunos em conceitos estatísticos. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística: Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 85-102). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Conference Board of the Mathematical Sciences (2001). *The mathematical education of teachers I*. Providence RI e Washington DC: AMS e MAA.

Fernandes, J. A. (2009). Ensino e aprendizagem da estatística: Realidades e desafios. *Actas do XIX EIEM: Números e Estatística*.Vila Real.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsabilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

González, M., & Pinto, J. (2008). Conceptions of four pre-service teachers on graphical representation. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education*. New York, NY: Springer.

Groth, R. (2006). An exploration of students' statistical thinking. *Teaching Statistics, 28*, 17-21.

Heaton, R. M., & Mickelson, W. T. (2002). The learning and teaching of statistical investigation in teaching and teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 35-59.

Makar, K. & Fielding-Wells, J. (2011). Teaching teachers to teach statistical investigations. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education*. New York, NY: Springer.

ME (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

Nunes, A. R. (2008). *Ensino da estocástica no 6.º ano de escolaridade: Opções metodológicas e dificuldades sentidas pelos professores.* Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Oliveira, H. (2004). Percursos de identidade do professor de matemática em início de carreira: O contributo da formação inicial. *Quadrante*, *13*(1), 115-145.

Ponte, J. P. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. In F. L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72). Dordrecht: Kluwer.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM*, *39*, 419-430.

Ribeiro, S. A. (2005). *O Ensino da estatística no 7.º ano de escolaridade: Caracterização e dificuldades sentidas pelos professores.* Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Sousa, O. (2002). Investigações estatísticas no 6.º ano. In Grupo de Trabalho de Investigação (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 75-97). Lisboa: APM.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-265.

O ensino da estatística no ensino superior em Portugal: o caso de uma professora

Felgueiras, Óscar

Universidade do Porto & CMUP

Resumo

Esta comunicação tem como objetivo identificar e descrever conceções de uma professora de Matemática relativamente à sua experiência no ensino de uma disciplina introdutória de Estatística numa instituição portuguesa de ensino superior. Este estudo foca-se em analisar as suas conceções relativas aos objetivos de ensino e de aprendizagem centrais desta disciplina e às dificuldades enfrentadas ao ajudar os alunos a ter sucesso. A professora participante é doutorada em Matemática e possui experiência na regência de disciplinas de Estatística no ensino superior. Os resultados sugerem que esta professora tem uma conceção vincada de que a Estatística deve ser ensinada com foco na compreensão concetual e não apenas nas suas aplicações.

Palavras-chave: ensino superior, Estatística, professor, ensino da Estatística, conceções.

1. Introdução

A Estatística tem vindo a tornar-se uma área de estudo necessária e importante na educação escolar e na educação superior a nível nacional e internacional. Vários autores corroboram com a ideia de Moore (1997) sobre a Estatística: trata-se de um "método fundamental porque os dados, a variação e o acaso estão omnipresentes na vida moderna" (p. 134), daí o seu papel importante em formar alunos estatisticamente literados e que saibam pensar quando lidam com informação estatística. A revisão de literatura realizada por Zieffler, Garfield, Alt, Dupuis, Holleque & Chang (2008) sobre o ensino e aprendizagem da Estatística introdutória ao nível universitário sugere que desenvolver uma compreensão profunda sobre conceitos estatísticos importantes é um desafio que não deve ser menosprezado. Segundo estes autores, é possível desenvolver nos alunos essa compreensão através de uma boa sequência de atividades, uso de ferramentas apropriadas e incorporação de questões de discussão. No entanto isto requer tempo para consolidação das ideias sobre os conceitos. Num curso de Estatística, os alunos devem ser encorajados a relacionar os dados com experiências passadas e outros contextos externos. Por exemplo, quando apresentam resultados numéricos como um valor *p* ou uma média, eles não devem ser considerados suficientes por si só dado que é necessário relacioná-los com o contexto e a questão original colocada, de forma a serem devidamente interpretados (Chance, 2002). De facto, em Estatística, o contexto tem um papel crucial na análise de dados (Cobb & Moore, 1997; Shaughnessy, 2007).

A literatura aponta que a nível universitário o enfoque no ensino da Estatística está muitas vezes mais centrado no desenvolvimento de capacidades e procedimentos do que na capacidade de pensar estatisticamente (Snee, 1993; Ben-Zvi & Garfield, 2004; Garfield & Ben-Zvi, 2008). Contudo, esta situação não é alheia às conceções (Thompson, 1992) e conhecimentos que os professores a este nível têm sobre a disciplina que lecionam e ao modo como atuam no ensino (Bireaud, 1995). O presente estudo tem como propósito identificar e descrever conceções de uma professora sobre o ensino e aprendizagem de uma

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 463-471). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

disciplina introdutória de Estatística, incidindo nos objetivos e dificuldades com que se depara perante os seus alunos.

2. O ensino e a aprendizagem da Estatística ao nível universitário

Ben-Zvi e Garfield (2004), apontam algumas dificuldades por parte dos alunos que os professores de disciplinas introdutórias de Estatística habitualmente têm de enfrentar ao ensinar: dificuldades básicas de matemática; o modo de lidar com o contexto de um problema estatístico, cuja aparente familiaridade pode conduzir à produção de respostas com base em experiências ou intuições erróneas; a opinião geral de que muitas ideias estatísticas e regras são difíceis; a expetativa de que a estatística seja abordada e trabalhada à semelhança da matemática, com fórmulas, cálculos e procedimentos de modo a alcançar uma resposta certa, em vez de terem de encarar conjuntos de dados, incerteza, erro, escrita e comunicação dos resultados. Para superarem dificuldades de aprendizagem na Estatística, os alunos devem experienciar atividades que os ajudem a desenvolver a compreensão dos conceitos e processos estatísticos. Ao terem uma maior experiência em retirar conclusões e justificá-las, os alunos estão a desenvolver o seu pensamento estatístico (Wild & Pfannkuch, 1999; delMas, 2004). Na perspetiva de Pfannkuch e Wild (2004), de modo a que eles desenvolvam essa capacidade de pensar estatisticamente e ultrapassem obstáculos é necessário que o professor tenha preparação em Estatística, experiência em lidar com os seus processos e formas de raciocínio e pensamento e, além disso, que no ensino apliquem estratégias adequadas. Adicionalmente, estes autores consideram que os professores têm um papel importante na *aculturação* dos alunos sobre a importância da Estatística na perceção do mundo que os rodeia e sobre como é que os estatísticos trabalham na sua área.

Se um professor de uma disciplina introdutória de Estatística tiver como objetivos no processo de ensino desenvolver ideias estatísticas fundamentais (dados reais, variação, modelos estatísticos, centro, amostragem, inferência estatística, etc.), assumindo adicionalmente um papel de orientador de discussão e das atividades, dando feedback às respostas dos alunos, promovendo o discurso e interação na sala de aula, esse professor reúne, na aceção de Garfield e Ben-Zvi (2008), condições relevantes para ter um ambiente de aprendizagem propício ao promover de uma compreensão significativa da Estatística e pensamento estatístico nos alunos.

De acordo com Thompson (1992), o conceito de conceção engloba "crenças, significados, conceitos, proposições, regras, imagens, preferências e [ideias] semelhantes" (p.130), tratando-se de uma estrutura mental que engloba aspetos de foro afetivo e cognitivo. O modo como o pensamento e conhecimento do professor sobre a disciplina e sobre o processo de ensino/aprendizagem orienta a sua prática é uma questão relevante "que necessita de uma investigação dos aspetos cognitivos e afetivos da vida profissional do professor" (Calderhead, 1996, p. 709). É crucial estudar-se as conceções dos professores, para que se compreendam as suas opções, decisões e desafios enfrentados ao lecionar. Este trabalho pode contribuir para fundamentar e aprofundar a reflexão pedagógica ao nível universitário no âmbito da Estatística e para o melhoramento das práticas.

3. Método e contexto

Este estudo segue uma abordagem qualitativa de índole interpretativa e insere-se numa investigação mais ampla sobre conceções de professores no ensino de disciplinas introdutórias de Estatística a nível superior. A participante do estudo é a professora Sara, licenciada e doutorada em Matemática, docente numa universidade do Norte de Portugal há mais de 10 anos. Sara tem lecionado nessa instituição várias disciplinas introdutórias de Estatística a alunos de licenciatura, bem como Estatística mais avançada a cursos de

mestrado e de doutoramento. Trata-se de uma professora com publicações científicas na área da Matemática e com a particularidade da sua atividade científica atual se centrar na Estatística, mais concretamente na Estatística Aplicada.

No 1º semestre do atual ano letivo, esta professora foi regente de uma disciplina introdutória de Estatística para alunos do primeiro ano do curso de Farmácia, frequentada por cerca de 250 alunos e composta por cerca de 12 turmas práticas. Neste estudo, a recolha de dados assenta sobre esta disciplina cujas aulas teóricas e algumas práticas foram lecionadas por Sara. Foram recolhidas as folhas de exercícios utilizadas e realizada uma entrevista semi-estruturada à professora com gravação áudio, cujas questões incidiram em aspetos específicos relacionados com o ensino e aprendizagem. A análise de dados é orientada pelos objetivos particulares deste estudo, pela literatura revista e articulada com a interpretação dos diversos elementos recolhidos.

O programa da disciplina é composto por conteúdos matemáticos e estatísticos. Os conteúdos matemáticos foram os primeiros a serem abordados e incluíram: revisão a funções logarítmicas, exponenciais, trigonométricas e derivadas; primitivação, integrais e determinação de áreas; equações diferenciais. Na parte da Estatística os conteúdos tratados foram: probabilidades e variáveis aleatórias; distribuições especiais; estatística descritiva; estatísticas amostrais; testes de hipóteses. Esta disciplina resultou da junção de duas disciplinas (Matemática e Estatística) que anteriormente eram lecionadas em separado na licenciatura de Farmácia. É a única disciplina em que se leciona Estatística durante os três anos desta licenciatura e neste estudo é focada essencialmente essa vertente.

4. Resultados

Objetivos centrais para o ensino e aprendizagem da Estatística

Na perspetiva da professora o objetivo principal da disciplina é que os alunos dominem os conceitos do programa com compreensão e que entendam a sua utilidade para seguirem para as aplicações:

> Podíamos entrar diretamente nas aplicações, sendo que eu tinha a certeza que os alunos não iam dominar os conceitos mas conseguiam fazer as aplicações. Só que eu não quero isso. Quero que eles saibam primeiro os conceitos e que depois percebam como é que eles vão ser usados.

Do seu ponto de vista, o "fazer estatística" é experienciado pelos seus alunos de uma forma "super básica" através da parte da Estatística descritiva e através dos testes de hipóteses. Relativamente a estes últimos, destaca em particular, a importância do entendimento do valor *p* e a sua frequente aplicabilidade nas disciplinas laboratoriais dos anos seguintes do curso, em que os alunos lidam com dados reais aí produzidos:

> [Os testes de hipóteses] são fundamentais para tudo o resto porque quem não sabe testes de hipóteses nunca conseguirá fazer bem, por exemplo, uma regressão que é o que vem a seguir [nas disciplinas mais avançadas]. E qualquer coisa que tenha um valor *p* lá indicado, se ele não sabe o que é teste de hipóteses não consegue perceber o valor *p*. (…) Portanto fazem alguma estatística a sério?... Fazem o básico que será necessário, por exemplo, num laboratório de Química, de Biologia… Num laboratório eles fazem muito. Quando é na Farmácia fazem isso muito facilmente… O básico é um teste *T* para a comparação de médias. (…) E esse teste *T*, bom, é o super básico da Estatística mas que num artigo de publicação de ciências experimentais se encontra com uma facilidade incrível. Portanto, o mínimo dos mínimos eles fazem.

No entanto, tem consciência que os alunos necessitavam de ter adicionalmente outra disciplina de Estatística no plano curricular do curso "para aplicar mais" devido ao facto de ao longo dos dois anos seguintes de licenciatura terem acesso a dados reais em disciplinas experimentais sobre os quais têm de realizar análises estatísticas. Contudo, os professores dessas disciplinas "exigem [que os alunos], façam, analisem estes dados. E depois eles não

sabem. Muitas vezes nós recebemos, eu e os colegas das práticas, recebemos pedidos de ajuda de análise estatística [da parte dos alunos]".

Na sua opinião, os conhecimentos que os alunos adquirem na sua disciplina de Estatística são obviamente essenciais e relevantes para o seu futuro profissional. Ainda assim, há assuntos que gostaria de vê-los a conhecer e praticar mais, como é o caso dos testes estatísticos e análises de regressão, com vista às aplicações que irão encontrar no futuro.

Na sua perspetiva o objetivo principal de dominar os conceitos e entender a sua utilidade está presente nos apontamentos que elaborou, quer na parte dos conteúdos matemáticos, quer na parte dos estatísticos. Os apontamentos apresentam as definições formais dos conceitos e vários exemplos de aplicação. Na sua construção consultou vários manuais, dos quais selecionou diferentes situações de aplicações estatísticas. Para cobrir a parte da Estatística de forma ajustada ao tempo letivo disponível teve de ser particularmente criteriosa na seleção de conteúdos e respetiva abordagem dado que "só se encontra um livro detalhado sobre essa parte e eu queria uma coisa rápida [mais fluída]". Todos os exemplos usados nos apontamentos relacionam-se com a área da saúde e tentam incidir em contextos familiares para os alunos:

> Na Estatística não saio da área de aplicação da saúde. Nunca saio. Portanto, é sempre com exemplos que às vezes para mim podem não ser tão familiares mas que penso que para eles o serão. Porque é sempre, ou química, ou essa parte dos fármacos, ou saúde mesmo, tipo epidemiologia ou saúde pública. Portanto, tento sempre ir para aí.

Os exercícios das folhas práticas também foram na sua maioria seleccionados de diversos manuais consultados. Sara considera que o objetivo principal de cada um deles é treinar os "conceitos teóricos", todavia considera que "não há tempo para treinar a parte científica da matéria" e daí que "os exercícios são todos de cálculo" não exigindo, em geral, o relacionar de conceitos mais abstratos. Embora na maioria dos enunciados não esteja expresso o pedido de interpretação, a professora considera que isso é algo que é trabalhado na aula prática: "O exercício é orientador da aula prática. Tem algumas perguntas e depois o professor vai falando com os alunos sobre tudo o que vem na sequência. Portanto, a interpretação é absolutamente fundamental". Sara realça adicionalmente a necessidade de compreensão dos conceitos equacionando-os e através da realização de exercícios para o aluno saber prosseguir para as suas análises:

> Portanto, [os alunos] têm que manusear variável aleatória, função de probabilidade, para ver se percebem. Depois fazem-se algumas perguntas. Portanto, sempre compreensão (…) Na parte mais prática é saber aplicar e aqui há sempre estes dois objetivos, sempre subjacentes: compreensão dos conceitos e saber aplicar com dados. (…) ao nível das distribuições, saber onde é que entra a binomial, saber onde é que entra a Poisson, saber onde é que entra a normal, paralelamente a conhecer a binomial, conhecer a Poisson.

Sara é de opinião de que os exercícios propostos abarcam a variedade necessária: "A variedade está a contemplar cada uma das técnicas que foi dada, cada uma das definições que foi dada.". No entanto, considera que numa próxima vez que lecione a disciplina será oportuno aumentar o número de exercícios de modo a contribuir para uma melhor consolidação dos conteúdos.

Sara considera que na sua disciplina introdutória não se justifica os alunos terem experiências de produção de dados ou utilizarem dados reais deles ou de professores, sobretudo porque naquele momento "estão a aprender o básico", onde "o essencial" é "que eles percebam os dados". Dados esses com contextos familiares e integrados na futura área profissional dos alunos e acrescenta: "Não vale a pena estar a elaborar muito nos dados, não tenho grande preocupação em ter dados muito coerentes, muito importantes, porque eles estão a aprender". Contudo frisa que faria sentido usar dados reais recolhidos pelos alunos não do primeiro ano, mas dos anos seguintes ou de uma disciplina dirigida a alunos de mestrado ou doutoramento. Nessa altura os alunos já têm acesso a dados reais, sejam de

aulas laboratoriais ou porque estão inseridos nalgum projeto: "os alunos aí, nem que não gostem muito da Estatística, começam a interessar-se muito mais porque estão a tratar os próprios dados em benefício próprio. Aqui, aqui [no primeiro ano] não se aplica isso."

Questionada quanto à ênfase que dá à noção de variabilidade nas aulas, Sara refere que esta não é analisada de uma forma tão exaustiva como seria caso dessem regressão. "Eles aqui não chegam a fazer regressão. (…) Têm lá uma curva, mas eles veem que a curva não se ajusta aos dados, têm lá os erros, os resíduos. Aqui não chegam a ver isso, portanto, aqui não há isso…". Contudo, considera que a variabilidade é "dada" e está "sempre presente", exemplificando as situações paradigmáticas em que esta ocorre:

> Têm uma amostra, se forem buscar outra amostra têm outros dados diferentes. Depois dentro dos dados, dentro de uma amostra os dados também variam muito porque estamos a falar de pesos, por exemplo, das pessoas e as pessoas têm pesos diferentes e eles têm que perceber e analisar. Mas aí é mais a dispersão.

De acordo com a sua experiência de ensino, Sara acha que os conceitos variância e de desvio-padrão não vêm bem adquiridos do secundário em termos de compreensão, tanto quanto as medidas de localização. Ela considera que a noção de centro nas variáveis aleatórias é um conceito ainda mais difícil que a presente na estatística descritiva e que saber as fórmulas é importante neste caso para melhor dominar este conhecimento:

> Eu quero que percebam que na variável aleatória nós sabemos exatamente o que é que se passa na população e portanto ao fazer a média, nem sequer têm n para dividir mas têm que perceber que há valores que surgem com mais frequência do que outros e portanto os valores têm que ser pesados pela frequência e eu acho que saber a fórmula ajuda muito.

A inferência estatística realizada na disciplina advém sobretudo dos testes de hipóteses. A melhor abordagem para ensinar os testes de hipóteses é colocar os alunos a fazê-los à mão, procurando que o façam "com bastante detalhe do ponto de vista matemático" em vez de os ensinar a obter o resultado através de um programa de computador.

Sara considera que nas suas aulas, quer teóricas, quer práticas, os alunos acabam por interagir bastante com ela por lhes ser solicitada recorrentemente a sua participação através de questões que ela coloca. E esta interação vai-lhe dando alguma informação sobre o grau de dificuldade com que os alunos estão a acompanhar a disciplina, especialmente na parte da Estatística onde surgem maiores obstáculos, de modo a tomar opções na sua atuação, como seja a possibilidade de repetir a explicação de algum conceito:

> Eles intervêm bastante. E é preciso haver essa participação para eu poder progredir porque os conceitos teóricos não são fáceis, essencialmente na Estatística. Na Matemática, vem no seguimento do ensino secundário e aí não estou muito preocupada. Na Estatística, os conceitos teóricos não são fáceis, eles têm que perceber e aí há muita interação. Dou muitos exemplos. Dou muitos exemplos e depois pergunto-lhes: "Perceberam?". "Não, não percebi muito bem, não estou a perceber". Teorema do limite central, é uma coisa dificílima de se explicar. E então preciso de saber que eles estão a perceber e portanto faço-lhes muitas perguntas.

Muitas das vezes, com o intuito de fazer com que todos os alunos participem, faz votações nas aulas em que lhes é pedido que escolham entre duas ou três afirmações sem se poderem abster. Estas afirmações, dependem da "imaginação" no momento e baseiam-se normalmente nos erros mais comuns dos alunos. Na votação faz uma estimativa do número de votos para cada opção: "E se a maioria votar no errado, eu sei logo que eles não estão a perceber. Portanto volto a explicar tudo." Este tipo de interação permite-lhe ficar com alguma sensibilidade acerca das aprendizagens dos alunos sendo que a "confirmação absoluta" advém das notas dos exames.

Dificuldades no ensino e na aprendizagem da Estatística

A disciplina introdutória de Estatística lecionada por Sara neste estudo incorpora, como já foi referido, conteúdos matemáticos e conteúdos estatísticos. A professora acha que existem menos dificuldades na Matemática do que na Estatística e considera que esta situação se deve sobretudo ao facto dos alunos do primeiro ano do curso de Farmácia, de uma maneira geral, provirem do ensino secundário com bons conhecimentos de Matemática ainda que com um domínio da Estatística muito limitado à sua vertente descritiva, onde não fazem interpretação dos resultados:

> [Os alunos] vêm do ensino secundário com boas notas e ao entrarem na Matemática, a Matemática que é exigida é ao nível do cálculo e vem no seguimento direto do que lhes é exigido no secundário. Um bocadinho mais difícil, haverá algumas perguntas de teoria mas nem sequer há espaço, muito espaço, para as colocar. Portanto, tudo o que é exigido, eu diria, 90% do que é exigido [na Matemática] é de cálculo prático e direto e isso é o que eles fazem no ensino secundário. Portanto, têm desempenhos bastante bons a esse nível. (…) [na parte da Estatística] é bastante diferente porque começamos a trabalhar os conceitos e no ensino secundário eles limitaram-se a fazer estatística descritiva e sem sequer interpretarem os resultados.

Na sua perspetiva, tal como acontece no ensino secundário, a "Estatística pode passar como semelhante à Matemática", com foco nos números e no cálculo. Quando estes alunos chegam ao ensino superior até podem ter uma certa expectativa de uma abordagem semelhante, mas logo que a Estatística começa a ser lecionada quase todos ficam surpreendidos com as diferenças entre a Matemática e a Estatística, revelando resistência: "Eles não gostam muito, eles de início não gostam. Os bons alunos não gostam, há alunos que têm quase uma rejeição". Acrescentando ainda:

> A Estatística tem um enquadramento totalmente diferente e para eles, alunos, é muito diferente e eles dizem: "Eu gostava mais da Matemática". Portanto, eles sabem muito bem que aquilo mudou (…) Aquilo é difícil, muda a estrutura, muda o pensamento, muda tudo e eles não gostavam.

Por conseguinte, Sara diz deparar-se com algumas dificuldades em fazer com que os alunos se adaptem e fiquem motivados para a Estatística ao início devido a ter-se de focar na teoria, nos conceitos, os quais são bastante abstratos. Além disso, os alunos não estão habituados a lidar com eles:

> [A disciplina na parte da Estatística] começa com uma parte teórica. Portanto em termos de motivação não consigo começar bem. Não consigo, já pensei várias vezes e não consigo começar bem neste sentido, a motivá-los. Eu faço o melhor que sei, e aí é que falo muito para eles perceberem. Aquela primeira matéria eles não vão gostar porque é teórica, porque trabalha conceitos, porque a parte prática é muito abstrata. Para nós não é, mas para eles é muito abstrato e eles sentem muitas dificuldades (…) porque eles não foram treinados para conceitos e eu vou ter de introduzir conceitos (…) que têm que ser absorvidos como tal, como conceitos e não apenas através de contas.

Contudo, considera que essa desmotivação dos alunos vai-se esbatendo gradualmente à medida que se começa a trabalhar mais nas aplicações.

Sara sublinha que os alunos específicos desta disciplina não têm dificuldades matemáticas na parte da Estatística. Ela salienta que a falta de familiaridade com o seu âmbito de aplicabilidade e a ausência de uma noção do seu devido propósito podem estar na origem de dificuldades sentidas pelos alunos. O facto de não terem experiência nas aplicações, acrescido da sua pouca maturidade, contrasta com, por exemplo, o caso de alunos de pós graduação que frequentam disciplinas com um "tronco comum" a esta lecionadas pela mesma professora. Estes últimos, vindo de áreas diversificadas onde contactam regularmente com dados reais, parecem ter um certa sensibilidade adquirida para a sua pertinência. Sendo mais velhos e mais maduros, acabam por ter mais facilidade em entrar nos conceitos e nas aplicações estatísticas, ainda que apresentem défices de destreza matemática, com particulares dificuldades no cálculo:

> Quando eu dou esta esta mesma cadeira, uma versão da disciplina, há uma parte comum, a alunos de mestrado e doutoramento, eles têm outra postura. Esses percebem muito melhor os conceitos e têm muito mais dificuldade na prática. Porquê? Porque já não veem a Matemática há muitos anos, são de disciplinas aplicadas, são de Medicina, de Farmácia, de Psicologia, de Nutrição e não têm Matemática há muito tempo e têm muita dificuldade no cálculo. Mas percebem melhor os conceitos. E percebem melhor as aplicações. Porque já passaram pelos dados, já sentiram a dificuldade e estão motivados para a aprendizagem e têm outra maturidade como indivíduos. Os nossos do primeiro ano estão muito bons no cálculo, portanto, absorvem tudo o que é cálculo mas ao nível teórico, ao nível do porque é que, como é que vão aplicar aquilo estão muito verdes. Portanto têm muitas dificuldades [na Estatística].

Na opinião de Sara as ideias estatísticas não são contra-intuitivas e na sua experiência não tem ideia de se deparar com respostas erradas dos alunos por eles se terem baseado nas suas intuições prévias ligadas ao contexto da questão. Também não tem notado dificuldades no uso da escrita e na comunicação dos resultados.

Para esta docente, o enfoque na disciplina está no conceito e posteriormente na sua aplicabilidade, como já foi mencionado. Ao reconhecer as dificuldades dos alunos em entender e interpretar os conceitos, fruto da sua experiência de ensino, ela tem o cuidado de fornecer várias explicações e exemplos ao abordá-los na aula teórica. A aquisição de um conhecimento mais profundo sobre cada conceito por parte dos alunos exige, na sua opinião, "alguma maturidade e reflexão" sobre eles. Apontou a título de exemplo alguns dos que são mais difíceis e sobre os quais tem maior preocupação em discutir com os alunos, recebendo feedback e fornecendo várias explicações:

> Variável aleatória, eles não sabem o que é. Variável aleatória, amostra aleatória, conceito abstrato, um conjunto de *n* variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas. Média amostral como variável aleatória, distribuição da média amostral, isto é terrível, isto eles não percebem bem o que é. As próprias distribuições (…) Depois quando vão para casa não é fazer tanto os exercícios para perceber os conceitos, é mais pensar sobre os conceitos. E eles não vão fazer isto pois não estão habituados.

Do seu ponto de vista, esta comunicação que tem na aula teórica com alunos ajuda-os a entender os conceitos, pois tenta ir ao pormenor e relacioná-los com outros, apontando aspetos comuns e diferenças, nomeadamente: "conceito de amostra versus população, conceito de variável aleatória versus número, conceito de variável aleatória versus incógnita".

5. Discussão e conclusão

A ideia de que uma disciplina introdutória de Estatística deve ser ensinada com foco na compreensão concetual e não apenas nas suas aplicações é uma das conceções da professora mais vincada relativamente aos seus objetivos centrais e que também é suportada pelas dificuldades que ela detetada nos alunos ao longo da sua experiência profissional, indo nesse sentido de encontro ao que é defendido por Zieffler e colegas (2008). Na sua disciplina, nos moldes em que está estruturada, com uma vertente matemática e com uma vertente estatística, acha que só tem tempo para desenvolver essencialmente os conceitos. No entanto, parece atribuir importância às aplicações e aos processos estatísticos quando refere que não acha que os conhecimentos que os alunos adquirem sejam suficientes para exercerem a sua profissão de forma totalmente confortável. Sara crê que esse nível de conforto apenas seria atingido caso existisse uma disciplina complementar em Estatística no curso de Farmácia com incidência nas aplicações, de modo a poder proporcionar uma bagagem adequada aos futuros profissionais.

Nesta disciplina introdutória, a insistência nos conceitos e o "fazer estatística" quando os alunos aplicam os testes de hipóteses e fazem inferências, expõe-nos a uma primeira *aculturação* (Pfannkuch & Wild, 2004). As ideias estatísticas fundamentais que vários autores apontam como imprescindíveis numa disciplina introdutória de estatística (Garfield

& Ben-Zvi, 2008) acabam por estar presentes na disciplina lecionada por Sara de uma forma limitada, situação decorrente dos constrangimentos de tempo causados pela co-existência de uma parte inicial reservada à Matemática. Os apontamentos por ela preparados têm a dupla intenção de não só promover uma compreensão dos conceitos estatísticos e suas aplicações, mas combinar também uma exposição fluída destes assuntos.

Sara tem uma forte convicção das dificuldades sentidas pelos alunos na aprendizagem dos conceitos estatísticos pelo que privilegia uma forte interação com eles de modo a ajustar o ritmo e forma de avançar nos conteúdos. Apesar de ser da opinião que os exercícios propostos nas fichas de trabalho se focam no desenvolvimento de capacidades de cálculo, ela dá sempre importância à vertente interpretativa. Os alunos específicos da disciplina não têm dificuldades básicas na Matemática. A diferença de abordagem que encontram na parte da Estatística revela-se mesmo um entrave à motivação dos alunos pois contraria as suas expetativas (Ben-Zvi & Garfield, 2004).

Este estudo sobre as conceções de uma professora universitária sobre o processo de ensino da Estatística evidencia aspetos importantes da sua prática que podem contribuir para fundamentar a reflexão pedagógica ao nível do ensino superior.

Referências

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions and challenges. In D. Ben-Zvi, & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Bireaud, A. (1995). *Os métodos pedagógicos no ensino superior*. Lisboa: Porto Editora.

Calderhead, J. (1996). Teachers: Beliefs and knowledge. In D. C. Berliner (Ed.), *Handbook of education* (pp. 709-725). New York: Macmillan.

Chance, B. (2002). Components of statistical thinking and implications for instruction and assessment. *Journal of Statistics Education, 10,* 3.

Cobb, G., & Moore, D. (1997). Mathematics, statistics and teaching. *The American Mathematical Monthly,* 104 (9), 801-823.

delMas (2004). A comparison on mathematical reasoning and statistical reasoning. In D. Ben-Zvi, & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 79-95). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). The discipline of statistics education. In J. Garfield & D. Ben-Zvi (Eds.), *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice* (pp. 3-19). Dordrecht: Springer.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). Creating a statistical reasoning learning environment. In J. Garfield & D. Ben-Zvi (Eds.), *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice* (pp. 45-63). Dordrecht: Springer.

Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: the case of statistics. *International Statistical Review, 65,* 123-137.

Pfannkuch, M., & Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. In D. Ben-Zvi, & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 17-46). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistcs learning and reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *The second handbook research on mathematics* (pp. 957-1010). Information Age Pub Inc.

Snee, R. (1993). What's missing in statistical education? *The American Statistician* 42(2), 149-154.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). Reston, V.A.: NCTM.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67* (3), 223-265.

Zieffler, A., Garfield, J., Alt, S., Dupuis, D., Holleque, K., & Chang, B. (2008). What does research suggest about the teaching and learning of introductory statistics at the college level? A review of the literature. *Journal of Statistics Education, 16* (2).

O ensino de estatística no ensino médio utilizando medidas biométricas

Oliveira Júnior, Ailton Paulo, Miziara, Eduardo Luiz, Amaral, Paloma Lima

Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Resumo

O presente trabalho relata uma experiência no ensino da Estatística com alunos do primeiro ano do ensino médio regular e do primeiro ano da Educação de Jovens e Adultos (EJA) da Escola Estadual Santa Terezinha, em Uberaba, Minas Gerais, Brasil. Procura-se destacar a importância do ensino da Estatística, e como esses alunos se comportam ao trabalhar os conceitos de média, moda, mediana, amplitude e desvio-médio através de uma sequência didática que tem como motivação as relações existentes no desenho de Leonardo da Vinci, o Homem Vitruviano. Durante a aplicação da sequência didática, foi avaliado o sucesso ou não da atividade através da observação contínua dos alunos quanto ao interesse, a apreciação e a compreensão dos conteúdos trabalhados. Após o desenvolvimento das atividades propostas foram feitas perguntas sobre os conteúdos trabalhados e os alunos se mostraram seguros ao responder e os comentários mostravam-se coerentes. Assim, conclui-se que uma aula contextualizada produz mais significado aos alunos, principalmente no primeiro ano da EJA, pois estes alunos são mais velhos e apresentam maior vivência de situações do dia a dia. Os resultados de observação indicaram que os alunos conseguiram relacionar a estatística com o seu cotidiano sendo este fato de grande importância, pois conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais a compreensão destes elementos formam um cidadão capaz de ler, interpretar e analisar dados.

Palavras chave: Estatística, Medidas biométricas, Ensino Médio.

1. Introducão

Ao homem moderno é exigido que sejam desenvolvidas habilidades e competências para ler; estabelecer relações; levantar e verificar hipóteses; interpretar; e argumentar. Para tanto é de grande importância que essas capacidades sejam desenvolvidas o mais cedo possível.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) no Brasil, em consonância com as Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar – *Standards*, do *National Council of Teachers of Mathematics*, recomendam que desde os anos iniciais do Ensino Fundamental sejam trabalhados conteúdos de Estatística e Probabilidades (NCTM, 1991; BRASIL, 1997). Nos documentos oficiais do Ministério da Educação a estatística é abordada no Ensino Médio dentro do tema Análise de dados (BRASIL, 2002), onde o aluno deve, dentre outros aspectos: ler e interpretar dados e informações de caráter estatístico, apresentados em diferentes linguagens e representações, na mídia ou em outros textos e meios de comunicação; e obter médias e analisar desvios de conjuntos de dados ou informações de diferentes naturezas.

O desenvolvimento do pensamento estatístico, além de propiciar o desenvolvimento do pensamento matemático em geral, é fundamental à formação do cidadão reflexivo e consciente da realidade. É através dele que podemos interpretar uma gama variada de dados, nos auxiliando na tomada de decisões que fazem parte do nosso cotidiano. Contudo, apesar de se mostrar extremamente importante e necessário, o ensino de estatística não tem recebido a atenção e o destaque que merece, seja por despreparo dos professores que as tem ministrado na Educação Básica ou pela falta de material didático que os auxiliem na elaboração de aulas.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 473-480). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Acredita-se que o ensino da estatística de maneira descontextualizada, na maioria das vezes, não desperta o interesse dos alunos por esse tipo de conhecimento. O ensino por simples transmissão de conhecimento, como o uso de conceitos e fórmulas matemáticas, somente traz aos alunos mais uma maneira "desinteressante" de estudar estes conteúdos.

Lopes (1998) justifica o ensino de estatística na escola como uma ferramenta capaz de auxiliar o estudante a responder perguntas como: "quantos?", "quando?", "como?" e "em que medida?". Questões estas que possibilitam uma melhor compreensão da realidade. O aluno passa, assim, a fazer conjecturas e a elaborar questionamentos para responder a um processo investigativo, o que lhe permite o estabelecimento de relações e o desenvolvimento de processos necessários à resolução de problemas.

Segundo Cazorla (2002) a importância da Estatística na formação do cidadão é crescente, na medida em que este fica exposto a informações estatísticas veiculadas pela mídia. Essas informações podem influenciar importantes tomadas de decisões que, muitas vezes, pela ausência de conhecimentos dos conceitos elementares de Estatística, são consumidas sem uma filtragem, tornando o cidadão vulnerável às interpretações que não correspondem à realidade.

Assim, o presente trabalho tem como foco relatar a experiência no ensino da Estatística com alunos do primeiro ano do Ensino Médio regular e do primeiro ano da Educação de Jovens e Adultos (EJA) da Escola Estadual Santa Terezinha, em Uberaba, Minas Gerais, Brasil, procurando destacar a sua importância, e como esses alunos se comportam ao trabalhar os conceitos de média, moda, mediana, amplitude e desvio-médio através de uma sequência didática que tem como motivação as relações existentes no desenho de Leonardo da Vinci, o Homem Vitruviano.

2. Metodologia

A aplicação da sequência didática "contextualizada" foi feita em turmas do Primeiro Ano do Ensino Médio: Regular e da Educação de Jovens e Adultos – EJA, da Escola Estadual Santa Terezinha em Uberaba na região do Triângulo Mineiro do estado de Minas Gerais. A escolha dos alunos do primeiro ano do ensino médio deve-se ao fato de acreditarmos que nesse estágio ainda não terem sido iniciados os trabalhos com as medidas de posição e dispersão na estatística, possibilitando assim avaliar a assimilação desses conceitos pelos alunos.

O Homem Vitruviano é a demonstração de que a harmonia do corpo é garantida pela inscrição do corpo num círculo perfeito e num quadrado. A busca pela harmonia entre aspectos objetivos e subjetivos da vida: a objetividade da matemática, da lei e das medidas versus a subjetividade do corpo, da visão e do próprio homem. Também são relacionadas leis geométricas universais e absolutas versus a geometria efêmera, vulnerável e relativa do corpo. As relações de medida do Homem Vitruviano podem ser observadas a partir de diversas relações tais como: (1) Um palmo é a largura de quatro dedos; (2) Um pé é a largura de quatro palmos; (3) Um antebraço é a largura de seis palmos; etc.

Durante a aplicação da sequência didática, foi avaliado o sucesso ou não da atividade através da observação contínua dos alunos quanto ao interesse, a apreciação e a compreensão dos conteúdos trabalhados. Apresenta-se na Tabela 1 a descrição da sequência didática que se baseia nas relações de medida do Homem Vitruviano de Leonardo da Vinci, apresentando os seguintes itens: objetivo; conteúdo; materiais a serem utilizados; e avaliação.

Tabela 1. Descrição da Sequência Didática.

Descrição ou Etapa	Sequência Didática

Objetivo	(1) Vivenciar fisicamente os conceitos de Média Aritmética, Mediana e Moda, Amplitude Desvio Médio. (2) Analisar as propriedades das medidas de posição e de variabilidade a partir da observação física das medidas. (3) Construir gráficos e tabelas a partir da vivência física destas medidas.
Conteúdo	Medidas de Posição e de Variabilidade; Gráfico dotplot; valores discrepantes (outliers).
Materiais	(1) Material de apresentação do Homem Vitruviano; (2) Planilha para registrar os dados; (3) Papel quadriculado e lápis de cor para a construção dos gráficos; (4) Calculadora; (5) Fita métrica utilizada para costura; (6) Fita métrica "gigante", para realizar o dotplot humano da altura. Obs.: O ideal é que cada unidade tenha pelo menos 20 cm de comprimento para que os alunos possam ficar enfileirados.
Avaliação	Depois de realizados todos os passos da atividade e apresentados os conceitos das medidas de posição e de variabilidade, discutir com os alunos qual foi o entendimento deles sobre essas medidas e expor a importância das mesmas na Estatística e no cotidiano deles.

3. Resultados

Para o desenvolvimento deste trabalho, inicialmente foi aplicado um teste diagnóstico, Figura 1, para avaliar o conhecimento prévio dos alunos em relação aos conceitos de média aritmética, mediana, moda, amplitude e desvio médio que serviu como apoio às atividades que foram desenvolvidas posteriormente sobre tais conceitos e coerente ao nível de aprendizagem que se deseja destes alunos.

Após a análise do teste diagnóstico e constatado que este grupo de alunos apresentava deficiencia no conteúdo em foco. foi trabalhada a sequência de ensino através da sequência didática que se baseia nas relações de medida do Homem Vitruviano de Leonardo da Vinci.

Considerando um ensino que privilegie o ensino contextualizado, alguns trabalhos abordaram aspectos da utilização dos elementos biométricos do Homem Vitruviano no ensino de Estatística como Silva (2008) que investiga as potencialidades de uma intervenção de ensino sobre os conceitos elementares de Estatística com 45 alunos de duas turmas do 2º ano do Ensino Médio, construída a partir de uma visita cultural (exposição de Leonardo Da Vinci), tendo como ferramenta o ambiente computacional. Silva, Magina e Silva (2010) também apresentam uma sequência de ensino abordando conceitos de medidas de posição e dispersão a partir do homem vitruviano, articulando teoria e prática e privilegiando o contexto interdisciplinar. Tem ainda como objetivo analisar os padrões das relações que se estabelecem entre as variáveis estatísticas, apresenta uma noção intuitiva de modelagem e propõem-se vivenciar fisicamente as medidas de posição.

1	Escola em que estuda:
2	Sexo: **(1)** Masculino **(2)** Feminino
3	Idade (anos):
4	Série em que estuda: Turma:
5	Você fez dois trabalhos em um semestre e obteve as notas 8,5 e 5,5. Qual deve se a nota que você deve tirar no 3° trabalho para que a média dos três seja 7?
6	No verão, oito vendedores venderam os seguintes números de unidades de ar condicionado: **8 11 5 14 8 11 16 11** Considerando este mês, determine a mediana do número de ar condicionados vendidos. O que significa este número?
7	Um dado foi lançado dez vezes e foram registrados os seguintes resultados: **5 4 6 1 2 5 3 1 3 3** Qual a moda do experimento? Diga com suas palavras o que significa o resultado obtido?
8	Em uma classe do 5° ano existem 20 alunos, a professora deseja realizar um estudo sobre a idade, em anos completos, desses alunos. A seguir pode ser observada a distribuição de idade deles: **10 12 10 12 10 11 12 10 11 10 13 12 10 10 12 11 11 11 10 11** (1) Qual a diferença entre a maior e a menor das idades dos alunos? O que isto significa? (2) Determine o desvio médio da idade dos alunos. O que significa o resultado, em anos?
9	Separamos uma turma de 18 alunos em três grupos: A, B e C. Perguntou-se quanto cada aluno tinha tirado na prova de matemática e obteve-se o seguinte resultado: **Grupo A: 4 – 3 – 2 – 3 – 1 – 5** **Grupo B: 6 – 0 – 0 – 3 – 3 – 6** **Grupo C: 3 – 3 – 3 – 3 – 3 – 3** (1) É possível estabelecer, a partir do valor da média aritmética das notas, qual grupo se saiu melhor? (2) Qual grupo obteve os resultados mais variáveis?

Figura 1. Teste Diagnóstico aplicado.

No início do desenvolvimento das atividades em sala de aula os pesquisadores foram apresentados como alunos do curso de Matemática. A aversão nos rostos dos alunos das duas turmas foi visível. A matemática é vista como uma matéria difícil e, muitas vezes o professor precisa lançar mão de artifícios, como atividades lúdicas, por exemplo, para conseguir o interesse dos alunos. Na turma do EJA a aplicação da atividade didática foi acompanhada pela professora de Português e que participou efetivamente do trabalho proposto.

Na continuidade da atividade foi apresentada aos alunos uma imagem do Homem Vitruviano. No momento em que se iniciou a falar sobre o Homem Vitruviano e as relações de medida existentes nele, conseguiu-se a atenção dos alunos. Foi perguntado a eles se conheciam o desenho. Disseram que já tinham visto, mas não sabiam do que se tratava.

A partir da resposta obtida foi contada sua história e falou-se sobre as relações de medidas existentes nele e como essas relações poderiam indicar um ser humano perfeito esteticamente e a partir desta colocação os alunos das duas turmas mostraram maior interesse no que iria ser trabalhado. Explicou-se que seriam utilizadas algumas medidas dos próprios alunos para trabalhar alguns conceitos de estatística. Desta forma, foram medidas as alturas de todos os alunos e colocadas em uma tabela desenhada no quadro negro da sala de aula. A seguir foram distribuídas fitas métricas, e pediu-se que com o auxílio dos colegas os alunos medissem a distância entre o umbigo de cada um e o chão, pois seria mostrado que a divisão da medida da altura pela medida do umbigo ao chão se aproximaria do número de ouro que é uma constante real algébrica irracional denotada pela letra grega ϕ (PHI).

Quando foram calculadas as razões entre a medida da altura e a medida da distância entre o umbigo e o chão, os alunos queriam saber quem deles seria o mais perfeito, qual razão se aproximaria mais do número de ouro, não sabendo que o verdadeiro motivo dos cálculos seria o de iniciar o ensino da estatística. Durante os cálculos da razão entre a medida da altura e a medida da distância do umbigo até o chão, os alunos fizeram perguntas sobre o porquê do resultado da razão das medidas de pessoas mais baixas estavam dando maior que os resultados da razão da medida de pessoas mais altas. Explicou-se que essa diferença relaciona-se com os valores da razão, e não com a medida da altura ser maior ou menor.

As atividades lúdicas, para Araújo (2000), são atividades que geram prazer, equilíbrio emocional, levam o indivíduo à autonomia sobre seus atos e pensamentos e contribuem para o desenvolvimento social. Essas atividades podem estar associadas ao ato de brincar, de jogar e estão presentes nos registros mais remotos sobre as atividades criadas pelo homem.

Na continuidade das atividades foi perguntado ao professor se os alunos já haviam trabalhado conteúdos estatísticos, este declarou que não. Os alunos deveriam ter visto o início de probabilidade no primeiro ano do Ensino Médio, mas não foi possível devido à falta de tempo. A seguir perguntou-se aos alunos se sabiam o que era estatística. No primeiro ano regular nenhum aluno respondeu a essa pergunta, já no primeiro ano da EJA um dos alunos disse que não sabia explicar, mas achava que estatística estava relacionada à pesquisa. Ainda na turma do EJA os alunos não nos deram como respostas conceitos, porém fizeram relações com pesquisas, gráficos em revistas e notícias de jornal. E a partir dos comentários sobre as notícias de jornal continuou-se a desenvolver as atividades.

Carvalho e Gitirana (2010) a partir da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1991) analisaram os significados do conceito de média em 10 coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental aprovados pelo PNLD 2011. Foram analisadas 291 atividades propostas nos livros de cada coleção, dentro dos capítulos destinados ao Tratamento da Informação. A média enquanto elemento representativo de um conjunto de dados foi desenvolvido por todas as coleções, perfazendo um total de 86,6% das atividades analisadas. Este estudo pontua a necessidade de maiores atenções a abordagens que explorem as medidas de tendência central privilegiando outros significados, também.

As medidas de posição ou de tendencia central são estatísticas que representam uma série de dados, orientando-nos quanto à posição da distribuição em relação ao eixo unidimensional de representação de dados numéricos.

Após a coleta dos dados, começou-se a falar sobre as medidas de posição. A primeira medida a ser trabalhada foi a média. Perguntou-se aos alunos o que eles sabiam sobre essa palavra na turma do primeiro ano regular e nenhum deles conseguiu formalizar este conceito pelos seus conhecimentos do cotidiano. Porém, na turma do EJA quando foi perguntado o que entendiam por média, alguns expuseram que a maneira como os jornalistas apresentam a notícia, a média parecia ser algo que mais acontecia.

Foi apresentado como é feito o cálculo da média, utilizando as medidas das alturas dos próprios alunos. Percebeu-se que apesar dos alunos afirmarem estarem entendendo não estava se sentindo a vontade com os cálculos.

No momento em que foi abordado o conceito sobre a moda, perguntou-se aos alunos o seu significado. Alguns alunos disseram ser: “algo que todo mundo usa”. A partir desta conversa, relacionou-se a resposta ao conceito de moda na estatística, e dito que a ideia é a mesma, pois moda é o valor mais frequente numa distribuição de dados.

Quando se focou a atividade sobre a mediana, os alunos ainda não tinham uma boa percepção do conceito. Na apresentação do conceito da mediana aconteceu algo interessante. O número de alunos presentes era par, e por isso a mediana não estava explícita. Mas enquanto estava sendo apresentado aos alunos sobre a maneira de se encontrar o valor que representava a mediana em um conjunto de dados de número par ou ímpar, um aluno chegou à sala de aula atrasado, e sua altura era exatamente a mediana da distribuição o que foi aproveitado como elemento motivador para a atividade que estava sendo desenvolvida.

Moreno (2010) elaborou uma sequência didática em vista da novidade da estatística nos currículos da Educação Básica, a escassez de pesquisas sobre a variabilidade e a dificuldade dos alunos na compreensão do desvio-padrão e na articulação dos conhecimentos matemáticos e estatísticos para aplicá-los em situações novas.

Assim, com relação às medidas de dispersão, não houve problemas no entendimento do que era a amplitude total, mas sim com relação ao desvio-médio, por ser uma medida que para ser encontrada exige mais cálculo que as demais, desta forma os alunos diminuíram o interesse. As medidas de dispersão ou variabilidade são indicadores da variabilidade das observações em torno dos valores centrais da distribuição de dados.

A última etapa da atividade foi a construção do *dot plot* humano, Figura 2, sendo o momento de maior participação por parte dos alunos. Neste momento aproveitou-se para mostrar onde se encontrariam as medidas que foram trabalhadas a partir da construção do *dot plot*. Também foi abordado o conceito dos valores discrepantes ou *outliers*.



Figura 2. Dot plot humano da turma de Primeiro ano do ensino regular e EJA.

Dot plot ou gráfico de pontos são usados para variáveis quantitativas. Normalmente usado para um pequeno conjunto de valores, usa um ponto para cada unidade de medida ou dado observado. Representa cada um dos dados da amostra como um ponto, sobre um eixo horizontal, onde é imposta uma escala numérica adequada aos dados da amostra.

Segundo a Wikipédia, em estatística, *outlier*, ou valor atípico, é uma observação que apresenta um grande afastamento das demais da série de dados (que esta "fora" dela), ou que é inconsistente. A existência de *outliers* implica, tipicamente, em prejuízos à interpretação dos resultados dos testes estatísticos aplicados às amostras.

Após o desenvolvimento das atividades propostas foram feitas perguntas sobre os conteúdos trabalhados e os alunos se mostraram seguros ao responder e os comentários mostravam-se coerentes. Ao final das atividades também foi perguntado aos alunos o que eles acharam do que foi proposto sendo que as respostas foram positivas. Alguns alunos disseram que sabiam que a estatística era importante para a vida deles, e que era uma pena não poderem estudar mais sobre o assunto.

Nas atividades junto aos alunos do primeiro ano regular foi necessário insistir para que participassem, e eram raros os que respondiam as perguntas que eram lançadas com o objetivo da apreensão dos conceitos. Na sala de EJA os alunos participaram o tempo todo, e sempre procuravam responder as perguntas que eram feitas, mesmo que erroneamente.

Normalmente, o aluno da EJA é que escolhe estar na sala de aula, tem seus próprios motivos pelos quais decidiu voltar a estudar, está presente na aula por vontade própria. Já os alunos do ensino regular nem sempre estão na sala de aula por escolha própria. Alguns querem apenas terminar o ensino médio e não tem maiores perspectivas. Concordamos com Gal, Ginsburg e Schau (1997) que afirmam que as atitudes dos alunos podem auxiliar ou atrapalhar a aprendizagem de estatística, podendo afetar o desenvolvimento do pensamento estatístico, bem como a aplicação fora da sala de aula dos conceitos aprendidos.

Logo após a aplicação da sequência didática aplicou-se um teste final de avaliação, com o mesmo nível de dificuldade do apresentado na Figura 1, a fim de comparar e verificar

se houve alguma diferença no aprendizado entre os dois momentos de conhecimento dos alunos. Foi observado um avanço na compreensão dos conteúdos abordados.

4. Considerações Finais

Assim, conclui-se que uma aula contextualizada produz mais significado aos alunos, principalmente no primeiro ano da EJA, pois estes alunos são mais velhos e apresentam maior vivência de situações do dia a dia. Os resultados de observação indicaram que os alunos conseguiram relacionar a estatística com o seu cotidiano sendo este fato de grande importância, pois conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais a compreensão destes elementos formam um cidadão capaz de ler, interpretar e analisar dados.

Pode-se também perceber que o envolvimento e interesse dos alunos mais velhos são maiores que o dos mais jovens e acredita-se que isso se dá pelo fato daqueles serem mais politizados e perceber que eles conseguiram relacionar a estatística com o seu cotidiano.

Para Gal (2002) e Rumsey (2002) é necessário que os alunos se apropriem de conceitos básicos de Estatística para compreender e interpretar informações estatísticas e, para isso, faz-se importante que este aluno esteja motivado, que compreenda os porquês dos dados que são coletados e a familiaridade com termos e ideias básicas da Estatística.

Referências

Araújo, I. R. O. (2000). *A utilização de lúdicos para auxiliar a aprendizagem e desmistificar o ensino da matemática*. Florianópolis. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.

Secretaria de Educação Média e Tecnológica. (2002). *PCN+ Ensino Médio*: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica.

Ministério da Educação e Cultura (1997). *Parâmetros curriculares nacionais* (1º e 2º ciclos): Matemática. Brasília: MEC/SEF.

Carvalho, J. I. F., Gitirana, V. (2010). *Significados da média aritmética nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental. Paraíba:* VI EPBEM.

Cazorla, I, M. (2002). *A relação entre a habilidade viso-pictórica e o dominio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Tese de Doutorado. Universidade Estadula de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: meanings, components and responsabilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-52.

Gal, I. Ginsburg, L. & Schau, C. (1997). *Monitoring attitudes and beliefs in Statistics Education*. In: I. Gal & J. B. Garfield (Orgs.). The assessment challenge in Statistics Education. Washington: IOS, pp. 37-51.

Lopes, C. A. E. (1998). *A probabilidade e a estatística no ensino fundamental*: uma análise curricular. Dissertação de Mestrado em Educação. Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, SP, Brasil.

National Council of Teacher of Mathematics. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Rumsey, D. (2002). Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. *Journal of Statistics Education*, Texas, 10(3), 1-25.

Silva, E. D. (2008). *Os conceitos elementares de Estatística a partir do homem vitruviano*: uma experiência de ensino em ambiente computacional. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Pontifície Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Silva, C. B., Magina, S. M. P., Silva, E. D. (2010). Homem vitruviano In Cazorla, I. M., Santana, E. (Orgs). *Do tratamento da informação ao letramento estatístico.* Via Litterarum Editora, Itabuna, Bahia.

Vergnaud, G. (1991). *A teoria dos campos conceituais*. Recherches em didactique des mathématiques, 10(23), 133-170, Grenoble, La Pensée Sauvage.

O jogo MAX_MIN - Estatístico

José Marcos Lopes

Resumo

Apresentamos neste trabalho um jogo (original) de treinamento para fortalecer os conceitos de Média, Mediana, Moda, Desvio Padrão e Desvio Médio da Estatística Descritiva. As medidas de posição e de dispersão utilizadas em cada rodada são obtidas através de sorteio de fichas apropriadas. Cada ficha, contempla uma medida de posição e uma de dispersão. O material utilizado é composto de 5 dados e 6 fichas. O jogo se completa após 6 rodadas. No início de cada rodada é sorteada uma das fichas. A ficha define quais medidas serão utilizadas naquela rodada. Cada jogador poderá efetuar até três lançamentos em cada rodada. O primeiro lançamento é sempre realizado com os cinco dados. Posteriormente, o jogador decide se aproveitará ou não seus outros dois lançamentos. Para o segundo lançamento o jogador pode reservar alguns dados e lançar apenas aqueles não reservados. De forma análoga para o terceiro lançamento. Após a finalização da sua jogada, o jogador anota os valores das faces obtidas nos cinco dados e os valores que obteve para as correspondentes medidas de posição e de dispersão. Ao final de cada rodada o jogador que obteve a maior medida de posição marca dois pontos, o que obteve a segunda maior medida de posição marca 1 ponto, o que obteve a menor medida de dispersão marca 3 pontos, o que obteve a segunda menor medida de dispersão marca 2 pontos e o que obteve a terceira menor medida de dispersão marca 1 ponto. Quando ocorrer empate cada jogador recebe a pontuação correspondente. Após a realização das rodadas cada jogador soma seus pontos e vence aquele que obteve a maior pontuação. Formulamos alguns problemas, envolvendo situações de jogo, que quando resolvidos pelos próprios alunos poderão contribuir com a apreensão destes importantes conceitos da Estatística Descritiva.

Palavras chave: Ensino, estatística descritiva, jogos.

1. Introdução

Consideramos neste trabalho um jogo de treinamento que pode ser utilizado com alunos do ensino fundamental ou médio com o objetivo de fortalecer o estudo das principais medidas de posição e de dispersão da estatística descritiva. Inicialmente os alunos realizam algumas rodadas do jogo e posteriormente o profesor trabalha com os problemas formulados.

Ajudar as crianças e os jovens a compreender progresivamente as ideias estocásticas fundamentais não é tarefa simples. Enquanto a estatística, como ciencia, está em um período de notável expansão, o número de investigações sobre o ensino de estatística é ainda escasso, estamos apenas começando a conhecer as principais dificuldades dos alunos nos conceitos mais importantes. É necessário experimentar e avaliar métodos de ensino adaptados a natureza específica da estatística, pois nem sempre se pode transferir os principios gerais do ensino de matemática. (Batanero, 2000)

Acreditamos que o uso, em sala de aula, do jogo aqui considerado juntamente com os problemas que formulamos, pode contribuir para a apreensão destes importantes conceitos pelos alunos.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 481-487). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

2. O jogo MAX_MIN − Estatístico

O jogo MAX_MIN − Estatístico é um jogo de treinamento para fortalecer os conceitos de Média, Mediana, Moda, Desvio Padrão e Desvio Médio da Estatística Descritiva. O jogo utiliza simultaneamente, em cada rodada, uma medida de posição e uma medida de dispersão. Assim, em cada rodada o jogador deve estabelecer uma estratégia que combina essas duas medidas.

O jogo pode ser disputado por dois ou mais jogadores. O jogo se completa com a realização de seis rodadas. As medidas de posição e de dispersão utilizadas em cada rodada são obtidas através de sorteio de fichas apropriadas. Cada ficha contempla uma medida de posição e uma de dispersão.

Material:

- 5 (cinco) dados honestos, com faces numeradas de 1 a 6;
- 6 fichas que indicam as medidas de posição e de dispersão

Média x Desvio Padrão	Média x Desvio Médio	Mediana x Desvio Padrão
Moda x Desvio Padrão	Moda x Desvio Médio	Mediana x Desvio Médio

- Calculadora (opcional)
- Um copo plástico para o lançamento dos dados e uma folha de papel para anotar as pontuações de cada rodada.

Regras:

1. No início de cada rodada é sorteada uma das seis fichas. A ficha define quais medidas serão utilizadas naquela rodada.
2. Cada jogador poderá efetuar até três lançamentos em cada rodada. O primeiro lançamento é sempre realizado com os cinco dados. Posteriormente, o jogador decide se aproveitará ou não seus outros dois lançamentos. Para o segundo lançamento o jogador pode reservar alguns dados e lançar apenas aqueles não reservados. De forma análoga para o terceiro lançamento. Vale a face de cima dos dados.
3. Após a finalização da sua jogada, o jogador anota em uma folha de papel os valores das faces obtidas nos cinco dados e os valores que obteve para as correspondentes medidas de posição e de dispersão.
4. Ao final de cada rodada o jogador que obteve a maior medida de posição marca dois pontos, o que obteve a segunda maior medida de posição marca 1 ponto, o que obteve a menor medida de dispersão marca 3 pontos, o que obteve a segunda menor medida de dispersão marca 2 pontos e o que obteve a terceira menor medida de dispersão marca 1 ponto. Quando ocorrer empate cada jogador recebe a pontuação correspondente. Caso o jogador calculou de maneira errada uma das medidas então não marcará pontos naquela rodada.
5. Após a realização das seis rodadas cada jogador soma seus pontos e vence aquele que obteve a maior pontuação.

Comentários sobre o jogo

O jogo MAX_MIN − Estatístico é uma variante do jogo MEDVAR apresentado em Lopes (2012). O jogo MEDVAR utiliza a média e a variância. Agora, o jogo aqui proposto,

considera as três principais medidas de posição: média , mediana e moda e também as duas principais medidas de dispersão: desvio padrão e desvio médio da estatística descritiva.

Os dados reservados tanto no primeiro como no segundo lançamento não podem ser modificados, ou seja, dado reservado não pode ser utilizado nos lançamentos subsequentes.

A ordem em que cada jogador realiza seus lançamentos pode ser estabelecida em sorteio ou de comum acordo entre os jogadores. Consideramos que mais de quatro jogadores pode tornar o jogo cansativo e desmotivar os participantes.

Como o jogo utiliza dados o fator sorte não pode ser totalmente desprezado. Entretanto, trata-se de um jogo de estratégia. Em cada jogada o jogador deve procurar obter a maior medida de posição, mas também obter a menor medida de dispersão, ou seja, o jogo auxilia na compreensão da variabilidade dos dados de uma amostra, conceito esse fundamental no estudo da Estatística. O jogador deve estabelecer uma estratégia que combine esses dois objetivos: maior medida de posição e menor medida de dispersão.

Uma simulação de jogada pode ser como segue. Suponha que a ficha sorteada foi

Média x Desvio Padrão

.

O jogador obteve no primeiro lançamento as faces: 3, 3, 3, 4 e 5. Reserva o dado com a face 5 e lança novamente os outros 4 dados e obtém as faces 1, 3, 4 e 6 . Reserva o dado com a face 6 e lança novamente os outros três dados obtendo as faces: 1, 1 e 5. Assim, o jogador obteve nesta rodada as faces : 1, 1, 5, 5 e 6 e obteve média igual a 3,6 e desvio padrão igual a 2,15. Caso o jogador tivesse ficado apenas com o seu primeiro lançamento, ou seja, não tivesse utilizado os outros dois lançamentos, então teria obtido a média 3,6 e desvio padrão 0,8. Portanto, neste caso, teria a mesma média, mas um desvio padrão aproximadamente três vezes menor, isto é, uma jogada muito melhor para o jogo MAX_MIN − Estatístico.

3. Situações-problema envolvendo o jogo MAX_MIN - Estatístico

Apresentamos nesta seção alguns problemas que envolvem situações do jogo MAX_MIN − Estatístico. O objetivo principal da resolução dessas situações−problema é o de fortalecer e fixar os conceitos presentes nas medidas de posição e de dispersão. Entendemos que o professor pode permitir o uso de calculadoras na resolução dos problemas. Consideramos, neste nível de escolaridade, ser importante saber calcular essas medidas, mas mais importante do que saber calcular é saber interpretar esses conceitos. O jogo aqui proposto exige esse tipo de interpretação quando das escolhas mais adequadas para cada jogada.

Depois de jogadas algumas partidas e da resolução de alguns problemas envolvendo situações de jogo, espera-se que os alunos sejam capazes de perceber que nem sempre será conveniente buscar somente obter os maiores valores possíveis para as faces dos dados. Deve-se procurar estabelecer um equilíbrio entre o maior valor para a medida de posição e o menor valor para a medida de dispersão.

Quando da realização do jogo é conveniente que os alunos anotem suas jogadas, pois isso poderá auxiliá-los na resolução das situações-problema. Estamos supondo que antes da realização do jogo os alunos já tenham estudado, "da forma tradicional", as medidas de posição: média, mediana e moda e também as medidas de dispersão: desvio padrão e desvio médio.

Dado um conjunto de *n* valores observados $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a *média* (aritmética), Me, é definida por:

$$\text{Me} = \frac{x_1 + x_2 + \ ... \ + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

a *mediana*, Md, é a realização que ocupa a posição central da série de observações quando estas estão ordenadas segundo suas grandezas em ordem crescente (ou decrescente). Quando o número de observações é par, usa-se como mediana a média aritmética das duas observações centrais. A *moda*, Mo, é definida como a realização mais frequente do conjunto

O desvio padrão, DP, é definido pela raiz positiva da variância, ou seja,

$$\text{DP} = \sqrt{\frac{(x_1 - \text{Me})^2 + (x_2 - \text{Me})^2 + \ ... \ + (x_n - \text{Me})^2}{n}} \quad = \quad \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \text{Me})^2}$$

e o desvio médio, DM, é definido por:

$$\text{DM} = \frac{|\, x_1 - \text{Me}\,| + |\, x_2 - \text{Me}\,| + \ ... \ + |\, x_n - \text{Me}\,|}{n}.$$

*Problema 1***.** Em uma rodada do jogo MAX_MIN − Estatístico, o Jogador 1 obteve as faces (1, 1, 6, 6, 6), o Jogador 2 obteve as faces (1, 2, 5, 6, 6), o Jogador 3 obteve as faces (1, 3, 4, 6, 6) e o Jogador 4 obteve as faces (2, 3, 4, 5, 6). Supondo que a ficha sorteada foi

Média x Desvio Padrão

qual jogador fez a melhor jogada? Por que?

Comentários e sugestões. O Jogador 1 obteve a média $\text{Me} = \frac{1+1+6+6+6}{5} = 4$ e o desvio padrão $\text{DP} = \sqrt{\frac{(1-4)^2 + (1-4)^2 + (6-4)^2 + (6-4)^2 + (6-4)^2}{5}} = 2{,}45$.

O Jogador 2 obteve a média $\text{Me} = 4$ e o desvio padrão DP = 2,10. O Jogador 3 obteve a média Me = 4 e o desvio padrão DP = 1,90 e o Jogador 4 obteve a média Me = 4 e o desvio padrão DP = 1,41.

Portanto, a melhor jogada foi feita pelo Jogador 4, pois todos obtiveram a mesma média e o Jogador 4 obteve o menor valor para o desvio padrão. Neste caso, o Jogador 1 marca 2 pontos pela maior média; o Jogador 2 marca 2 + 1 = 3 pontos, sendo 2 pontos pela medida de posição e 1 ponto pela medida de dispersão. De modo análogo, o Jogador 3 marca 2 + 2 = 4 pontos e o Jogador 4 marca 2 + 3 = 5 pontos.

Problema 2. Nas mesmas condições do *problema 1*, se a ficha sorteada foi:

Média x Desvio Médio

qual jogador fez a melhor jogada? Por que?

Comentários e sugestões. Da solução do *problema 1* sabemos que os quatro jogadores obtiveram o mesmo valor para a média. Agora, o Jogador 1 obteve o desvio médio

$$\text{DM} = \frac{|\,1-4\,| + |\,1-4\,| + |\,6-4\,| + |\,6-4\,| + |\,6-4\,|}{5} = 2{,}4.$$

O Jogador 2 obteve o desvio Médio DM = 2; o Jogador 3 obteve o desvio médio DM = 1,6 e o Jogador 4 obteve o desvio médio DM = 1,2. Portanto, da mesma forma que no *problema 1*, para o jogo MAX_MIN − Estatístico a melhor jogada foi feita pelo Jogador 4.

Problema 3. No jogo MAX_MIN − Estatístico as três medidas de posição: média, mediana e moda podem ser iguais? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões. A resposta é sim. Um caso possível é quando o jogador obtém as faces (1, 4, 4, 5, 6). Temos neste caso Me = Md = Mo = 4. Um outro caso, mais trivial, é quando as cinco faces dos dados são iguais, como por exemplo, (3, 3, 3, 3, 3). Neste último caso temos que Me = Md = Mo = 3.

Para o caso geral, quando o conjunto de dados possue uma distribuição simétrica então Me = Md = Mo. Em uma distribuição assimétrica positiva, observamos a relação Me > Md > Mo e em uma distribuição assimétrica negativa temos que Me < Md < Mo.

Problema 4. No jogo MAX_MIN − Estatístico o desvio padrão é sempre maior do que o desvio médio? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões. A resposta é não. Para os casos onde o jogador obtenha todas as 5 faces iguais, ou seja, nos casos: (1, 1, 1, 1, 1); (2, 2, 2, 2, 2); (3, 3, 3, 3, 3); (4, 4, 4, 4, 4); (5, 5, 5, 5, 5) e (6, 6, 6, 6, 6) teremos DP = DM = 0. Assim, o desvio padrão pode ser igual ao desvio médio.

Não só para o jogo MAX_MIN − Estatístico, como para qualquer conjunto de dados com distribuição fracamente assimétrica temos a relação empírica: $DM = \frac{4}{5}DP$ (Toledo e Ovalle, 1983, p. 217). Assim, para essas distribuições o desvio padrão (positivo) é sempre maior do que o desvio médio (positivo).

Os problemas a seguir exploram algumas propriedades das medidas de posição e de dispersão. Essas propriedades podem ser obtidas em livros de Estatística Básica, como por exemplo, em Toledo e Ovalle (1983). Na sequência vamos utilizar as notações: Me_i, Md_i, DP_i e DM_i para indicar, respectivamente, os valores da média, da mediana, do desvio padrão e do desvio médio obtidos pelo jogador i, para i = 1, 2, 3, 4.

Problema 5. Em uma rodada do jogo MAX_MIN - Estatístico foi sorteada a ficha:

Média x Desvio Padrão .

Supondo que o Jogador 1 obteve as faces (2, 3, 4, 5, 5), o Jogador 2 obteve as faces (3, 4, 5, 6, 6) e o Jogador 3 obteve as faces (1, 2, 3, 4, 4). Quais os valores obtidos por esses jogadores para a média e para o desvio padrão. Existe alguma relação entre os valores das faces e os valores obtidos para a média e para o desvio padrão? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões. Para a média temos neste caso que $Me_1 = 3{,}8$; $Me_2 = 4{,}8$ e $Me_3 = 2{,}8$. Para o desvio padrão temos que $DP_1 = DP_2 = DP_3 = 1{,}17$. É fácil observar que as faces dos dados do jogador 2 são iguais as faces dos dados do jogador 1 adicionadas de 1 e as faces dos dados do jogador 3 são aquelas do jogador 1 subtraídas de 1.

Assim, para o *problema 5* temos as seguintes relações: $Me_1 = Me_2 - 1 = Me_3 + 1$ e $DP_1 = DP_2 = DP_3$. O *problema 5* confirma as duas seguintes propriedades.

- *Propriedade 1.* Somando−se (ou subtraindo−se) um valor constante c a cada elemento do conjunto de dados, a média fica somada (ou subtraída) por essa constante.

- *Propriedade 1a.* Somando−se (ou subtraindo−se) um valor constante c a cada elemento do conjunto de dados, o desvio padrão não se altera. Para o caso do *problema 5*, a constante c é igual a 1.

Problema 6. Considerando-se a mesma jogada do *problema 5* e supondo que a ficha sorteada foi

Mediana x Desvio Médio

Existe alguma relação entre os valores das faces e os valores obtidos para a mediana e para o desvio médio? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões. Para a medida de posição mediana temos neste caso que $Md_1 = 4$; $Md_2 = 5$ e $Md_3 = 3$. Para a medida de dispersão desvio médio temos que $DM_1 = DM_2 = DM_3 = 1{,}04$. Da mesma forma que no *problema 5* temos agora as seguintes propriedades.

- *Propriedade 2.* Somando−se (ou subtraindo−se) um valor constante c a cada elemento do conjunto de dados, a mediana fica somada (ou subtraída) por essa constante.
- *Propriedade 2a.* Somando−se (ou subtraindo−se) um valor constante c a cada elemento do conjunto de dados, o desvio médio não se altera.

Problema 7. Em uma rodada do jogo MAX_MIN − Estatístico foi sorteada a ficha

Média x Desvio Padrão

Supondo que o Jogador 1 obteve as faces (1, 1, 2, 2, 3) e o Jogador 2 obteve as faces (2, 2, 4, 4, 6). Quais os valores obtidos por esses jogadores para a média e para o desvio padrão? Existe alguma relação entre os valores das faces e os valores obtidos para a média e para o desvio padrão? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões. Para a média temos neste caso que $Me_1 = 1{,}8$ e $Me_2 = 3{,}6$. Para o desvio padrão temos que $DP_1 = 0{,}748$ e $DP_2 = 1{,}496$. É fácil observar que as faces dos dados do jogador 2 são iguais as faces dos dados do jogador 1 multiplicadas por 2.

Assim, para o *problema 7* temos as seguintes relações: $Me_2 = 2x\,Me_1$ e $DP_2 = 2x\,DP_1$. O *problema 7* confirma as duas seguintes propriedades.

- *Propriedade 3.* Multiplicando−se (ou dividindo−se) cada elemento do conjunto de dados por uma constante c arbitrária, a média fica multiplicada (ou dividida) por essa constante.
- *Propriedade 3a.* Multiplicando−se (ou dividindo−se) cada elemento do conjunto de dados por uma constante c arbitrária, o desvio padrão fica multiplicado (ou dividido) por essa constante. Para o caso do *problema 7*, a constante c é igual a 2.

Problema 8. Considerando-se a mesma jogada do *problema 7* e supondo que a ficha sorteada foi

Mediana x Desvio Médio

Existe alguma relação entre os valores das faces e os valores obtidos para a mediana e para o desvio médio? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões. Para a mediana temos neste caso que $Md_1 = 2$ e $Md_2 = 4$. Para o desvio médio temos neste caso que $DM_1 = 0{,}64$ e $DM_2 = 1{,}28$. Observamos assim que neste caso $Md_2 = 2x\,Md_1$ e $DM_2 = 2x\,DM_1$. Da mesma forma que no *problema 7* temos agora as duas seguintes propriedades.

- *Propriedade 4.* Multiplicando−se (ou dividindo−se) cada elemento do conjunto de dados por uma constante c arbitrária, a mediana fica multiplicada (ou dividida) por essa constante.
- *Propriedade 4a.* Multiplicando−se (ou dividindo−se) cada elemento do conjunto de dados por uma constante c arbitrária, o desvio médio fica multiplicado (ou dividido) por essa constante.

Dependendo do interesse do professor, outros problemas envolvendo o jogo MAX_MIN − Estatístico e outras propriedades das medidas de posição e de dispersão poderão ser formulados. Para um estudo mais avançado pode-se solicitar aos alunos que demonstrem matematicamente, para o caso geral, as propriedades *1*, *1a*, *2*, *2a*, *3*, *3a*, *4*, *4a*.

4. Considerações finais

Apresentamos neste trabalho uma proposta de uma situação didática que pode ser utilizada pelo profesor dos ensino fundamental ou médio para fortalecer o aprendizado dos conceitos básicos da Estatística Descritiva.

Da mesma forma que para o ensino de Matemática, acreditamos que não existe uma única e melhor forma para se ensinar Estatística, o profesor deve conhecer várias alternativas e procedimentos no sentido de motivar e melhorar o conhecimento de seus alunos naquilo que pretende ensinar.

Referencias

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 25, 41-58.

Lopes, J. M. (2012) Uma proposta para o estudo dos conceitos de média e variância. *Encontro anual de professores de matemática-ProfMat2012*, Coimbra. APM.

Toledo, G. L. y Ovalle, I. I. (1983) *Estatística básica*. São Paulo: Atlas, 459p.

O que aprendem os professores uns com os outros? O trabalho colaborativo como forma de promover o desenvolvimento do conhecimento estatístico para o ensino[1]

Caseiro, Ana; Ponte, João Pedro y Monteiro, Cecília

Escola Superior de Educação de Lisboa

Resumo

Com frequência, o conhecimento dos professores do 1.º ciclo apresenta significativas lacunas em Estatística. Deste modo, é importante promover o desenvolvimento do seu conhecimento nesta área. O trabalho colaborativo é uma possível forma de o conseguir, uma vez que a dinâmica e as relações que se geram podem levar a ultrapassar as dificuldades comuns. Esta investigação é parte de um estudo mais amplo que segue uma metodologia qualitativa e interpretativa, envolvendo três estudos de caso com professoras de 3.º e 4.º anos (alunos 8-9 anos). A recolha dos dados inclui observação participante das sessões do grupo colaborativo com compilação dos documentos escritos produzidos pelas professoras. Nestas sessões tem sido valorizada a resolução de tarefas de Estatística, sendo o trabalho fundamentado numa constante discussão e reflexão conjuntas. Numa das sessões foi realizada uma tarefa de cunho investigativo, tendo as professoras formulado um problema, planificado a recolha de dados, recolhido, organizado e analisado dados. Essa tarefa deu origem a uma reflexão sobre aspetos de cada uma das representações que as professoras decidiram realizar para organizar os dados recolhidos. Esta comunicação apresenta as aprendizagens mais salientes das professoras sobre a Estatística e o seu ensino decorrentes deste trabalho.

Palavras chave: Conhecimento de professores; Trabalho colaborativo; Educação Estatística

1. Introdução

A Estatística tem vindo a ganhar cada vez maior ênfase nos atuais documentos curriculares portugueses. Essa crescente relevância está de acordo com as necessidades da sociedade na medida em que constantemente nos vemos em contato com dados estatísticos apresentados de diferentes formas (em especial, tabelas e gráficos), o que requer a capacidade de os analisar e interpretar para nos tornarmos cidadãos informados, conscientes e ativos. O papel da Estatística na compreensão da realidade social e também a sua aplicação noutras áreas torna-a um tema de extrema importância nos currículos escolares desde os primeiros anos. Outro motivo apontado tem sido o seu contributo no desenvolvimento do sentido crítico dos alunos, fundamental para a sua vida escolar, mas, sobretudo, enquanto cidadãos (Batanero, Godino & Roa, 2004).

Um objetivo importante do ensino de Estatística é desenvolver a literacia estatística em todos os alunos (Martins & Ponte, 2010; Ponte & Sousa, 2010), habilitando-os para

[1] Estudo realizado no âmbito do Projeto DSL – *Developing statistical literacy: Student learning and teacher education*, apoiado pela FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia (contrato PTDC/CPE-CED/117933/2010).

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 489-496). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

tomarem decisões relativamente à informação existente no mundo à sua volta. Groth (2006) sublinha a importância dos alunos realizarem investigações estatísticas no decorrer do seu percurso escolar, a partir de situações do seu quotidiano, considerando que este trabalho pode levar a que, mais tarde, sejam capazes de interpretar e avaliar criticamente estudos estatísticos. No entanto, apesar de a Estatística já aparecer nos programas oficiais de Matemática de diversos países (Batanero & Godino, 2005) é um tópico nem sempre trabalhado nas escolas, tendendo muitos professores a deixá-lo para o final do ano letivo, para apenas o lecionar caso ainda tenham tempo, o que muitas vezes não acontece.

Sendo o conhecimento dos professores um dos aspetos mais influentes no processo de ensino-aprendizagem é necessário que estes dominem em profundidade os conteúdos que lecionam (Ma, 2009). Assim, torna-se imprescindível compreender qual o conhecimento de conteúdo estatístico dos professores e quais as formas como este se pode desenvolver. Sendo o trabalho colaborativo uma importante forma de ajudar a solucionar alguns problemas reais da vida profissional dos professores (Ponte & Serrazina, 2004), o presente estudo visa compreender o desenvolvimento do conhecimento em Estatística de professores de 1.º ciclo quando inseridos num grupo de trabalho desta natureza.

2. Conhecimento dos professores em estatística e seu desenvolvimento

O conhecimento matemático dos professores constitui um tópico importante para investigação (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001). Groth (2007) indica que, de todos os temas matemáticos dos currículos, normalmente o conhecimento dos professores é mais fraco na área da Estatística. No seu entender, em muitos conceitos, estes exibem algumas das mesmas dificuldades que os estudantes. Desta forma e dado que o conhecimento dos professores é um dos aspetos mais determinantes de um ensino eficaz, é imprescindível que se continue a investigar o conhecimento necessário ao ensino da Estatística (Groth, 2007).

Alguns estudos têm sido realizados de modo a perceber fragilidades de professores e futuros professores no processo de ensino-aprendizagem da Estatística. Por exemplo, no estudo de Caseiro (2010) foi possível verificar que os professores de 1.º ciclo apresentaram dificuldades em alguns tópicos estatísticos tais como a moda, diagramas de Venn e de Carroll e situações aleatórias. O facto destes tópicos apenas terem sido incluídos recentemente no programa de Matemática português (ME, 2007) foi apontado como possível causa dessas dificuldades. A autora refere que todos "os professores apresentam várias lacunas em termos de conhecimento estatístico" (p. 105). Nos seus estudos Batanero et al. (2004) e Estrada, Batanero, Bazán e Aparício (2009) concluem igualmente que os professores demonstram uma deficiente preparação em Estatística. Isto sugere que é necessário melhorar a formação inicial e contínua de professores (Watson, 2001), especialmente no que se refere aos futuros professores dos primeiros anos do ensino básico (Chick & Pierce, 2008).

A colaboração é uma forma de ajudar os professores a solucionar alguns problemas reais da sua vida profissional:

> A colaboração é um elemento fundamental da cultura profissional dos professores. Trata-se de estratégia essencial para lidar com problemas de dimensão significativa e problemas deste tipo não faltam na atividade profissional dos professores e na vida das escolas. (Ponte & Serrazina, 2004, p. 14)

Pelo seu lado, a reflexão é apontada como importante no desenvolvimento do conhecimento dos professores (Schön, 1992). Skovsmose e Valero (2002) referem que a atividade de um grupo de trabalho colaborativo pode reforçar essa importância. No seu decurso, podem surgir momentos diversos de reflexão, em que os seus elementos se voltam a debruçar "sobre os pensamentos e ações uns dos outros de forma consciente" (p. 19).

3. Metodologia

Tendo em consideração o objetivo do estudo mais amplo do qual esta investigação faz parte (compreender o desenvolvimento do conhecimento e das práticas letivas de professores do 1.º ciclo em termos de Educação Estatística, na sua mútua relação, num contexto de trabalho colaborativo), o presente estudo segue uma metodologia qualitativa e interpretativa, envolvendo três estudos de caso com professoras a lecionar turmas do 3.º e 4.º anos (alunos de 8-10 anos).

A recolha dos dados está a ser realizada desde junho de 2012 e está previsto terminar em junho de 2013. Os dados apresentados nesta comunicação foram recolhidos através do registo vídeo e áudio de algumas das sessões do grupo de trabalho colaborativo, assim como de alguns dos documentos escritos produzidos pelas professoras. A análise dos dados foi realizada através da análise de conteúdo dos documentos selecionados e análise de discurso dos dados recolhidos nas sessões do grupo de trabalho colaborativo.

O grupo de trabalho colaborativo no qual os dados apresentados nesta comunicação foram recolhidos é composto pela primeira autora deste documento (daqui em diante designada a investigadora) e por três professoras (Matilde, Maria e Alice – nomes fictícios escolhidos pelas professoras) a lecionarem no presente ano letivo (2012/13) turmas de 3.º ou 4.º ano de escolaridade. As sessões do grupo colaborativo ocorrem duas a três vezes por mês desde novembro de 2012 baseando-se o trabalho desses encontros na análise de textos relacionados com educação estatística, na resolução de tarefas que envolvem conteúdos estatísticos e na preparação conjunta de aulas e reflexão conjunta sobre aulas lecionadas.

Numa dessas sessões cujo objetivo era o de possibilitar a vivência de uma pequena experiência de trabalho investigativo, foi proposto às professoras que recolhessem dados sobre aspetos relacionados com os elementos do grupo. Cada professora foi referindo alguns aspetos tendo surgido características como altura, envergadura, tamanho do pé, tamanho da mão, número de calçado, de bolsos, de botões, de irmãos e cor do cabelo e dos olhos. Como não surgiam variáveis de alguns tipos a investigadora acrescentou outros aspetos, tais como gosto pela Matemática numa escala de 1 a 5 (em que 1 se referia a nenhum gosto e 5 a muito), passatempos preferidos e grau de expectativa relativamente às sessões do grupo de trabalho.

Depois de distribuídas as variáveis pelos quatro elementos do grupo cada um teve de formular as questões relativas às variáveis que ficou de estudar e, posteriormente, recolher, organizar a analisar os dados de forma a dar resposta às questões formuladas. Após recolhidos os dados, cada uma das participantes começou a pensar na melhor forma de os representar para cada variável.

4. Representações realizadas e sua discussão

Maria, que ficou responsável por recolher dados relativos ao número de alunos que cada uma tem na sua turma, resolveu realizar um gráfico de barras com a informação por si recolhida (figura 1).

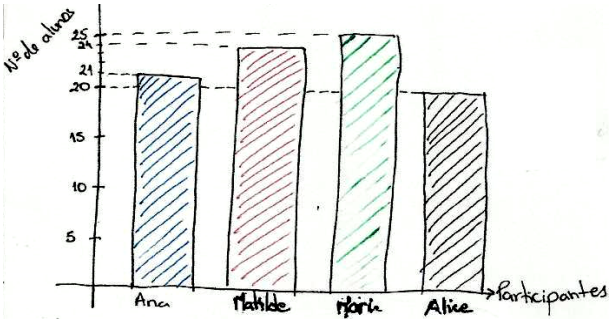


Figura 1. Representação sobre o número de alunos na turma (Maria, 30 de novembro de 2012).

Maria assumiu que a representação realizada é um gráfico de barras na medida em que é construído com barras. Mostra, assim, que não sabe o que caracteriza esse tipo de representação, pois representou os dados e não as frequências com que as diferentes categorias aparecem no conjunto desses mesmos dados.

Confrontada com a situação de ter de organizar os dados sobre o número de botões que cada membro do grupo tinha nas suas roupas no dia da sessão, Alice decidiu criar intervalos de valores que pudessem ser assumidos pela variável e, de seguida, elaborou a representação que, segundo ela, constitui um gráfico de barras (figura 2).

Figura 2. Representação sobre o número de botões (Alice, 30 de novembro de 2012).

Esta representação mostra diversas lacunas no conhecimento de conteúdo estatístico de Alice na medida em que esta demonstra não reconhecer o número de botões como uma variável discreta (apenas estava a considerar botões inteiros na roupa de cada uma), e que, como tal, essa variável não pode assumir todos os valores dentro dos intervalos por ela estabelecidos. Além disso, evidenciou não saber que caso se pudessem organizar os dados segundo os intervalos por si elaborados, isto é, caso se tratasse de uma variável contínua, não se deveria utilizar um gráfico de barras para organizar a informação, mas sim um histograma.

No decorrer da discussão no grupo cada um dos elementos foi referindo aspetos que considera necessários e imprescindíveis num gráfico de barras, tendo-se chegado à conclusão de que nem todas as representações gráficas com barras (como as figuras 1 e 2) podem ser consideradas gráficos de barras, algo que as professoras desconheciam. Também durante a análise destas duas representações foram levantadas questões relacionadas com diferentes tipos de variáveis (qualitativas e quantitativas, discretas e contínuas), o que, no início da discussão, não foi pacífico na medida em que algumas professoras não se tinham apercebido que as variáveis podem ser de diferentes tipos. Essa discussão surgiu quando foi necessário perceber em que circunstâncias se pode construir um gráfico de barras e um histograma.

Matilde construiu uma tabela de dados com os valores das alturas de cada um dos elementos do grupo, referindo tratar-se de uma tabela de frequências (figura 3).

Participante	Ana	Alice	Matilde	Maria
Altura (m)	1,72	1,58	1,58	1,59

Figura 3. Representação sobre a altura dos elementos do grupo (Matilde, 30 de novembro de 2012).

Deste modo, Matilde demonstrou não saber que uma tabela de frequências não é composta pelo registo de todos os dados recolhidos mas pelas categorias que os diversos dados assumem seguidas do número de elementos que pertence a cada uma, ou seja, a frequência com que cada categoria ocorre nos dados.

Por fim, depois de recolher dados sobre os tipos de cabelo dos elementos do grupo, Alice realizou a representação expressa na figura 4, referindo tratar-se de um diagrama de Carroll.

Figura 4. Representação sobre os tipos de cabelo (Alice, 30 de novembro de 2012).

Neste exemplo, é possível verificar que Alice sabe que este tipo de representação serve para organizar os dados de acordo com critérios de sim/não, mas demonstra não reconhecer que num diagrama de Carroll devem aparecer os elementos que compõem cada um dos quatro conjuntos formados e não os cardinais desses conjuntos.

Também a propósito das tabelas e dos diagramas (neste caso no de Carroll por se assemelhar a uma tabela) surgiu uma discussão no grupo na qual cada uma das professoras foi referindo as características desses tipos de representações e as precauções que se devem ter em consideração na sua construção.

No decorrer da discussão surgida no grupo, em que cada uma das participantes teve a oportunidade de ir expressando as suas opiniões e ideias sobre as representações, a investigadora foi referindo alguns aspetos sobre os quais as professoras não se focavam nas suas intervenções e, também, outros que lhe foram sendo diretamente questionados.

Para além dessa discussão foram consultadas duas brochuras editadas pelo Ministério de Educação (Martins, Loura & Mendes, 2007; Martins & Ponte, 2010) cuja existência as professoras desconheciam. Umas das brochuras de apoio aos professores centra-se no ensino da Estatística e em conteúdos estatísticos a trabalhar no 1.º ciclo, enquanto a outra abrange os conteúdos a abordar ao longo de todo o ensino básico. Esse trabalho continuou noutras sessões em que as professoras começaram a elaborar um ficheiro onde expressavam alguns aspetos relativos à construção de cada tipo de representação, sendo que esse documento foi substituído pela preparação de uma apresentação para sistematizar alguns desses aspetos junto dos seus alunos, já que uma das professoras referiu que seria necessário e imprescindivel na medida em que começava a ter consciência da forma errada como tinha trabalhado algumas das representações nas suas aulas.

	longo	não longo
liso	2	—
não liso	—	2

A construção da apresentação foi sustentada na reflexão que ia surgindo sobre cada representação, assim como nas brochuras de Estatística, tendo sido adaptada a cada turma através de modificações nos dados utilizados nos exemplos das representações na medida

em que esses dados diziam respeito a gostos alimentares dos alunos e tinham sido recolhidos por eles numa das aulas.

Com este trabalho as professoras, para além de prepararem uma apresentação para os seus alunos, foram desenvolvendo algum conhecimento sobre as referidas representações estatísticas na medida em que foram analisando aspetos que não sabiam que as representações deveriam ter, tais como a frequência de cada categoria na tabela de frequências, assim como no gráfico de barras; a legenda nos eixos de um gráfico de barras e a sua distinção em relação a um histograma; a utilização de variáveis dicotómicas (ou que se tornam dicotómicas) no diagrama de Carroll e a sua distinção de uma tabela de contingência.

Este trabalho desenvolvido pelo grupo colaborativo parece ter sido marcante para as participantes na medida em que, segundo as próprias, nunca tinham sido confrontadas com as suas próprias limitações e lacunas de conhecimento. Isso fazia com que não tivessem qualquer noção de que não sabiam alguns desses aspetos e, desse modo, os ensinassem de forma incorreta aos seus alunos:

> [Tenho a] Crença pessoal e profissional que é neste tipo de formação cooperada que o desenvolvimento profissional de um professor acontece. (Alice, 06 de janeiro de 2013)
>
> Existem demasiadas características específicas da organização e tratamento de dados sobre as quais não tenho conhecimento, e ser confrontada com essas especificidades (…) demonstra a importância da Estatística e de como é importante o professor estar em constante formação. (Matilde, 05 de janeiro de 2013)
>
> Confesso que inicialmente sentia que OTD [Estatística] não era dos temas que me trouxesse grande dificuldade, sentindo-me até, ingenuamente (percebo-o agora), bastante confiante com os tópicos trabalhados neste tema (…) julgo que esta é uma experiência [o trabalho colaborativo] pela qual todos os professores deveriam passar. (Maria, 05 de janeiro de 2013)

Depois dessa sessão as professoras passaram a dedicar algum tempo das suas aulas a trabalhar aspetos específicos de representações estatísticas (inseridas, sobretudo, em tarefas de investigação) com os seus alunos. Segundo elas, esse trabalho tornou se importante na medida em que já tinham trabalhado algumas das representações nas suas turmas mas de modo incorreto, como os que surgiram na sessão do grupo colaborativo aqui referida.

5. Considerações finais

Estudos realizados sobre o conhecimento estatístico dos professores e sobre o seu desenvolvimento têm sido escassos, em especial no que se refere aos professores de 1.º ciclo. Em Portugal, o atual Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) enfatiza o tema Estatística ao longo dos três ciclos. Deste modo, torna se pertinente compreender qual o conhecimento em conteúdos estatísticos dos professores assim como formas que potenciem o seu desenvolvimento.

As professoras que participam neste estudo demonstram possuir diversas dificuldades a nível de conteúdos estatísticos, mas, inicialmente, não têm consciência das limitações do seu conhecimento. Anteriormente, nunca tinham sido confrontadas com algumas das questões que foram sendo colocadas nas sessões do grupo colaborativo e, como tal, nunca se tinham apercebido de algumas limitações do seu conhecimento, nomeadamente no que se refere a diagramas de Carroll, gráficos de barras e tabelas de frequências. No contexto do

grupo colaborativo puderam desenvolver uma consciência das suas dificuldades e incompreensões em alguns tópicos estatísticos.

Atualmente estas professoras parecem cada vez mais despertas para questões estatísticas e, em sala de aula, já começam a aproveitar situações que ocorrem, mesmo sem serem planificadas, para abordar conteúdos estatísticos que, segundo elas, não teriam aproveitado caso não estivessem a participar neste grupo colaborativo. Assim, é de realçar a importância que este trabalho (formação *entre* professores) parece ter tido em termos do desenvolvimento do conhecimento destas professoras, o que poderá vir a refletir-se na aprendizagem dos seus alunos. Evidencia-se, portanto, as potencialidades deste tipo trabalho de professores, desde que apoiado na partilha de experiências e na reflexão conjunta sobre conteúdos e sobre maneiras de auxiliar os alunos nas suas aprendizagens.

Referencias

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Batanero, C., & Godino, J. D. (2005). Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. In R. Luengo (Ed.). *Líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 203-226). Badajoz: Universidad de Extremadura.Batanero et al (2004)

Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education, 12*(1).

Caseiro, A (2010). Conhecimento dos professores de 1.º ciclo sobre Educação estatística (Tese de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa). Lisboa, APM.

Chick, H. L., & Pierce, R. U. (2008). Teaching Statistics at the primary school level: Beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico.

Estrada, A., Batanero, C., Bázan, J., & Aparício, A. (2009). As atitudes em relação à Estatística em professores: Um estudo comparativo de países. Comunicação apresentada no *XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática: Números e Estatística: Reflectindo no Presente, Perspectivando o Futuro*. Vila Real, Portugal.

Groth, R. E. (2006). An exploration of students' statistical thinking. *Teaching Statistics*, 28(1), 17-21.

Groth, R. E. (2007). Toward a conceptualization of statistical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(5), 427-437.

Ma, L. (2009). Saber e Ensinar Matemática Elementar. Tradução de Knowing and Teaching Elementary Mathematics – teacher's understanding of fundamental mathematics in China and the United States (1999). Lisboa: Gradiva.

Martins, M. E. G., Loura, L., & Mendes, M. (2007) *Análise de dados: Texto de apoio para professores do 1.º ciclo.* Ministério de Educação. Lisboa: Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Martins, M. E. G., & Ponte, J.P. (2010), *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: Ministério de Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). As práticas dos professores de Matemática em Portugal. *Educação e Matemática*, 80, 8-12.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Schön, Donald (1992). Formar Professores como Profissionais Reflexivos. In António Nóvoa (org.). *Os Professores e a sua Formação*. Lisboa: Publicações Dom Quixote (Instituto de Inovação Educacional).

Skovsmose, O., & Valero (2002). Quebrando a neutralidade política: O compromisso crítico entre a educação e a democracia. *Quadrante*, *11*(1), 7-28.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *4*, 305-337.

O uso de simulações para desenvolver a noção de probabilidade e a capacidade de resolução de problemas

Fernandes, Cláudia[1]*, Ponte, João Pedro*[2]

[1]Agrupamento de Escolas Drª Laura Ayres, Quarteira e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
[2] Universidade de Lisboa, Portugal

Resumo

Esta comunicação analisa o modo como alunos portugueses do 9.º ano (com cerca de 14 anos) respondem a questões envolvendo a noção intuitiva de probabilidade no trabalho realizado numa simulação com o software TinkerPlots, que até aqui desconheciam. A tarefa é proposta por escrito, acompanhada de um guião relativo à utilização do software e é realizada pelos alunos, em pares, durante cerca de 50 minutos. Esta realização envolve três fases: apresentação pelo professor e interpretação em diálogo com os alunos, trabalho autónomo dos alunos e discussão dos resultados obtidos. Durante o trabalho autónomo dos alunos a professora faz um acompanhamento discreto, procurando esclarecer dúvidas que os impeçam de avançar, mas sem responder às questões propostas na tarefa. Na análise dos resultados procura verificar-se de que modo os alunos interpretam o problema proposto, analisam e interpretam representações dos dados e estabelecem relações com base na frequência relativa para estimar a probabilidade de um acontecimento. Procura, ainda, verificar-se até que ponto os alunos conseguem utilizar o software com base nas indicações fornecidas, trabalhar de modo autónomo, e comunicar as suas conclusões. Este estudo representa a etapa inicial de uma investigação de design research que tem em vista construir uma unidade de ensino para os alunos deste nível de escolaridade, tirando partido das novas tecnologias.

Palavras chave: Simulação, Probabilidade, Frequência, Representação.

1. Introdução

O ensino do tema probabilidades tem vindo a sofrer uma significativa evolução. De uma abordagem baseada na definição clássica de probabilidade (quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis), tem-se vindo a passar para uma abordagem de caráter frequencista, incentivada pelo desenvolvimento da análise dos dados e pelo uso de atividades experimentais no ensino da Matemática. A modelação matemática, em particular o recurso a simulações com o auxílio de software pode apoiar a abordagem frequencista na sala de aula, apresentando a probabilidade de um acontecimento aleatório como um modelo teórico de uma proporção de casos ou uma frequência relativa estabilizada com um certo grau de confiança (Chaput, Girard & Henry, 2011).

Nesta comunicação analisamos o modo como os alunos portugueses do 9.º ano respondem a questões envolvendo a noção intuitiva de probabilidade no trabalho realizado numa simulação com o software TinkerPlots, até aqui deles desconhecido, tendo em conta a interpretação que fazem do problema proposto, a interpretação e análise das representações dos dados que obtêm a partir do uso do software e as relações que estabelecem entre os conceitos de frequência relativa e probabilidade de um acontecimento. Pretendemos, também, perceber até que ponto os alunos conseguem utilizar o *software* com base em indicações fornecidas com o enunciado da tarefa, trabalhar de modo autónomo e comunicar as suas conclusões. Este estudo representa a etapa inicial de uma investigação de *design*

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 497-504). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

research que tem em vista construir uma unidade de ensino tirando partido das novas tecnologias.

2. O ensino das probabilidades com recurso às simulações

Situações de incerteza que surgem no quotidiano conduzem a juízos probabilísticos que emergem de forma intuitiva (Branco & Martins, 2002), promovendo raciocínios de inferência estatística. Uma correta compreensão do processo inferencial envolve perceber a possibilidade de se cometerem erros quando se procura generalizar para um conjunto alargado indivíduos algumas propriedades verificadas em alguns deles (Branco & Martins, 2002). Deste modo, importa desenvolver nos alunos a sua capacidade de raciocinar inferencialmente, para que sejam capazes de valorizar, compreender e avaliar a evidência estatística que influencia a sua vida diária (Ridgway, Nicholson & McCusker, 2011). Para se trabalhar conjuntos de dados com dimensões à escala real, o uso de software específico uma ferramenta fundamental.

A proposta de tarefas contextualizadas é recomendada no programa português (ME, 2007) e em documentos internacionais como o GAISE Report (Franklin, Kader, Mewborn, Moreno, Peck, Perry, & Scheaffer, 2005) e o NCTM (2000). Na realização destas tarefas, o computador permite aos alunos trabalhar grandes conjuntos de dados, centrando-se na análise da situação aleatória, dando relevo à concepção de hipóteses das quais se podem tirar conclusões. A introdução da tecnologia permite trabalhar distribuições que, dada a sua dimensão, seriam difíceis de manusear de outra forma (Chaput et al., 2011; Franklin et al., 2005; Martins & Ponte, 2010). O relatório GAISE (Franklin et al., 2005) destaca a importância do papel da probabilidade na análise estatística. De facto, a abordagem frequencista do conceito de probabilidade relaciona a probabilidade de uma experiência aleatória com a frequência relativa do acontecimento, que tende a estabilizar quando se repete esta experiência um número suficientemente grande de vezes. No entanto, devido à sua natureza empírica, a abordagem estritamente frequencista gera questões de carácter didático que podem levar à confusão entre a observação da realidade (frequência estabilizada) e o conhecimento teórico de probabilidade (Chaput et al., 2011). Por isso, uma abordagem partindo de situações de modelação matemática ou usando simulações é especialmente adequada.

Uma simulação é um processo artificial utilizado para imitar o comportamento de um fenómeno aleatório (Martins & Ponte, 2010), sendo possível analisar o seu comportamento em resposta a variações incluindo, eventualmente, a análise num contexto real. Martins e Ponte (2010) consideram que as simulações constituem um instrumento poderoso, que nas últimas décadas, com o desenvolvimento e aperfeiçoamento dos meios computacionais, contribuiu de forma decisiva para o estudo das probabilidades associadas a determinados acontecimentos. O uso de *software* para o trabalho com simulações estatísticas pode assim constituir uma ferramenta com grandes potencialidades (Lee & Hollebrands, 2011; Pratt, Davies, & Connor, 2011), proporcionando uma grande quantidade de situações passíveis de levar à sala de aula, de outra forma muitas vezes inexequíveis. A automatização de tarefas com o auxílio deste tipo de ferramenta permite focar a atenção no entendimento conceptual, dedicando mais tempo à análise exploratória de dados. Além disso, este tipo de software permite reorganizações de dados e ajuda a desenvolver a capacidade de visualização de conceitos abstratos, por vezes difíceis de compreender pelos alunos. No caso das simulações, o recurso aos meios computacionais permite uma visão daquilo que pode ser realidade através do modelo matemático, proporcionando aos alunos a experiência de trabalhar e perceber distribuições (Pratt et al., 2011).

3. Metodologia

Esta investigação constitui uma etapa de uma investigação de design research, que inclui a exploração de tarefas matemáticas com o *software* estatístico TinkerPlots, novo para os alunos. Os participantes são quatro alunos que trabalharam em pares (Ana com Beatriz, Daniel com Carlos). A recolha dos dados foi feita através de gravação em vídeo dos grupos, registos escritos produzidos pelos alunos e notas de campo registadas pela primeira autora. Com base no visionamento e transcrição de diálogos de diferentes momentos de aula, a análise dos dados centra-se nos seguintes aspetos: (i) interpretação do problema proposto por parte dos alunos, (ii) análise e interpretação de representações dos dados e respetivas conclusões; e (iii) uso da frequência relativa para estimar a probabilidade de um acontecimento. Procuramos, também, verificar até que ponto os alunos conseguem utilizar o software com base nas indicações fornecidas, trabalhar de modo autónomo e comunicar as suas conclusões.

Na elaboração da tarefa procurámos criar um contexto real, para ajudar os alunos a interpretar corretamente o problema proposto. Para isso, realizámos previamente o registo escrito dos sabores de gelado preferidos de todos os alunos da turma à qual pertencem os alunos envolvidos nesta investigação. O enunciado da tarefa pretendia levar a simular uma situação, na qual todos os alunos da turma teriam sido presenteados com um gelado do seu sabor preferido, devido à comemoração do aniversário de uma geladaria próxima da sua escola. No entanto, para que essa oferta acontecesse, teriam que jogar um jogo proposto pelo dono da geladaria: cada aluno deveria sair do estabelecimento com o seu gelado preferido numa mão e 5 cartões, cada um contendo uma letra (C, M, B, N ou L) representando os 5 sabores possíveis, na outra mão. Ao encontrar uma pessoa na rua, esta deveria escolher um cartão e caso este coincidisse com o sabor de gelado desse aluno, o gelado deveria ser cedido a essa pessoa, perdendo o aluno o seu gelado. Caso contrário, o aluno poderia comer o gelado. Partindo desta situação, os alunos deveriam proceder à sua simulação recorrendo ao software TinkerPlots e responder às seguintes questões:

1. Quantos alunos perderam o seu gelado?
2. Que percentagem de alunos comeu o seu gelado depois de jogar?
3. Qual foi o sabor de gelado mais escolhido nos cartões?
4. Imaginando que o dono da geladaria escolheu para começar as questões na rua um dos alunos da turma, ao acaso, qual a probabilidade de ele não ter escolhido alguém que tivesse como sabor preferido o chocolate?

Para a resolução da tarefa foi dada aos alunos informação sobre os sabores de gelado escolhidos por todos os alunos da sua turma, em Excel, pronta para ser copiada para TinkerPlots. Uma vez que estes desconheciam o *software*. O enunciado da tarefa foi acompanhado de um guião relativo à sua utilização. Em cada questão o guião dava indicações sobre quais os comandos a acionar para obter resultados em diferentes representações, cabendo aos alunos fazer a respetiva exploração, interpretação dos resultados e elaboração de conjeturas.

A realização da tarefa durou 50 minutos e envolveu as seguintes fases: (i) apresentação pela professora e interpretação em diálogo com os alunos, (ii) trabalho autónomo dos alunos, e (iii) discussão dos resultados obtidos. Durante o trabalho autónomo dos alunos a professora fez um acompanhamento discreto, procurando esclarecer dúvidas que os impedissem de avançar, sem no entanto, responder às questões propostas na tarefa. Os alunos trabalharam na resolução da tarefa em pares, de modo a estimular a comunicação entre eles, potenciar a compreensão da tarefa e a procura de estratégias de resolução.

4. Resultados

Apresentamos de seguida os principais resultados obtidos na exploração da tarefa, recorrendo à transcrição de episódios relevantes, agrupados consoante os aspetos que se pretendem analisar.

Interpretação do problema. Após uma primeira leitura da tarefa, os alunos afirmam ter compreendido o problema, não referindo dúvidas. No entanto, no decorrer da resolução da tarefa, algumas dificuldades surgem nas diferentes questões, sugerindo que a sua compreensão inicial é apenas parcial. Assim, na questão 1, depois de já terem seguido as instruções, simulado a situação e obtido resultados da simulação as alunas hesitam. Relêem a questão, sem saber o que fazer com os resultados obtidos, revelando alguma dificuldade na compreensão da questão. A professora intervém no sentido de orientar o seu pensamento:

Prof.: Vamos imaginar a situação. A vossa turma está na geladaria e cada aluno já tem o seu gelado preferido na mão. O que é que faziam ao sair do estabelecimento?

Beatriz: Davam os cartões. (…) Houve pessoas que acertaram e outras que não.

Prof.: Isso! E quando acertavam no sabor o que é que acontecia?

Beatriz: Eles ficavam com o mesmo gelado!

Ana: Não! Eles davam o gelado! Quando não acertavam eles davam o gelado à pessoa e quando acertavam ficavam eles com o gelado!

Beatriz: É ao contrário! Quando não acertavam, quem escolhia o sabor ficava com o gelado… Quem estava a dar os cartões… E se acertasse, a pessoa que escolheu o cartão errado, não… O certo, ficava com o gelado!

Ana: Pois, é isso! Se a pessoa acertasse no gelado, era oferecido à pessoa.

Mais adiante, na questão 4, Ana, frente ao gráfico de pontos com os sabores preferidos dos colegas mostra dificuldade em interpretar a noção de acontecimento contrário: “Sim! Estes são os preferidos. Este é o chocolate! A probabilidade de ele não ter escolhido… Não ter escolhido? É isso que eu não percebo!”

Análise e interpretação de representações dos dados e elaboração de conclusões. Este software possui permite ao utilizador aceder a qualquer momento aos dados introduzidos para cada indivíduo, permitindo a consulta simultânea de representações desses dados e da listagem de atributos para cada indivíduo. Esta característica é de imediato notada por ambos os grupos de alunos.

Na questão 1, ambos os grupos seguem corretamente as indicações fornecidas no enunciado, procedendo à simulação da situação descrita. O computador fornece aleatoriamente um sabor de gelado sucessivamente a cada indivíduo, criando uma nova coluna de sabores a que os alunos chamaram de “sabor resposta”, ao lado da coluna “sabor preferido” dos alunos da turma. A professora interpela os grupos para se certificar se compreendem o que está a acontecer:

Prof: Antes de continuar, digam lá o **que** significa essa primeira coluna da tabela?

Daniel: Os sabores escolhidos.

Prof.: E a segunda coluna?

Daniel: São… Os sabores quando eles foram à rua.

Carlos: Quando eles saíram…

Daniel: Que as pessoas escolheram, para ver se acertavam o sabor que eles tinham.

(…)

Prof.: E porque é que aparecem essas cinco cores junto da variável? *(O software junta automaticamente uma barra de cores junto à variável, que posteriormente na representação gráfica corresponderão aos sabores de gelado, mas neste momento esta representação ainda não foi realizada).*

Daniel: São os diferentes sabores. São 5 sabores.

No momento em que é pedido aos alunos para introduzir uma fórmula que permita fazer uma comparação de resultados e concluir se os alunos devem dar, ou não, o gelado, a professora procura de novo certificar-se que os alunos compreendem a fórmula que vão inserir e conseguem interpretar os resultados obtidos para dar resposta à questão:

Prof.: O que é que quer dizer essa fórmula?

Daniel: É para comparar.

Carlos: É uma equação.

Prof.: "If" significa o quê?

Carlos: "Se" em inglês. (...) *Se* o sabor preferido for igual ao sabor resposta dá o gelado.

Prof.: Caso contrário…

Carlos e Daniel: Come.

Para responder à questão 1, o primeiro impulso em ambos os grupos é fazer a contagem manual através da observação das colunas da tabela. No entanto, alguns alunos manifestam dificuldade em concentrar-se naquilo que é pedido na questão. Daniel, por exemplo, começa a contagem na tabela mas concentra-se na resposta "come o gelado" que surge um maior número de vezes e só nota o erro quando o colega chama a sua atenção. Considerando que tem que contar tudo outra vez, questiona a professora, se não há uma forma mais rápida de pôr o computador a contar e começa a explorar o software nesse sentido. No outro grupo, as alunas também procedem à contagem manual dos casos. Identificam cada um dos colegas que dá o gelado, relacionando as observações das tabelas, de resultados, com um outro quadro resultante da introdução dos dados inicialmente, chegando sem dificuldade aos resultados pretendidos através da observação dos resultados obtidos.

Na questão 2, ambos os grupos executam sem dificuldades as instruções de construção de gráficos segundo as indicações fornecidas. A primeira representação obtida, relativa à coluna "comparação" da tabela, surge, em ambos os casos, como uma nuvem de pontos com duas cores distintas. Carlos apercebe-se do erro cometido na questão anterior quando dizia que metade dos alunos tinham que oferecer o gelado, pois repara que os pontos do gráfico não estão divididos em duas cores de forma igual, existindo mais pontos verdes do que roxos:

Carlos: Deu!

Prof.: Deu o quê? O que são esses pontos?

Daniel: São as pessoas.

Carlos: Os que comeram e os que não comeram.

Prof.: E as cores diferentes?

Carlos: *(lembrando a confusão anterior).* Pois são duas cores… E não é metade!

Prof.: Qual é a cor para quem come e para quem não come?

Carlos: Acho que os que comeram são verdes e os que não comeram são roxos…

Daniel: Porque são só 3.

Ana e Beatriz também chegam à mesma conclusão. Seguem as indicações, organizam os pontos no gráfico colocando-os em colunas de cores distintas, e procedem ao cálculo automático de contagem de casos e percentagens, para responder à questão, indicada assim por Ana "Ah! Está aqui a resposta desta. E da outra também! Eram 6 pessoas que davam o gelado e agora nesta, são 73%".

Na questão 3, ao relê-la, os alunos manifestam novamente a vontade de contar, caso a caso, na tabela. A professora, sugere-lhes que façam essa contagem automaticamente, uma vez que já sabem que o software tem essa potencialidade. Ana, na tentativa de construir um gráfico novo para a coluna sabor resposta, clica, inadvertidamente, sobre a coluna pretendida e o grupo verifica, com espanto, que o gráfico anterior sobre as comparações, se alterou e apresenta agora 5 cores distintas, percebendo que como cada ponto representa um aluno, antes cada um estava colorido com as cores resultantes da coluna comparação e agora com o sabor escolhido por cada aluno:

Beatriz: Olha!

Ana: Está aqui! Estão as cores…

Beatriz: Aparece cada sabor de cada um.

A professora pede que organizem os dados e as alunas começam a arrastar os pontos coloridos separando-os por cores.

Ana: Que giro! Agora dá o que eu preciso (…) o sabor de gelado mais escolhido foi a nata… e o chocolate.

Uso da frequência relativa para estimar a probabilidade de um acontecimento. Os alunos associam a frequência relativa ao conceito de probabilidade de forma intuitiva. Carlos e Daniel, por exemplo, lêem a questão e procuram interpretar:

Carlos: *(depois de ler)* Então, são todos menos o chocolate.

Daniel: *(conta na tabela de resultados fornecida pela professora no inicio da tarefa)* São 17! Mas isto tem que se fazer também no gráfico não é professora?

Prof.: Vê lá se consegues.

Os alunos consultam o gráfico da questão anterior, não tendo em conta que este se refere aos sabores escolhidos nos cartões e não o que se pretende:

Carlos: *(conta os pontos do gráfico)* São 5 a dividir por 22.

Prof.: *(chamando a atenção)* Mas é nesse gráfico? Esse não é o sabor resposta?

Daniel: Ah! Pois é!

Os alunos constroem novo gráfico de pontos sobre a variável correta e sem dificuldade manipulam os pontos de forma a organizá-los por sabores, pedindo as respetivas contagens, como explica Carlos: "Então vamos somar estes todos *(apontando para as colunas de pontos que não são chocolate)* e fazer a probabilidade. Somamos morango, baunilha, nata e limão e dividimos pelo total". A professora tenta então estabelecer a relação entre probabilidade e os conhecimentos de estatística adquiridos em anos anteriores:

Prof.: Quando vocês faziam as tabelas de frequências, na Estatística, isso correspondia a quê?

Daniel: Era a frequência absoluta… Não… Relativa.

Prof.: Como é que se calculava a frequência relativa?

Carlos: Era o número total… Não… Era o número de resultados a dividir pelo número total. É isto!

Daniel: É a probabilidade. É a mesma coisa.

Prof.: As probabilidades podem apresentar-se na forma de fração e de outras formas. Quais?

Carlos: Percentagem… Ah! Faz lá aí a percentagem Daniel! Lógico! *(Daniel executa o comando)*. Tá! Temos todas as percentagens dos sabores. Vamos somar.

O cálculo mental das percentagens dos 4 sabores restantes revela-se complicado e Daniel opta por manipular os pontos, juntando os pontos das cores que não são chocolate, verificando que a percentagem de cada coluna de pontos se altera, até obter a resposta: 63%.

5. Conclusão

Tendo em conta que os alunos nunca tinham trabalhado com este tipo de software, consideramos que a experiência produziu resultados interessantes. Os alunos resolveram a tarefa sem demonstrar dificuldades no seguimento das instruções fornecidas, interpretando as representações gráficas que foram construindo e revelando uma noção intuitiva de probabilidade. O conceito de frequência relativa foi usado na estimação da probabilidade dos acontecimentos de forma natural, a partir da visualização das representações gráficas elaboradas. Os alunos não revelaram dificuldade em associar de forma intuitiva o conceito frequencista de probabilidade à definição clássica. A manipulação dos pontos do gráfico representativos dos diferentes alunos, permitiu-lhes agrupar facilmente os dados de acordo com as suas necessidades e testar conjeturas que iam formulando à medida que avançavam na exploração dos resultados. Associaram as cores obtidas nos diferentes pontos dos gráficos às variáveis que estes representavam, e este tipo de visualização contribuiu claramente, no caso de Carlos, para a compreensão das duas primeiras questões.

Os alunos revelaram autonomia na realização da tarefa e comunicaram adequadamente as conclusões obtidas para cada questão. A interação entre os alunos durante a realização da tarefa, no trabalho de pares, revelou-se muito importante, levando-os a corrigir os seus raciocínios quase sempre sem a intervenção da professora. Deste modo formularam conjeturas, testaram-nas através da manipulação e da visualização de diferentes tipos de representação gráfica, e tiraram conclusões.

O facto dos dados terem sido recolhidos na turma em causa, criou um contexto que ajudou na interpretação da situação. No entanto, os alunos revelaram algumas dificuldades de interpretação na compreensão do enunciado, em especial, confundindo quando deveriam oferecer ou comer o gelado bem como em perceber o acontecimento contrário. Após ultrapassarem estas dificuldades, a análise e interpretação das diferentes representações dos dados permitiu-lhes chegar às conclusões pretendidas, tendo respondido de forma correta a todas as questões. Em vários momentos, os alunos, tomaram a iniciativa de explorar o software na procura de representações gráficas que melhor se ajustassem às suas conjeturas e a manipulação dos pontos do gráfico. Isto tornou-se uma constante a partir do momento que se aperceberam que poderiam agrupar os dados conforme fosse necessário, quase instantaneamente. Esta potencialidade motivou-os na exploração das questões pedidas, levando-os a tomar a iniciativa de observar aspetos não pedidos na tarefa proposta, realizando contagens que não eram pedidas ou explorando como os dados ficariam representados noutros tipos de gráfico.

Referências

Branco, J., & Martins, M. E. G. (2002). Literacia estatística. *Educação e Matemática, 69,* 9-13.

Chaput, B., Girard, J.-C., & Henry, M. (2011). Frequencist approach: Modelling and simulation in statistics and probability teaching. In C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education*

(pp. 85-95). NewYork, NY: Springer.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) Report*. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Lee, H. S., & Hollebrands, K. F. (2011). Characterizing and developing teachers' knowledge for teaching statistics with technology. In C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education* (pp. 359-369). NewYork, NY: Springer.

Martins, M. E. G., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: DGIDC. (descarregado em 23/3/2013 de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/ matematicaOTD_Final.pdf)

Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico.* Lisboa: DGIDC. (descarregado em 23/3/2013 de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/ 028_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf)

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Pratt, D., Davies, N., & Connor, D. (2011).The role of technology in teaching and learning statistics. In C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education* (pp. 97-107). NewYork, NY: Springer.

Ridgway, J., Nicholson, J., & McCusker, S. (2011). Developing statistical literacy in students and teachers. In C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education* (pp. 311-322). NewYork, NY: Springer.

Pegada ecológica: tarefas estatísticas

Raposo, Sónia[1]*; Nascimento, Maria*[2]*; Estrada, Assumpta*[3] y *Martins, Alexandre*[4]

[1]Agrupamento de Escolas Abel Botelho de Tabuaço
[2]Centro de Matemática da UTAD, U. de Trás os Montes e Alto Douro
[3]Universitat de Lleida
[4]Instituto Politécnico da Guarda y CM-UTAD

Resumo

No estudo de Raposo (2010) pretendeu-se descrever e analisar o desempenho dos alunos na exploração do tema Organização e Tratamento de Dados (OTD) de acordo com o, então, novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME – DGIDC, 2007). Para tal foi estruturado um conjunto de tarefas proposto aos alunos nas aulas de uma turma de 7º ano do Ensino Básico português (12-13 anos). Essas tarefas tiveram como tema a sustentabilidade e a abordagem foi feita com base nos "dados dos alunos" a partir do questionário (adaptado) da pegada ecológica. Trabalhou-se em grupo, usaram-se os computadores e apresentaram-se os trabalhos à turma. Este estudo é de natureza qualitativa e interpretativa e os dados foram recolhidos através da gravação áudio das aulas com observações sistemáticas das intervenções dos alunos; na análise dos documentos dos alunos. Neste texto, apresentaremos as tarefas e a sua planificação e discutimo-las na perspetiva das cinco componentes do raciocínio estatístico e do ciclo investigativos de Wild e Pfannkuch (1999). A implementação destas tarefas nas aulas de Matemática permitiu que os alunos se entusiasmassem com a Matemática e se envolvessem na OTD. Os alunos foram unânimes em considerar que foram as melhores aulas que tiveram.

Palavras-chave: Organização e Tratamento de Dados (OTD), Estatística, Raciocínio Estatístico, Tarefas.

1. Introdução

A Organização e Tratamento de Dados (OTD) pretende ser uma introdução às Probabilidades e à Estatística (enquanto áreas da Matemática), tendo estas passado a integrar os programas de Matemática portugueses em meados da década 80. A competência matemática que todos devem desenvolver inclui conhecimentos de estatística e probabilidades, os quais constituem uma ferramenta imprescindível em diversos campos da actividade científica, profissional, política e social.

Fernandes et al. (2004, p.179) corroboram esta ideia referindo que "a linguagem, as técnicas e os processos estatísticos estão presentes em cada página do jornal, sendo usados para sustentar afirmações nos mais diversos domínios, do desporto à saúde, da economia à política". Se mais não fosse estas destrezas incorporam a componente de "cultura estatística" (Batanero, 2002) sinónimo de literacia estatística incluídas no Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) cujo propósito da OTD é (ME – DGIDC, 2007, p.59): "Desenvolver nos alunos a capacidade de compreender e de produzir informação

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 505-513). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

estatística bem como de a utilizar para resolver problemas e tomar decisões informadas e argumentadas, e ainda desenvolver a compreensão da noção de probabilidade."

Este propósito enquadra-se no que ficou dito, bem como na evolução e visibilidade que o ensino da estatística tem vindo a ter ao longo dos anos, pelo menos enquanto motor para o desenvolvimento da literacia estatística. Como escreveu Moore (1990, p. 135) "(...) o raciocínio estatístico, entendido em sentido lato, deveria ser parte do equipamento mental de qualquer pessoa letrada". De acordo com Wild e Pfannkuch (1999), o raciocínio estatístico envolve cinco componentes que descrevem como (tradução livre):

- *Reconhecer a necessidade dos dados:* muitas situações da vida real só podem ser compreendidas a partir da análise de dados recolhidos adequadamente de modo a poder fazer julgamentos sobre situações reais;
- *Transnumeração:* a representação dos dados (por exemplo, tabelas, gráficos, medidas de tendência central e de dispersão) para facilitar a sua compreensão;
- *Perceção da variação*: com dados recolhidos de forma correta e com análises corretas requer que se compreenda a variação, a sua variabilidade que se transmite através dos dados, bem como a variação não explicada que é a componente da incerteza;
- *Raciocínio com modelos estatísticos:* um gráfico, uma medida descritiva, uma reta ajustada podem ser considerados modelos, pois são formas de representar a realidade. A estatística permite fazer previsões, procurar explicações e causas de variação, bem como apreender o contexto, não só para observar mas também para interpretar as mensagens existentes nos dados;
- *Integração da estatística e do contexto* é a quinta componente e que para muitos estudos é a justificação da sua existência, não só para observar, mas também para interpretar as mensagens existentes nos dados.

Wild e Pfannkuch (1999) também pensaram na dimensão do ciclo investigativo, – PPDAC (Problema, Planear, Dados, Analisar e Concluir) – como decisivo para a execução do raciocínio estatístico com o objetivo de desenvolver num projeto estatístico as cinco componentes referidas. Na literatura anglo-saxónica, este ciclo PPDAC é adotado no projeto inter-escolas do Census@School implementado para desenvolver a literacia estatística dos alunos com base nos "seus próprios dados". Assim, interligando as cinco componentes do raciocínio estatístico e o ciclo investigativo PPDAC "adaptámos" o poster do Census@School (2008), Figura 1 (Nascimento, 2013).

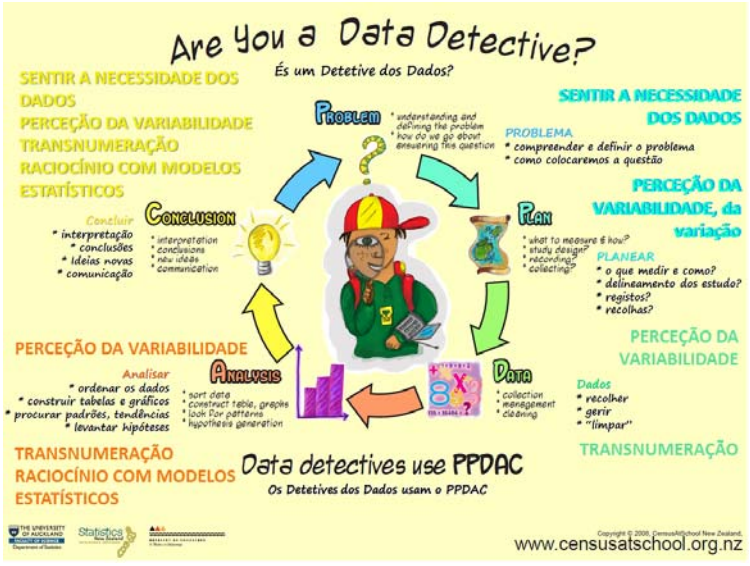


Figura 1. Interligação entre as cinco componentes do raciocínio estatístico e o ciclo investigativo PPDAC (tradução livre e adaptação, Nascimento, 2013)

A interligação entre estas componentes e o ciclo PPDAC enquadram-se nos objectivos gerais do PMEB e na metodologia sugerida para a abordagem no ensino do tema OTD nas práticas letivas. O trabalho de Raposo (2010) neste tema de OTD teve um carácter experimental, apelando às capacidades compreender e de produzir informação estatística, bem como de a utilizar para resolver problemas e, ainda, à sua capacidade de comunicação. Os alunos foram detetives dos dados – recolheram os seus dados através do questionário (adaptado) da pegada ecológica (PE) – e executaram nas aulas tarefas que foram as orientadoras do seu trabalho nos tópicos desse tema. Os alunos para além das pesquisas na Internet também usaram a folha de cálculo do computador, pois esta tem que começar a ser uma ferramenta habitual e indispensável na OTD.

Neste texto pretendemos apresentar e discutir as tarefas na perspetiva das interligações entre as cinco componentes do raciocínio estatístico de Wild e Pfannkuch (1999) e do ciclo PPDAC.

2. Metodologia

No estudo desenvolvido adoptou-se uma metodologia de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) e uma abordagem interpretativa (Denzin & Lincoln, 1994), uma vez que foi direccionado para a apresentação e discussão das tarefas e da sua implementação no contexto da OTD no âmbito do (então, novo) PMEB. Com a sua apresentação e planificação, a discussão será direcionada na perspetiva das cinco componentes do raciocínio estatístico de Wild e Pfannkuch (1999) e do ciclo PPDAC. Para atingir estes objectivos e, na sequência do trabalho de Raposo (2010), foram recolhidos dados através da gravação vídeo e áudio das aulas, bem como foram digitalizados todos os documentos escritos produzidos pelos alunos nas aulas ou foram feitas fotografias. Também foram guardados todos os ficheiros de folhas de cálculo, documentos e apresentações produzidas pelos alunos.

Este estudo foi realizado num colégio do Norte de Portugal, escola na qual a professora (e investigadora) leccionava há 10 anos. O colégio fica situado numa aldeia do distrito de Vila Real e é um colégio do Ensino Particular e Cooperativo e, na altura do estudo, era frequentado por cerca de 500 alunos em 15 turmas desde o 5.º até ao 9.º ano do Ensino Básico e por 2 Cursos de Educação e Formação. O estudo realizou-se numa turma do 7.º ano deste colégio. A turma era constituída por 24 alunos, dos quais 16 são rapazes e 8 são raparigas. A média das idades dos alunos da turma é 12 anos e apenas 3 alunos têm 14 anos, porque frequentavam o 7.º ano pela segunda vez. Os alunos foram informados na 1ª aula do período que iriam fazer parte do estudo e foram-lhes explicadas as finalidades do mesmo, a sua importância, bem como solicitadas todas as autorizações necessárias. Os 8 grupos de trabalho foram formados pelo Diretor de Turma e autorizados pela Direcção do Colégio.

No trabalho de Raposo (2010) as tarefas foram elaboradas pela professora e foram orientadoras do trabalho dos alunos no conjunto das aulas atribuídas aos conteúdos deste tema OTD. As tarefas foram elaboradas tendo em atenção a planificação dos conteúdos lecionados (Figura 2) e as diretrizes do Ministério da Educação. A recolha de dados foi feita no início do ano lectivo 2009/2010 e as aulas decorram na sala de informática.

Aulas	Datas em 2009	Proposta
1.ª e 2.ª	16 e 21/09	Apresentação do tema a ser estudado com o inquérito (pegada ecológica, PE); Tarefa 1; Elaboração de cartazes sobre a PE.
3.ª	23/09	Escolha de um subtema dos questionários pelos grupos; Atribuição das codificações das questões; Contagem e organização dos dados; Introdução dos dados na folha de cálculo
4.ª, 5.ª e 6.ª	28, 30 e 07/10	Resolução da tarefa 2; Elaboração da apresentação do trabalho de grupo
7.ª e 8.ª	12 e 14/10	Apresentação dos trabalhos de grupo

Figura 2. Planificação

Na secção seguinte apresentaremos a análise e a discussão das tarefas e a sua exploração.

3. Análise e discussão

3.1. Base de trabalho das tarefas: o questionário

Aquando da seleção do questionário a professora optou por um tema actual e relevante para os alunos: o questionário da PE, adaptado do questionário disponível na página da Internet da *Quercus* (2007). Ao elaborar o questionário este foi dividido em oito partes: pegada da habitação, pegada da alimentação, pegada dos transportes e da mobilidade, pegada dos resíduos e pegada do consumo; pegadas globais do 7º, do 8º e do 9º ano (12 a 15 anos) do 3.º Ciclo do Ensino Básico. Os questionários foram preenchidos por todos os alunos do colégio na 1ª aula de Matemática.

A professora assumiu a decisão sobre o tema (primeiro P do ciclo PPDAC), tendo-se substituído aos alunos na definição do problema. Além disso, a professora também assumiu a liderança na etapa do planeamento (segundo P do ciclo PPDAC): por um lado decidiu o que medir e como, por outro decidiu a quem era apresentado o questionário. Por este motivo os alunos, na realidade não sentiram a necessidade inicial dos dados. No ciclo investigativo PPDAC parece-nos que o envolvimento dos seus alunos na abordagem do problema e do planeamento ficou empobrecido.

3.2 Breve descrição e exploração das tarefas nas aulas

Tarefa 1. A 1ª aula do estudo destinou-se à pesquisa na internet de informação acerca da importância dos recursos do planeta, cálculo da PE de cada aluno e à elaboração de um cartaz alusivo ao tema. Com esta tarefa pretendia-se que os alunos tomassem contacto com o tema escolhido e que seleccionassem as informações que considerassem importantes com o objectivo de os sensibilizar para a sustentabilidade da vida no nosso planeta e sobre a PE. Os alunos distribuíram-se por grupos nos computadores, usando cada grupo sempre o mesmo computador até ao final do estudo. A professora pediu-lhes para ligarem os computadores e a agitação inicial foi geral, pois era a primeira vez que vinham para uma sala de computadores numa aula.

A professora distribuiu a Tarefa 1, em suporte de papel (Figura 3) e indicou aos alunos como aceder à pasta onde se encontrava a mesma tarefa em suporte digital.

Tarefa 1

Nome: _____ **N.º:** _____

1. Os sites indicados contêm informações sobre a pegada ecológica. Consulta alguns deles e selecciona a informação que considerares mais importante sobre este tema.

http://www.esb.ucp.pt/gea/myfiles/pegada/pegada.htm
http://pt.wikipedia.org/wiki/Pegada_ecol%C3%B3gica
http://www.quercustv.org/spip.php?article109
http://conservacao.quercusancn.pt/content/view/46/70/

http://sustentabilidadenaoepalavraeaccao.blogspot.com/2009/03/qual-sua-pegada-ecologica.html
http://www.futurenergia.org/ww/pt/pub/futurenergia/chats/carbon_imprint.htm
http://prod.cmav2.acd.pt/portal/page/portal/AMBIENTE/PEGADA/?amb=0&ambiente_pegada=4862098&cboui=4862098
http://www.myfootprint.org/
http://www.earthday.net/footprint/flash.html
http://www.footprintnetwork.org/en/index.php/GFN/
http://www.ecologicalfootprint.com/
http://www.ecologicalfootprint.org/Global%20Footprint%20Calculator/GFPCalc.html
http://images.google.pt/images?hl=pt-PT&source=hp&q=footprint&um=1&ie=UTF-8&ei=IVSYSvnqL9eNjAfVsaG0BQ&sa=X&oi=image_result_group&ct=title&resnum=5
http://www.sustainablescale.org/ConceptualFramework/UnderstandingScale/MeasuringScale/EcologicalFootprint.aspx

2. Elaborem, em grupo, um cartaz no qual expressem as vossas ideias sobre o tema em estudo (poluição, recursos, sustentabilidade, planeta e pegada).

Figura 3. Tarefa 1

A professora apresentou o tema em estudo: o tema da sustentabilidade. Na pesquisa na Internet a maior dificuldade dos alunos foi a de lidar com as ligações da tarefa em suporte digital: os alunos não sabiam que "clicando" diretamente nos endereços a página surgiria. Após esta pesquisa pelos alunos, a professora fez a apresentação digital sobre a PE. Os alunos completaram as ideias e conceitos da sustentabilidade e sobre a PE nos diapositivos dessa apresentação com o material que tinham pesquisado na aula. Na **2ª aula** desta Tarefa 1 elaboraram-se os cartazes.

Se quanto à definição inicial do problema e do planeamento os alunos não participaram, através da pesquisa na Internet acabaram por se inteirar e completar as ideias apresentadas pela professora sobre a sustentabilidade e sobre a PE. Assim, fica-nos a dúvida da perceção clara dos alunos sobre, quer a necessidade dos dados, quer sobre a sua variabilidade. Em todo o caso a participação dos alunos permitiu à professora criar um contexto apelativo que eles passaram a tomar como "seu".

Tarefa 2. Esta tarefa foi dividida em duas partes. Na 1ª parte (3ª aula) procedeu-se à escolha do subtema dos questionários por parte de cada grupo (Tarefa 2, 1ª parte), às codificações de cada pergunta e à introdução dos dados numa folha de cálculo. Antes da codificação classificaram-se as variáveis em estudo no questionário (assunto usado nas aulas, mas não explicitado no tema OTD do PMEB) como qualitativas nominais ou ordinais e como quantitativas discretas ou contínuas. Os alunos não demonstraram ter dificuldades na divisão das variáveis em qualitativas e quantitativas. No entanto, evidenciaram dificuldades em classificá-las em nominais ou ordinais e metade dos grupos não teve dificuldades em identificar as variáveis quantitativas discretas e contínuas.

A professora compilou numa tabela os valores encontrados pelos grupos e expressos nas tabelas que construíram, para que, na aula seguinte, já pudessem começar a resolver a 2.ª parte da tarefa 2.

Como primeiro passo na etapa do tratamento dos dados (D no ciclo PPDAC) os alunos aprenderam a distinguir os tipos e as escalas das variáveis, o que acaba por, de alguma forma, lhes fazer sentir a necessidade dos dados. Em seguida a professora retomou o controlo da etapa ao recolher e gerir a base de dados, resumindo os dados em tabelas (transnumeração). Compreendemos que o tenha feito para otimizar a sua planificação, mas talvez tenha minimizado a perceção dos alunos sobre a variabilidade dos dados.

Tarefa 2 – 2.ª Parte

Nome: _____ N.º: ____

O ***objectivo*** desta tarefa é aplicares os conhecimentos estatísticos que possuis para caracterizares os dados. Utiliza diferentes tipos de tabelas, gráficos, medidas de tendência central e de dispersão que achares mais adequados e tira conclusões acerca dos resultados obtidos.

1. Para a 3.ª pergunta do questionário, escreve um pequeno texto no qual escrevas a análise que efectuas acerca desta questão. Classifica a variável, organiza os dados de forma a completares a tabela que se segue e constrói os gráficos e calcula as medidas que achares adequadas.

Sexo	Número de alunos (frequência absoluta)	Percentagem de alunos (frequência relativa)
Masculino		
Feminino		
	Total:	Total:

2. Para a 4.ª pergunta do questionário escreve um pequeno texto no qual analises os dados e incluas os seguintes itens: preenchimento da tabela que se segue; construção de gráficos (incluindo diagramas de extremos e quartis); cálculo das medidas de tendência central e de dispersão; comparação dos valores obtidos.

Idade	Número de raparigas	Número de rapazes	Número de alunos (frequência absoluta)	Percentagem de alunos (frequência relativa)
11				
12				
13				
14				
15				
16				
			Total:	Total:

Por exemplo usa as questões seguintes para orientar o teu estudo: Constrói um gráfico de barras que traduza a informação, referente à frequência absoluta, contida na tabela anterior. Determina a média aritmética das idades dos alunos; Qual a moda das idades dos alunos? Determina a mediana das idades dos alunos; Se entrasse um novo aluno cuja idade é 14 anos, que efeito teria sobre a média, a moda e a mediana? Justifica a tua resposta; Se entrasse um novo aluno cuja idade é 13 anos, que efeito teria sobre a média, a moda e a mediana? Justifica a tua resposta. Qual é a idade mínima dos alunos? Qual é a idade máxima dos alunos? Determina a amplitude das idades dos alunos? Qual é o 1.º quartil das idades dos alunos? Qual é o 3.º quartil das idades dos alunos? Constrói o diagrama de extremos e quartis para as idades dos alunos.

3. Para as restantes perguntas do questionário da tua pegada elabora as tabelas e gráficos que achares pertinentes, bem como as medidas de tendência central e de dispersão adequadas. Determina a pegada média que o teu grupo estudou.

4. Elabora um trabalho, em powerpoint, no qual incluas as informações do estudo que efectuaste que achares relevantes e as conclusões acerca da pegada da que determinaste.

Figura 4. Tarefa 2, 2ª parte

Na 2ª parte (aulas 4, 5 e 6) foram abordados todos os conteúdos para OTD, ou seja, foram tratadas as diversas representações gráficas, as medidas de localização e de dispersão e no final, procedeu-se à discussão dos resultados obtidos. Na 4ª aula a professora entregou aos alunos, em papel, a 2.ª parte da Tarefa 2 (Figura 4), documento que também estava na pasta digital, bem como a compilação dos dados dos questionários para análise. Os alunos avançaram para a construção de gráficos que teve dois momentos, no primeiro a maior parte dos grupos começou por construir os gráficos no papel, fazendo-o correctamente e sem dificuldades. Apenas alguns grupos se aventuraram a fazê-los logo no computador. No 2º momento a professora solicitou a todos os grupos que efectuassem a sua construção usando a folha de cálculo do computador e aí surgiram algumas dificuldades evidenciadas pelos alunos. Por exemplo, na Figura 5, da esquerda para a direita, no gráfico construído pelos grupos relativos ao ano de escolaridade dos alunos falta tudo; no gráfico das idades dos alunos não foram alterados os valores dos rótulos das abcissas que seriam as idades de 11 a 16, nem indicaram que se referiam a anos de idade; no gráfico do local de compra dos produtos falta a legenda. Na 5ª aula a professora solicitou aos grupos que resolvessem, pelo menos, as perguntas 1 e 2 da Tarefa 2.

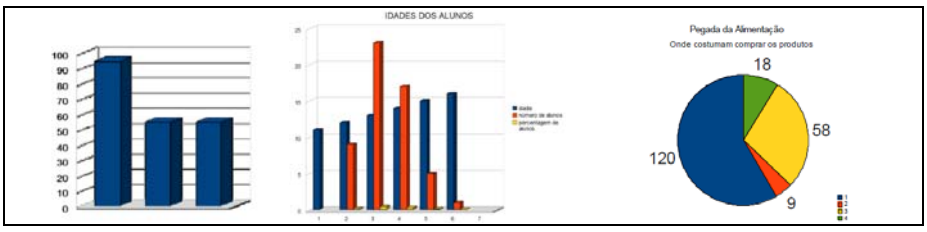


Figura 5. Gráfico construído pelos grupos exemplificando algumas das suas dificuldades

Após a construção dos gráficos e da análise dos mesmos, os grupos escreveram um pequeno texto sobre a variável género. As dificuldades surgiram porque houve grupos que não perceberam o que era um relatório sobre uma variável estatística e outros perceberam mas no relatório apenas se "relê" o gráfico (Figura 6). Quanto ao cálculo das medidas de tendência central e de dispersão, já não foi uma tarefa tão simples, os alunos não se lembravam das medidas de tendência central e tiveram que aprender as medidas de dispersão. Além disso, como não estavam familiarizados com a folha de cálculo, também aí tiveram dificuldades. A professora explicou e exemplificou como construir um diagrama de

extremos e quartis numa folha de papel, após o que solicitou aos grupos que construíssem o diagrama de extremos e quartis para os seus casos.

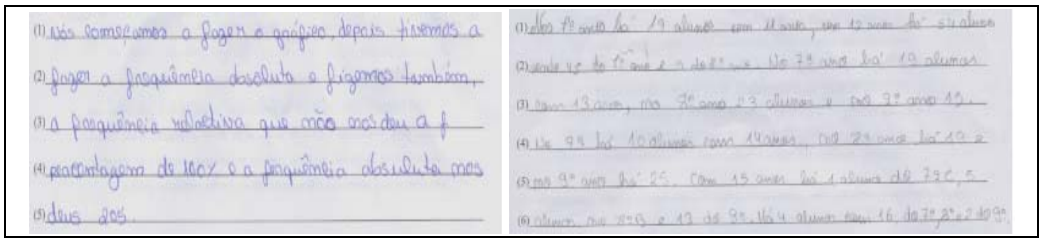


Figura 6. À esquerda o relatório do grupo que não percebeu o que era um relatório e à direita o relatório do grupo que "releu o gráfico"

Na 6ª aula os grupos resolveram as perguntas 3 e 4 (Figura 4) e alguns grupos ainda iniciaram a resolução da pergunta 5. No início dessa aula, professora relembrou aos alunos as regras da apresentação do trabalho: cada grupo teria até 15 minutos e todos os elementos do grupo teriam que falar. Na apresentação deveria constar: a introdução ao tema, as informações, os gráficos e as tabelas que considerassem mais importantes e, por fim, as conclusões. Durante a aula foi acompanhando os trabalhos que os grupos estavam a realizar.

Em relação à análise dos dados (A do ciclo PPDAC) parece-nos que a 2ª parte da Tarefa 2 acabou por ser o guião para ordenar os dados, para a construção das tabelas e dos gráficos e, ainda, para os cálculos das medidas de tendência central e de dispersão (transnumeração e raciocínio com modelos estatísticos). Contudo, ao sugerir caminhos e ao direcionar questões para os alunos, a professora visou mais a apreensão de conteúdos de OTD do que a sua autonomia como detetives dos dados. Por este motivo, mais uma vez, ficamos com dúvidas sobre a perceção da variabilidade com que os alunos ficaram. Todavia parece-nos que esta abordagem é mais motivadora para os alunos do que os tradicionais exercícios descontextualizados.

Nas 7ª e 8ª aulas os grupos procederam à apresentação dos trabalhos. Houve dificuldades a nível da expressão, pois alguns dos alunos quase não intervieram e tiveram que ser ajudados pela professora para conseguirem ler o seu acetato. No entanto, houve alunos que estavam à vontade na apresentação do seu acetato. Na Figura 7 apresentam-se, a título de exemplo, dois dos acetatos feitos pelos grupos.

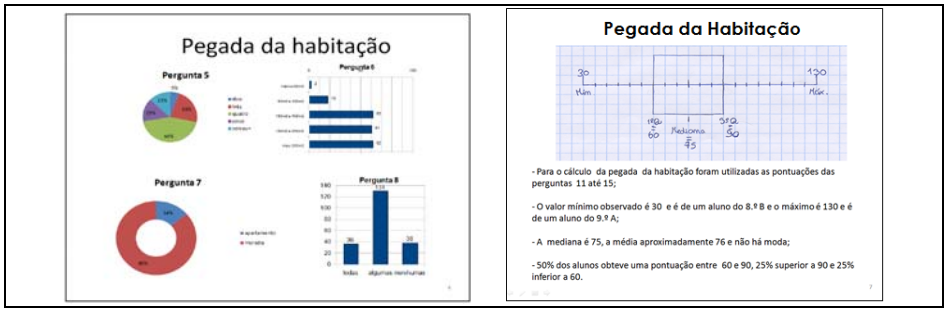


Figura 7. Exemplos de dois acetatos apresentados pelos grupos

Ao exigir a produção de um documento de síntese para apresentação dinâmica a professora pretendeu despoletar a aprendizagem de uma etapa do ciclo investigativo habitualmente não abordada nas aulas de Matemática (tema da OTD), a etapa das conclusões (C do ciclo PPDAC). Assim, os alunos tentaram interpretações, conclusões e praticaram a comunicação. Para tal, de alguma forma, tiveram que se socorrer das cinco componentes mencionadas por Wild e Pfannkuch (1999), com menos destaque para a perceção da variabilidade pelas razões já apresentadas.

4. Considerações Finais

Neste texto em que apresentámos uma perspetiva sobre a investigação desenvolvida por Raposo (2010) no tema de OTD consideramos que se puderam destacar, de forma resumida, algumas dificuldades sentidas pelos alunos. Entre elas a que se evidenciou foi a dificuldade no uso dos computadores para realização do trabalho com dados na aula de Matemática.

Neste nosso trabalho é nossa opinião que, pelo menos em parte, os alunos do 7º ano desta professora foram detetives dos dados. A partir do questionário (adaptado) da PE foram recolhidos os dados e, nas aulas, os alunos executaram tarefas que foram orientadoras do seu trabalho nos tópicos do tema OTD. Consideramos que ainda é necessário que os professores invistam nas investigações estatísticas de acordo com o ciclo investigativo PPDAC proposto por Wild e Pfannkuch (1999). Ou seja, têm que fazer com que os alunos se apercebam e tomem como suas essas etapas, quer em investigações completas sobre uma questão, quer em trabalhos que incidam, preferencialmente, sobre algumas delas. Contudo, na investigação de Raposo (2010), a apropriação dos dados pelos alunos levou-os a tomar contacto (implícito) com as etapas do PPDAC. Esta abordagem não é comum no tema de OTD das aulas de Matemática. Assim sendo, parece-nos que usar todo o ciclo investigativo é mais motivador e gerador de autonomia dos alunos do que os tradicionais exercícios e problemas descontextualizados e desgarrados. Em resumo: A implementação destas tarefas nas aulas de Matemática permitiu que os alunos se entusiasmassem com a Matemática, se envolvessem na OTD e aprendessem a usar os computadores na aula de Matemática. Os alunos foram unânimes em considerar que foram as melhores aulas que tiveram.

Referências

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística, Buenos Aires.* Disponível em: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.pdf

Bogdan, R. y Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Census@School. (2008). Data detectives poster. Disponível em: http://new.censusatschool.org.nz/resource/data-detective-poster/

Denzin, N. y Lincoln, Y. (1994). *Handbook of qualitaty research.* California, EUA: Sage Publications.

Fernandes, J. A., Sousa, M. V. y Ribeiro, S. A. (2004). O ensino da estatística no ensino básico e secundário. In Fernandes, Sousa & Ribeiro (Eds.). *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística.* Braga: Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho.

Moore, D. S. (1990). Uncertainty. In Steen (Ed.). *On the shoulders of giants – New approaches to numeracy.* (pp.95-137). Washington, DC: National Research Council.

Nascimento, M. M. S. (2013). ESTATÍSTICA 2013: Em deus confiamos, todos os outros têm que trazer os dados! *Atas do ProfMat 2013.* Albufeira, Portuga, março de 2013.

Ministério da Educação (ME – DGIDC). (2007). Programa de matemática do ensino básico. Lisboa: ME – DGIDC. Disponível em: http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinobasico/index.php?s=directorio&pid=71

Quercus (2007). Pegada ecológica. Disponível em: http://www.quercustv.org/spip.php?article109.

Raposo, S. (2010). *A pegada ecológica na organização e tratamento de dados: Uma proposta para o 7º Ano*. (Dissertação de Mestrado). Vila Real: UTAD.

Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

Potencialidades do uso da folha de cálculo na construção de tabelas e gráficos estatísticos

José António Fernandes[1], António Pereira de Vasconcelos[2], Catarina Vasconcelos Pereira Gonçalves[3]

[1]Universidade do Minho

[2]Escola Básica de Vila Verde

Resumo

O uso dos computadores, seja através de software ou da internet, tem marcado uma presença cada vez maior no estudo da Estatística. No caso da folha de cálculo, tratando-se de um software de fácil acesso, ele tem sido usado nas escolas por professores e alunos, sobretudo no caso da Estatística. Tendo por referência dois estudos realizados sobre o uso da folha de cálculo na construção de tabelas e gráficos estatísticos, envolvendo alunos do 7º ano, neste texto comparam-se o desempenho dos alunos na construção dos gráficos com e sem a folha de cálculo e avaliam-se as suas perceções acerca do uso da folha de cálculo. Em termos dos resultados, destacam-se um melhor desempenho dos alunos quando usam a folha de cálculo e reações muito favoráveis à utilização da folha de cálculo.

Palavras-chave: Folha de cálculo; Construção de tabelas e gráficos estatísticos; Alunos do 7º ano.

Introdução

O uso crescente dos novos recursos tecnológicos na sociedade atual tem-se repercutido também na escola, onde as calculadoras, os computadores e a internet constituem meios à disposição de professores e alunos tendo em vista a melhoria do processo de ensino e aprendizagem.

No caso da Estatística, comparativamente com outras áreas, o uso destes novos meios é preconizado ainda com maior ênfase. Para Jolliffe (2007) deve-se à chamada revolução tecnológica as maiores alterações no ensino da Estatística, que, por sua vez, afetam o modo como ela é avaliada. Propor aos alunos para resolverem problemas reais com dados reais e relatar os resultados obtidos é agora praticável de uma maneira que o não era no passado, e os educadores acreditam que o uso de dados reais em tópicos de interesse dos alunos contribui para a sua motivação em aprenderem Estatística e para gostarem de o fazer (Fernandes, Carvalho & Correia, 2011).

De entre os novos recursos tecnológicos, a folha de cálculo Excel é especialmente adequada para o estudo da Estatística nos diferentes níveis escolares e a sua acessibilidade, resultante da sua integração no software de base dos PCs, aumenta o seu interesse em termos educativos.

No presente trabalho, centrado no uso da folha de cálculo Excel, por alunos do 7º ano, estudamos o desempenho e as perceções dos alunos sobre a construção de tabelas e gráficos estatísticos quando utilizam esse software.

Enquadramento teórico

Segundo Ben-Zvi (2000), vários atributos dos computadores parecem contribuir para o desenvolvimento do sentido e significados dos alunos, nomeadamente: a capacidade de operar de forma rápida e precisa; ligar dinamicamente múltiplas representações; simplificar

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 515-522). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

procedimentos; fornecer feedback e transformar uma representação como um todo num objeto manipulável. Para este autor, as representações como um todo, podendo ser editadas, transformadas, combinadas, separadas em partes, armazenadas, evocadas, etc., "implicam uma reorganização da atividade cognitiva e uma mudança do foco de atenção para um nível cognitivo superior" (p. 141).

Estes atributos alteram as assunções acerca do que deve ser aprendido e implicam que o currículo de Estatística seja reformulado de acordo, incluindo os materiais de ensino, as práticas de sala de aula e a forma de os alunos aprenderem. Neste sentido, Moore (1997) perspetiva as ferramentas tecnológicas como meios de apoiar os alunos na construção ativa do conhecimento, proporcionar oportunidades para os alunos refletirem sobre fenómenos observados, ajudar os alunos a desenvolver capacidades metacognitivas e renovar o ensino e o currículo na base de fortes sinergias entre conteúdo, pedagogia e tecnologia.

Por outro lado, as ferramentas tecnológicas, ao proporcionarem um fácil acesso a representações textuais, gráficas, tabulares e numéricas, podem ajudar o aluno a alternar o seu discurso entre diferentes domínios, designadamente de contexto, gráfico e dos dados.

Preconizando uma mudança do ensino tradicional da Estatística, como um tópico matemático, enfatizando cálculos, fórmulas e procedimentos, para um ensino enfatizando o raciocínio estatístico e a capacidade de interpretar, avaliar e aplicar de forma flexível as ideias estatísticas, Ben-Zvi (2000) sintetiza as recomendações para um primeiro curso de Estatística: 1. Incorporar mais dados e mais conceitos e diminuir a importância das receitas e deduções formais; 2. Sempre que possível, automatizar os cálculos e a construção dos gráficos através do uso de tecnologia; 3. Promover uma aprendizagem ativa através de vários formatos de ensino; 4. Encorajar uma gama mais ampla de atitudes ─ incluindo apreciar o poder dos processos estatísticos, o acaso, a aleatoriedade e o rigor investigativo ─ e uma propensão para se tornar um avaliador crítico das informações estatísticas; 5. Usar métodos alternativos de avaliação (p. 130).

Situando-nos no caso das tabelas e gráficos estatísticos, a capacidade básica dos computadores para os construir de forma rápida e rigorosa permite aos alunos focarem-se na sua interpretação e não tanto na sua construção, potenciando assim concretizar as recomendações atuais para a aprendizagem da Estatística, tal como é referido por Fernandes e Vaz (1998) para o caso da matemática em geral. Também para Batanero (2002), se pretendemos acompanhar a evolução da educação estatística, promovendo uma verdadeira cultura estatística na sociedade, teremos de aceitar a rápida mudança tecnológica que nos permitirá libertar dos cálculos enfadonhos, rotineiros e descontextualizados.

Simultaneamente, as aprendizagens dos alunos beneficiam da boa relação que eles mantêm com o uso das ferramentas tecnológicas. Por exemplo, num estudo de Fernandes, Sousa e Ribeiro (2004), todos os professores participantes foram unânimes em reconhecer que o uso das ferramentas tecnológicas, nas quais se incluíam a folha de cálculo, calculadoras gráficas e outro software, para além de constituírem recursos muitos adequados para o ensino e a aprendizagem da Estatística, têm um efeito motivador na aprendizagem dos alunos, mantendo-os interessados e perseverantes na resolução das tarefas.

Os gráficos estatísticos são objetos matemáticos complexos que implicam uma série de ações e envolvem vários procedimentos, conceitos e propriedades, que variam nos diferentes tipos de gráficos (Ruiz, Arteaga & Batanero, 2009). Arteaga (2011) apresenta quatro níveis de complexidade semiótica dos gráficos estatísticos: nível 1, em que o aluno representa apenas valores individuais; nível 2, em que o aluno representa valores individuais da variável; nível 3, em que o aluno produz gráficos separados para cada distribuição; nível 4, em que o aluno produz um gráfico conjunto para cada par de distribuições.

A construção de gráficos usando papel e lápis ou a folha de cálculo

No estudo de Vasconcelos (2012), centrado na utilização da folha de cálculo na construção de tabelas e gráficos estatísticos, em que participou uma turma do 7º ano, num total de 26 alunos, algumas tarefas foram realizadas com papel e lápis e depois com a folha de cálculo Excel. Na Tabela 1 apresentam-se as percentagens de alunos que apresentaram respostas adequadas, inadequadas e que não responderam nas questões envolvendo a construção de tabelas estatísticas.

Tabela 1. Percentagem de respostas nas questões de construção de tabelas quando os alunos usaram papel e lápis e a folha de cálculo

Questões	Papel e lápis			Folha de cálculo		
	Adequada	Inadequada	NR	Adequada	Inadequada	NR
1	54	38	8	62	30	8
2	0	46	54	8	69	23
3	38	31	31	46	39	15

Nota: NR – Não Responde.

Já no caso das questões envolvendo a construção de gráficos estatísticos, na Tabela 2 apresentam-se também as percentagens de alunos que apresentaram respostas adequadas, inadequadas e que não responderam.

Tabela 2. Percentagem de respostas nas questões de construção de gráficos quando os alunos usaram papel e lápis e a folha de cálculo

Questões	Papel e lápis			Folha de cálculo		
	Adequada	Inadequada	NR	Adequada	Inadequada	NR
1	46	46	8	54	38	8
2	8	54	54	8	61	39
3	38	23	39	38	31	23
4	23	39	38	31	55	14
5	38	24	38	38	32	30
6	54	31	15	62	31	7

Nota: NR – Não Responde.

Tanto nas questões de construção de tabelas como de gráficos observa-se que, globalmente, os alunos apresentaram um melhor desempenho quando recorreram à folha de cálculo. Além disso, verifica-se também que quando os alunos usaram a folha de cálculo Excel há uma redução de não respostas em ambos os casos.

A diminuição do número de não respostas, quer no caso da construção de tabelas quer no caso da construção de gráficos, quando é usada a folha de cálculo, parece indiciar que os alunos são mais persistentes em tentar uma resposta, que, globalmente, se repercute num melhor desempenho dos alunos no conjunto dessas tarefas.

Comparando agora os níveis de complexidade semiótica dos gráficos construídos pelos alunos quando usaram o papel e lápis e quando usaram a folha de cálculo, recorrendo aos quatro níveis de Artega (2011), obtiveram-se os resultados que constam da Tabela 3.

Tabela 3. Percentagem de respostas segundo o nível de complexidade semiótica dos gráficos construídos quando os alunos usaram papel e lápis e a folha de cálculo

Questões	Papel e lápis					Folha de cálculo				
	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	NR	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	NR
1	46	46	NA	NA	8	23	69	NA	NA	8
2	23	31	8	—	38	23	23	—	23	31
3	15	46	NA	NA	39	23	54	NA	NA	23
4	—	8	23	16	53	—	8	54	24	14
5	—	—	46	16	38	—	8	46	16	30
6	—	—	54	8	38	—	4	66	8	22

Nota: NA – Não se Aplica; NR – Não Responde.

Por observação da Tabela 3, conclui-se que, em geral, ao longo das várias questões, os níveis de complexidade semiótica dos gráficos construídos com a folha de cálculo são tendencialmente superiores do que aqueles que foram construídos com papel e lápis.

Em ambas as questões 1 e 3 é superior a percentagem de alunos que constroem gráficos de nível de complexidade semiótica 2, que nestas duas questões corresponde ao maior nível de complexidade semiótica possível. Também se verifica que nas restantes questões é superior a percentagem de alunos que constroem gráficos de nível de complexidade semiótica 3 ou 4, que nestas questões correspondem aos dois maiores níveis de complexidade semiótica possíveis.

Perceções dos alunos sobre o uso da folha de cálculo

No estudo de Vasconcelos (2012) os alunos foram ainda inquiridos através de um questionário aplicado em três momentos distintos, ao longo da resolução das várias questões, com o propósito de conhecer as suas opiniões sobre a realização das tarefas, tendo-se obtido os resultados que constam da Tabela 4.

Tabela 4. Razões para terem gostado de resolver as tarefas

Razões apontadas pelos alunos	Nº de alunos (%)
Foi resolvida no computador com Excel	29 (38)
Foi fácil e esclarecedor	14 (18)
Aprendi muito com o Excel	7 (9)
Foi interessante e divertido	5 (6)
É assim que gosto das aulas	3 (4)
Facilitou os cálculos	3 (4)
Gosto muito de estatística	3 (4)
Compreendi tudo, apesar das dificuldades	3 (4)
Foi a melhor	2 (3)
Foi difícil	1 (1)
O professor deu pouca ajuda	1 (1)
Outras	3 (4)
Não responde	3 (4)
Total	77 (100)

De entre as razões apontadas pelos alunos para terem gostado de resolver as tarefas, destaca-se o facto de as terem resolvido no computador com a folha de cálculo Excel (com 38% das referências) e de terem aprendido muito como o Excel (com 9% das referências), o que perfaz quase metade de todas as referências dos alunos.

Seguidamente questionaram-se os alunos sobre as razões da importância do uso da folha de cálculo, tendo-se obtido os resultados que constam da Tabela 5.

Tabela 5. Porque foi importante usar a folha de cálculo

Razões apontadas pelos alunos	Nº de alunos (%)
Simplifica a tarefa	18 (23)
Foi mais fácil de resolver	11 (14)
Facilita os cálculos/trabalho	11 (14)
Ajudou-me a perceber	8 (11)
Foi possível ver se era mais fácil trabalhar com ou sem o computador	7 (9)
Mais rápido	4 (5)
Não precisei de materiais para fazer gráficos	4 (5)
Não foi importante	4 (5)
Foi mais lento	2 (3)
Não responde	8 (11)
Total	77 (100)

Dos resultados da Tabela 5 salienta-se que o uso da folha de cálculo simplifica a tarefa (com 23 % de referências), torna mais fácil a sua resolução e os cálculos/trabalho

envolvidos (ambas com 14% de referências) e ajudou o aluno a perceber (com 11% de referências).

Ainda no estudo de Vasconcelos (2012) os alunos foram entrevistados sobre a experiência de ensino em que tinham participado, tendo sido unânimes em considerar que as aulas com tecnologia foram mais interessantes. A este propósito, o aluno A_{11} afirmou: "Gosto mais das aulas com tecnologia porque é uma maneira diferente de realizar as tarefas, mais fácil, mais rápido, mais certificado e mais organizado" (p. 103).

A folha de cálculo foi considerada uma ferramenta útil na aprendizagem da Estatística, a maioria dos alunos, 85%, considerou-se capaz de trabalhar com a folha de cálculo e foram referidas várias vantagens no seu uso, como se mostra na Figura 3.

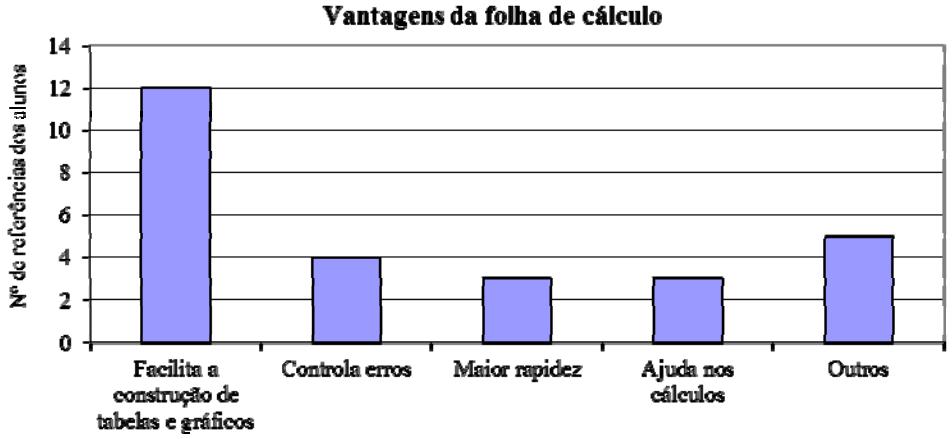


Figura 3. Vantagens da folha de cálculo indicadas na entrevista individual.

Grande parte dos alunos deste estudo gostou das aulas de Estatística com tecnologia (84%) e considerou que a tecnologia os motivou para a aprendizagem em Estatística (89%).

Quanto ao modo como aprendem melhor Estatística, 85% dos alunos considerou que combinando o papel e lápis com a folha de cálculo conseguem aprender melhor, 12% dos alunos aprende melhor apenas com a folha de cálculo e 4% só com papel e lápis. Os alunos que optaram pela combinação do papel e lápis com a folha de cálculo consideraram que fazer um esboço na folha de papel é sempre importante, como referiu o aluno A_{14}: "Aprende-se melhor com os dois porque no papel fazíamos um esboço e depois no computador ficava melhor e víamos realmente se não tinha nenhum erro".

Em geral, a maior parte dos alunos da turma (63%) mencionou o gráfico de barras como o tema em que a tecnologia mais contribuiu para a sua aprendizagem em Estatística. Este gráfico, segundo Fernandes, Morais e Lacaz (2011), é o mais utilizado pelos alunos na escola para representar conjuntos de dados, o que pode explicar a opinião dos alunos. Por outro lado, o histograma foi o gráfico com menor percentagem (16%), sendo também esse o gráfico estatístico em que os alunos demonstraram mais dificuldades no estudo de Fernandes, Morais e Lacaz (2011).

Também no estudo de Gonçalves (2011) os alunos de uma turma de 7º ano, num total de 19, foram inquiridos, através de um questionário, sobre o uso da tecnologia na construção de tabelas e gráficos estatísticos.

De todos os aspetos aludidos pelos alunos, observa-se pela Tabela 6 que a maioria das referências dos alunos menciona exatamente o uso da tecnologia.

Tabela 6. Aspetos positivos considerados pelos alunos na intervenção de ensino com tecnologia

Aspetos positivos	% de alunos
Tecnologia	58
Estatística	37
Trabalho de grupo	11

Conceitos estatísticos	5
Trabalho individual	5

Questionando, seguidamente, os alunos sobre vários itens, tipo escala de Likert, acerca o uso da tecnologia na aprendizagem de Estatística, obtiveram-se os resultados constantes da Tabela 7.

Tabela 7. Percentagem dos alunos segundo as opções de reposta, média e desvio-padrão dos itens relativas ao uso de tecnologia

A tecnologia na aprendizagem de Estatística	DT/D	I	C/CT	$\bar{x}$	s
Globalmente, gostei das aulas de Estatística com tecnologia.	—	16	84	4,1	0,62
As aulas com tecnologia motivaram-me para a aprendizagem em Estatística.	—	11	89	4,1	0,57
As aulas com tecnologia são mais aliciantes.	—	16	84	4,1	0,62
A tecnologia levou-me a entender melhor a aplicabilidade da Estatística no nosso quotidiano.	—	21	79	3,8	0,50
Quando foram projetadas as resoluções em Excel dos grupos, senti-me mais motivado para partilhar com a turma as resoluções do meu grupo.	10	16	74	3,7	0,95
A folha de cálculo mostrou-se uma ferramenta útil na aprendizagem em Estatística.	5	5	90	4,1	0,74
De uma atividade para a seguinte as minhas dificuldades no manuseamento da folha de cálculo foram desaparecendo.	5	21	74	3,9	0,99
Sinto-me capaz de trabalhar sozinho na folha de cálculo.	16	26	58	3,5	0,91
Aprendo melhor Estatística quando uso tecnologia.	—	16	84	4,2	0,69
Aprendo melhor Estatística quando uso papel e lápis.	47	37	16	2,5	0,97
Aprendo melhor Estatística quando combino o uso de papel e lápis com tecnologia.	5	21	74	3,9	1,00
O uso de tecnologia levou-me a repensar os meus raciocínios.	5	11	84	3,9	0,66
Nas tarefas em que foi usado o computador houve mais discussão no meu grupo.	21	26	53	3,6	1,26
Ao experimentar no computador desenvolvi o meu sentido crítico.	11	21	68	3,7	0,82
No futuro gostaria de aprender outros temas de matemática com recurso à tecnologia.	5	21	84	4,0	1,06

Nota: DT/D – Discordo Totalmente ou Discordo (D); I – Indiferente; C/CT – Concordo ou Concordo Totalmente.

Excetuando o item "Aprendo melhor Estatística quando uso papel e lápis", em todos os outros obteve-se um valor da média variando entre 3,5 e 4,1 (num valor máximo de 5), o que significa existir uma tendência de concordância em todos esses itens.

Quase todos os alunos percecionam o uso da tecnologia de forma muito favorável, tendo gostado das aulas de Estatística em que foi usada (84%) e considerando essas aulas mais aliciantes (84%), motivando-os para aprender Estatística (89%) e entendendo melhor a aplicabilidade da Estatística no quotidiano (79%).

No que diz respeito ao uso da folha de cálculo como a ferramenta tecnológica utilizada na intervenção de ensino, quase todos alunos a perspetivaram como uma ferramenta útil na aprendizagem de Estatística (90%) e grande parte dos alunos (74%) afirmou que as dificuldades no manuseamento da folha de cálculo foram desaparecendo com o seu progressivo uso.

A maioria dos alunos afirmou aprender melhor Estatística quando usava tecnologia (84%) e quando combinava a tecnologia com papel e lápis (74%). Por outro lado, também a maioria dos alunos indicou o uso da tecnologia como uma forma de os levar a repensar os raciocínios (84%), de encorajar a partilha das suas resoluções (74%), de despoletar a discussão no grupo (53%) e de desenvolvimento do seu o sentido crítico (68%).

Numa análise mais pormenorizada, observaram-se algumas diferenças nas perceções dos rapazes e das raparigas e entre os melhores alunos e aqueles que têm mais dificuldades.

No que diz respeito à tecnologia, na análise por sexo, verificou-se que as raparigas, em média ($\bar{x} = 3{,}5$), dão mais importância à utilidade da folha de cálculo na aprendizagem em Estatística do que os rapazes ($\bar{x} = 2{,}3$). No mesmo sentido, as raparigas ($\bar{x} = 3{,}9$) dão mais ênfase à aprendizagem de Estatística quando usam tecnologia do que os rapazes ($\bar{x} = 3{,}0$). No entanto, os rapazes, em média ($\bar{x} = 3{,}5$), revelam sentir-se mais capazes de trabalhar sozinhos na folha de cálculo do que as raparigas ($\bar{x} = 2{,}7$).

Da análise por desempenho, denota-se que os alunos com desempenho mais fraco, em média, valorizam mais a aprendizagem só com tecnologia ($\bar{x} = 4{,}0$) do que os alunos com desempenho médio ($\bar{x} = 3{,}5$) e bom ($\bar{x} = 3{,}8$).

Conclusão

Dos resultados dos dois estudos aqui analisados, quando é usada a folha de cálculo, destaca-se um melhor desempenho dos alunos na construção de tabelas e gráficos estatísticos, bem como a construção de gráficos de maior complexidade semiótica. Simultaneamente, o melhor desempenho dos alunos deve-se, principalmente, à redução das não respostas, o que indicia que o uso da folha de cálculo incentivou os alunos a não desistirem perante as dificuldades tão facilmente como quando usaram papel e lápis.

Em ambos os estudos analisados, o uso da folha de cálculo foi o aspeto metodológico mais valorizado pelos alunos, as dificuldades dos alunos no manuseamento da folha de cálculo foram-se dissipando com o seu uso e os alunos perspetivaram a combinação do uso da folha de cálculo com o papel e lápis, tal como tinha acontecido nas aulas.

Quase todos os alunos gostaram das aulas de Estatística com tecnologia e sentiram-se motivados pelo seu uso, salientando-se no estudo de Vasconcelos (2012) a facilidade, rapidez e rigor da construção dos gráficos e no estudo de Gonçalves (2011) os aspetos de raciocínio, interativos e de sentido crítico.

Ainda no estudo de Gonçalves (2011) se destaca a maior importância atribuída pelas raparigas à utilidade da tecnologia e da folha de cálculo, manifestando-se os rapazes mais autónomos na utilização da folha de cálculo. Por outro lado, os alunos de desempenho mais fraco valorizam mais a aprendizagem só com tecnologia.

Referências

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tese de doutoramento, Universidade de Granada, Granada.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*, Buenos Aires. Conferência inaugural.

Ben-Zvi, D. (2000). Toward understanding the role of technological tools in statistical learning. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1-2), 127-155.

Fernandes, J. A. & Vaz, O. (1998). Porquê usar tecnologia nas aulas de matemática? *Boletim da SPM*, 39, 43-55.

Fernandes, J. A., Carvalho, C. F. & Correia, P. F. (2011). Contributos para a Caracterização do Ensino da Estatística nas Escolas. *Boletim de Educação Matemática*, 24(39), 585-606.

Fernandes, J. A., Morais, P. C. & Lacaz, T. V. S. (2011). Representação de dados através de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. In *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Recife, Brasil, 26-30 Junho 2011.

Fernandes, J. A., Sousa, M. V. & Ribeiro, S. A. (2004). O ensino de estatística no ensino básico e secundário: Um estudo exploratório. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Actas do I Encontro de*

Probabilidades e Estatística na Escola (pp. 165-193). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Gonçalves, C. V. P. (2011). *O ensino e a aprendizagem de Estatística com tecnologia: uma experiência no 7º ano de escolaridade*, Relatório de mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Jolliffe, F. (2007). The changing brave new world of statistics assessment. In Phillips B. and Weldon L. (Eds.), *The Proceedings of the ISI/IASE Satellite on Assessing Student Learning in Statistics*, Voorburg: International Statistical Institute, The Netherlands.

Moore, D. S. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistical Review, 65,* 123–165.

Ruiz, B., Arteaga, P. Batanero, C. (2009). Comparación de distribuciones: ¿Una actividad sencilla para los futuros profesores? In J. A. Fernandes, M. H. Marinho, F. Viseu & P. F. Correia (Orgs.), *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 37-51). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Vasconcelos, A. P. (2012). *Utilização da folha de cálculo por alunos do 7º ano na construção de tabelas de frequências e gráficos estatísticos*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Práticas profissionais dos professores do 1.º ciclo com representações estatísticas[1]

Velez, Isabel y Ponte, João Pedro

Universidade de Lisboa

Resumo

O modo como o professor trabalha com as representações estatísticas tem uma grande influência na aprendizagem dos seus alunos. É importante que use representações que levem os alunos a interpretar, sistematizar, visualizar e compreender os dados existentes. Para além disso, o professor deve igualmente encorajá-los a comparar as suas representações, proporcionando momentos de discussão. Em Portugal, o programa de Matemática de 2007 dá uma enfase significativa à organização e tratamento de dados (OTD), referindo que os alunos devem começar desde o 1.º ciclo a lidar com conceitos e representações estatísticas, desenvolvendo progressivamente a capacidade de ler, recolher e interpretar dados na forma de tabelas e gráficos. Esta orientação curricular torna relevante perceber de que forma os professores trabalham as representações estatísticas na sala de aula. Como planificam o trabalho com a OTD a realizar? Que representações privilegiam? Que tarefas utilizam e que fatores influenciam a sua escolha? Que dificuldades preveem nos alunos? Como aplicam as tarefas escolhidas? A que representações dos alunos dão maior importância? Que feedback dão aos seus alunos? Discutimos estas questões tendo por base os dados obtidos a partir do trabalho de um grupo colaborativo de professores do 1.º ciclo do ensino básico. Para isso, analisamos as sessões de planificação de tarefas, a realização das tarefas na aula e as reflexões dos professores após as aulas.

Palavras chave: Professores, Prática profissional, Representações estatísticas, 1.º ciclo.

1. Introdução

O ensino e a aprendizagem da Estatística tem vindo a merecer interesse crescente por parte dos investigadores. Em Portugal, os documentos curriculares em vigor (ME, 2007) referem a importância de trabalhar a Estatística logo desde os primeiros anos. Isto constitui uma inovação considerável em relação ao programa anterior (datado de 1990) e que apenas fazia vagas referências a este tema. Por consequência, os professores do 1.º ciclo do ensino básico (que ensinam alunos de 6-9 anos) estão ainda a constituir as suas práticas profissionais relativamente ao ensino deste tema. Conhecer como se está a processar o desenvolvimento destas práticas é muito importante, pois, como sabemos, a aprendizagem dos alunos depende em larga medida do trabalho realizado pelo professor na sala de aula (Ponte, 1994).

Nesta comunicação, analisamos a prática profissional de um grupo de quatro professores do 3.º ano do 1.º ciclo do ensino básico relativamente à forma como trabalham as representações estatísticas com os seus alunos. Pretendemos perceber de que forma estes professores promovem a aprendizagem e compreensão das representações estatísticas nos

[1] Trabalho financiado por fundos nacionais FCT – Organização para a Ciência e Tecnologia, através do projeto Developing Statistical Literacy (PTDC/CPECED/117933/2010).

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 523-530). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

seus alunos e, através da observação da planificação, da realização na aula e da reflexão sobre as tarefas, procuramos identificar os aspetos que mais valorizam e as implicações que isso pode ter para a aprendizagem dos alunos.

2. Práticas dos professores e representações estatísticas em matemática

O programa de Matemática (ME, 2007) introduziu um conjunto de novas orientações curriculares para o ensino da Estatística em Portugal, nomeadamente no 1.º ciclo do ensino básico, num tema designado Organização e tratamento de dados (OTD). Este documento refere que é necessário que os alunos comecem desde o 1.º ciclo a lidar com conceitos e representações estatísticas, desenvolvendo progressivamente a capacidade de ler, recolher e interpretar dados na forma de tabelas e gráficos. Na sequência da generalização do programa foram divulgados materiais de apoio com indicações para os professores, nomeadamente no campo da OTD (Martins & Ponte, 2010). De acordo com estes materiais, na leitura e interpretação de pictogramas os alunos devem compreender o que representa cada símbolo ou imagem, o valor a ele associado e que todos os símbolos têm o mesmo valor. No caso dos pictogramas em que cada símbolo não tem um valor unitário, devem conseguir identificar a legenda e compreender o seu significado. Quando constroem ou completam um pictograma devem ter presente que a cada categoria corresponde uma coluna de símbolos, que a distância entre colunas de símbolos deve ser igual, que todos os símbolos são iguais e têm obrigatoriamente o mesmo tamanho. Apesar da orientação das colunas de símbolos poder ser horizontal ou vertical, estes devem estar devidamente organizadas e "empilhados" junto ao eixo das variáveis.

Tendo em conta a influência que as práticas dos professores têm na aprendizagem dos alunos, as suas decisões durante a escolha, preparação, realização e reflexão sobre tarefas que propõem na sala de aula são cruciais. Saxe (1999) caracteriza as práticas como atividades realizadas com regularidade, sendo facilmente reconhecíveis na rotina diária. Por sua vez, as atividades que define são constituídas por ações, cuja realização decorre de certos motivos, e que só têm sentido dentro do contexto dessa atividade (Jaworski & Potari, 2009). Pelo seu lado, Schoenfeld (2000) considera que os objetivos de uma tarefa podem ser predeterminados (previstos na planificação) ou emergentes (surgindo no decorrer da aula). Este autor propõe um modelo para o estudo do processo de ensino do professor focado na forma como toma decisões, nas prioridades que define, nos planos de ação que formula, tendo também em atenção o modo como estes planos são depois concretizados ou não em sequências de ação. Deste modo, como sugerem Ponte, Quaresma e Branco (2012), para compreender a forma como o professor atua na prática, podemos procurar analisar o seu trabalho dentro e fora da sala de aula observando as suas ações e analisando o seu discurso em contextos reflexivos (através de entrevistas, conversas informais, etc..).

3. Metodologia

Este estudo usa uma abordagem qualitativa e interpretativa, estando inserido no trabalho colaborativo da investigadora (primeira autora desta comunicação) e quatro professores do 1.º ciclo (três professores do 3.º ano e uma professora de apoio de Matemática) de um mesmo agrupamento situado perto de Lisboa. Todos os participantes têm menos de cinco anos de serviço e trabalham neste agrupamento há pelo menos dois anos. Os professores envolvidos na investigação reúnem-se quinzenalmente com a investigadora em sessões de trabalho em que discutem, planificam e refletem sobre as tarefas realizadas com os alunos. Nesta comunicação, a identidade dos professores é preservada e os tanto os seus nomes como os dos alunos são fictícios.

Os alunos resolveram duas tarefas numa sessão que durou cerca de duas horas. Por razões de espaço, nesta comunicação analisamos apenas os dados recolhidos relativamente à

segunda tarefa. Durante a aula, os alunos trabalharam individualmente e no final discutiram em sessão coletiva (toda a turma) os resultados. No início da aula, os professores distribuíram uma ficha com as tarefas, explicaram o enunciado, deram vinte minutos aos alunos para a resolução de cada tarefa e, no final, houve uma discussão coletiva. Durante a realização da tarefa estiveram presentes a investigadora, o professor titular de turma e a professora de apoio Sandra. Cerca de uma semana depois, teve lugar uma nova sessão de trabalho na qual os quatro professores refletiram mais aprofundadamente sobre a realização das tarefas. A investigadora teve um papel participante, na medida em que, durante todo o processo, questionou e ajudou os professores a refletir nas tarefas. Para além disso, durante as aulas interagiu com os alunos a propósito da exploração da tarefa, enquanto estes a resolviam individualmente, ajudando-os sempre que o solicitavam.

4. Os professores e as representações estatísticas

Planificação da tarefa. A investigadora propôs duas tarefas para que os professores escolhessem uma delas. Os professores decidiram realizar ambas porque consideram que, por um lado, os pictogramas são mais fáceis de trabalhar, mas é igualmente importante que os alunos trabalhem gráficos de barras. Para além disso, os professores acharam importante realizar a tarefa com pictogramas dada a sua natureza aberta, bastante diferente das que habitualmente costumam fazer. Na sua perspetiva, os alunos são pouco autocríticos em relação às soluções que apresentam e é importante que realizem tarefas que lhes permitam explorar e comparar soluções e estratégias diferentes. Assim, a tarefa que analisamos nesta comunicação é a indicada na Figura 1.

Antes de realizarem a tarefa na sala de aula, os professores referem vários aspetos que consideram que devem ser analisados. Mostram dar mais valor às tarefas envolvendo gráficos de barras e consideram-nos mais difíceis que os pictogramas, mas, tal como Sónia refere, acham que é importante trabalhar com os alunos os dois tipos de representação:

> Sónia: Eu acho mais fácil o pictograma, mas acho que podíamos tentar os dois. Eu, pessoalmente acho mais fácil o pictograma. Quer dizer (olha para a legenda do pictograma) Se calhar valendo vinte e cinco não é tão mais fácil…
>
> Ricardo: Pois… Porque eles vão logo dizer (aponta para a coluna dos bifes) "Aaaa… Aqui… Bifes? Cinco!" (…)
>
> Sónia: A minha questão é que, ao construir a segunda etapa, que é completar o gráfico, será mais difícil do que aqui (aponta para o gráfico de barras)… Porque aqui tu andas um, dois, três…
>
> Sandra: Não, mas isto aqui [o pictograma]… Isto é fácil… É só desenhar caixas!
>
> Sónia: Mas são vinte e cinco cada uma!
>
> Catarina: Já desde o ano passado que nós trabalhamos isto com eles!
>
> Sofia: Vamos tentar! Acho que é uma coisa a experimentar! Vamos lá tentar!

1- Completa o gráfico, sabendo que existem 5 caixas com embalagens de arroz e 1 com esparguete.

2- Se fosses a cozinheira da cantina, o que comeriam, na segunda-feira, os 100 alunos que almoçam na escola? Não te esqueças de escolher um tipo de proteína e um acompanhamento.

3- É possível servir 125 almoços na terça-feira, sem ter que comprar mais alimentos? Como?

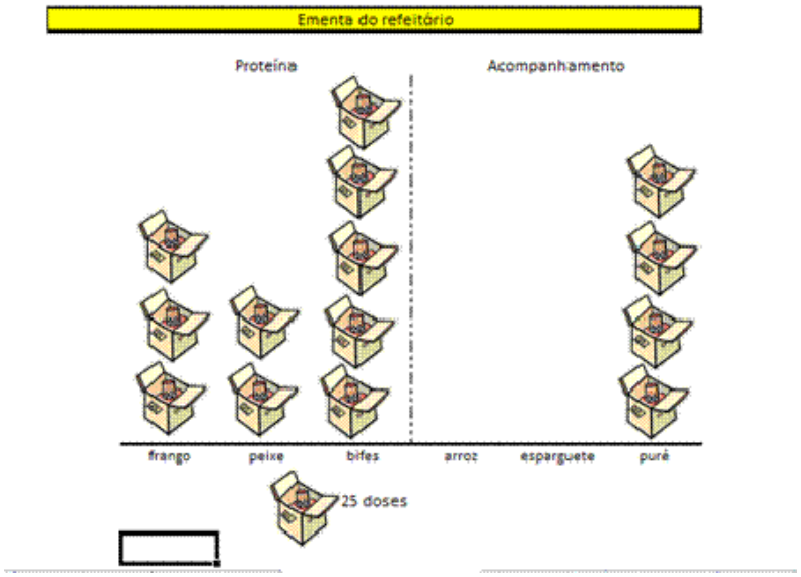


Figura 1. Tarefa "Ementa do refeitório"

Ao analisar o pictograma, Sónia e Ricardo identificam algumas das dificuldades que podem surgir nos alunos, relacionadas com a interpretação da legenda. Na opinião dos professores, a escala utilizada no pictograma pode ser um elemento a dificultar a compreensão dos alunos, em comparação com tarefas em que a escala é de "1 em 1". Enquanto Sandra e Carla não encontram dificuldade nesta tarefa por considerarem que o pictograma é uma representação familiar com que os alunos já trabalham habitualmente, Sónia e Ricardo temem que os alunos não consigam identificar a legenda nem compreendam o seu significado. Uma vez que não existe um eixo das ordenadas indicando a escala utilizada (como acontece no gráfico de barras) receiam que os alunos não compreendam que para determinar o número de refeições, tenham que multiplicar o número de caixas por vinte e cinco. Apesar de não mudarem de opinião, Sónia e Ricardo aceitam o desafio de realizar esta tarefa, com alguma expetativa.

Os professores discutem pormenorizadamente cada pergunta, tentando perceber que outras dificuldades podem surgir. Assim, na segunda questão determinam que a única proteína que podem utilizar é o bife (pois têm que utilizar 100 doses) que pode ser conjugado com puré ou arroz. A terceira pergunta revela-se mais problemática, na medida em que Ricardo refere que é possível responder positivamente e Sandra tem uma opinião contrária. De acordo com a professora, não é possível dar 125 refeições na terça-feira visto que anteriormente os alunos gastaram o único alimento que possibilitaria uma resposta afirmativa nesta questão. Ricardo e Sofia referem que nada indica que só se possa utilizar um tipo de proteína "Uns podiam comer frango e outros podiam comer peixe! É possível comer 125 almoços!". Mesmo com este argumento de Ricardo, Sandra fica renitente e contra-argumenta dizendo que essa não é uma situação real na vida dos alunos, visto que todos comem sempre o mesmo no refeitório. Considera, assim, que os alunos poderão limitar a sua resposta tendo em conta as suas vivências. Apesar desta reserva, os professores decidiram propor a tarefa nos termos indicados.

Realização da tarefa. Durante a realização da tarefa, os professores pedem a um aluno que leia o enunciado e questionam todos os alunos da turma sobre possíveis dúvidas. De seguida, dão-lhes cerca de vinte minutos para que resolvam a tarefa individualmente e andam entre as mesas ajudando aqueles que solicitam o seu apoio. Alguns alunos têm dificuldades em preencher o pictograma com facilidade, desenhando caixas com diferentes tamanhos, espalhadas pelo pictograma ou afastadas do eixo das abcissas. Os professores optam por não intervir durante a exploração da tarefa e preferem abordar o assunto durante a

discussão de turma, de forma a sistematizar nessa altura as convenções dos pictogramas com os alunos.

Ainda durante a aula Sónia refere: "Nós achamos que é tão lógico que não lhes explicamos… E eles, às vezes, chegam e fazem asneiras e tu dizes: "Pah… Ele faz esta asneira porque até agora, não aprendeu que era assim… Não é?" Às vezes acaba por ser um bocado por isso…" Deste modo, durante a aula, Sónia apercebe-se da importância do seu papel para que os alunos compreendam as convenções dos pictogramas. Considera que ao assumir que os conceitos são lógicos e que não faz sentido abordá-los com os alunos contribuiu para as dificuldades dos alunos nesta tarefa.

Na questão 3 surgiu outra dificuldade, pois alguns alunos tentam encontrar formas de "construir" o número vinte e cinco em vez de "prepararem" 125 refeições. Perante esta situação, Sónia sente necessidade de rever as condições do problema junto de Caetana.

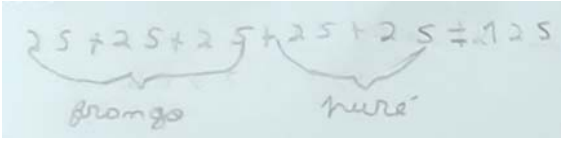


Figura 2. Representação utilizada por Caetana em resposta à pergunta 3.

Sónia: Porque é que fez assim Caetana? Na pergunta três? (…)

Caetana: Fiz… Não lembro…

Sónia: Tu tens aqui… Nós, para as refeições… Tens aqui puré e tem aqui frango e, no total… Dão para quantas refeições?

Caetana: 125…

Sónia: Mas nós tínhamos visto que nas refeições temos que ter uma proteína e um acompanhamento… Certo? Tu comes só puré simples? Ou comes só frango simples? (…) Então… Aqui tu tens 125 doses de proteína e 125 doses de acompanhamento? Tens? Ou tens no total, a proteína e o acompanhamento juntos dão 125?

Caetana: Juntos…

Sónia: E é isso que nós pretendemos?

Caetana: Não…(…)[e] eu fiz as proteínas e acompanhamentos juntos…

Nesta sua intervenção, Sónia começa por se certificar de que compreende a representação da aluna e Caetana confirma que para si, estão representadas 125 refeições. A professora opta por relembrar a aluna das condições do problema e, para isso, recorre a exemplos do quotidiano para que esta perceba por que razão não faz sentido juntar cinco caixas (3+2) de dois alimentos diferentes. Depois de Caetana reconhecer que se enganou e identificar o erro, a professora deixa-a trabalhar sozinha e a aluna resolve a tarefa com sucesso.

Durante a discussão em grande grupo, os professores questionam os alunos sobre as soluções encontradas e, por vezes, pedem-lhes que expliquem como encontraram o resultado. Discutem também com os alunos alguns dos aspetos que consideram como geradores de dificuldades. Tal como tinham previsto durante a exploração da tarefa, relembram-lhes as convenções dos pictogramas e dão alguns exemplos de situações incorretas patentes no trabalho dos alunos, desenhando-as no quadro sem referir os nomes de quem as fez (figura 3).

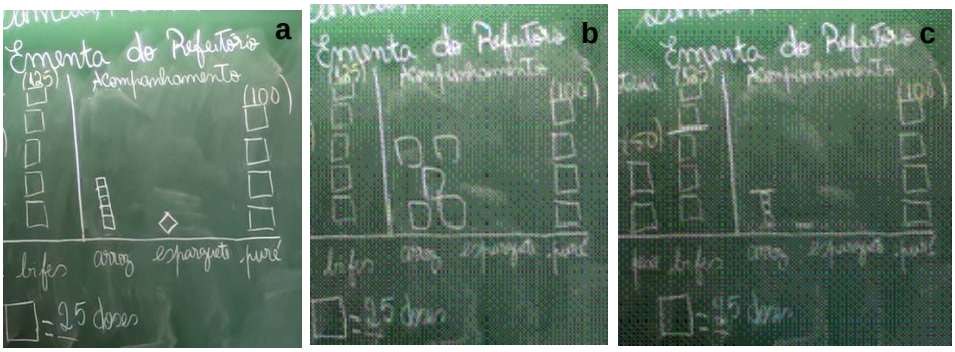


Figura 3. Representações utilizada por Sónia para exemplificar soluções incorretas.

Assim, referem que, ao contrário do que acontece em (a), as caixas devem estar posicionadas da mesma forma, ao contrário do que surge em (b), as caixas devem estar empilhadas umas sobre as outras e que, ao contrário do que se verifica em (c), as caixas devem estar na mesma escala. Consideram que sistematizar esta informação com os alunos, dando exemplos específicos, pode contribuir para que no futuro estes erros tenham progressivamente menor frequência.

Reflexão sobre a tarefa. Na sessão de trabalho destinada para o efeito, os professores refletem sobre a realização da tarefa e referem alguns pontos que consideram interessantes, nomeadamente em relação às dificuldades dos alunos. Assim, Sónia retoma a questão da legenda do pictograma:

> [A legenda com] O cinco e o dez é mais fácil… Se calhar aí se fizéssemos com o cinco, com o dez ou com o vinte, seria mais fácil em termos de cálculos, certo? Contando as caixas… Seria mais fácil… Efetivamente com números pequenos… Mas eu acho que o problema central, ou a base dos problemas deles, não foi o vinte e cinco…

Para Sónia, o recurso a números menores poderia facilitar o cálculo mental dos alunos para determinar o número de doses e de caixas a utilizar. No entanto, no seguimento do seu discurso, considera que o maior problema para os alunos é a compreensão e interpretação do enunciado. Os outros professores concordam com esta ideia e referem a importância dos alunos compreenderem as condições do problema que, no seu entender, é um fator determinante para encontrar uma solução correta.

Outra dificuldade identificada pelos professores prende-se com a compreensão dos alunos da terceira pergunta. É necessário perceber que as 125 doses implicam a combinação de dois alimentos. Ricardo refere:

> Porque eles não associaram logo que cada criança tinha que comer uma dose de proteína e uma dose de… O que daria o dobro das doses, não é? 250 doses! Ao fim ao cabo eles vão gastar 250 doses… As 125 crianças! Porque comem proteína e comem acompanhamento…

Para os professores, os alunos que não compreenderam esta relação, limitaram-se a construir o número 125 com os dois tipos de alimentos (tal como acontece una figura 2). Na sua opinião é importante questionarem estes alunos para que compreendam as informações implícitas do problema e percebam que a falta de atender a essas condições pode levar a estratégias não adequadas. Como diz Sónia: "É levá-la [Caetana], ela própria, a perceber onde é que errou, onde é que falhou…"

Os professores ficaram surpreendidos pela dificuldade dos alunos em compreender e completar o pictograma. Na sala de aula esta tarefa revelou-se bastante mais difícil que trabalhar com gráficos de barras. Ricardo, à semelhança do que tinha dito na planificação, considera que a inexistência de escala no pictograma é um fator que dificulta a sua resolução. Por sua vez, Sandra, considera que, na realidade, os alunos estavam perante dois

pictogramas (um de proteínas e outro com acompanhamentos) e que a leitura e coordenação dos dois pictogramas aumentaram significativamente o grau de dificuldade da tarefa.

5. Conclusão

O quadro análise das práticas profissionais do professor usado (Ponte, Quaresma & Branco, 2012), em especial no que refere às ações e decisões do professor no contexto dos objetivos curriculares e do conhecimento que este tem dos seus alunos, permite dar conta do significado da realização desta tarefa para este grupo de professores. Assim, o trabalho do grupo colaborativo proporcionou uma discussão dos professores tanto antes como depois da realização desta tarefa. Esta discussão entre os professores foi bastante importante, na medida em que o confronto das várias opiniões permite que os professores reflitam em aspetos que não considerariam se programassem as tarefas isoladamente. Verifica-se, assim, a importância de antes da realização de uma tarefa, os professores discutirem pormenorizadamente cada pergunta, tentando perceber se o enunciado é claro e se está bem formulada. Para além disso, é interessante verificar que algumas das dificuldades dos alunos foram antecipadas pelos professores durante a exploração matemática prévia da tarefa, o que reforça a importância de explorarem as tarefas que propõem aos seus alunos de forma a antecipar as dificuldades e estratégias dos alunos.

Durante a exploração da tarefa, a explicitação das condições do problema através de referências à realidade é uma estratégia comum e que, aparentemente, com estes alunos, tem resultados bastante positivos. A compreensão das convenções dos pictogramas foi também uma das preocupações dos professores. Sem esse conhecimento, nem todos os alunos conseguiram completar o pictograma, estando os erros mais comuns relacionados com a escala e posicionamento dos elementos do pictograma. Nesta parte do trabalho uma decisão muito importante que o professor tem de tomar, é saber se, perante certa dificuldade que os alunos evidenciam no seu trabalho, intervém imediatamente, ou deixa a sua análise para o momento final de discussão coletiva. Na sessão de trabalho reflexivo, a análise das dificuldades dos alunos foi importante para que os professores pudessem analisar o que estava por trás dessas dificuldades, de modo a evitar que elas possam ser rapidamente ultrapassadas.

Este estudo mostra que o trabalho colaborativo, proporcionando momentos coletivos de planificação e reflexão pós-aula relativamente à exploração matemática das tarefas e análise das dificuldades dos alunos (primeiro, as possíveis, depois as verificadas), articulando aspetos do conhecimento estatístico com aspetos do conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da Estatística proporciona uma excelente oportunidade para o seu desenvolvimento profissional.

Referências

Jaworski, B., & Potari, D. (2009). Bridging the macro- and micro-divide: Using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 219–236.

Martins, M. E. G., & Ponte, J. P. (2007). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: DGIDC (descarregado em 23/3/2013 de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/matematicaOTD_Final.pdf.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGICD. (descarregado em 23/3/2013 de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/028_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. I, pp. 195-210). Lisboa, Portugal.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática, 1*, 65-86.

Saxe, G. B. (1999). Professional development, classroom practices, and students' mathematics learning. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 121-128). Haifa, Israel.

Schoenfeld, A. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(3), 243-261.

Prueba exploratoria sobre competencias de futuros maestros de Primaria: Conocimiento del bloque relativo al tratamiento de la información, azar y probabilidad, en el currículo escolar de Matemáticas

Anasagasti Aguirre, Jon y Berciano Alcaraz, Ainhoa

Euskal Herriko Unibertsitatea - Universidad del País Vasco

Resumen

Uno de los aspectos importantes en la formación inicial de los maestros es el conocimiento del currículo escolar, debido a que son responsables de la implementación del mismo y, por tanto, en el caso de la estadística, de conseguir una cultura matemática para todos. Conocer los contenidos y los criterios de evaluación específicos del bloque permite diseñar e implementar las actividades adecuadas para cada ciclo formativo. En este trabajo se evalúa una de las competencias específicas propuestas en el nuevo currículo de Grado para la docencia de estadística elemental en una muestra de 144 futuros profesores de Educación Primaria. En particular, la competencia evaluada ha sido "Conocer el currículo escolar de matemáticas y aplicarlo al análisis de propuestas del área en la Educación Primaria y, al diseño y desarrollo de nuevas actividades". Para ello, hemos diseñado y pasado un cuestionario a toda la muestra con el fin de detectar las carencias en dicha competencia relativas al bloque tratamiento de la información, azar y probabilidad en el currículo de matemáticas en Educación Primaria. Los resultados obtenidos muestran un escaso conocimiento del currículo y consecuentemente limitaciones en las propuestas de diseño y desarrollo de nuevas actividades.

Palabras clave: Estadística, competencias, currículo, formación de maestras/os.

1. Introducción

El uso de la estadística se ha extendido a multitud de ámbitos de la vida cotidiana aunque en muchos no se realicen lecturas apropiadas al carecer de un correcto razonamiento estadístico. El razonamiento estadístico fue definido por Garfield y Chance (2000) como la manera en que la gente razona con conceptos estadísticos y da sentido a la información estadística. Las personas que desarrollan este tipo de razonamiento comprenden y son capaces de reaccionar ante situaciones en las que han de manejar gran cantidad de datos (Schield, 2004).

Uno de los aspectos a los que la sociedad actual debe enfrentarse es la toma de decisiones. Ésta requiere comprender, modificar y producir información que en muchas ocasiones aparece en tablas, gráficos y expresiones que exigen conocimientos matemáticos y estadísticos para su correcta interpretación (Castellanos, 2011). Esta competencia básica es una expectativa de aprendizaje a largo plazo, y consecuentemente los nuevos currículos lo recogen (Rico, Díez, Castro y Lupiáñez, 2011), por lo que el alumnado que desarrolle su razonamiento estadístico tendrá una buena base para la toma de decisiones.

Es por esta razón por la que la estadística ha ido ganando peso en los distintos planes de estudio. Actualmente y en la mayoría de los países desarrollados, la estadística forma parte del currículo de matemáticas desde la educación Primaria (Estrada, Batanero y

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 531-538). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Fortuny, 2004). Como señalan Davies, Barnett y Marriott (2010) uno de los acontecimientos más importantes en los EEUU fue la publicación por parte de la American Statistical Association de las Directrices para el Análisis y la Formación en Educación Estadística (GAISE).

En esa publicación se señalan seis recomendaciones clave para la educación estadística entre las que destacan la utilización de la tecnología y de datos reales, la importancia de la comprensión conceptual más allá del mero conocimiento de procedimientos, el fomento del aprendizaje activo en el aula, el énfasis de la capacidad lectora y de pensamiento estadístico, y el análisis para la mejora y la evaluación del aprendizaje del alumnado.

Las autoridades educativas y los diseñadores del currículo son los primeros responsables en conseguir una cultura estadística para todos (Batanero, 2002). Es por esta razón por la que el diseño del currículo resulta importantísimo para que el profesorado sepa qué contenidos y qué actitudes debe trabajar en clase en cada curso de educación Primaria.

Así mismo, también resulta de gran importancia que el futuro profesorado conozca el lugar que en la actualidad ocupa la estadística dentro del currículo ya que ello favorecerá un cambio en las actitudes de estos hacia la materia. Hay que tener en cuenta que los temas de estadística y la probabilidad son una parte de la asignatura de Matemáticas muy poco trabajada en las aulas y sobre el que el profesorado de los diferentes niveles educativos tienen muy pocos referentes teóricos y prácticos (Azcárate y Cardeñoso, 2011).

2. Problemática

Es importante que el futuro profesorado, aún careciendo de referentes prácticos en la enseñanza de la estadística, tenga unos claros referentes teóricos, y por ello, el currículo debe ser un pilar fundamental. Al margen de la escasa formación que sobre la materia parece tener el futuro profesorado (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004), en ocasiones sucede que las actividades propuestas en clase no contribuyen al desarrollo del conocimiento conceptual adecuado, necesario para la enseñanza de la estadística en educación primaria (Leavy, 2010). Como indica Begg (2004) suelen surgir tensiones entre la propuesta hecha por las autoridades que diseñan el currículo y el punto de vista del profesorado que debe trabajar la materia.

La obligación de los maestras de primaria según los nuevos currículos es desarrollar el razonamiento estadístico relacionando sus conocimientos con situaciones familiares o del entorno otorgándole significado (Burrill y Biehler, 2011). El conocimiento de la materia por parte del profesorado no garantiza que el alumnado consiga desarrollar el razonamiento estadístico. Los futuros maestros deben conocer el currículo para saber en cada curso los contenidos y las habilidades que deberán trabajar en clase.

Como el propio currículo de Educación Básica indica, los contenidos del bloque relativo al Tratamiento de la Información y el Azar adquieren su pleno significado cuando se presentan en conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento. No obstante el contenido propio de estadística se incluye en el currículo vasco dentro del área de matemáticas conformando un bloque propio de contenido: Tratamiento de la Información, Azar y Probabilidad (Decreto 97/2010).

En esta comunicación se pretende evaluar en el futuro profesorado de Primaria la competencia que se encuentra presente en la Guía de Grado de Educación Primaria (EHU/UPV, 2011), y que está relacionada con el conocimiento del lugar que ocupa el tratamiento de datos, azar y probabilidad dentro del currículo escolar: “Conocer el currículo escolar de matemáticas y aplicarlo al análisis de propuestas del área en la EP y, al diseño y desarrollo de nuevas actividades”. Este análisis se engloba dentro de la evaluación de las distintas competencias definidas en dicha guía y cuyos resultados se comenzaron a mostrar en la comunicación precedente *Prueba exploratoria sobre competencias de futuros maestros*

de primaria: conocimiento de conceptos básicos de estadística (Anasagasti y Berciano, 2012).

3. Metodología

Para realizar este estudio se ha pasado un cuestionario al alumnado de Magisterio de Primaria de la EHU/UPV. Los datos cuantitativos han sido clasificados y analizados mediante el programa informático PASW Statistics 18, obteniendo los resultados objeto de estudio y discusión. Los ítems que contaban con respuesta abierta han sido analizados cualitativamente, y algunas de esas respuestas también se presentan en el apartado de resultados.

Participantes

Participan en este estudio 144 de los 200 estudiantes de primer curso del nuevo Grado en Magisterio de la especialidad de Educación Primaria (72%) de la Escuela Universitaria de Magisterio de Bilbao de la UPV/EHU.

Variables e instrumentos de medida

Los resultados que se presentan a continuación corresponden a dos ítems de un total de diez, de un cuestionario propio construido para valorar de 0 a 10 las competencias que el alumnado de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica I tienen acerca de la enseñanza de la estadística. Estos 10 ítems tratan de valorar las cuatro competencias básicas que para esta asignatura indica la nueva Guía de Grado de EP de la EHU/UPV.

Para la segunda competencia "Conocer el currículo escolar de matemáticas y aplicarlo al análisis de propuestas del área en la EP y, al diseño y desarrollo de nuevas actividades" los dos ítems propuestos pretenden evaluar si los futuros maestros conocen el bloque de "tratamiento de la información, azar y probabilidad" del currículo de matemáticas de EP y si conocen actividades propias de ese bloque.

Además se plantean otros ocho ítems para el resto de competencias: "Conocer, analizar y aplicar conocimientos básicos para la práctica de aula en EP, tanto en sus aspectos conceptuales como didácticos", "Conocer y utilizar de manera adecuada los materiales didácticos y medios tecnológicos para modelizar diferentes situaciones de aprendizaje" y "Reconocer el papel de las matemáticas como elemento fundamental en el desarrollo del pensamiento lógico, precisión, rigor y capacidad de valorar decisiones".

Para evaluar la competencia referente al conocimiento del currículo, en cada uno de los dos ítems se ha formulado una pregunta con múltiples respuestas cerradas. Cada una solamente tiene una respuesta correcta, aunque se puede marcar una o más. Además en el segundo ítem se ha añadido una pregunta de respuesta abierta con la intención de analizarla cualitativamente.

4. Resultados

Los resultados se exponen inicialmente de modo global como resultado de sumar las puntuaciones de los 2 ítems referidos a la competencia sobre el conocimiento del currículo, y a continuación se presentan los resultados de cada ítem, dando una pequeña explicación de lo que quiere evaluar cada uno y mostrando los resultados más significativos en cada caso. Se adjunta para cada ítem un cuadro con su enunciado y las respuestas dadas (totales y ponderadas) por el alumnado, así como una pequeña muestra de las respuestas abiertas dadas en el ítem 7.

Resultados global

Los resultados globales obtenidos por el alumnado han sido muy bajos. Como respuestas correctas solamente se han admitido aquellas que únicamente marcaban la opción correcta excluyendo las demás respuestas. Así se observa que solamente 4 personas de las 144 encuestadas han respondido bien a los dos ítems, y 37 personas han respondido correctamente a uno de los dos. En muchos otros casos, a pesar de marcar la opción correcta también han señalado otros distractores. Estos distractores se comentan en el apartado de resultados por ítem ya que en algunos casos, a pesar de no ser exactamente correctas pueden tener cierta validez.

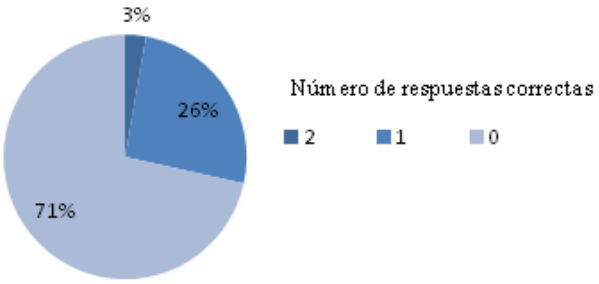


Figura 1: Porcentajes de alumnado según el número de respuestas correctas.

Resultados por ítem:

Ítem 6: Se pretende evaluar si los futuros maestros conocen la existencia del bloque "Tratamiento de la información, azar y probabilidad" dentro del currículo de matemáticas de EP. Resulta muy significativo observar que el 47.6% del alumnado no conoce que este contenido compone un bloque propio del currículo en el área de matemáticas. Este dato y el hecho de que una importante proporción de alumnos lo incluyan dentro de los bloques de "Números y operaciones" y "Contenidos comunes" muestra el desconocimiento que presentan los futuros maestros. Se aprecia que un porcentaje elevado también relaciona este contenido con el bloque de resolución de problemas, lo cual no es del todo incorrecto ya que en este bloque también se hace mención a gráficas de datos, datos que sobran, utilizar tablas, o realizar esquemas y gráficos.

Cuadro 1: Enunciado, frecuencias y porcentajes de respuesta en el ítem 6.

Di cuáles de estas afirmaciones crees que son ciertas y cuales falsas:
El contenido de "Tratamiento de la información, azar y probabilidad" dentro del currículo de matemáticas en Educación Primaria

	Verdadero		Falso		Ns/Nc	
	N	%	N	%	N	%
a) Compone un bloque propio.	79	**52.3**	65	**43**	7	4.6
b) Se incluye dentro del bloque "Números y operaciones" del currículo de matemáticas en la Educación Primaria.	35	**23.2**	109	**72.2**	7	4.6
c) Se incluye dentro del bloque "Resolución de problemas" del currículo de matemáticas en la Educación Primaria.	83	**55**	61	**40.4**	7	4.6
d) Se incluye dentro del bloque "Contenidos comunes" del currículo de matemáticas en la Educación Primaria.	39	**25.8**	105	**68.5**	7	4.6

Ítem 7: Se pretende evaluar si los futuros maestros relacionan correctamente el bloque de "Tratamiento de la información, azar y probabilidad" con sus criterios de evaluación. Para ello se han introducido otros criterios de evaluación que también aparecen dentro del currículo del área de matemáticas pero que están más estrechamente relacionados con otros bloques. Es interesante comprobar cómo eligen mayoritariamente la respuesta c

(51.7%): la estimación por aproximación y redondeo para hallar la respuesta lógica del problema. La respuesta correcta d es elegida por menos de la mitad (46.4) a pesar de contener conceptos tan característicos en la estadística como pueden ser las gráficas y las tablas de doble entrada. Así mismo las otras dos respuestas incorrectas también son elegidas por amplios porcentajes de futuros maestros (33.8% la opción a, y 27.2% la opción b), por lo que se puede observar que no tienen muy claro qué tipo de criterio sirve para evaluar específicamente cada bloque.

Cuadro 2: Enunciado, frecuencias y porcentajes de respuesta en el ítem 7.

Di cuáles de los siguientes criterios de evaluación del currículo de matemáticas en Educación Primaria crees que se corresponde al contenido de "Tratamiento de la información, azar y probabilidad

	Si lo hace		No lo hace		Ns/Nc	
	N	%	N	%	N	%
a) Interpreta con sentido textos numéricos de la vida cotidiana relacionados con las medidas y sus magnitudes.	51	**33.8**	93	**61.4**	7	4.6
b) Interpreta el valor de los números en escaparates con precios, folletos publicitarios…, emitiendo informaciones numéricas con sentido	41	**27.2**	103	**68.2**	7	4.6
c) Estima por aproximación y redondeo cuál puede ser un resultado lógico del problema.	78	**51.7**	66	**43.7**	7	4.6
d) Identifica textos numéricos de la vida cotidiana en forma de gráficas y cuadros de doble entrada.	70	**46.4**	74	**49**	7	4.6

El ítem 7 llevaba además de la pregunta de respuesta cerrada, una segunda pregunta de respuesta abierta: *¿Qué tipo de actividad se te ocurre que podrías proponer en una clase de educación primaria para trabajar algún concepto sobre estadística?* A continuación se muestran varias respuestas obtenidas:

"Para trabajar la estadística, propondría realizar un gráfico que muestre las distintas características de los alumnos de la clase, para realizar distintos cálculos", "Realizar tablas acerca de temas que a ellos les resultan interesantes", "Algo relacionado con ellos mismos. Por ejemplo hoy día son muy conocidos los Gormitis*. Pues analizar algo relacionado con estos", "Conseguir estadísticas del día a día, para que los niños vean los conceptos más fáciles y para qué sirven", "Problemas", "Realizar ejercicios con juegos y videos", "Presentar un gráfico y de allí, proponer unos ejercicios.", "¡Gráficas humanas, que los niños se levanten, que se muevan!", "Estadísticas que puedan encontrarse en el día a día", "Gráficos", "Incitaría a que los niños formen parte de la actividad preguntándoles a ver cuántos juegan al fútbol o cuál es su comida favorita. Así formaría distintos grupos y después analizaría las estadísticas", "Traer un periódico y mirar los porcentajes que hay en el día a día", "Utilizar encuestas para realizar distintos cálculos", "Calcular la altura media de la clase", "Gráficos, tablas, diagramas, porcentajes, magnitudes…"*

Se pueden observar respuestas muy variadas entre las dadas, pero en cierta medida la mayoría de ellas se relacionan con tres ideas principales que efectivamente vienen recogidas para este bloque en el propio currículo:

- Recoger y tratar la información, haciendo especial hincapié en su representación gráfica.
- Potenciar el trabajo en equipo y el desarrollo del sentido crítico.
- Usar datos, objetos, fenómenos y situaciones de la vida cotidiana del alumnado.

5. Discusión

Los resultados globales en cuanto al conocimiento del bloque relativo al tratamiento de la información, azar y probabilidad parecen preocupantes ya que solamente el 3% del alumnado ha respondido correctamente a las dos preguntas. No obstante deben tenerse en cuenta los matices que dichos ítems presentaban en las respuestas ya que de esta manera se pueden entender gran parte de los errores cometidos.

Puede apreciarse un notorio desconocimiento de la estructura del currículo, referente a la agrupación de los contenidos entorno a los distintos bloques. Cabe destacar en el ítem 6 que el 43% no reconozca como verdadero el hecho de que el tratamiento de la información, azar y probabilidad compone un bloque propio. Este aspecto es el que resulta más preocupante ya que el hecho de que lo relacionen con el resto de bloques puede estar de alguna manera justificado (la mayoría lo relaciona con el bloque de Resolución de Problemas, y ello puede ser entendible en cuanto que este bloque actúa como eje central, recorriendo transversalmente el resto de bloques). Además, no se debe olvidar que los bloques no forman compartimentos estancos pudiendo ser útil, como ejemplo, el uso de una tabla de doble entrada en cualquiera de los otros bloques.

En cuanto al conocimiento de los contenidos a tratar y los criterios de evaluación del bloque también se observa cierta confusión como se puede comprobar en las respuestas al ítem 7. A pesar de que en la respuesta abierta hacen mucho hincapié en la importancia que tiene la representación y la interpretación de gráficas, más de la mitad del alumnado elige la opción incorrecta “c” como criterio de evaluación del bloque. No distinguen correctamente a qué bloque corresponden los diferentes criterios de evaluación.

Al margen del conocimiento de la estructura del currículo parece que los futuros profesores si hacen suyos las recomendaciones que argumentaba la GAISE utilizando datos reales, fomentando el aprendizaje activo, comprensivo y enfatizando la capacidad lectora y de pensamiento estadístico.

6. Conclusiones finales

Es importante que el futuro profesorado conozca bien el lugar que ocupa el “Tratamiento de datos, azar y probabilidad” en los nuevos currículos. Ello ayudará a plantear actividades adecuadas a las características cognitivas del alumnado de cada ciclo de educación Primaria (Arteaga, Batanero y Cañadas, 2011). Con los datos aquí expuestos se puede observar que los futuros maestros no conocen exactamente los contenidos y los criterios de evaluación del bloque. Este hecho hace en muchas ocasiones que la materia quede relegada por otros bloques como “Números y Operaciones” o “Geometría”.

Además, el pensamiento estadístico es difícil de aprender y de enseñar, pero es más importante que la mera exposición de una larga lista de métodos estadísticos, o que la simple enseñanza de técnicas de cálculo que desconsideran el punto de vista de la naturaleza del conocimiento estadístico (Holmes, 2002).

Si el alumnado no comprende ni piensa, no se está haciendo Matemáticas. De nada sirve acumular "desconocimientos" sobre "desconocimientos": eso no es "cumplir el programa" (Gregorio, 2008). Se aprecia una tendencia reciente a adelantar y renovar su enseñanza, proporcionando al alumnado una experiencia estocástica desde la infancia (Batanero, Arteaga y Contreras, 2011). Los programas curriculares promueven el aprendizaje activo, y la realización de tareas con el fin de que lleven a cabo sus propios proyectos estadísticos con datos de su entorno, cercanos a ellos y que les resulten motivadores, acercándose así al conocimiento estadístico (Gil, 2010).

Aplicar en las escuelas los cambios propuestos en los currículos lleva su tiempo (Begg, 2004). Para comenzar a trabajar como es debido el bloque de tratamiento de datos,

azar y probabilidad en las escuelas de Primaria, es imprescindible que primeramente sea reconocido por los futuros maestros el papel que este ocupa dentro del currículo de Matemáticas y el pleno significado que adquiere en conexión con las demás áreas de conocimiento. Ese reconocimiento ha de ser promovido desde las escuelas de Magisterio, y concretamente desde los departamentos de Didáctica de la Matemática.

Referencias

Anasagasti, J., Berciano, A. (2012). Prueba exploratoria sobre competencias de futuros maestros de primaria: conocimiento de conceptos básicos de estadística. *Investigación en Educación Matemática XVI (SEIEM)*, pp. 113-121.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. (2011). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores en una tarea abierta. *Investigación en Educación Matemática XV (SEIEM)*, pp. 267-275.

Azcárate, P., Cardeñoso, J.M. (2011). La Enseñanza de la Estadística a través de Escenarios: implicación en el desarrollo profesional. *Bolema, Rio Claro (SP),* v.24, n. 40, pp. 789-810.

Batanero, C., Arteaga, P., Contreras, J.M. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana.* Vol. 2, número 2.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires. Conferencia inaugural.*

Begg, A. (2004). Statistics Curriculum and Development: New Ways of Working. *Curricular Development in Statistics Education.* Pp 10-20.

Burrill, G., Biehler, R. (2011). Fundamental Statistical Ideas in the School Curriculum and in Training Teachers. *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE* Study. Chapter 10. Sin mención aun.

Castellanos, R. (2011). Interactividad y atención a la diversidad en el Aprendizaje de la Estadística. *Tesis Doctoral*. Universidad de La Rioja.

Davies, N., Barnett, V., Marriott, J. (2010). One hundred years of progress –Teaching statistics 1910 – 2010: what have we learned? Part I: It's not mathematics but real data in context. *ICOTS 8.*

Departamento de Educación, Universidades e Investigación del País Vasco, (2010). Decreto 97/2010 por el que se establece el Currículum de la Educación Básica. *BOPV, 20 de Abril de 2010.*

EHU/UPV (2011). *Guía del alumnado: Educación Primaria.* Curso 2011-2012

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J.M. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación matemática 2004*, vol. 16. Núm 1.

Garfield, J., Chance, B. (2000), Assessment in Statistics Education: Issues and Challenges, *Mathematics Thinking and Learning*, 2, pp. 99-125

Gil, A.R. (2010). Proyectos de Estadística en Primaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas.* Vol 75, pp. 121-129.

Gregorio, J.R. (2008). Competencia matemática en Primaria. *Revista SIGMA*, Vol 32, pp. 31-50.

Holmes, P. (2002). Some lessons to be learned from curriculum developments in statistics. *ICOTS 6.*

Leavy , A. (2010). Teaching statistics at the primary level: identifying obstacles and challenges in teacher preparation from looking at teaching. *ICOTS8.*

Rico l., Diez, A., Castro, E., Lupiáñez, J.L., (2011) Currículo de matemáticas para la educación obligatoria en España durante el periodo 1945-2010. Educatio Siglo XXI, Vol. 29 nº2. Pp.139-172

Schield, M. (2004). Statistical Literacy Curriculum Design. *Curricular Development in Statistics Education.* Pp 54-74.

Razonamiento Combinatorio y el currículo español

Fernández Millán, Elena

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo presentamos las ideas principales relacionadas con la importancia de la enseñanza-aprendizaje de la Combinatoria, que se encuentran presentes en las investigaciones y trabajos realizados en la Universidad de Granada, así como el estado actual del currículo español en dicho campo.

La intención de este trabajo es mostrar algunas de las ideas que justifican la necesidad de la presencia de la Combinatoria en las aulas y compararlo con las directrices que marca el currículo español en las etapas de Educación Primaria, Secundaria y Bachillerato.

El trabajo se estructura en dos apartados fundamentales, en el primero hacemos una revisión de algunos de los trabajos e investigaciones llevadas a cabo en la Universidad de Granada relativos al Razonamiento Combinatorio y describimos las ideas principales que hacen referencia al mismo. En la segunda parte presentamos las directrices que marca el currículo español relativas a este campo y mencionamos también las recomendaciones de los Estándares del NCTM, con el objetivo de hacer una comparación entre lo establecido en ambas directrices y relacionarlo con las ideas extraídas de las investigaciones.

Palabras clave: currículo, bloque de contenidos, Combinatoria, Razonamiento Combinatorio

.

1. Introducción

El interés por las matemáticas en España comienza en la década de los 60, y es una década más tarde cuando la disciplina Didáctica de la Matemática se incorpora a la universidad Española, aun así, encuentra diversas dificultades y hasta avanzada la década de los 80 no comienza a desarrollarse realmente.

El departamento de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada se encuentra estructurado en diversas líneas de investigación, entre las que se encuentra Didáctica de la Estadística y la Probabilidad. Dentro de esta línea de investigación se encuentra Didáctica de la Combinatoria, bajo la cual se han llevado a cabo diversos trabajos de investigación relacionados con esta disciplina.

Si comparamos el volumen y el avance de las investigaciones llevadas a cabo relativas a la Didáctica de la Combinatoria con las de otras áreas de la Didáctica de la Matemática, se pueden observar que las primeras han recibido escasa atención. A pesar de que las dificultades de la combinatoria son bien conocidas por los profesores que tratan de enseñar el tema en el nivel de secundaria (Roa, 2000).

Con este trabajo pretendemos destacar algunas de las principales ideas relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de la combinatoria, puestas de manifiesto en algunos de los trabajos realizados por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y posteriormente analizar el estado actual del currículo español, así como las menciones al respecto en los estándares americanos del NCTM 2010.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 539-545). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

2. ¿Qué es la Combinatoria?

En el libro escrito en el Departamento de Didáctica de la Matemática *Razonamiento combinatorio* de Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, ya se pone de manifiesto la dificultad de dar una definición de Combinatoria que incluya todos sus campos de aplicación. Según ellos, una descripción magistral de las características e importancia de la Combinatoria es la proporcionada por James Bernoulli, quién escribía en su Ars Conjectandi: "Es fácil darse cuenta de que la prodigiosa variedad que se presenta, tanto en las obras de la Naturaleza como en las acciones humanas, y que constituye la mayor parte de la belleza del universo, es debida a la multitud de modos diferentes en los cuales sus diversas partes pueden mezclarse o yuxtaponerse. Pero, debido a que el número de causas que concurren en la producción de un acontecimiento dado o efecto es muy a menudo tan enormemente grande y las causas mismas son tan diferentes entre sí, es extremadamente difícil enumerar todos los modos diferentes en los cuales pueden ordenarse o combinarse, y a menudo ocurre que los hombres, aún de la mayor capacidad y de la más grande circunspección caen en la falta de razonamiento que los autores de libros de Lógica llaman enumeración insuficiente o imperfecta de partes o casos. Y esto sucede en tal medida, que me atrevo a afirmar que ésta es la principal, casi diría la única fuente del enorme número de opiniones erróneas en asuntos, muy frecuentemente, de gran importancia".

Debe reconocerse, por lo tanto, que el arte que procura eliminar esta debilidad y nos enseña a enumerar todos los modos posibles en un número dado de objetos pueden mezclarse y combinarse de manera que estemos seguros de que no hemos omitido ninguno de los posibles debe considerarse de una enorme utilidad y merece nuestra más alta estima y profunda atención. Este es el objeto de la Combinatoria que no debe ser considerada sólo como una rama de las ciencias matemáticas, pues está relacionada con casi todas las formas de conocimientos útiles en las cuales la mente humana puede emplearse" (citado por Stanley, 1946, p. 158), (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994, p.17)

3. Razonamiento combinatorio y pensamiento formal

En diferentes trabajos realizados sobre combinatoria, se tienen en cuenta las reflexiones e investigaciones realizadas en el campo de la psicología en las que se pone de manifiesto la influencia del razonamiento combinatorio en el desarrollo formal.

Haciendo un breve resumen de dichas investigaciones sobre el desarrollo cognitivo de la capacidad combinatoria podemos destacar las siguientes ideas que justifican la importancia de la materia en cuestión en las aulas en diferentes niveles escolares.

Piaget e Inhelder (1951) tratan de determinar el papel de los esquemas combinatorios en la formación de ideas de azar y probabilidad. Una de las razones es que si los sujetos no poseen capacidad de análisis combinatorio, el concepto de probabilidad (en el sentido laplaciano) se puede usar sólo en casos muy restringidos, en los cuales se pueden enumerar directamente los resultados posibles que constituyen el espacio muestral, (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994. p.67). Lo cual señala la importancia de la combinatoria para el cálculo de probabilidades.

Inhelder y Piaget (1955) consideran la capacidad combinatoria como un constituyente fundamental del razonamiento formal. Ante hechos que el adolescente tiene que explicar mediante una lógica proposicional, combina las relaciones cualitativas entre estos hechos según todas las combinaciones que le son accesibles y, sin saberlo, alcanza un esquema completo de las combinaciones entre estas relaciones; a veces incluso se precisa una enumeración referida a las permutaciones entre ellas, (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo 1994. p.67). Por lo tanto los adolescentes podrían hacer espontáneamente operaciones combinatorias y resolver problemas de este tipo sin instrucción.

Por su parte, Fischbein, en el prólogo del libro de Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994) afirma que, "El Análisis Combinatorio, con sus conceptos y métodos no representa, por tanto, solamente un dominio definido de la matemática. Expresa, como he dicho, un esquema operacional, (en la terminología Piagetiana), ¡un prerrequisito estructural importante para la dinámica y potencia creativa del razonamiento lógico en general!" (Roa, 2000)

Fischbein realizó una serie de investigaciones relativas al efecto de la instrucción en el desarrollo cognitivo. En Fischbein (1975) se pone de manifiesto que las operaciones combinatorias representan algo más importante que una rama de las matemáticas. Representan un esquema con un carácter tan general como los esquemas de proporcionalidad y la correlación, que emergen simultáneamente después de la edad de los 12-12 años". A partir de las conclusiones que él obtuvo sobre los trabajos de Piaget e Inhelder, se interesó por el estudio del efecto de la instrucción sobre el desarrollo de la capacidad combinatoria en sujetos de 10 a 15 años y también analiza el papel de los diagramas de árbol en la aceleración del desarrollo hacia niveles cognitivos superiores.

Fischbein (1987) concede una gran importancia a la intuición como parte integrante de la conducta inteligente. Considera que la introducción en el currículum escolar de una materia debe ir precedida de una detallada investigación acerca del sustrato intuitivo que los alumnos poseen respecto a la misma, de igual modo que es preciso estudiar el terreno sobre el que va a construirse un edificio. El autor diferencia entre intuiciones primarias y secundarias. Las intuiciones primarias son adquisiciones cognitivas que se derivan directamente de la experiencia, sin ninguna necesidad de instrucción sistemática. Por el contrario, las intuiciones secundarias consisten en adquisiciones que tienen todas las características de las intuiciones, pero que son formadas por la educación científica, especialmente en la escuela. (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994. p. 71).

Como conclusión de las investigaciones de Fischbein y colaboradores dedicadas al papel de la instrucción se puede concluir con que las técnicas combinatorias no son adquiridas espontáneamente y que por lo tanto la instrucción es necesaria y que incluso al nivel de las operaciones concretas es posible inducir en los niños la asimilación de técnicas combinatorias, así como la constitución de nuevas intuiciones secundarias. (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994. p.73).

Fischbein (1975) mostró que la capacidad de resolver problemas combinatorios no siempre se alcanza en el nivel de las operaciones formales cuando los sujetos no reciben enseñanza sobre tales procesos. Asimismo, otros autores han sugerido que la edad media de acceso al estadio de pensamiento formal es sustancialmente diferente al indicado por Piaget e Inhelder (1951), y que incluso un número importante de sujetos no alcanzan nunca dicho estadio. Incluso Piaget cambió su primera concepción sobre el desarrollo del pensamiento formal y amplió hasta la edad de 15-20 años para dicho logro, sugiriendo además la influencia crucial del entorno y de las capacidades y especialización profesional del sujeto en la construcción de la estructura de las operaciones formales. El hecho es que numerosas investigaciones muestran que con frecuencia los sujetos adultos presentan sesgos en su razonamiento probabilístico, que son consecuencia de un razonamiento combinatorio deficiente (Roa, 2000).

4. Razones para enseñar combinatoria

En *Razonamiento combinatorio* de M. Carmen Batanero, Juan Díaz Godino, Virginia Navarro-Pelayo, se pone de manifiesto que "creemos que uno de los problemas de la enseñanza de la Combinatoria en los niveles medios, de los que tradicionalmente ha formado parte, es precisamente su tratamiento aislado del resto de los contenidos y problemas matemáticos"

La dificultad del tópico Combinatoria es reconocida por los propios profesores como se indica en Navarro-Pelayo (1991). Se plantea así la pregunta de si la enseñanza de la Combinatoria debería retrasarse. A pesar de que las conclusiones de los trabajos de Fischbein no son completamente efectivas, responden negativamente a esta pregunta. Este autor ya ha señalado la importancia de cultivar la intuición matemática desde niño y el hecho de que la intuición combinatoria no se desarrolla espontáneamente. Otras teorías cognitivas del aprendizaje, como la de Vigotsky, reclaman una atención preferente a la instrucción como recurso para promover el desarrollo cognitivo de los alumnos. Retrasar, por tanto, la enseñanza de la Combinatoria, o sea, no cultivar el razonamiento combinatorio cuando los alumnos puedan estar en condiciones adecuadas para ello, puede suponer una seria limitación en el desarrollo de su pensamiento formal (Roa, 2000).

En el libro mencionado al comienzo de este apartado se señalan una serie de razones expuestas por Kapur (1970), a favor de la enseñanza de la combinatoria en secundaria:

- Dado que no depende del cálculo complicado, puede ser iniciada en una etapa muy temprana; de hecho permite plantear problemas para todos los niveles educativos.
- Permite dar oportunidades a los estudiantes de realizar actividades características de matematización: hacer conjeturas, generalización, indagar la existencia de soluciones, cuestiones de optimización, etc.
- Se proporcionan oportunidades de distinguir entre demostraciones rigurosas y plausibles.
- Pueden proponerse gran variedad de campos de aplicación, tanto internas a la propia matemática como externas: física, química, biología, análisis de redes, diseño de experimentos, teoría de comunicación, probabilidad, programación dinámica, teoría de números, topología, matemática recreativa etc.
- Se pueden proponer problemas desafiantes, algunos no resueltos aun, aunque al alcance de la comprensión de los estudiantes. Ello permite que aprecien la necesidad de creación de nuevas matemáticas. Puesto que muchos problemas y aplicaciones de la Combinatoria se han desarrollado recientemente puede mostrar la naturaleza dinámica de esta ciencia.
- Al crear la costumbre de examinar todas las posibilidades, enumerarlas y hallar la mejor alternativa, contribuye al desarrollo del pensamiento sistemático.
- Puede contribuir a dar sentido a conceptos algebraicos elementales como los de aplicación, relaciones binarias, funciones, isomorfismo, etc.

5. Presencia de la Combinatoria en el currículo actual

A pesar de las conclusiones expuestas de las investigaciones realizadas hasta el momento, en las que se exponen resultados de teorías del desarrollo cognitivo y de las razones expuestas por Kaput para la presencia de la Combinatoria en las aulas, al analizar el currículo español, observamos que su presencia no está muy acorde con lo dichos resultados.

Revisamos en este trabajo el currículo español así como el de la Comunidad Autónoma de Andalucía, en los cuales, como se mostrará a continuación la rama de Combinatoria no aparece de forma explícita.

La etapa de educación Primaria, que abarca de los 6 a los 12 años se divide en tres ciclos.

En el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria se integra el bloque de contenidos 4. Tratamiento de la información azar y probabilidad, dentro del mismo, en el tercer ciclo, aparecen entre otros los contenidos: “Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso” (p. 43101)

Para estimar el grado de probabilidad de un suceso, en cierta medida y aplicando la regla de Laplace, es necesario conocer el número de casos totales, con lo que indirectamente

estaría relacionado con la Combinatoria. Si bien es cierto que el número de casos totales para el cálculo de probabilidades en la etapa de educación primaria pueden no requerir el empleo de la Combinatoria para su recuento ya que se trata de probabilidades sencillas.

En la orden del 10 de Agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la educación primaria en Andalucía, dentro del apartado Relevancia y sentido educativo, se establece que:

> se aprende matemáticas porque son útiles e incluso imprescindibles para la vida cotidiana y para el desarrollo de las actividades profesionales y de todo tipo; porque nos ayudan a comprender la realidad que nos rodea; y también, porque su aprendizaje contribuye a la formación intelectual general potenciando las capacidades cognitivas de niños y niñas (p.18)

Lo cual también se encuentra reflejado en el Real Decreto mencionado anteriormente y que de forma indirecta podría hacer referencia a la combinatoria.En la misma orden, dentro de núcleo temático 6. Tratamiento de la información, azar y probabilidad encontramos:

> Abordar tareas como la planificación para la recogida de la información; utilizar técnicas de recuento y de manipulación de los datos, así como la forma para agruparlos, son tan importantes como los cálculos que con ellos pueda realizarse (p. 22)

Donde dentro de las técnicas de recuento juega un importante papel la combinatoria.

La etapa de educación Secundaria, que abarca de los 12 a los 16 años, se divide en cuatro cursos. En el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria se encuentra el bloque de contenidos 6. Estadística y probabilidad, en el tercer curso nos encontramos con los contenidos:

> Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos (p. 756)

En el cuarto curso, que se divide en dos opciones, A y B nos encontramos con los siguientes contenidos:

> Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades.(p. 758-759)

Como comentamos en el caso de la etapa de educación primaria, siempre que tengamos en cuenta el cálculo de probabilidades, en el sentido laplaciano, hay que considerar el número de casos totales, lo que precisa de técnicas de recuento en el caso de que no sean casos excesivamente sencillos. Por lo que encontramos la presencia de la combinatoria en estos contenidos.

En la orden del 10 de Agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la educación secundaria en Andalucía nos encontramos con el núcleo temático 6. Interpretación de fenómenos ambientales y sociales a través de las funciones y sus gráficos y de las estadísticas y probabilidad donde aparece:

> Abordar cuestiones de planificación para la recogida de la información, utilizar técnicas de recuento y manipulación de los datos, así como estudiar la forma para agruparlos, son tareas importantes como los cálculos que con ellos puedan realizarse y su posterior interpretación (p. 55)

Donde al igual que en la etapa de primaria, las técnicas de recuento están relacionadas con la combinatoria.

En la etapa de Bachillerato, las enseñanzas están reguladas en el Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. Esta etapa se divide en dos cursos y la materia de matemáticas en dos ramas, matemáticas y matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

En la rama de matemáticas, el bloque de contenidos 4. Estadística y Probabilidad solamente se encuentra en el primer curso de bachillerato, y no se menciona de forma explícita ningún contenido de combinatoria; si se refleja de alguna forma en "estudio de la probabilidad compuesta, condicionada y a posteriori".

En la rama de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, el bloque de contenidos 3. Probabilidad y estadística, ni en el primer ni en el segundo curso se muestra tampoco ningún contenido de Combinatoria, aunque sí, como he mencionado anteriormente en "Asignación de probabilidades a Sucesos" (p.45475), en el primer curso y "Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes" (p. 45476) en el segundo curso.

Por último, en la Orden del 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al bachillerato en Andalucía la combinatoria también aparece reflejada dentro el cálculo de probabilidades.

Como hemos visto la presencia de la combinatoria en el currículo español no se encuentra de forma explícita, aunque se tiene en cuenta siempre que tratamos el cálculo de probabilidades y las técnicas de recuento.

En cuanto a lo estándares americanos NCTM (2010) podemos observar que el dominio de probabilidad lo encuentra a partir del grado 6, no apareciendo ninguna idea relacionada con combinatoria hasta el grado 7 donde está el estándar "investigar la probabilidad de un suceso y desarrollar, usar y evaluar los modelos de probabilidad", aunque aquí también se puede referir a probabilidades sencillas donde el número de casos totales podrían ser evaluados sin utilizar ninguna técnica de combinatoria.

En los grados de 9 a 12, dentro del dominio de Probabilidad condicional y las reglas de probabilidad, encontramos el estándar "uso de las reglas de probabilidad para calcular probabilidades de sucesos en un modelo de probabilidad uniforme" y en un apartado del mismo encontramos por primera vez de forma explícita conceptos de combinatoria "Usar permutaciones y combinaciones para calcular probabilidades de sucesos compuestos y resolver problemas". Además de cálculos de diferentes probabilidades y problemas relacionados con las mismas.

6. Conclusiones

Teniendo en cuenta las diferentes investigaciones sobre combinatoria en el campo de la psicología, llevadas a cabo por Piaget e Inhelder, así como las realizadas sobre el efecto de la instrucción, podemos concluir con que: los esquemas combinatorios son fundamentales en la formación de ideas de azar y probabilidad; la capacidad combinatoria es un constituyente fundamental del razonamiento formal; el análisis combinatorio expresa un esquema operacional fundamental para el razonamiento lógico; es necesaria la instrucción de las técnicas combinatorias ya que estas no son adquiridas espontáneamente.

Por su parte Kapur también muestra una serie de razones para la enseñanza de la Combinatoria.

El currículo español, sin embargo, no hace referencia explícita a esta parte de las matemáticas, siendo necesarios algunos conceptos de la misma para el cálculo de probabilidades. Los estándares americanos del 2010, si le prestan más atención ya que mencionan el uso de permutaciones y combinaciones.

Referencias

Batanero C., Godino J. D., Navarro-Pelayo V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.

Common Core State Standards for Mathematics (2010). Common core state standards initiative.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Orden del 10 de Agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía.

Orden del 10 de Agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria en Andalucía.

Orden del 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía.

REAL DECRETO 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.

REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Reflexões de docentes sobre o ensino de combinatória: transitando entre conhecimento pedagógico e do conteúdo

Arimatéa Rocha, Cristiane de y Souza Rosa Borba Rute, Elizabete de

UFPE- Centro Acadêmico do Agreste

Resumo

A pesquisa busca analisar como professores do Ensino Fundamental e Médio sugerem estratégias de ensino para Combinatória visando a superação de dificuldades dos alunos. Nessa perspectiva, foram realizadas entrevista semi-estruturadas, com seis professores (dois dos anos iniciais, dois dos anos finais do Ensino Fundamental e dois do Ensino Médio) na qual responderam questões referentes a aulas de Combinatória, a utilização de recursos e às formas de ensino utilizadas para a superação de dificuldades dos alunos (apresentadas por meio de protocolos de resolução de problemas combinatórios) de diferentes niveis de escolaridade, retirados da pesquisa de Pessoa. A pesquisa revelou que, a aula de Combinatória de professores dos anos iniciais enfatizam a utilização do material concreto, a resolução de problemas e as diferentes estratégias de resolução dos alunos e não mencionaram conceitos de Combinatória; nos anos finais centraram a discussão no princípio multiplicativo e na construção da noção de possibilidades pelos estudantes; No Ensino Médio, a discussão enfatizou aspectos referentes ao conteúdo de Combinatória como o Princípio multiplicativo, e a utilização de questões clássicas, refletindo sobre a natureza diferenciada da Combinatória e a dificuldade na diferenciação dos problemas combinatórios. Acredita-se na troca de experiência entre os professores entrevistados pode auxiliar na reflexão de práticas e na construção do raciocínio combinatório pelos alunos.

Palavras Chave: Ensino de Combinatória; Ensino Fundamental e Médio; Conhecimento pedagógico e do conteúdo.

1. Introdução

No Brasil, os Documentos Orientadores do Currículo de Matemática (BSEF, 1997) incentivam que desde os anos iniciais os estudantes aprendam a lidar com situações-problema de arranjo, combinação, permutação e especialmente o princípio multiplicativo da Contagem.

Nessa perspectiva, pesquisas que vêm sendo realizadas no Brasil, especialmente, no Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da UFPE (Geração-UFPE), observa que alguns estudantes desde os anos iniciais do Ensino Fundamental conseguem elaborar estratégias sistematizadas quando em situações de resolução de problemas combinatórios com número de possibilidades pequeno (Pessoa e Borba, 2009). As autoras ainda indicam que quando há um número maior de possibilidades existe maior dificuldades de resolução pelos estudantes. Nesse sentido, Fischbein (1975) advoga que o raciocínio combinatório não se desenvolve espontaneamente, e que o ensino de Combinatória é essencial na construção desse raciocínio.

Outro fator que colabora nessa discussão são os livros didáticos de Matemática que apresentam nesse nível de escolaridade problemas combinatórios em outros tópicos como Sistema de Numeração Decimal, ou mesmo nos capítulos destinados ao estudo de estruturas aditivas (Barreto e Borba, 2010). Essas autoras ainda advertem sobre a ausência de

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 555-562). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

abordagens, nos livros analisados e nos manuais do professor, dos invariantes de conceito dos problemas de Combinatória, como por exemplo, a propriedade de ordenação gerar ou não novas possibilidades.

Vale salientar que os professores que ensinam Matemática possuem diferentes formações. Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, os professores possuem formação inicial em Pedagogia e nos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio possuem formação inicial em Licenciatura em Matemática (geralmente), o que pode apresentar uma variedade de olhares, desafios e expectativas sobre o desenvolvimento do ensino de Combinatória em cada nível de escolaridade.

Com base no acima exposto, esse artigo apresenta alguns resultados de pesquisas Rocha e Borba (2010) e Rocha (2011) realizadas com professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental e Médio e tem como objetivo analisar como professores do Ensino Fundamental e Médio sugerem estratégias de ensino para Combinatória visando a superação de dificuldades dos alunos.

2. Conhecimentos Pedagógicos e de Conteúdo de Professores sobre Combinatória

A construção de conceitos matemáticos exige cada vez mais dos professores e alunos mudanças de concepções, habilidades, além de variedade de conhecimentos, haja vista as mudanças existentes no mundo atual. Desse modo, a formação do professor que ensina Matemática é foco de diferentes pesquisas no âmbito nacional e internacional.

Shulman (2005) afirma sobre a necessidade da construção do conhecimento de base para o professor, que por sua vez, é constituído de diferentes categorias. Dentre as categorias, o autor elege, o conhecimento didático do conteúdo, como a que permeia a maneira de pensar do professor e reflete nas escolhas das ações para formular e apresentar a matéria, ou seja, refere-se ao ensino da disciplina.

Em relação à Matemática, Ball, Thames e Phelps (2008) também apresentam diferentes dimensões, ou domínios do conhecimento do professor que ensina Matemática, na tentativa de delimitar quais os conhecimentos de fato relacionados com esse processo de ensino. Vale salientar que o mesmo conteúdo de ensino pode perpassar por vários dos domínios que serão discutidos em relação ao conteúdo de Combinatória, posto que essa classificação de fato permite uma melhor compreensão para a organização desse conhecimento.

Como base dessa classificação temos o *conhecimento comum do conteúdo*, sobre o qual recai qualquer compreensão dos conhecimentos necessários ao ensino de Matemática. Nesse domínio estariam os conhecimentos não necessariamente específicos ao ensino de Matemática ou ao especialista dessa disciplina, o que não quer dizer que todos sejam possuidores desse conhecimento. Por exemplo, no caso de Combinatória a resolução de problemas elementares utilizando o princípio multiplicativo.

O *conhecimento especializado do conteúdo*, encontra-se necessariamente como um domínio ligado ao ensino. Primeiro, ele é um conhecimento da Matemática, e, segundo, ele não é requerido em outra ação que não a de ensino. Por exemplo, quando um professor nota o uso indevido de uma estratégia na resolução de um problema pelo aluno, ou discute as propriedades de cada tipo de problema combinatório, por exemplo – ele está imerso nesse tipo de domínio de conteúdo.

No domínio *conhecimento do conteúdo e estudantes*, o professor deve antecipar quando alunos estão motivados e propor situações alternativas para elevar tal motivação. Faz parte desse domínio a análise de um erro, por parte de um aluno na resolução de um problema, ou de estratégia diferenciada nessa resolução. Numa situação de Combinatória em que o professor insista em certas estratégias, como por exemplo, a utilização de

fórmulas, ele pode buscar entender outras estratégias de resolução por parte dos alunos, como a utilização da árvore de possibilidades, está fazendo uso desse domínio de conhecimento.

A combinação de conhecimento sobre ensino e conhecimento sobre Matemática formam o domínio denominado *conhecimento do conteúdo e ensino*. Boa parte das tarefas de ensinar requer esse domínio. O planejamento de ensino, a preparação de uma sequência didática para determinado conteúdo, a elaboração de uma avaliação, a determinação de uma estratégia de superação das dificuldades dos alunos ou a escolha de um recurso didático fazem parte desse domínio. Um professor que deseje preparar uma ação pedagógica sobre Combinatória para turmas diferenciadas – de Ensino Regular ou de Educação de Jovens e Adultos – fará uso desse domínio.

O *conhecimento de horizonte do conteúdo* os autores entendem aquele conhecimento envolvido no encadeamento dos conteúdos curriculares. Por exemplo, professores que ensinam Combinatória no 4º ano, podem querer saber como tais conhecimentos serão abordados por professores que ensinarão tal conteúdo no 2º ano do Ensino Médio e vice-versa.

O último conhecimento proposto, o *conhecimento do conteúdo e do currículo*, é, evidentemente, fruto do refinamento mencionado anteriormente. Ele poderia estar contido no quarto domínio de conhecimento o conhecimento do conteúdo e de ensino, mas representa um avanço nesse processo de categorização. Recentemente, a consciência da proposta de introduzir o ensino da Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental faz parte desse tipo de conhecimento.

Rocha (2011) indica que a compreensão desses domínios e suas especificidades proporciona ao professor assumir posturas que apresentem a Combinatória como algo mais que um conjunto de regras e fórmulas prontas (p.31).

O professor pode, então, proporcionar em suas aulas a discussão de estratégias de resolução dos alunos, a utilização de situações que utilizem diferentes representações como a enumeração por listagem, a árvore de possibilidades ou que valorizem a percepção de regularidades existentes nas situações, diversificando o uso de fórmulas. A discussão, reflexão e a compreensão das propriedades existentes nos problemas combinatórios, como os invariantes de ordenação, repetição, escolha também são importantes e podem auxiliar os alunos no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

3. Método

Foram realizadas entrevistas semi-estruturada individuais devido ao caráter implícito que o objeto de pesquisa, ensino de combinatória, pode ter no Ensino Fundamental. Entrevistou-se seis professores dois professores dos anos iniciais, dois professores dos anos finais do Ensino Fundamental e dois do Ensino Médio, conforme apresentado Tabela 1.

Tabela 1. Características dos participantes da pesquisa.

Prof.	Formação	Experiência	Rede
PAI_1	Pedagogia; Especialização em Orientação Educacional e em Gestão Educacional; Mestrado (em andamento) - Ciências da Educação	25 anos	Pública
PAI_2	Pedagogia; Mestrado em Educação.	12 anos	Pública, Particular
PAF_1	Licenciatura em Ciências com habilitação	12 anos	Pública, Particular

	em Matemática; Especialização em Matemática; Mestrado (em andamento)		
PAI_2	Licenciatura em Ciências com habilitação em Matemática; Especialização em Matemática; Mestrado (em andamento)	10 anos	Pública, Particular
PEM_1	Licenciatura em Matemática; Mestrado em Educação	8 anos	Pública
PEM_2	Licenciatura em Ciências com habilitação em Matemática; Especialização em Programação de Ensino de Matemática; Mestrado (em andamento) em Educação	16 anos	Pública, Particular

Observa-se a partir desse quadro a formação em pós-graduação em todos os entrevistados, o que foi considerado um aspecto positivo no decorrer das entrevistas, pois os participantes compreendiam os aspectos da pesquisa.

Na entrevista foram abordados aspectos referentes aos conhecimentos do conteúdo de Combinatória, aos conhecimentos pedagógicos de Combinatória e as ações pedagógicas que esses professores a partir de protocolos de resolução retirados da pesquisa de Pessoa (2009). Nesse artigo, foca-se na ação pedagógica do professor nas reflexões que fazer sobre a aula e materiais didáticos utilizados. Nesse momento da entrevista foram entregues os protocolos de resolução de alunos anteriormente observados na entrevista que possuíam erros e que foram identificados pelos sujeitos da pesquisa, a exemplo, Figura 1 sobre Esgotamento de todas as possibilidades na enumeração.

3. As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?

ALUNO D



Figura 1. Erro em Esgotamento de possibilidades

Esse protocolo foi escolhido da pesquisa de Pessoa (2009) devido também nessa pesquisa serem procedimentos comuns aos alunos tanto do Ensino Fundamental como do Ensino Médio. Após essa análise foram foco da entrevista aspectos do planejamento da aula e a identificação de recursos para o ensino de Combinatória.

Com base nas discussões delineadas nos tópicos anteriores procurou-se identificar possíveis relações com as ações pedagógicas, ou ideia de prática que os professores evidenciaram a partir de suas falas, trazendo aspectos que demonstra que os diferentes domínios de conhecimento do professor pode ser considerado em seus comentários sobre sua aula e sobre a sua utilização de recursos didáticos.

4. Análise dos resultados

Após a observação do protocolo todos os professores, exceto o professor PAF_1, identificaram a dificuldades do Aluno D em esgotar as possibilidades. Observa-se agora os encaminhamentos dados pelos professores.

> **PAI_2:** Acho que o Aluno D está incompleto. [..] O professor não pode está, acredito eu, direcionando, ele não pode mostrar, por isso é bom um trabalho que envolva toda sala. Um

> trabalho em grupo. Cada grupo tem uma forma de chegar a uma resposta diferente do outro. Essas possibilidades não devem ser eliminadas. elas devem ser valorizadas e socializadas. Para que num outro momento ele utilize outra forma, e outra, e outra...para posteriormente eles terem noção de diferentes situações que eles vão se deparar com outros conteúdos Na Matemática é bem interessante que tem uma relação muito grande com a forma ...porque não

A partir desses extratos, observa-se a sugestão por parte dos professores dos anos iniciais de materiais concretos e a ênfase dada ao trabalho fundamentado na resolução de problemas com a socialização de estratégias dos alunos. Isso possibilita a construção do conceito em questão, trazendo principalmente no extrato de PAI_2 aspectos relativos ao planejamento e ao conhecimento dos seus alunos, que caracterizam o domínio conhecimento do conteúdo e estudantes.

Os professores de formação em Matemática focalizam seus comentários na discussão de possibilidades como pode-se observar no extrato a seguir.:

> **PAF_2: ...** ele já entendeu a ideia de possibilidades[ ]. Se ele tivesse escrito 4 ai deixava claro que ele já tinha isso aqui como certo. Vamos partir do pressuposto que ele acredita que são 4 possibilidades. Acho que a gente precisaria tentar mostrar que existe outro tipo de possibilidades, que assim como Brasil em primeiro, França em segundo e Argentina em terceiro e pedindo outras situações para ir ampliando e ampliando as possibilidades, questionando e perguntando. Primeiro ele tem que compreender a ideia de possibilidade.

> **PEM_1:** O Aluno D se focou num pedaço da questão....São os significados das expressões. O que significa para ele três primeiros colocados. Tenho que perguntar aos alunos o que essa questão está querendo dizer para você? De repente algum aluno diz só são 4 opções. Quais são as quatro? E eu faço o questionamento e os outros e saio permutando. Ai o aluno opa! ai ele vai começar a se questionar que tem algo mais além do que ele está pensando. Queremos que ele desenvolva isso.

Nota-se a estratégia evidenciada por esses professores são questionamentos, exposição dialogada, na qual o professor instiga os alunos a descobrir novas possibilidades. O professor PEM1 ainda ressaltou a dificuldade de compreensão do enunciado, isso relacionando aos conhecimentos do conteúdo. Eles parecem assumir uma atitude investigativa com o aluno, procuraram saber o que ele fez e como o que fez pode auxiliar nas propostas de aprendizagem.

Foram discutidas no estudo maior Rocha(2011) os erros como a compreensão de possibilidades, a ordenação ou não dos elementos, a multiplicação inadequada, entre outros. Após momento, focou-se nos aspectos relativos a aula de Combinatória.

Segundo Pimenta (2002) a ação desenvolvida pelos professores envolvida no processo de ensino, mostra-nos uma prática rica de possibilidades e limitações. O professor ao se defrontar com os problemas da sala de aula utiliza os conhecimentos que possui para escolher a atividade que se adéqua a realidade de seus alunos. No entanto, essa atividade pode ser desenvolvida pelo professor a partir de criação e da organização e sistematização de suas próprias estratégias, segundo a autora, por ser empírica, falta-lhe uma organização do saber construído, pois a construção do conhecimento requer pesquisa e sistematização desenvolvida em base metódica. Reconhece-se que existem diferenças entre o pensar e o agir e ainda diferenças entre se falar sobre a aula e o fazer a aula.

Desse modo, questionou-se aos professores sobre o planejamento de suas aula de Combinatória e que identificassem o aspecto que seria necessário priorizar. Observa-se agora extratos de seus comentários.

Os professores dos anos iniciais enfatizaram o uso do material concreto, as diferentes estratégias e mas não fizeram menção a conceitos de Combinatória, apresentando propostas que se adéquam a qualquer resolução de problemas.

> **PAI_1:** Eu acho que se você trabalhar com a questão do material concreto de imagem faz com que a abstração deles seja mais rápida.[...] Explorar as possibilidades[...], para que o aluno

saiba o que o problema está pedindo. A gente tem que ficar muito atento ao comando ... A gente sabe que todos os aluno não são iguais, você vê as estratégias diferentes, as possibilidades, o uso do pensamento e ainda da criatividade

PAI_2: Eu acho que a questão que é mais significativa seria o professor poder possibilitar uma reflexão autônoma do aluno, nessa determinada situação e ele poder retomar, esquematizando as atividades com os alunos. É fundamental isso. E a utilização de material concreto também inicialmente. É fundamental também ouvir o aluno sobre o problema, trabalhar o enunciado, mostrar o enunciado e fazer uma leitura com os alunos refletindo esse enunciado, fazendo uma reflexão de inicialmente como eles resolveriam isso.

Observou-se que a ênfase dos professores dos anos iniciais foi colocada no desenvolvimento do conceito pelo aluno utilizando recursos didáticos e as diferenças entre os alunos nas estratégias utilizadas. A busca é pela autonomia do aluno na resolução de problemas, pois como diz Freire (1998) ensinar exige respeito a autonomia do educando. Nessa direção para ensinar a Combinatória é imprescindível que o professor respeite essa autonomia de escolha das representações e procedimentos de enumeração em todos os níveis. Concordando com a ênfase nas diferentes estratégias Pessoa e Borba (2009) defendem que a escola esteja atenta as diferentes formas de representação apresentadas pelos alunos, pois estas conjecturam os diversos modos de pensar sobre um mesmo problema. As autoras ainda refletem que sobre o papel da escola em aproveitar as estratégias desenvolvidas para auxiliá-los na construção da compreensão dos diversos tipos de problemas e no seu desenvolvimento conceitual.

Os professores dos anos finais do Ensino Fundamental observaram a questão do conteúdo de Combinatória: o princípio multiplicativo e possibilidades. A noção de contexto também foi enfatizada por PAF_1.

PAF_1: Eu tentaria fazer assim considerar o que ele usa no dia a dia dele apesar de ser hipotético. Por exemplo: se a gente tivesse com dinheiro e fosse lanchar no Mc Donalds agora. E ai tivesse algumas opções de hambúrguer e outras opções de refrigerante. Vamos dizer que seja na cantina da escola hoje tem arroz, feijão, macarrão, galinha ou carne o que é que você pode escolher para seu prato? Só pode escolher 1. Depois eu usaria o princípio multiplicativo.

PAF_2: Acho que enfatizaria a ideia de compreender o que é possibilidades, porque parece que é um pouco complicado de entender. Porque eles associam muito possibilidades com coisa real. Então eles têm essa dificuldade de entender que a possibilidade não quer dizer de fato que tem que ser todos e sim que pode ser ou não. Porque se ele consegue entender essa possibilidade então ele vai decolar

Os professores do Ensino Médio enfatizaram aspectos referentes ao conteúdo de Combinatória, o uso de princípio multiplicativo, questões clássicas, a natureza diferenciada da Combinatória a utilização de jogos como roleta e a dificuldade de diferenciar problemas.

PEM_1: Olha a título de conteúdos eu procurei trabalhar com eles a parte do princípio multiplicativo,permutações, *arranjo* e combinações, tudo sem repetição, nada de circular, sem repetição, tudo simples como a gente chama *arranjo* simples e *combinação* simples.[..] Outro aspecto que eu tentei enfatizar são aquelas questões que eu costumo apelidar de questões clássicas. E o próprio vocabulário, o que é um anagrama que é um vocábulo da língua portuguesa que só aparece na Matemática na Análise Combinatória. É o único local.

PEM_2: Primeiro esse assunto de Combinatória e jogos a gente vê reportagens, tem gente que ganha em jogos utilizando isso. Primeiro colocaria essa ideia de jogos numa questão social, hoje muito utilizado em concursos. E é um assunto que está bem conectado a problemas da realidade. Isso seria enfatizado. [...] é um assunto que tem diferentes situações para serem propostas. Às vezes você pensa que é um *arranjo* e é uma *combinação*; você pensa que é uma *permutação* e é uma outra coisa mais arrojada.

Notamos ainda, que os professores de formação em Matemática enfatizavam os conceitos como a compreensão de possibilidades e a diferenciação dos problemas combinatórios, ainda a utilização na resolução dos problemas combinatórios o uso de

princípio multiplicativo. A noção de contextualização buscando situações da realidade dos alunos e dos jogos também é mencionada, porém não explicitadas

Observa-se como as diferentes realidades dos níveis de escolaridade modificam as propostas de intervenção e principalmente a postura que professores assumem diante da aula e do conteúdo. Parece-nos que, a especificidade da formação, e o modelo que é adotado pelos professores na universidade, interferem de forma decisiva nas práticas dos professores da escola básica. A vida acadêmica, os exemplos da forma como foi ensinado este ou aquele conteúdo, parece interferir no momento de decisão sobre a estratégia a ser utilizada. Associado a isto se somam o domínio do conhecimento do conteúdo e o conhecimento do ensino, que surge como um desafio na construção dessas aulas.

5. Considerações

A pesquisa revelou que, a aula de Combinatória de professores dos anos iniciais enfatizam a utilização do material concreto, a resolução de problemas e as diferentes estratégias de resolução dos alunos e não mencionaram conceitos de Combinatória; nos anos finais centraram a discussão no princípio multiplicativo e na construção da noção de possibilidades pelos estudantes; No Ensino Médio, a discussão enfatizou aspectos referentes ao conteúdo de Combinatória como o Princípio multiplicativo, e a utilização de questões clássicas, refletindo sobre a natureza diferenciada da Combinatória e a dificuldade na diferenciação dos problemas combinatórios. Acredita-se na troca de experiência entre os professores entrevistados pode auxiliar na reflexão de práticas e na construção do raciocínio combinatório pelos alunos.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M.H. e Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of teacher educacion*. 59(5), 389-407. Disponível em: http://jte.sagepub.com/content/59/5/389.

Barreto, F. e Borba, R. (2010). Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais. *X Encontro Nacional de Educação Matemática.* Salvador. Anais do X ENEM (pp. 1-10).

Brasil Secretaria de Educação Fundamental (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*, Reidel, Dordrecht.

Geração. Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação- UFPE: http://geracaoufpe.blogspot.com.br/p/producoes.html

Pessoa, C. e Borba, R. (2009). Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *ZETETIKÉ*, 17(31), 105-155.

Pimenta, S. G.(2002). *Saberes pedagógicos e atividades docentes*. São Paulo, Cortez.

Rocha, C. e Borba, R.(2010). Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diferentes olhares. *Proceedings of the X Encontro Nacional de Educação Matemática*, Bahia, Salvador: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Rocha, C. A. (2011). Formação docente e o ensino de problemas combinqtórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos. Dissertação (Mestrado). Recife, Centro de Educação, PPGEDUMATEC - UFPE,

Shulman, L. (2005) Conociemiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado: Revista de curriculum y formación del professorado, 9*(*2*), 1 -30.

Significado de la probabilidad frecuencial en futuros profesores

Ortiz de Haro, Juan J.; Mohamed Maanan, Nordin; Serrano Romero, Luis

Universidad de Granada

Resumen

En los currículos escolares, vigentes en España, queda patente la importancia que se concede a la enseñanza de la probabilidad. Así, en el Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria (Ministerio de Educación, 2006), se enfatiza la necesidad de iniciar, desde el primer ciclo (6-8 años), el estudio de los fenómenos aleatorios y de hacer la enseñanza más activa y exploratoria, suscitando el interés de los alumnos y su valoración de los conocimientos estadísticos para la toma de decisiones. Ahora bien, para que el cambio en la enseñanza de la probabilidad sea efectivo, se requiere mejorar la formación de los profesores, pues, sin una preparación específica, podrían transmitir a los estudiantes sus creencias, a veces erróneas.

En este trabajo pretendemos caracterizar el significado personal de la probabilidad frecuencial en futuros profesores de educación primaria. Para ello, presentamos un análisis detallado de las respuestas a dos problemas de probabilidad frecuencial, en una muestra de 167 futuros profesores de educación primaria de la Universidad de Granada, que comparamos con los resultados obtenidos por los alumnos de 10-14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997). Este estudio ha permitido poner de manifiesto la gran variedad de significados personales (Godino, Batanero y Font, 2007) y mostrar que existen importantes dificultades relacionadas con la comprensión del concepto.

Palabras clave: Probabilidad frecuencial, Formación profesores.

.

1. Introducción

La enseñanza de la probabilidad ha alcanzado gran importancia en España, como puede observarse en el Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006), donde se enfatiza la necesidad de iniciar lo antes posible el estudio de los fenómenos aleatorios y de hacer la enseñanza más activa y exploratoria, suscitando el interés de los alumnos y su valoración de los conocimientos estadísticos para la toma de decisiones. Estas recomendaciones también se recogen en los currículos de otros países (ej., National Council of Teachers Mathematics, 2000).

Para lograr estos objetivos se requiere mejorar la formación en probabilidad de los profesores (Stohl, 2005), pues, sin una preparación específica, podrían transmitir a los estudiantes sus creencias, a veces erróneas (Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez, 2006). Un paso previo es conocer el significado personal que los futuros profesores atribuyen a la probabilidad.

En este trabajo pretendemos caracterizar el significado personal de la probabilidad frecuencial en futuros profesores de educación primaria. Para ello, presentamos un análisis detallado de las respuestas a dos problemas de probabilidad frecuencial, en una muestra de 167 futuros profesores de educación primaria de la Universidad de Granada, y analizar después las semejanzas o diferencias con los resultados obtenidos por los alumnos de 10-14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997).

Según Godino, Batanero y Font (2007), para caracterizar el significado personal del enfoque frecuencial de la probabilidad en los futuros profesores de educación primaria, se deben analizar las prácticas realizadas por ellos durante la resolución de los problemas de

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 563-569). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

probabilidad propuestos, que son los indicadores empíricos utilizables en la evaluación del conocimiento de dichos profesores.

2. Formación de profesores y probabilidad

Aunque hay bastantes estudios sobre formación de profesores (ej., Llinares y Krainer, 2006; Wood, 2008), las investigaciones sobre formación de profesores, en el caso de la probabilidad, son limitadas. No obstante, se está estableciendo un cuerpo de conocimientos que destaca la importancia de tener en cuenta el conocimiento del contenido matemático de los docentes (Shulman, 1986) y como los formadores de docentes deben interesarse por dicho conocimiento (Ball, 2000).

Unos trabajos señalan la existencia de concepciones erróneas y dificultades de los profesores, en relación a la probabilidad (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001; Franklin y Mewborn, 2006; Mickelson y Heaton, 2004; Ortiz et al., 2006). Otros estudios muestran que los docentes tenían un conocimiento poco sólido de la probabilidad (Begg y Edwards, 1999; Carnell, 1997; Pereira-Mendoza, 2002; Watson, 2001) y del contenido pedagógico (Dugdale, 2001; Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi, 2008; Haller, 1997; López, 2006). Otras experiencias de enseñanza basadas en la simulación, pueden ayudar a la superación de algunos sesgos en el razonamiento de los profesores en formación (Sánchez, 2002; Batanero, Godino y Cañizares, 2005).

3. Método

La muestra participante estuvo formada por 167 futuros profesores de educación primaria de la Universidad de Granada, en su primer año de estudios. Todos ellos han recibido instrucción en probabilidad en los niveles educativos previos a la universidad, con diferente grado de profundización según la modalidad de bachillerato cursada.

El cuestionario utilizado, que se describe a continuación, consta de dos problemas sobre el enfoque frecuencial de la probabilidad, tomados de Green (1983), que se propusieron para su resolución a los futuros profesores antes de la instrucción.

Problema 1. Una moneda equilibrada se lanza al aire cinco veces y sale CARA las cinco veces. De las siguientes frases, señala la que consideres correcta:

(A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA …… ___

(B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ.....…….... ___

(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ … ___

(D) No lo sé..... ___

¿Por qué?

En este problema se trata de evaluar la percepción de la independencia en ensayos repetidos en las mismas condiciones y que han sido descritos por Truran y Truran (1997). Se exponen los resultados de los cinco lanzamientos anteriores para ver si influye en la comparación de las probabilidades. Es posible detectar efectos de recencia negativa o positiva, sesgos que han sido descritos en las investigaciones de Piaget e Inhelder (1951) y que posteriormente han sido atribuidos a la heurística de la representatividad por Khaneman, Slovic y Tversky (1982).

Problema 2. El profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas. Algunas caen con la punta para arriba y otras caen hacia abajo. El resultado fue: ARRIBA = 68; ABAJO = 32. Después el profesor pidió a una niña que repitiera el experimento.

De la lista siguiente elige el resultado que tú crees que obtendrá la niña:

(A) ARRIBA = 36, ABAJO = 64 …..…… ___

(B) ARRIBA = 63, ABAJO = 37 …… ___

(C) ARRIBA = 51, ABAJO = 49 …… ___

(D) Todos los resultados anteriores tienen la misma probabilidad …. ___

¿Por qué?

En este problema se pide comparar probabilidades binomiales en el experimento, disponiendo para ello de una estimación de probabilidad "a priori" de tipo frecuencial, ya que en este caso no se puede aplicar el principio de indiferencia. Esperamos que algunos estudiantes consideren los sucesos como equiprobables, ignorando el resultado del lanzamiento previo. Esta insensibilidad hacia las probabilidades "a priori" de los resultados está considerada por Khaneman, Slovic y Tversky (1982) como una de las causas de la heurística de la representatividad.

4. Resultados

A partir del análisis de las prácticas realizadas por los futuros profesores de educación primaria para resolver los dos problemas se han obtenido los siguientes resultados.

4.1.Análisis del problema 1

En la Tabla 1 presentamos los porcentajes de los diferentes tipos de respuestas encontrados al problema 1. Como puede observarse, el porcentaje de respuestas correctas de los futuros profesores es bastante alto (89,2%). Entre las respuestas incorrectas hay un 5,1 % de futuros profesores que consideran que al haber salido cinco veces cara, ahora es más probable que en el siguiente lanzamiento de la moneda obtengamos cruz, debido quizás a que no manejan adecuadamente el concepto de independencia de sucesos.

Tabla 1. Porcentaje de tipos de respuestas al problema 1

Respuestas	Futuros profesores n=167	Alumnos (10-14 años) n=251
A. Más probable que salga cara	2.5	9.2
B. Más probable que salga cruz	5.1	6.4
C. Igual de probable (*)	89.2	82.9
D. No contesta	3.2	1.6

(*) Respuesta correcta

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los alumnos participantes en la investigación de Cañizares (1997), comprobamos que el porcentaje de respuestas correctas entre los futuros profesores es algo más alto. Entre los alumnos, el porcentaje más alto de respuestas incorrectas corresponde a los que consideran que es más probable que vuelva a salir cara (9,2 %), seguido de los opinan que es más probable que salga cruz (6,4%). Es de destacar que entre los que responden de forma incorrecta, los alumnos responden con mayor frecuencia la opción (A, recencia positiva) que la (B, recencia negativa) mientras que entre los futuros profesores ocurre al revés. Esto podría tener su explicación en un efecto no deseado de los programas de instrucción de estadística que se imparte a los futuros profesores, basándose en el cual, dichos profesores tienden a equilibrar las frecuencias.

Entre los argumentos utilizados por los futuros profesores, se observa que la justificación mayoritaria proporcionada por ellos es la correcta "*puede salir cualquiera de los dos resultados*" (77,9%), distinguiendo entre los que aplican la regla de Laplace (53,8%) y los que han respondido de forma correcta pero sin hacer uso de la probabilidad (24,1%). Entre los argumentos incorrectos, hay un importante porcentaje de futuros profesores que considera que "*se debe al azar*" (9,5%), seguido de los que opinan que es más difícil que vuelva a salir cara (5,7%).

4.2.Análisis del problema 2

En la Tabla 2 presentamos los porcentajes de los diferentes tipos de respuestas encontrados al problema 2. Como puede observarse, este problema es más complicado para los futuros profesores que el primer problema, ya que el porcentaje de respuestas correctas, en este caso, es bastante más bajo (23,4%). Entre las respuestas incorrectas, destaca el alto porcentaje de futuros profesores que considera que todos los resultados propuestos tienen la misma probabilidad (63,3%), no valorando la información proporcionada en el enunciado del problema. Porcentajes menores son los que opinan que es más probable que vuelvan a salir los otros dos resultados.

Tabla 2. Porcentaje de tipos de respuestas al problema 2

Respuestas	Futuros profesores n=167	Alumnos (10-14 años) n=251
A. Arriba=36 Abajo=64	1.9	6.6
B. (*) Arriba=63 Abajo= 37	23.4	17
C. Arriba=51 Abajo=49	3.2	7.2
D. Todos tienen la misma probabilidad	63.3	66.1

(*) Respuesta correcta

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los alumnos participantes en la investigación de Cañizares (1997), comprobamos que el porcentaje de respuestas correctas entre los futuros profesores es algo mayor, y que el porcentaje más alto de respuestas incorrectas de los alumnos, tal y como ocurre en los futuros profesores, corresponde a los que consideran que todos los resultados tienen la misma probabilidad (66,1 %), seguido con diferencia de los que opinan que es más probable que vuelvan a salir los otros dos resultados. En ambos grupos existe una fuerte incidencia en el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992).

Entre los argumentos utilizados por los futuros profesores, se observa que el porcentaje de argumentos correctos es bastante bajo (23,4%), distinguiendo entre los que aducen razones físicas (19%) y los que basan su justificación en la información aportada por el experimento realizado por el profesor anteriormente (4,3%). Entre los argumentos incorrectos, hay un alto porcentaje de futuros profesores que considera que los dos sucesos "*tienen la misma probabilidad*" (35,4%), lo que muestra que no distinguen correctamente entre sucesos equiprobables y no equiprobables, seguido de los que opinan que "*se debe al azar*" (8,2%). Destaca también el alto porcentaje de futuros profesores que no aporta ningún argumento (32,9%).

5. Discusión y conclusiones

El análisis de las prácticas personales de los futuros profesores de educación primaria al realizar la tarea propuesta, ha permitido poner de manifiesto la gran variedad de significados personales manifestadas por ellos cuando resuelven problemas de probabilidad basados en el enfoque frecuencial, así como las dificultades y errores más frecuentes, similares en algunos casos a las de los alumnos de 10-14 años, del nivel educativo donde ejercerán profesionalmente.

Hay un porcentaje importante de futuros profesores que resuelven de forma incorrecta el problema 1 (lanzamiento de monedas), debido quizás a que no manejan adecuadamente el concepto de independencia (Truran y Truran, 1997). Como hemos comprobado, el problema 2 (lanzamiento de chinchetas) es más complicado para los futuros profesores que el problema 1, destacando la alta incidencia del sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), al considerar que todos los resultados propuestos tienen la misma probabilidad, no valorando la información proporcionada en el enunciado del problema. Estas dificultades coinciden

con las descritas por Begg y Edwards (1999) con profesores en prácticas de enseñanza elemental y las referidas por Carnell (1997) con profesores de enseñanza media al resolver problemas de probabilidad.

Ball (2000) indica que el formador de profesores, al abordar la enseñanza de la probabilidad, debe tener en cuenta las dificultades y errores de los futuros profesores en la resolución de problemas de probabilidad, además del razonamiento estadístico. En consecuencia, debemos diseñar un itinerario formativo adecuado para mejorar la formación probabilística de los futuros profesores de educación primaria, que debe incluir las componentes didácticas básicas (Batanero, Godino y Roa, 2004). Además se debe realizar un cambio metodológico que incida en el trabajo basado en resolución de problemas, experimentación con fenómenos reales, proyectos y utilización de la simulación, que, además de mejorar la comprensión proporcionan modelos de la forma en que han de trabajar en clase con sus alumnos.

Agradecimientos: Esta investigación forma parte del Plan Propio de Investigación de la Universidad de Granada: Programa 20 y de los Proyecto SEJ2007-60110/EDUC, MEC-FEDER y EDU2010-14947, MICIIN y Grupo FQM-126, Junta de Andalucía.

Referencias

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Cádiz. España.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247.

Batanero, C., Godino, J. D., & Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train pre-service school teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference*. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). *Training teachers to teach probability. Journal of Statistics Education*, 12. Disponible en http://www.amstat.org/publications/jse/

Begg, A. y Edwards, R. (1999, August). Teachers ideas about teaching statistics. Comunicación presentada en la *Reunión Anual de the Australian Association for Research in Education y the New Zealand Association for Research in Education*. Melbourne, Australia.

Cañizares, M. J. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. España.

Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad*. Tesis Doctoral, Universidad de Cádiz. España.

Carnell, L. J. (1997). *Characteristics of reasoning about conditional probability (preservice teachers)*. Tesis Doctoral. University of North. Carolina-Greensboro.

Dugdale, S. (2001). Pre-service teachers use of computer simulation to explore probability. *Computers in the Schools* 17 (1/2), 173-182.

Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of preK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 309-321). Reston, VA: NCTM.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. (2008). Assessing and developing

pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers trough project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey. México.

Green, D. R. (1983). A survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey, P. Holmes, & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 766-783). Universidad de Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Haller, S. K. (1997). *Adopting probability curricula: The content and pedagogical content knowledge of middle grades teachers*. Tesis Doctoral. University of Minnesota.

Khaneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainity: Heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.

Llinares S., & Krainer K. (2006). Mathematics student teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 429 – 459). Rotherdam/Taipei: Sense Publichers.

López, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahía), Brasil: International Association for Statistics Education.

Mickelson, W. T. y Heaton, R. (2004). Primary teachers'statistical reasoning about data. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), T*he challenges of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 353-373). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria. Madrid: *Boletín Oficial del Estado*, nº 293.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: VA, NCTM.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. Gonzáles & M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM. ISBN: 84-8127-156-X.

Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for the education of primary teachers. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics. Cape Town: International Association for Statistics Education*.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Sánchez, E. S. (2002). Teachers beliefs about usefulness of simulations with the educational software Fathom for developing probability concepts in statistics classroom. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics*. Cape Town: International Association for Statistics Education.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning*. Dodrecht: Kluwer.

Truran, J. y Truran, K. (1997). Statistical independence - One concept or two? Implications for research and for clasroom practice. En B. Philips (Ed.), *Papers on statistical education*

presented at ICME-8 (pp. 87-100). Swinburne University of Technology.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education* 4 (4), 305-337.

Wood, T. (2008). *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.

Significados de la probabilidad en el currículo español para la educación primaria

Emilse Gómez[1] *y J. Miguel Contreras*[2]

[1]Universidad Nacional de Colombia
[2]Universidad de Granada

Resumen

Los currículos más recientes, de algunos países como España, promueven que el niño tenga contacto con el azar y la probabilidad desde los primeros años de escolaridad. Sin embargo, esta no es una tarea fácil dado que la probabilidad desde su comienzo ha recibido diversos significados que coexisten en la actualidad; y aunque estos significados son complementarios, sus diferencias epistemológicas han sido fuente de debate y de conflictos cognitivos. En consecuencia los profesores debieran conocer estos diversos significados, sus problemáticas y la forma de introducirlos en la formación escolar. El objetivo de este trabajo es analizar, con algunas herramientas del enfoque onto-semiótico, los significados que se sugieren desde las orientaciones curriculares españolas para la Educación Primaria, con la finalidad de orientar a los profesores encargados de su enseñanza hacia una introducción paulatina y articulada. Desde este enfoque, la identificación en el currículo de objetos primarios ligados a cada significado institucional permite establecer un significado de referencia para el ejercicio docente; esta caracterización puede conllevar una disminución en los conflictos durante el desarrollo del pensamiento probabilístico en los escolares.

Palabras clave: Probabilidad, orientaciones curriculares, significados

1. Introducción

El currículo en España está definido a nivel nacional y se concreta luego a nivel autonómico. En este trabajo revisamos las orientaciones curriculares sobre probabilidad en la educación primaria aplicables en la Comunidad Autonómica de Andalucía. En primer lugar presentamos resumidamente los significados de la probabilidad relevantes para nuestro estudio; posteriormente, sintetizamos los elementos del enfoque onto-semiótico (EOS) que utilizaremos en nuestro estudio. A continuación analizamos las enseñanzas mínimas en el currículo nacional (MEC, 2006), éste incluye por primera vez la probabilidad en todos los niveles, y las orientaciones de la Junta de Andalucía (Consejería de Educación, 2007). Este análisis concluye con una descomposición en elementos básicos de los significados de la probabilidad presentes en estas orientaciones curriculares, que sirven de orientación para el ejercicio profesional del profesor de matemáticas en primaria para Andalucía, y se puede adaptar a otras comunidades autonómicas o a otros países con currículos similares.

2. Objetos básicos del enfoque onto-semiótico

La actuación de las personas o instituciones frente a un tipo de situaciones problemáticas relacionadas con un cierto objeto (por ejemplo, probabilidad) está dada por sus sistemas de prácticas de las cuáles surge el objeto, denominado en el EOS *significado del objeto matemático* (Godino, 2003). Entendida la *institución* como el grupo de personas que, además de tener intereses comunes, comparte instrumentos, reglas y modos de funcionamiento propios de la institución.

A nivel institucional, Godino (2003) identifica cinco tipos de significado: el *holístico* (sistema de prácticas en el sentido más amplio), el *referencial* (sistema de prácticas base), el

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 571-578). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

pretendido (sistema de prácticas para la planificación de un proceso de enseñanza), el *evaluado* (subsistema que utiliza el docente para valorar los aprendizajes), y el *implementado* (sistema de prácticas implementado por el docente). Este análisis de lineamientos curriculares corresponde a un significado referencial de la institución escolar.

Estos significados se caracterizan, entre otros elementos, por los siguientes objetos primarios (Godino, Batanero y Font, 2007): *Situaciones problema*, aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, problemas, que inducen una actividad matemática; *lenguaje*, términos, expresiones, notaciones, gráficos que se utilizan para representar los datos del problema, operaciones con estos datos, objetos que se utilizan y soluciones encontradas; *conceptos*, se usan implícita o explícitamente en la resolución de un problema; *proposiciones*, enunciados sobre relaciones o propiedades de los conceptos; *procedimientos*, algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo que se aplican; y *argumentos*, enunciados usados para validar o explicar proposiciones y procedimientos, o bien la solución de los problemas. Nuestro análisis se desarrolla a la luz de estas definiciones.

3. Significados de la probabilidad

La probabilidad, desde su nacimiento ha tenido un doble sentido (Hacking; 1995), como grado de creencia y como evidencia aceptable para el científico, dando origen a diferentes definiciones posteriores de probabilidad, que aún coexisten. Batanero (Batanero, 2005; Batanero y Díaz, 2007) describe las más adecuadas en la enseñanza; a continuación resumimos las situaciones problema ligadas a su surgimiento, que parcialmente dan cuenta de su complementariedad, y las sugerencias de esta autora para la enseñanza.

- *Significado intuitivo.* Las primeras ideas intuitivas surgen ligadas a las apuestas, esperanza y ganancia en un juego, así como al concepto de juego equitativo y no se precisaron hasta que se trató de asignar números para poder comparar la verosimilitud de diferentes sucesos. Aunque estos juegos son tan antiguos como el hombre, el desarrollo de la teoría de probabilidades tardó siglos, pues según Batanero, Henry y Parzysz (2005) se consideraba impensable cualquier predicción sobre los sucesos aleatorios, pues se suponía que el futuro era solo conocido por los dioses.

  En la enseñanza, se puede comenzar a partir de este significado intuitivo y aprovechar el interés de los niños por los juegos para introducir la noción de probabilidad. Para asignar probabilidades a sucesos, en este nivel, se puede hacer comparaciones de la verosimilitud de sucesos con palabras del lenguaje habitual; a pesar de que no saber cuál de ellos ocurrirá en una prueba particular, algunos de ellos merecen más confianza que otros, en función del conocimiento previo sobre las condiciones de realización del experimento.

- *Significado clásico.* La correspondencia de Pascal y Fermat, resolviendo problemas de reparto o ganancia esperada en juegos de azar, se considera el punto de partida de la teoría de la probabilidad, en la década de 1650. En 1814, Laplace dio la definición que hoy enseñamos con el nombre de “regla de Laplace”. Godino, Batanero y Cañizares (1987) indican que esta definición fue discutida desde su publicación, debido a debilidades tales como: es circular, utiliza el término que quiere definir (equiprobable), e introduce un elemento subjetivo asociado a la necesidad de juzgar la equiposibilidad de diferentes resultados. Por otro lado, esta definición no es aplicable cuando los experimentos tienen posibilidades infinitas (la variable es continua) o no se cumple la equiprobabilidad (el espacio muestral finito no es simétrico).

  A nivel escolar, este significado ha sido enseñado durante muchos años; pues resultaba fácil calcular las probabilidades de los sucesos elementales en ejemplos de juegos con dados o monedas, que hacen parte de la vida cotidiana del niño. Sin embargo, una vez se pasa de la probabilidad simple a la compuesta el cálculo se complica, pues se requiere razonamiento combinatorio, que se dificulta para los estudiantes.

- *Significado frecuencial.* En 1713, Bernoulli sugirió que podríamos asignar probabilidades a los sucesos a partir de la frecuencia relativa observada en una serie grande de ensayos del experimento. Su demostración de la primera ley de los grandes números, fue aceptada como un apoyo al carácter objetivo de la probabilidad. En esta visión se define la probabilidad como el número hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse. Algunos problemas filosóficos de este enfoque (Godino, Batanero y Cañizares, 1987) son los siguientes: No se obtiene un valor exacto para la probabilidad, sino que siempre se dan aproximaciones; no se sabe con certeza el número de experimentos idóneo para aceptar la estimación; a veces es imposible contar con idénticas condiciones en la experimentación. Otra objeción es que no se podría aplicar en algunos campos del conocimiento, que por su naturaleza son sucesos irrepetibles.

  A nivel escolar, la enseñanza bajo el enfoque frecuencial es adecuada, se pueden encontrar muchos ejemplos de fenómenos de la vida cotidiana, como la distribución de características demográficas para los cuáles se poseen datos fiables de grandes poblaciones. En la actualidad hay una ventaja adicional, y es que el trabajo con ordenadores y las herramientas disponibles en internet, con *applets* o simuladores de fácil manejo, permiten simular en forma artificial miles de repeticiones virtuales del mismo experimento en segundos e ilustrar rápidamente el efecto del número de repeticiones y la rapidez o lentitud de la convergencia (Batanero, Henry y Parzysz, 2005; Fernándes et al., 2009).

- *Significado subjetivo.* Un nuevo punto de vista aparece a través de la regla de Bayes, publicada en 1793, que permite transformar probabilidades a priori, de algunas causas, en probabilidades a posteriori, que incorporan la información de los datos observados. Las probabilidades podrían entonces revisarse y pierden de este modo el carácter objetivo, serían definidas como grados de creencia personal. La controversia sobre el estatuto científico de esta visión surge ante la dificultad de hallar una regla para asignar valores numéricos que expresen grados de creencia personal (Batanero, 2005). En la primera mitad del siglo XX, Ramsey y De Finetti propusieron una teoría que permite asignar las probabilidades subjetivas separando las creencias personales de las preferencias. Sin embargo, la comprensión de la probabilidad condicional causa dificultades a los estudiantes (Batanero, Contreras y Díaz, 2012).

  La enseñanza del Teorema de Bayes no sería posible en la Educación Primaria; generalmente se estudia a partir de los 14-15 años (Díaz et al., 2012). Sin embargo, Godino, Batanero y Cañizares (1987) sugieren usar este enfoque en forma intuitiva en situaciones experimentadas por el niño. Para asignar probabilidades a sucesos, en este nivel, se puede hacer corresponder un valor numérico entre 0 y 1 a sucesos comparados previamente, o situar los sucesos de interés sobre un gráfico, mostrando la escala de la probabilidad. Estas probabilidades se podrían revisar posteriormente con nuevas experiencias.

- *Significado axiomático.* En el siglo XX, diferentes autores contribuyen a la axiomatización de la probabilidad. Borel contempla la probabilidad como un tipo especial de medida, y Kolmogorov aplicando la teoría de conjuntos para deducir una axiomática, que se acepta por todas las escuelas, independientemente del significado filosófico otorgado a la naturaleza de la probabilidad. Desde entonces, la probabilidad es un modelo matemático útil las ciencias, y en todos los campos de la actividad humana.

  La enseñanza de la probabilidad, bajo esta axiomatización, sólo sería aconsejable a nivel universitario; cuando se hayan comprendido las definiciones clásica, frecuencial y subjetiva (Godino, Batanero y Cañizares, 1987), aunque los alumnos de secundaria podrían comprenderla a nivel intuitivo.

4. Decreto de Enseñanzas Mínimas

La enseñanza de las matemáticas para la Educación primaria se organiza en cuatro bloques de contenido (MEC, 2006): Números y operaciones; medida: estimación y cálculo de magnitudes; geometría; tratamiento de información, azar y probabilidad. Este último presenta contenidos explícitos de probabilidad para cada ciclo de formación; y también hay menciones en otros bloques, en concordancia con el carácter integrador del currículo.

a. Contenidos

A continuación presentamos los contenidos incluidos y el significado de la probabilidad al que corresponden los objetos matemáticos involucrados.

- Primer ciclo: Contenidos propios del significado intuitivo: "Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad" (MEC 2006, p. 43098). Y los contenidos estadísticos necesarios en el trabajo con el significado frecuencial: "descripción verbal e interpretación de gráficos sencillos y la utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos en contextos familiares y cercanos" (MEC 2006).
- Segundo ciclo: De nuevo, contenidos propios del significado intuitivo: "*Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar"* (MEC 2006, p. 43099). Y recursos estadísticos del significado frecuencial:

  Iniciación al uso de estrategias eficaces de recuento de datos. Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Lectura e interpretación de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana. Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares. (MEC 2006, p.43099).

- Tercer ciclo: En este caso los contenidos corresponden al significado clásico y al frecuencial: "*Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso […] Confianza en las propias posibilidades e interés por utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión de los contenidos funcionales*" (MEC 2006, p. 43101). De nuevo, los recursos estadísticos sugeridos son propios del significado frecuencial:

  Recogida y registro de datos utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos. Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos. Obtención y utilización de información para la realización de gráficos (MEC 2006, p. 43101).

La situación problemática común en los tres ciclos es cuantificar sucesos inciertos o expresar grados de creencias en los mismos (significado intuitivo); también aparecen problemas relacionados con los juegos de azar (significado clásico), aunque no se explicita la idea de juego equitativo. Podemos suponer que se sugiere la descripción de tendencias en fenómenos naturales a partir de datos (significado frecuencial) cuando se hace mención a la recogida e información de tales datos. No se explicitan los contextos en que la información disponible pueda cambiar la probabilidad (significado subjetivo). Es común la argumentación basada en ejemplos y contraejemplos, siendo la única en el primer ciclo; mientras en los otros dos se incluye la inducción a partir de datos experimentales o simulados, así como la generalización.

b. Criterios de evaluación

El Real Decreto propone los siguientes criterios de evaluación:

- *Primer ciclo*: La mención a la evaluación de la comprensión de la probabilidad en este ciclo es indirecta, en el siguiente criterio relacionado con la comprensión de gráficos se indica que "también se pretende evaluar si los niños y las niñas están familiarizados con conceptos y términos básicos sobre el azar: seguro, posible, imposible" MEC 2006, p. 43098).
- *Segundo ciclo*: No hay mención explícita al azar o a la probabilidad. Sin embargo se evalúan la construcción correcta y la lectura adecuada de las distintas representaciones; para realizar un recuento de datos efectivo y representar su resultado y para describir e interpretar gráficos sencillos relativos a situaciones familiares.
- *Tercer ciclo*: La comprensión de las ideas de azar y probabilidad se evalúan mediante el siguiente criterio: "Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado" (MEC 2006, p. 43101). Se indica que se "comprobará que se empieza a constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición. Estas nociones estarán basadas en la experiencia." (p. 43101) Además, se repiten las recomendaciones respecto a la realización, lectura e interpretación de representaciones gráficas de un conjunto de datos.

c. Competencias

La enseñanza de la probabilidad en la educación primaria en este Decreto apoya el desarrollo de tres capacidades matemáticas generales: (a) Utilizar el conocimiento matemático para comprender y valorar situaciones de la vida cotidiana; (b) apreciar el papel de las matemáticas en la vida cotidiana y otras disciplinas; y (c) adquirir seguridad en las propias habilidades matemáticas para afrontar situaciones diversas.

Igualmente, aporta al desarrollo de competencias básicas mencionadas en el Decreto: Aporta en el conocimiento e interacción con el mundo físico porque hace posible una mejor comprensión y descripción más ajustada del entorno. Contribuye a la adquisición de competencia en tratamiento de la información y competencia digital. Fomenta el desarrollo de competencia en comunicación lingüística en la incorporación de lo esencial del lenguaje matemático a la expresión habitual y su uso adecuado en la descripción de razonamientos y procesos. Aporta a la competencia social y ciudadana mediante la aceptación de otros puntos de vista distintos al propio. Asimismo, aporta a la autonomía e iniciativa personal mediante los contenidos asociados a la resolución de problemas probabilísticos: la planificación en detalle de la situación; la gestión de los procesos de resolución; y la evaluación periódica del proceso.

5. Junta de Andalucía

El currículo de primaria en Andalucía (Consejería de Educación, 2007) hace énfasis en la transversalidad en matemáticas a partir de tres núcleos temáticos: la resolución de problemas, el uso de los recursos TIC para la enseñanza y aprendizaje, y la dimensión histórica, social y cultural. El "Tratamiento de la información, azar y probabilidad" es presentado en relación con otras materias, entre ellas Conocimiento del medio natural, social y cultural. Adopta los contenidos del decreto de enseñanzas mínimas, proponiendo tareas como la recogida de información y el uso de técnicas de recuento y agrupación, que más adelante se pueden potenciar para el entendimiento de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. La introducción de la probabilidad e incertidumbre se sugieren explícitamente a través de juegos de azar; cuyo criterio de evaluación involucra al significado clásico*: "que el alumnado sea capaz de razonar sobre los posibles resultados de un experimento*

aleatorio sencillo a la vez que pueda asignar probabilidades a sucesos equiprobables o no, utilizando distintas estrategias sobre técnicas de conteo" (Consejería de Educación, 2007, p.50).

También se abordan los significados intuitivo y subjetivo en el siguiente criterio de evaluación, que involucra objetos ligados a los significados frecuencial y subjetivo*: "la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación, para suscitar el interés por los temas y ayudar a valorar el beneficio que los conocimientos estadísticos proporcionan ante la toma de decisiones*" (Consejería de Educación, 2007, p.49). La Junta de Andalucía sugiere el uso de las TIC para la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación en matemáticas, haciendo mención explícita al concepto de simulación que está tácito en el Decreto de Enseñanzas Mínimas. El análisis de funcionamiento de estas herramientas, también permite el desarrollo de nociones de incertidumbre, de variabilidad y la diferencia y pertinencia en la asignación de probabilidades con los diferentes significados.

6. Síntesis y conclusiones

Para sintetizar, en las Tablas 1 y 2 se presentan los objetos matemáticos que aparecen explícita o implícitamente en las orientaciones curriculares; su nivel de complejidad aumenta de un ciclo al siguiente, sin llegar a formalizarlos o definirlos. Algunos, tales como suceso seguro e imposible, sólo se presentan en este nivel educativo. Observamos que el Decreto incluye temáticas asociadas al significado intuitivo de la probabilidad en el primer ciclo (niños de 6 y 7 años); temáticas que permiten conectar la estadística con la probabilidad e introducir los significados subjetivo y frecuencial en el segundo ciclo (niños de 8 y 9 años); y temáticas que formalizan el significado clásico y frecuencial en el tercer ciclo (niños de 10 y 11 años). La Junta de Andalucía adiciona contenidos de iniciación al significado clásico y amplía los contextos de aplicación, hace énfasis en el entorno cercano al niño y juegos de azar como fuente de situaciones problema.

Tabla 1. Problemas, conceptos y propiedades presentes en el currículo de Educación Primaria

		Ciclo	1º	2º	3º
Situac. Probl.		Cuantificación de sucesos inciertos o expresión de grados de creencia	X	X	X
		Previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos		X	X
		Predecir o valorar los resultados en juegos de azar			X
Lenguaje		Expresiones cotidianas, incluido el lenguaje numérico	X	X	X
		Expresiones formales		X	X
		Simbólico			X
		Tabular		X	X
		Gráfico	X	X	X
Conceptos		Intuitivo: Azar, variabilidad; suceso, seguro e imposible; posibilidad	X		
		Clásico: Juego de azar; casos favorables, posibles; probabilidad; esperanza matemática, juego equitativo			X
		Frecuencial: población, atributos, frecuencia (absoluta, relativa), distribución, probabilidad teórica, valor estimado de probabilidad, simulación		X	X
		Subjetivo: Suceso incierto; probabilidad como grado de creencia		X	
Propiedades	Intuitivo	No se puede predecir con seguridad el resultado	X	X	
		Suceso posible: cualquier resultado de un experimento aleatorio	X	X	
		Suceso imposible: nunca se verifica	X		
		Suceso seguro: siempre ocurre	X		
	Frecuencial	La probabilidad se puede comparar	X		
		Colectivo: semejantes que difieren en atributos observables	X	X	
		El número de atributos en un colectivo puede o no ser finito	X	X	
		La frecuencia relativa está comprendida entre 0 y 1			X
		Los atributos pueden o no ser equiprobables			X
		Probabilidad: valor objetivo, hipotético, desconocido			X

	Simulación; sustituir un experimento por otro	X
Clásico	Número de resultados finito y numerable	X
	Simetría de resultados	X
	Casos favorables: resultados que favorecen	X
	Casos posibles: todos los resultados	X
	La probabilidad sólo depende del número de resultados	X
	Regla de Laplace	X
Sub.	Suceso incierto: se tiene información, pero no es totalmente predecible	X
	Probabilidad: condicionada por conocimientos	X

Los estudiantes tienen contacto con todos estos significados, en relación con los conceptos. La aplicación con situaciones de la vida común les muestra el carácter interdisciplinar y la necesidad del pensamiento probabilístico y su lenguaje, en contextos públicos y privados. Se pretende que adquieran destrezas de cálculo e interpretación de probabilidades y uso adecuado del lenguaje probabilístico de uso cotidiano y algunos términos especializados.

Tabla 2. Procedimientos y argumentos presentes en el currículo de Educación Primaria

Procedimientos	Discriminar fenómenos aleatorios	X	X	
Intuitivo	Interpretar grado de posibilidad o creencia		X	
	Valoración cualitativa de posibilidades		X	
	Comparación cualitativa de probabilidades		X	
Frecuencial	Reconocer los sucesos seguro, imposible y posible	X		
	Enumerar o discriminar atributos en un colectivo	X	X	
	Calcular la frecuencia absoluta a partir de observaciones o datos	X	X	X
	Interpretar una distribución de frecuencias	X	X	X
	Calcular o representar gráficamente una distribución	X	X	X
	Leer e interpretar tablas de doble entrada (experimentos compuestos)		X	
	Estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos			X
	Reconocer el carácter aproximado de esta estimación			X
	Simular un experimento aleatorio con otro equivalente con tecnología			X
	Estudiar la equivalencia de los experimentos original y simulado			X
Subjetivo	Analizar experimentos en los que la asignación de probabilidades depende de la información de la persona que la asigna			X
	Valorar probabilidades a partir de experiencias personales		X	X
	Estimar probabilidades personales mediante cociente de posibilidades a favor y en contra			X
	Interpretación del grado de creencia personal			X
Clásico	Analizar diferentes juegos de azar	X	X	X
	Enumerar (contar) casos favorables/posibles con diagramas o combinatoria		X	X
	Diferenciar casos favorables y no favorables	X	X	X
	Asignar a cada suceso elemental una probabilidad 1/n		X	X
	Comparar probabilidades con razonamiento proporcional			X
	Asignar la probabilidad de sucesos compuestos con regla de Laplace			X
Argumentos	Ejemplos y contraejemplos	X	X	
	Uso de gráficos para comprobación de propiedades	X	X	
	Inductivo, a partir de datos	X	X	

Generalización	X
Simulación	X

Reconocimiento:

Proyecto EDU2010-14947, FPI-BES-2011-044684 (MICINN-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime, 8*(3), 247-263.

Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza *Revista digital Matemática, Educación e Internet 12*(2).

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J.P Van Bendegen y K. François (Eds), *Philosophical dimmensions in mathematics education.* (pp. 107-127). New York: Springer

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2007a). *ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía*.

Díaz, C. Contreras, J., M, Arteaga, P. y Batanero, C. (2012). Prospective teachers' difficulties in solving bayes problems. Trabajo presentado en *PME36*, Taipei, 2012. En Tai-Yih Tso (Ed.),*Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.1, pp. 230). Taipei: PME Group.

Fernándes, J.A., Batanero, C., Contreras, J.M., y Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante XVIII* (1), 161-183.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Trabajo de investigación. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Hacking, I. (1995) *El surgimiento de la probabilidad.* Barcelona: Gedisa.

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. España: Ministerio de Educación y Cultura.

Técnicas Monte Carlo para la enseñanza de la estadística

Bueno Pérez, F.M. Alexander yManzano Diosdado, Daniel

Instituto Carlos I de Física Teórica y Computacional

Resumen

La probabilidad y la estadística son una de las ramas de las matemáticas con más aplicaciones, y cuyos conceptos son más difíciles de asimilar. Mientras en otras ramas, como las ciencias naturales, la experimentación suele ser una herramienta para desarrollar la intuición de los estudiantes. En el estudio de la probabilidad este desarrollo es más difícil. En este artículo mostramos como las técnicas Monte Carlo y la realización de experimentos por ordenador con números pseudoaleatorios, puede ser muy útil en la asimilación de estas materias. Estas técnicas son muy usadas en investigación científica, pero su enseñanza suele estar relegada a cursos específicos de educación superior. Mediante la simulación por ordenador se puede también facilitar mucho este tipo de enseñanza también en niveles educativos más elementales. Con el uso de esta tecnología, el docente puede crear aplicaciones para que el alumnado adquiera mejor las competencias en estos temas, además, estos pueden realizar sus propios experimentos y visualizar el cálculo de magnitudes como la varianza, la media o la función de distribución en función del número de eventos. Finalmente, el uso de nuevas tecnologías como javascript y html es discutido y evaluado.

Palabras clave: Monte Carlo, simulación, estadística, probabilidad, html, javascript, blog.

1. Introducción

Las matemáticas son consideradas, en las etapas educativas que comprenden la educación obligatoria, un área instrumental (junto a Lengua Castellana y Literatura, y Primera Lengua Extranjera), ya que el conocimiento que el alumnado adquirirá en dicha área o asignatura es esencial, para la formación pluridimensional del alumnado, y garantiza un correcto desarrollo en su futura vida personal, académica y laboral. Además, el "Conocimiento Matemático" está recogido en el listado de Competencias Básicas que recoge la actual Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE), entendiéndose las Competencias Básicas, como aquellos conocimientos y habilidades que el alumnado debe adquirir al finalizar la Educación Secundaria Obligatoria para integrarse de una manera adecuada en la sociedad. En concreto en Andalucía, el área de matemáticas, se incluye el siguiente núcleo temático (BOJA 171): *6. Tratamiento de la información, azar y probabilidad.*

Durante los primeros años del proceso educativo se deben aprender los conceptos de azar y probabilidad, junto a otros más complejos. La principal finalidad de este núcleo temático es que el alumnado comience a interpretar los fenómenos ambientales y sociales de su entorno cercano mediante en términos matemáticos. Esta debe entenderse como una disciplina que ayuda a interpretar la realidad y a actuar sobre ella de forma responsable, crítica y positiva. Para esa interpretación, juegan un papel esencial la estadística y a la probabilidad, disciplinas matemáticas entre las que existe una relación complementaria. En la actualidad, múltiples aplicaciones de dichas disciplinas invaden prácticamente todos los campos de la actividad humana y gozan de amplio reconocimiento social. Este hecho es constatado por su creciente importancia en el aprendizaje de otras materias, su presencia en los medios de comunicación general, en el mercado laboral y en el ambiente cultural. Por este motivo, el aprendizaje en todos los niveles educativos se inserta como una

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 579-585). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

imprescindible meta de carácter cultural que ha de iniciarse de manera natural desde la educación primaria.

El desarrollo gradual comenzará, en los primeros cursos, por las técnicas para la recogida, organización y representación de los datos a través de las distintas opciones como tablas o diagramas, para continuar, en cursos sucesivos, con los procesos para la obtención de medidas de centralización y de dispersión que les permitan realizar un primer análisis de los datos. Al igual que para otros contenidos del área es recomendable la utilización del ordenador y de las calculadoras, tanto convencionales como gráficas, para manipular, analizar y representar conjuntos de datos. Los juegos de azar proporcionan ejemplos que permitirán introducir la noción de probabilidad y los conceptos asociados a la misma.

Por otro lado, la enseñanza de la estadística es altamente no trivial. Una de las principales dificultades es la formación específica de los profesores en este ámbito específico. En el artículo "¿Hacia dónde va la educación estadística?", Batanero (2000), afirma: "Los profesores que provienen de la Licenciatura de Matemáticas no tienen una formación especifica en didáctica de la estadística y muchos de ellos tampoco en estadística aplicada. La situación es aun peor en lo que se refiere a los profesores de primaria, la mayor parte de los cuales no han tenido una formación ni siquiera básica ya no sobre la didáctica de la estadística, sino sobre los conceptos básicos de estadística o probabilidad."

Otra dificultad es la escasez de herramientas que un profesor puede ofrecer a los alumnos para que estos desarrollen sus destrezas. Esta escasez provoca que a menudo la educación en estos temas se base en resolver problemas mediante la aplicación sistemática de un cierto procedimiento. En muy pocas ocasiones se puede proveer a los estudiantes de datos reales y de medios para poder analizarlos apropiadamente. Recientemente, la integración de las nuevas tecnologías, como hojas de cálculo, ha contribuido a socavar esta segunda dificultad, permitiendo realizar los cálculos de una manera más rápida y dejando más tiempo para los conceptos estadísticos.

Según la referencia Mills (2002), muchos investigadores en educación apoyan la teoría de que los estudiantes aprenden más eficientemente de forma activa, mediante la construcción de su propio conocimiento y el sentido que se le otorga al mismo. El constructivismo, Piaget (1896), sugiere que el nuevo conocimiento no se recibe pasivamente del maestro al estudiante a través de los libros de texto y conferencias, o simplemente pidiendo a los estudiantes memorizar las operaciones rutinarias. En su lugar, el significado se adquiere a través de una interacción significativa con los nuevos conocimientos, ver también von Glasersfeld (1987).

A pesar de la claridad con la que un profesor explica un concepto, los alumnos y alumnas comprenderán el material sólo después de haber construido su propio significado. Este proceso puede requerir la reestructuración y reorganización de nuevos conocimientos y su vinculación con el conocimiento previo o anterior. El constructivismo sugiere también que el aprendizaje debe ser facilitado por el profesorado y que la interacción y el debate son componentes críticos durante el proceso de aprendizaje, Eggen (2001).

La aplicación de los conceptos estadísticos, utilizando las simulaciones Monte Carlo, puede beneficiar a los estudiantes al animarlos a desarrollar su propia comprensión de los conceptos estadísticos. Los estudiantes tendrán la oportunidad de aprender mediante la construcción de sus propias ideas y el conocimiento de las experiencias de simulación por ordenador, con la dirección de apoyo por parte del instructor. Según Packard (1993) los estudiantes que participan activamente en su propio aprendizaje suele convertirse en aprendices más independientes y solucionadores de problemas.

Una ventaja interesante de las nuevas tecnologías, que se ha sugerido en la literatura, reside en su capacidad de mejorar la comprensión del alumnado de conceptos abstractos (Kersten (1983); Dambolena (1986); Gordon y Gordon (1989); Shibli (1990); Kalsbeek (1996); Hesterberg (1998)). Mediante el uso de la tecnología informática actual, es posible

complementar el análisis de datos, con experiencias adicionales estadísticos mediante la utilización de métodos de simulación por ordenador. Estas simulaciones ofrecen a los estudiantes experimentar con muestras aleatorias de una población con parámetros conocidos, con el fin de clarificar conceptos abstractos y difíciles de la estadística.

En este artículo pretendemos mostrar cómo el docente puede usar herramientas habituales para la creación de páginas webs (HTML y JavaScript) para desarrollar las simulaciones necesarias para que el alumnado pueda realizar sus propios experimentos estadísticos. Mediante estas herramientas, el alumnado podrá participar en la construcción de su propio conocimiento con la dirección de apoyo por parte del equipo docente. Según Packard (1993), los estudiantes que participan activamente en su propio aprendizaje suele convertirse en aprendices más independientes y solucionadores de problemas. Mediante estos métodos, conceptos difusos como la media, mediana, varianza o percentil pueden ser calculados directamente, desarrollando así una mejor intuición al respecto.

2. Metodología.

Un blog, o bitácora, es una publicación web de historias que son presentadas en un orden cronológico. En ellos se pueden incluir texto, ilustraciones, enlaces a otras páginas web, o animaciones entre otras aplicaciones. También permiten la realización de comentarios por parte de los lectores, fomentando el debate entre el autor y la comunidad a la que va dirigido el blog.

En los últimos años, distintos editores de blogs se han popularizado, como Wordpress o Blogspot, permitiendo el uso de este medio sin la necesidad de unos elevados conocimientos informáticos. Por otro lado, es de gran utilidad familiarizarse con el lenguaje informático subyacente a esta nueva tecnología. El lenguaje más popular para la programación web se denomina HTML, siglas de HyperText Markup Language («lenguaje de marcado de hipertexto»), y se utiliza para describir y traducir la estructura y la información en forma de texto, así como para complementar el texto con objetos tales como imágenes. Otra útil herramienta para el diseño web es JavaScript. Este es un lenguaje que se añade al HTML y permite ejecutar instrucciones complejas en la web.

El uso de blogs en la docencia es un tema muy activo en la actualidad. En un reciente artículo, Lara (2005), se expresa que la versatilidad del formato blog como herramienta de gestión y publicación de contenidos ofrece múltiples posibilidades de uso educativo, y que cada vez más docentes van descubriendo y experimentando en sus respectivas áreas curriculares. Esta flexibilidad, junto con su sencillez de manejo gracias a las plataformas antes mencionadas, permite que se puedan adaptar a cualquier disciplina, nivel educativo o metodología. Un reciente ejemplo del buen uso de los blogs en la docencia de las matemáticas se encuentra en el blog Grima, C, "Mati y sus mateaventuras", ganador del premio bitácoras 2011 en la categoría de mejor blog educativo y en la de mejor blog.

Según Roschelle (2000) (ver también Hernández (2008)), mediante el uso de las nuevas tecnologías, y en concreto mediante los blogs, se pone de manifiesto la relación entre el aprendizaje significativo y el constructivismo. Mediante el uso de estas técnicas se demuestra que el aprendizaje es más significativo mientras estén presentes las siguientes características fundamentales: ambientes de aprendizaje actualizados y actualizables, compromiso activo, trabajo colaborativo, conocimiento del contexto real, y finalmente, la interacción frecuente y retroalimentación.

Javascript puede aportar a los blogs dinamismo e interacción. Un alumno puede aprender mejor si él mismo experimenta el concepto que se trate. Con Javascript el docente puede crear herramientas que permitan al alumno acercarse mejor a los conceptos. Las principal ventajas que ofrece este lenguaje es su facilidad de aprendizaje, junto con la cantidad de librerías que se pueden usar para construir nuevas herramientas. Con la

aparición de HTML5 la representación gráfica ha evolucionado permitiendo el uso de gráficos en 3D.

Otra ventaja de esta aproximación es que es independiente del sistema operativo del usuario. Se verá correctamente si se usa el mismo navegador web sin importar si el sistema operativo es GNU/Linux, Microsoft Windows o MacOsX. Muchas de las herramientas que los alumnos encuentran en internet se basan en aplicaciones que están alojadas en un servidor y que se ejecutan allá donde éste se encuentre alojado. Con HTML y JavaScript, las herramientas se pueden usar incluso cuando no se tenga conexión a internet.

Por otra parte, las técnicas Monte Carlo son una herramienta muy usada en la investigación científica actual, Metrópolis (1987). La pieza clave de esta técnica es la producción de números pseudoaleatorios mediante algoritmos que pueden ser computados muy eficientemente con los ordenadores actuales. Mediante el algoritmo de Metrópolis, Metrópolis (1953), se pueden generar números aleatorios siguiendo una distribución de probabilidad arbitraria. El campo de aplicaciones de estas técnicas van desde la simulación de procesos físicos, la integración de funciones multivariable o la minimización. Dadas estas aplicaciones las técnicas Monte Carlo suelen formar parte del currículum de carreras científicas, como física o química, véase por ejemplo la web del profesor Pedro Garrido de la universidad de Granada. La aplicación, por otro lado, en educación primaria o secundaria es mucho menor.

3. Resultados.

En el artículo Weir (2002), estudian el comportamiento en cuanto el aprendizaje de varios grupos de alumnos frente a aplicaciones desarrolladas para mostrar distintas distribuciones de probabilidad. Se nos muestra que el uso de estas aplicaciones basadas en técnicas de simulación Monte Carlo favorece el aprendizaje de los estudiantes. Para ser más precisos, encuentran un aumento significativo de aprendizaje en el alumnado que presentaban dificultades con otros métodos más clásicos.

En nuestro trabajo hemos desarrollado varias aplicaciones que pueden ser útil para facilitar el aprendizaje en estadística. Una de ellas explora la falacia del jugador, un resultado aparentemente contra intuitivo que suele ser difícil de asimilar por los alumnos. Esta supuesta contradicción aparece cuando una persona espera un resultado concreto para un siguiente dato vista la historia de los anteriores, para variables sin correlación temporal. Para ilustrar este fenómeno simulamos el lanzamiento de N monedas, mediante la generación de números pseudoaleatorios, y repetimos este lanzamiento varias veces hasta que salgan todas con el mismo estado, todas caras o todas cruz. Una vez realizado esto se entrega la información al usuario y preguntamos qué va a salir en el siguiente lanzamiento. Tras realizar la experiencia repetidas veces el usuario puede asimilar que el siguiente resultado de la moneda no es dependiente de los anteriores. La aplicación interactiva se puede encontrar en el blog de Daniel Manzano.

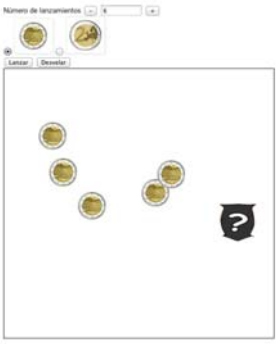


Figura 1: Aplicación de la falacia del jugador.

En otra aplicación se puede observar el Teorema del Límite Central. Según este teorema clásico, la suma de N números aleatorios independientes, con una media η y varianza σ finitas, se comporta como un elemento de una distribución gaussiana con media Nη y varianza $\sigma / \sqrt{N}$.

Usando el algoritmo de Metrópolis se pueden generar números aleatorios que sigan unas distribuciones de probabilidad. Nuestra aplicación genera un número N de variables siguiendo una determinada distribución y calcula su suma. La aplicación una vez obtenida una muestra de datos de esa suma dibuja un histograma reflejando que a medida que se aumenta el número de eventos se acerca más a una distribución gaussiana. Así el alumnado puede relacionarse con el significado real del Teorema del Límite Central, que es una pieza clave en todas las ciencias empíricas. También mediante la generación progresiva del histograma se puede comprender la diferencia entre tener mucha o poca estadística, y el alumnado puede entender la diferencia entre tener muchos o pocos eventos. Finalmente, mediante esta aplicación se pueden simular distintos experimentos relacionados con la física, la química o la economía, transmitiendo conceptos importantes como las barras de error o los percentiles. Estos "experimentos virtuales" pueden ser comparados por el docente con experimentos reales y actuales como los realizados en el CERN, muchos de cuyos datos son públicos, véase la web del CERN.

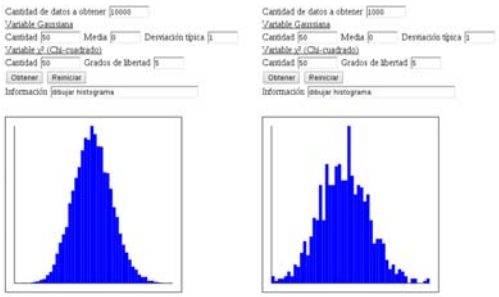


Figura 2: Histogramas generados con la aplicación del Teorema del límite central, con 10000 datos (izquierda) y 1000 (derecha)

Finalmente, hemos desarrollado otra aplicación donde se muestra la utilidad que puede tener la estadística y la probabilidad en campos a priori ajenos a la materia, como la geometría. El objetivo de la aplicación es calcular el valor de la constante π. El método usado es generar números aleatorios dentro de un cuadrado que a su vez contiene un círculo. Mediante el cálculo de la proporción de números dentro y fuera del círculo el área relativa del círculo con respeto al cuadrado puede ser calculado, y de ahí el valor de la constante. La aplicación realiza el cálculo en tiempo real, a medida que va generando los puntos. De esta manera se puede apreciar como se acerca al valor real progresivamente. Esta aplicación se encuentra alojada en el blog de F.M. Alexander Bueno.

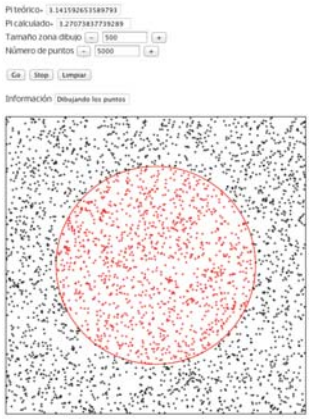


Figura 3: Aplicación del cálculo del área de un círculo.

Todas estas herramientas están licenciadas como software libre, lo cual permite a los profesores modificar y usar según sus necesidades. Esta opción, buscar licencias abiertas, no es arbitraria. Mediante el uso de licencias de software libre se permite al resto de usuarios modificar, documentar o adaptar libremente las aplicaciones disponibles, facilitando además la creación de una comunidad docente que colabore en esta dirección.

4. Conclusiones

En este artículo hemos presentado una técnica matemática, las técnicas Monte Carlo, y técnicas informáticas, HTML y Javascript, como herramientas útiles para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en la enseñanza primaria y secundaria. Mediante el uso de estas nuevas técnicas es posible realizar experimentos virtuales que acercan al alumnado conceptos abstractos y permiten desarrollar la intuición al respecto. Estos experimentos virtuales pueden ser transmitidos mediante blogs, de modo que el alumnado pueda acceder al contenido fuera del horario docente y practicar. Finalmente, si las simulaciones se licencian como software libre, el alumnado puede participar de la modificación y creación de nuevas herramientas, fomentando así el aprendizaje constructivo.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la orientadora educativa R.P. Fernández-Fuentes su ayuda en la redacción de este artículo.

Referencias

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix,* 15(2),13.

Bueno, F. M. A. (2012) Turbo patatero reactor conectado. *Técnicas Montecarlo, la estadística empírica.* Disponible en: http://tprc.blogspot.co.at/2013/01/tecnicas-montecarlo-la-estadistica.html.

CERN. Disponible en: https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/DefaultWeb/WebHome

Grima, C., y García R. (2011). Mati, y sus mateaventuras. Disponible en: http://pequenoldn.librodenotas.com/matiaventuras.

Dambolena, I. G. (1986). Using simulation in statistics courses. *Collegiate Microcomputer, 4,* 339.

Eggen, P. y Kauchak, D. (2001). *Educational psychology: windows on classrooms* (5th ed.), Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Garrido, P. y Lacomba AL. *Curso de física computacional.* Disponible en http://ergodic.ugr.es/cphys_pedro/

Gordon, F. S. y Gordon, S. P. (1989), Computer graphics simulations of sampling distributions, *Collegiate Microcomputer, 7,* 185.

Kalsbeek, W. D. (1996), The computer program called sample: a teaching tool to demonstrate some basic concepts of sampling (Version 1.01), *American Statistical Association Proceedings of the Section on Statistical Education,* 103.

Kersten, T. (1983), Computer simulations to clarify key ideas of statistics. *Two-Year College Mathematics Journal, 14,* 416.

Hesterberg, T.C. (1998), Simulation and bootstrapping for teaching statistics. *American Statistical Association Proceedings of the Section on Statistical Education,* Alexandria, VA: American Statistical Association, 44.

Lara, T. (2005) Usos de los blogs en una pedagogía constructivista. Revista Telos, 65, 86.

Manzano D. *Técnicas Montecarlo, la estadística empírica.* Disponible en: http://entangledapples.blogspot.co.at/2013/01/tecnicas-montecarlo-la-estadistica.html

Metropolis, N. (1987). The beginning of the Monte Carlo method. *Los Alamos Science* (Special Issue dedicated to Stanislaw Ulam): 125.

Metropolis N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller A.H y Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics 21*, 1087.

Mills JD. (2002). Using computer simulation methods to teach statistics: a review of the literature. *Journal of Statistics Education, 10,* 1.

Packard, A. L., Holmes, G. A. y Fortune, J. C. (1993), *A comparison of three presentation methods of teaching statistics,* ERIC Document No. 365, 696.

Piaget, J. (1930). *The child's conception of physical causality*. London, Kegan P.

Roschelle, J. M., Pea, R. D., Hoadley, C. M., Gordón, D.N, y Jeans, B. M. (2000). Changing how and what children learn in school with computer-based technology. *The Future of the Children, 10*(2), 76.

Shibli, M.A. (1990), A two-stage exercise on the binomial distribution using MINITAB, *Collegiate Microcomputer, 8(1*), 55.

Von Glasersfeld, E. (1981). An attentional model for the conceptual construction of units and numbers, *Journal for Research in Mathematics Education, 12,* 83.

Weir, C. G., McManus, I.C. y Kiely, B. (2002). Evaluation of the teaching of statistical concepts by interactive experience with Montecarlo simulations . *Behavior, Research, Methods, Instruments & Computers, 34*(2), 189.

Un escenario de investigación para el desarrollo de una educación estadística crítica en el nivel medio

Magallanes, Adriana[1]*,Colaneri, Daríor*[2] *y Rodrígruez, María Inés*[3].

[1]UNRC - IPEM Nº 119

[2]IPEM Nº119

[3]UNRC

Resumen

Este trabajo pretende llevar a la práctica una experiencia áulica enmarcada en una educación matemática crítica. Se propone un escenario de investigación interdisciplinario sobre la situación laboral de los habitantes de la localidad en la cual está inserta la institución educativa, contribuyendo desde la experiencia y bajo este enfoque a impedir la típica fragmentación que generalmente se da en la educación secundaria. Además, se plantea que este enfoque permite poner en práctica la educación que hoy se concibe como necesaria desde un paradigma situacional. El proyecto ejecutado por los estudiantes les brinda la oportunidad de desarrollar confianza en sus capacidades y potencialidades, aplicando sus habilidades estadísticas a contextos sociales. Durante su ejecución se desarrollaron distintos tipos de formatos curriculares propuestos para la educación media de la provincia (seminario, trabajo de campo, observatorio). Se elaboró una encuesta para recolectar los datos con los cuales se elaboraron gráficos y tablas estadísticas. Entendemos que este tipo de ambiente de aprendizaje le permite a los estudiantes observar los aspectos vivos del conocimiento y les ofrecen la oportunidad de interpretar la estadística como una herramienta para ver críticamente el mundo como, así también, les posibilita verse como protagonistas de la intervención social.

Palabras clave: educación matemática crítica; paradigma situacional; escenario de investigación; tablas; gráficos.

.

1. Introducción

En este trabajo se asume el enfoque crítico para la educación matemática, el cual considera esencial incorporar los aspectos político-sociales del medio en que se desarrolla su enseñanza, como constitutivos del mismo.

Para esta teoría la interacción entre estudiantes, docentes y administradores de la educación, establecen las condiciones de posibilidad de construcción de una educación que contemple el desarrollo de una competencia democrática de los estudiantes.

Ole Skovsmose (1999, 2000) presenta las ideas centrales en torno a la educación matemática crítica, ilustrándolas con seis ejemplos de proyectos educativos realizados en escuelas danesas. La intención más relevante de este autor es la de considerar la relación entre educación crítica y las materias escolares; en particular, la matemática, pero no sólo de manera teórica sino también brindando fundamentos para interpretar y aclarar prácticas educativas. Para esta teoría, la relación entre educación matemática y democracia está estrechamente ligada a la institución escolar en la que efectivamente se realiza. En este sentido, es que encontramos que esta teoría y el paradigma situacional para la educación (Baquero, 2008) son compatibles tanto en sus objetivos como en la metodología que proponen para la educación.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 587-593). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

En este enfoque, la situación no opera como un contexto externo que decora, acelera o desacelera, un proceso de desarrollo que es atributo del individuo; sino que el desarrollo, como el aprendizaje, es algo que se produce en situación y es la situación la que lo explica. Dicho autor alerta, en que no debemos adoptar perspectivas constructivistas poco atentas al carácter político-cultural de las prácticas escolares y muestra cómo el enfoque situacional permite abrir una agenda crítica de problemas sobre las prácticas educativas. La escuela situación es una escuela en la cual el pensamiento situacional no es un pensamiento preconstituido, una nueva ideología o una doctrina que sabe siempre lo que es preciso hacer y decir, sino que por el contrario, se funda en un "no saber" que obliga a pensar lo impensado a partir de los términos de unas circunstancias dadas. La escuela-situación es política, en el sentido que Spinoza (1999) da al término: construye sociedad y a partir de allí produce un espacio de lo público que no se impone a los miembros de un territorio dado, sino que existe en la medida en que él mismo es expresión de su actividad. En una escuela situación no se trata de impartir unos contenidos como de verificar en situación, proyectos de aprendizaje singulares y de ponerse a disposición para alcanzar algo más que una mera repetición. Se entiende que no hay situación de aprendizaje sin una implicación deseante de los estudiantes, no se forma un proyecto de aprendizaje invocando una autoridad exterior al proceso mismo.

2. Objetivos propuestos

a. Objetivos Generales

- Generar un escenario de investigación que invite a los estudiantes a formular preguntas, analizar lo que sucede en su entorno social, a buscar explicaciones y plantear hipótesis.
- Que el estudiante pueda verse como un ciudadano en una democracia, que no sólo es un receptor de lo sucede en su contexto y de las decisiones que toman las autoridades, sino que puede ser un generador para su comunidad.
- Que los estudiantes puedan ver los conocimientos (de la matemática y de formación para la vida y el trabajo) como necesarios; aunque no por ello suficientes, para poder interpretar lo que sucede en la realidad; que es mucho más compleja como para ser limitada sólo a un área del conocimiento.

b. Objetivos Específicos

Que los estudiantes puedan:

- Realizar un diagnóstico de la situación laboral en Alpa Corral y comparar sus resultados con datos anteriores empleando contenidos estadísticos.
- Reflexionar y plantear hipótesis sobre la situación laboral de su pueblo.
- Relacionar la realidad laboral con ingresos económicos y necesidades básicas (vivienda).
- Comunicar y confrontar sus resultados con los de sus pares.

3. Metodología

Se desarrolló un proyecto de investigación áulico vinculando el trabajo desde la Matemática conjuntamente con la asignatura Formación para la Vida y el Trabajo, en tercer año del ciclo básico. Participaron en esta experiencia los profesores de las disciplinas mencionadas, dieciocho alumnos de tercer año, un ayudante técnico de informática, el director de la Radio FM Alpa Corral y habitantes de esta localidad. También desde la dirección del establecimiento educativo se comunicó al gobierno municipal la ejecución de esta actividad, ofreciendo los resultados del diagnóstico laboral que se obtuvieran.

La introducción de los estudiantes al tema, se realizó a partir de un "Seminario" en el cuál se presentaron para su consideración, los resultados de una encuesta de hogares llevada a cabo en la localidad por los alumnos de sexto año durante el ciclo lectivo 2007. Se analizaron entre docentes y estudiantes, distintos resultados de dicho trabajo con el propósito de elaborar una encuesta con preguntas cerradas a fin de indagar sobre la situación laboral actual, en Alpa Corral. Siendo esta localidad caracterizada como turística, para los fines del estudio se tuvo en cuenta sólo la población estable de la misma. Por la radio del pueblo, los estudiantes acompañados por un docente, explicaron a la comunidad los objetivos y la metodología de la encuesta solicitando la colaboración de los vecinos para recibirlos y responder el cuestionario. Se encuestaron un total de 117 hogares que era la totalidad de hogares con habitantes permanentes, durante dos semanas de Agosto del 2011. Finalizado este trabajo de campo, se procedió ya en el aula, a la etapa de "Observación" que consistió en la recopilación de las encuestas, sistematización estadística de los datos obtenidos y análisis de consistencia de los mismos, aplicando herramientas de Excel para la construcción de tablas y gráficos.

Los contenidos trabajados en el proyecto fueron los siguientes:

- *Matemática*: Representatividad de una muestra. Diseño de una encuesta. Recuento y sistematización de datos. Frecuencia absoluta y frecuencia relativa. Cálculo de porcentaje. Construcción de tablas y selección del gráfico adecuado en Excel para presentar la información recolectada. Respeto y valoración de las ideas e inquietudes de los compañeros. Análisis de la influencia de la subjetividad de los estudiantes al momento de la extracción de las conclusiones.
- *Formación para la Vida y el Trabajo*: Análisis de la realidad laboral de la localidad y su problemática. Relación entre los ingresos económicos con la satisfacción de necesidades básicas (vivienda). Observación de la evolución de la situación laboral en la localidad (2007-2011). Interrelación con los medios. Interpretación de datos de la realidad.

4. Resultados

La evaluación de la experiencia consistió en la presentación y defensa del informe realizado en formato Word por cada uno de los grupos que había realizado el trabajo de campo. Los mismos fueron expuestos de modo oral, justificando la elección de los gráficos, la interpretación de los mismos y las conclusiones a que arribaron con los resultados obtenidos. Durante estas presentaciones se hizo lugar a las preguntas de sus pares y al contraste de opiniones entre las hipótesis formuladas por los distintos equipos.

A modo de síntesis se presenta a continuación algunos de los puntos tratados en el análisis de resultados realizado por los estudiantes.

4.1. Categoría de ocupación de la vivienda

A partir de la discusión sobre las diferencias entre lo observado por los distintos grupos, los estudiantes pudieron establecer la diferencia entre frecuencia absoluta y frecuencia relativa y relacionar ésta última con la noción de porcentaje. A modo de ejemplo, los gráficos anteriores, les permitieron concluir los siguientes comentarios:

- Si bien la cantidad de Casas Propias en 2011 es la misma que las del 2007, el porcentaje sobre el total de viviendas en el 2011 es un 9% inferior que en el 2007.
- La cantidad de Casas Alquiladas en 2011 aumentó casi un 50% respecto a las alquiladas en 2007.

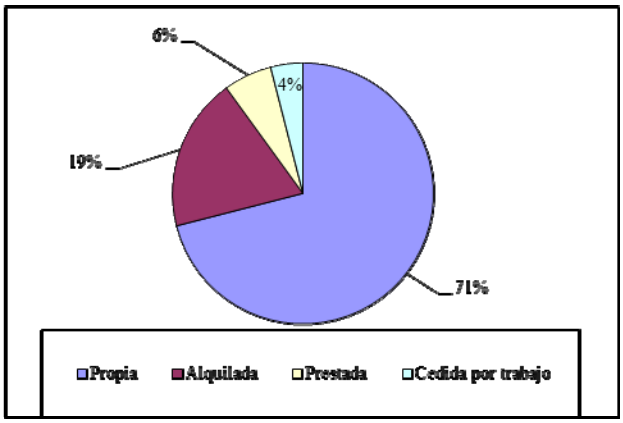


Figura 1. Porcentaje de viviendas de Alpa Corral según categoría de ocupación, año 2007

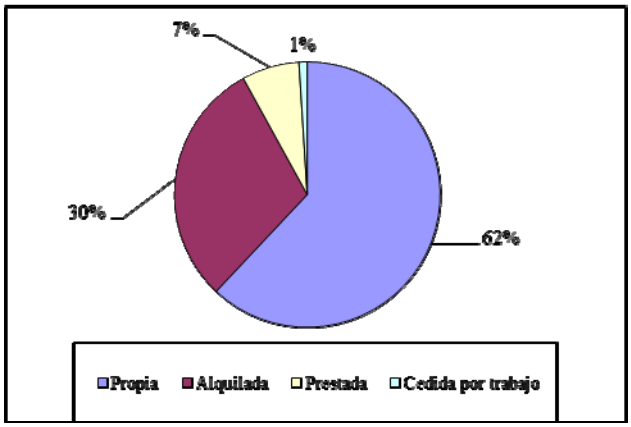


Figura 2. Porcentaje de viviendas de Alpa Corral según categoría de ocupación, año 20011

También realizaron algunas reflexiones, producto de lo observado con los datos como son las siguientes:

- El incremento de la cantidad de casas alquiladas puede deberse a que en los últimos tres años fue mayor el porcentaje de personas que inmigraron de las que emigraron del pueblo. Además, agregaron que al crecer la población y no poseer recursos para construir sus propias viviendas, se ven obligados a alquilar.
- Con respecto a las viviendas propias, algunos grupos plantearon que existen varios factores que pueden explicar que no se hayan incrementado la cantidad de viviendas propias en los habitantes permanentes, así como los elevados costos de materiales o mano de obra, pero mencionando como lo más importante el excesivo costo que tienen los terrenos. También plantearon que esto, puede también dar cuenta, de porqué se observa cada vez más casas deshabitadas. Es decir, lo atribuyeron a que es mayor la gente con más poder adquisitivo que viene de otros lados a construir sus casas de veraneo. Incluso algunos plantearon que sería muy positivo que se legislara para que cuando se vendan lotes municipales, se les de prioridad a la gente del pueblo y se les ofrezcan planes de crédito o facilidades para que los habitantes permanentes puedan acceder con facilidades crediticias a una vivienda.

4.2. Ingresos Mensuales en los Hogares:

En cuanto a los ingresos mensuales los estudiantes decidieron, a partir de los resultados relevados, clasificarlos en las cuatro categorías mostradas en los siguientes gráficos. Cabe aclarar que toda pensión y/o jubilación es inferior a $2500.

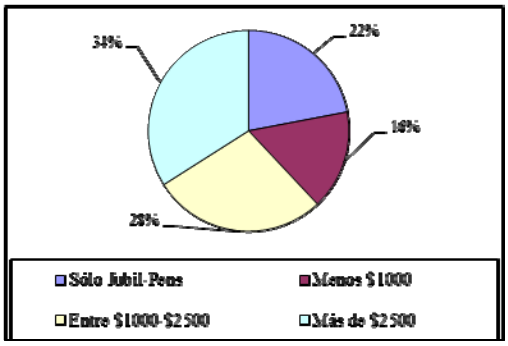


Figura 3. Porcentaje de hogares según nivel mensual de ingreso, 2011.

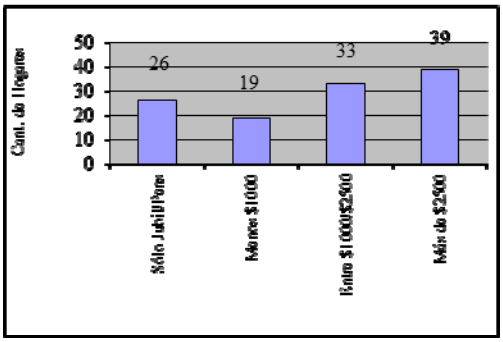


Figura 4. Número de hogares por nivel mensualde ingreso, 2011.

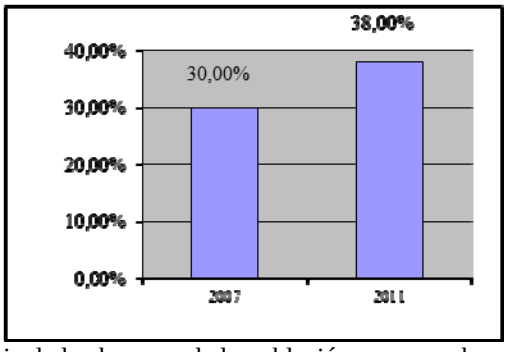


Figura 5. Porcentaje de los hogares de la población que no cubren la canasta básica.

En cuanto a los ingresos mensuales por hogar los estudiantes realizaron diferentes gráficos y observaron, entre otros, los siguientes aspectos:

- En el año 2011 hay un 66% de hogares que viven con menos de $2500 mensuales,
- Hay un 22% de hogares que tienen como ingresos sólo la jubilación y/o pensión
- En el año 2011 aumentaron en un 18% con respecto al 2007 los hogares con ingresos mensuales menores a la Canasta Básica.

En este punto durante las presentaciones de los resultados, resaltaron como preocupante el porcentaje de hogares que sólo tienen la jubilación y/o pensión como ingreso que, junto al porcentaje de los hogares que ganan menos de $2500 mensuales, llega aproximadamente al 66% de hogares que mantienen una situación socio-económica ajustada.

4.3 Comparación de la distribución de la población por actividad laboral, en los años 2007 y 2011

Con respecto al tema de la actividad laboral los estudiantes observaron:

- En el año 2011 las actividades predominantes son: Comerciantes (22% de los trabajadores); Empleados de la construcción (28% de los trabajadores) y empleados públicos (22%)
- En el año 2007 las actividades predominantes fueron: Empleados de la construcción (45% de los trabajadores); Comerciantes (17%) y empleadas domésticas (15%).

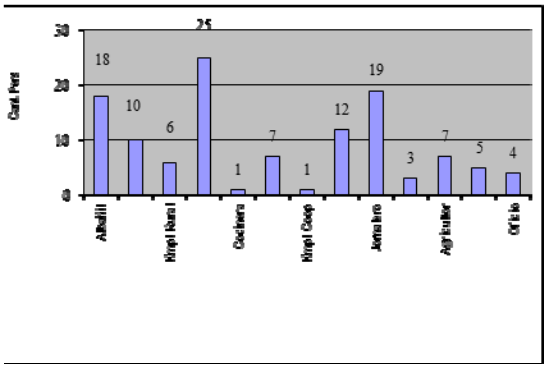


Figura 6. Número de empleados por tipo de actividad laboral en el año 2011.

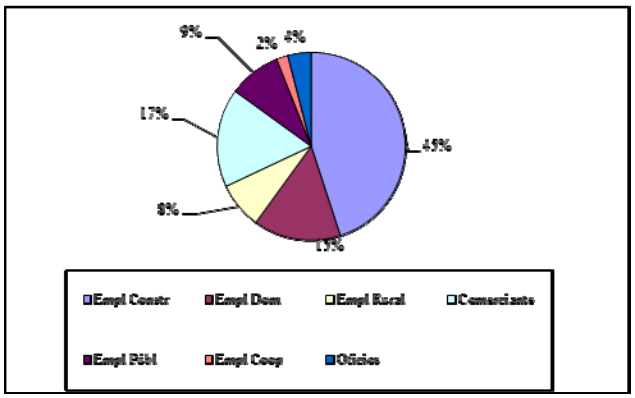


Figura 7. Distribución porcentual de los trabajadores por actividad laboral, en 2007.

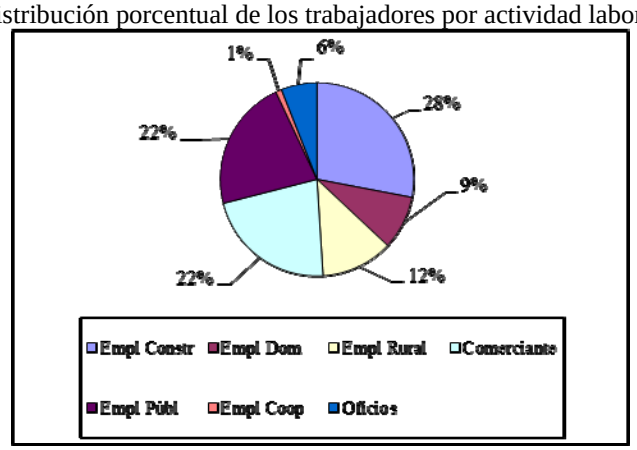


Figura 8. Distribución porcentual de los trabajadorespor actividad laboral, en 20011.

Como conclusión ellos resaltaron la disminución del 17% en el último año en el rubro de la construcción con respecto a 2007. Algunos plantearon que lo observado podía ser explicado porque en muchas obras de construcción se emplean personas que vienen de otras

localidades. Otros en cambio se inclinaron a pensar en la problemática que había desencadenado la Resolución 125/08 que afectó al sector agropecuario y por ende a las localidades relacionadas con este sector como es el caso de Alpa Corral y que motivó la disminución de inversiones privadas en la construcción.

5. Reflexiones Finales

Algunos aspectos que consideramos relevantes plantear a modo de reflexión:

Se pudo observar un cambio sustancial en la motivación de los estudiantes hacia el aprendizaje, en la energía y el tiempo extra-curricular que ellos dedicaron para el desarrollo de este proyecto. Entendemos que este cambio se explica en gran medida por la posibilidad que se le presenta al estudiante de descubrir algo de su propio entorno y de ser partícipe del mismo a través del conocimiento.

Los estudiantes encontraron que el trabajo al cuál acceden los habitantes permanentes de la localidad es en general poco calificado y con una remuneración que les permite vivir en una situación económica ajustada. Es importante resaltar que los estudiantes pudieron abordar a esta conclusión a partir del diálogo e intercambio con sus pares.

Se considera esencial pensar en una educación que plantee escenarios de investigación sobre una situación de la realidad, dónde el estudiante tenga la oportunidad de involucrarse en un proceso de exploración, explicación y dónde se brinde la posibilidad de verse como un agente generador y no sólo como un receptor de lo que sucede en su entorno. Observamos que este tipo de ambientes de aprendizaje puede favorecer la autonomía intelectual de los estudiantes; ya que genera condiciones para que ellos confíen en sus capacidades intelectuales para tomar decisiones, formular hipótesis y confrontarlas con las de sus compañeros.

La educación desde escenarios de investigación, sin dudas plantea para los docentes un desplazamiento desde una zona de seguridad a una zona de riesgo, donde no siempre se sabe lo que es preciso decir o hacer; pero estamos convencidos que es un corrimiento que vale la pena transitar si contemplamos los beneficios que supone para los estudiantes.

Entendemos que la Educación Matemática Crítica se hace necesaria en el actual contexto educativo, dónde la subjetividad pedagógica de la modernidad hoy está agotada, tal como lo plantea Cristina Corea (2004). Visualizamos que este tipo de educación es la que hoy se requiere desde una escuela-situación.

Referencias

Baquero, R. (2008). La transmisión educativa desde una perspectiva situacionista. Buenos Aires: *Publicación interna de la Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales (FLACSO)*.

Corea, C. (2004). La destitución de la comunicación y el agotamiento de la subjetividad pedagógica. Buenos Aires: *Publicación interna de la Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales (FLACSO)*. *Etica*. Madrid: Editorial Alianza.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Traducido al español del original en inglés titulado “Towards a philosophy of critical mathematics education”. Colombia: Editorial Una empresa docente.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA, 6*(*1*), 3-26.

Una comparativa sobre la enseñanza virtual en asignaturas de muestreo en diversos niveles educativos

Arcos, Antonio, Rueda, María del Mar y Molina, David

Universidad de Granada

Resumen

La Enseñanza Virtual es hoy día una fuerte apuesta realizada por muchas universidades españolas, y en especial por la Universidad de Granada. En nuestra universidad hay un centro de enseñanzas virtuales diseñado para apoyar la docencia presencial por medio de recursos tecnológicos propios de la formación online.

El muestreo en poblaciones finitas es uno de los pilares del estadístico dedicado a las encuestas y todos los temarios de las oposiciones de estadístico de organismos nacionales y autonómicos tienen una gran parte de su temario dedicado a los tipos de muestreo. Por ello todos los títulos oficiales de graduado en estadística en las universidades españolas tienen alguna materia o asignatura con estos contenidos.

La Universidad de Granada imparte actualmente tanto un grado en estadística como un máster en estadística aplicada, y en ambos existe una asignatura específica de muestreo. Las dos asignaturas tienen una importante parte de virtualización, pero los resultados obtenidos en cada una difieren notablemente. En este trabajo se presenta una comparativa sobre el grado de participación de los alumnos de la plataforma virtual, la utilización de los materiales proporcionados en dicha plataforma así como de los resultados obtenidos por el alumnado en cada asignatura. Los valores obtenidos son bastante diferentes y nos hacen reflexionar sobre la utilidad de la virtualización de asignaturas según el grado de madurez y preparación del alumnado.

Palabras clave: Docencia virtual, plataformas de enseñanza virtual, muestreo en poblaciones finitas

.

1. Introducción

El sistema universitario español está inmerso en un proceso de renovación para adaptar los títulos al Espacio Europeo de Educación Superior. Tradicionalmente los títulos que se impartían en las universidades españolas eran títulos de licenciado (5 años) y se completaban con los estudios de doctorado que constaban de un periodo de docencia de dos años.

Antes del 2010-2011 todas las universidades españolas han modificado sus títulos según la nueva estructura: un grado (usualmente de 4 años) seguido de un máster (normalmente de 1 año de duración) necesario para poder realizar el doctorado. En este contexto la Universidad de Granada adaptó sus estudios de diplomatura y licenciatura en estadística a la nueva estructura con la creación de un grado en Estadística y un máster en Estadística aplicada.

Junto con el cambio de estructura de los títulos para adaptarse a una estructura común, el Espacio Europeo de Educación Superior también supuso un cambio en la forma de la enseñanza basada en el profesor a un nuevo sistema basado en el aprendizaje del alumno y en este nuevo sistema irrumpen las tecnologías de la información de una forma muy importante.

La utilización de portales web de apoyo al aprendizaje, a la docencia y a la gestión de datos de los alumnos de una universidad es interesante porque facilita al profesor la

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 595-599). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

realización de algunas tareas docentes y de gestión, por ejemplo la difusión de documentos o la consulta de datos de los alumnos, pero sobre todo porque propicia la autonomía y el autoaprendizaje del estudiante, ya que éste puede hacer uso de tales servicios en cualquier instante y desde cualquier sitio.

La Universidad de Granada tiene un centro de enseñanzas virtuales (CEVUG) que se encarga de facilitar y asesorar al profesorado y alumnado la incorporación de las metodologías virtuales en sus asignaturas. Actualmente la Universidad de Granada pone a disposición del profesorado y alumnado tres plataforma de teleformación: el tablón de docencia [3] (que fue el primero en utilizarse), el SWAD [2] (que surgió en 1999 y creció en el marco de tres proyectos de innovación docente como una herramienta de este tipo) y más recientemente el MOODLE [1] (utilizado sólo para asignaturas virtuales). Las dos primeras plataformas son elegidas libremente por el profesor en cada asignatura presencial, mientras que las asignaturas semipresenciales han de implementarse en la plataforma MOODLE y controlarse a través del CEVUG.

Desde la creación del máster en Estadística Aplicada se optó por la virtualización de las asignaturas, de forma que todas las asignaturas se imparten actualmente de forma totalmente virtual. Dadas la experiencias previa en el máster [4] y los buenos resultados obtenidos se optó en el grado de Estadística por incluir en la planificación de las enseñanzas algunas asignaturas de forma semipresencial (un 40% de presencialidad y un 60% de virtualización).

El muestreo en poblaciones finitas es una materia obligatoria en todos los estudios del grado de estadística ya que es fundamental en la formación de un estadístico. En la Universidad de Granada el muestreo es en una asignatura de 6 créditos (Muestreo Estadístico) que se imparte desde el curso 2011-12 de forma semipresencial. También hay una asignatura con contenidos avanzados de muestreo en el máster (Encuestas por muestreo. Aplicaciones Económicas, Sociales y Medioambientales) que es de 4 créditos y que se imparte totalmente virtualizada. A continuación vamos a comparar la metodología seguida en ambas asignaturas y los resultados obtenidos por los alumnos en ellas.

2. La metodología virtual de las asignaturas de muestreo.

Cada una de las dos asignaturas tenía un acceso en la plataforma MOODLE a través del acceso identificado del alumno con una estructura y formato común a todas ellas, en las que aparecen:

- Una guía de estudios que contiene: nombre del curso, información acerca de los profesores, una breve descripción de la asignatura, objetivos de la misma, prerrequisitos necesarios para su seguimiento, contenidos, metodología, bibliografía y criterios de evaluación.
- Un foro general del curso.
- Un tablón de anuncios y novedades
- Los temas que contienen: resúmenes teóricos de los contenidos, actividades a realizar por los alumnos, foros específicos del tema, autoevaluaciones.
- Recursos disponibles relacionados con la materia y
- Bibliografía específica.

A continuación (Figura 1) se muestra la página de acceso de una de las asignaturas.

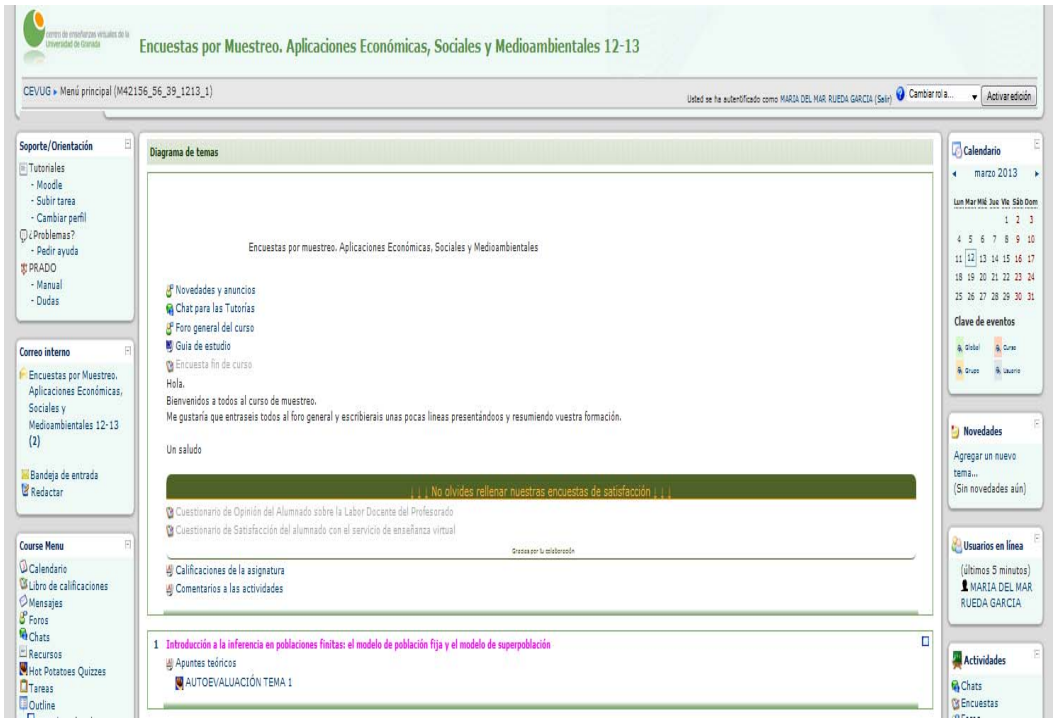


Figura 1. Página de acceso a la asignatura de máster

La metodología seguida en esta asignatura es totalmente virtual: el alumno no tiene contacto presencial con el profesor y toda la comunicación con éste se realiza a través de la plataforma incluida la evaluación. La evaluación se realiza fundamentalmente a partir de la calificación obtenida en las actividades que el alumno ha ido entregando en cada tema aunque también se tiene en cuenta la evaluación que el profesor haga de la participación y actitud del alumno ante la asignatura.

En contraposición en la asignatura de grado la plataforma es una ayuda importante para el alumno pero no la única. El curso se estructura a partir de las clases presenciales que marcarán el ritmo de evolución. En ellas se procederá, básicamente, al desarrollo de los contenidos teóricos de la asignatura. Se ofrece también al alumno la posibilidad de trabajar presencialmente en una serie de prácticas, basadas en casos reales, con instrumentos informáticos y programas apropiados a las necesidades del alumnado.

La primera clase presencial está destinada a presentar al alumno la asignatura (contenidos, objetivos, metodología, evaluación) y a enseñarle a navegar por la página web de la asignatura. Las siguientes clases presenciales (una por semana) van destinadas a enseñar los principios de cada tipo de muestreo, los estimadores a utilizar y las características que los diferencian de los anteriores. También se le explica el contenido explícito de la página web relativo al tema de muestreo concreto. La evaluación se hace conjuntamente: un 60% con un examen final y un 40% con las notas de las actividades entregadas por el alumno a través de la plataforma.

3. Resultados

Desde el primer momento nos llamó la atención la diferencia significativa en la participación de los alumnos en la plataforma para las dos asignaturas: mientras que en la asignatura de grado era muy baja la participación en los foros y la ayuda entre los alumnos, en el máster ocurría el otro extremo: las entradas en el foro eran constantes y los alumnos se ayudaban entre sí a resolver las dudas de las actividades que eran mucho más complejas.

Las actividades sin embargo en el grado se entregaban con regularidad y las calificaciones eran buenas en general, mientras que en el máster las actividades se entregaban en los últimos días y muchos alumnos solicitaban extender los plazos de entrega de éstas.

La diferencia entre las calificaciones finales fue muy significativa: los alumnos de grado suspendieron en un altísimo porcentaje (81%) mientras que los alumnos del máster suspendieron en un porcentaje muy bajo (13%).

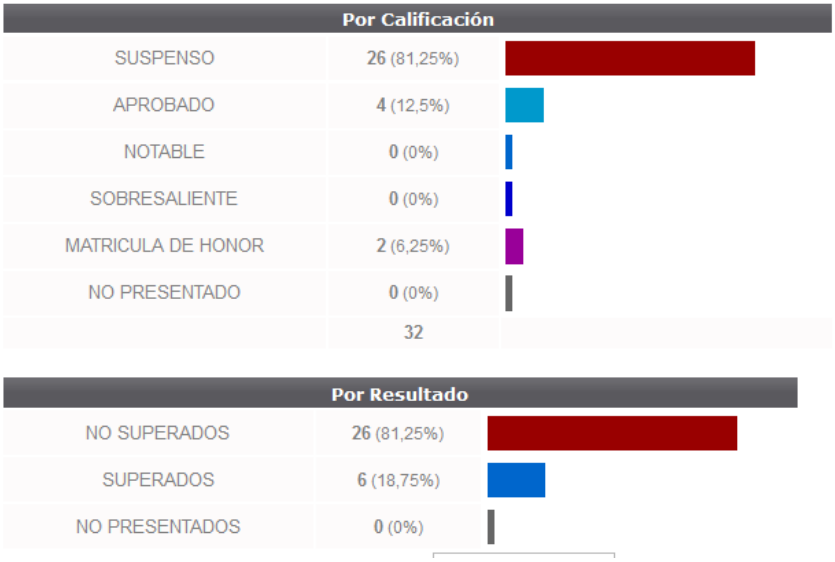


Figura 2.Resultados de la asignatura Muestreo estadístico

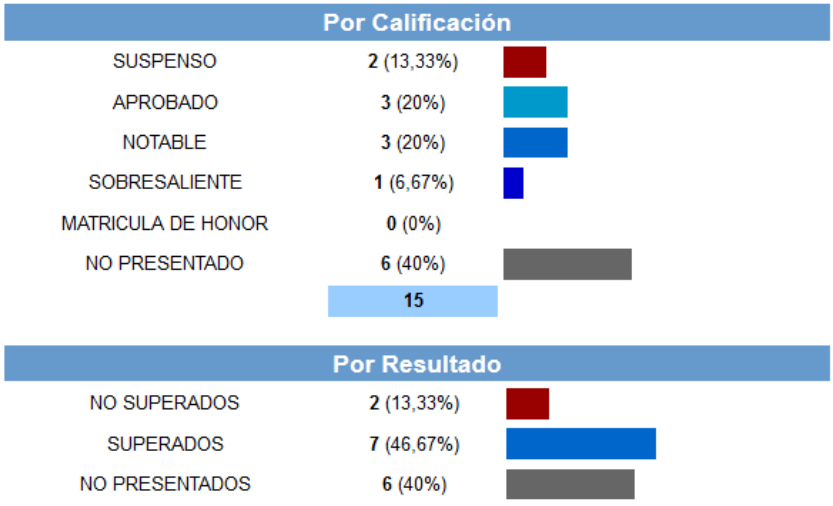


Figura 3. Resultados de la asignatura Encuestas por muestreo. Aplicaciones …

Es importante realizar una reflexión sobre los resultados obtenidos en las dos asignaturas:

- La madurez de los alumnos es fundamental a la hora de seguir un curso de forma presencial: han de estudiar día a día siguiendo el cronograma de trabajo y realizar las actividades por sí mismos. Es fácil obtener las actividades resueltas a partir de alumnos de otros años o con la ayuda de un experto en la materia. Sin embargo esta práctica conlleva que si bien tienes una buena nota en el momento, no adquieres la destreza necesaria que vas a tener que demostrar en el examen presencia. En efecto, el examen presencial realizado constaba de problemas similares a los de las actividades virtuales, sin embargo la mayoría de los alumnos los dejaron en blanco. Creemos que éste es uno de los motivos que ha fallado en la asignatura de grado: los alumnos eran muy jóvenes (la asignatura está ubicada en el primer cuatrimestre de segundo curso) mientras que los alumnos del máster eran todos licenciados y con una edad mayor
- La experiencia en seguir asignaturas virtuales: para los alumnos de grado era la primera asignatura semipresencial que tenían y creían que con lo explicado en las clases presenciales bastaba, y en muchos casos no se han leído los apuntes ni resuelto los ejercicios de las relaciones de cada tema.
- La evaluación basada sólo en actividades virtuales es peligrosa pues no garantiza que el alumno matriculado haya realizado las actividades por sí mismo sin ayuda de nadie. Además en nuestro caso, las actividades al estar ubicadas cada una en un tema concreto, tienen la ayuda de orientar al alumno a la técnica concreta que hay que aplicar mientras que en el examen final muchos alumnos no sabían distinguir que técnica concreta de las incluidas en el temario tenían que aplicar para resolver cada tema concreto.
- Hay otras variables que han influido en el fracaso de los alumnos, concretamente la ubicación de la asignatura de muestreo en el plan de estudios. Esta asignatura de muestreo se imparte antes de que los alumnos hayan cursado la asignatura de Inferencia Estadística II donde se imparten los conceptos de inferencia necesarios (estimadores, distribuciones en el muestreo, intervalos de confianza,…) para poder seguir la asignatura con éxito. También la distinta motivación de los alumnos a la hora de seguir esta asignatura es otro factor a considerar: los alumnos del grado deben cursar obligatoriamente esta asignatura mientras que en el máster la asignatura es optativa y por tanto mucho mayor la motivación del alumnado ante los contenidos.

La conclusión fundamental de esta experiencia es que la enseñanza virtual es una modalidad de enseñanza que puede ser de gran ayuda para el alumno pero que puede tener también grandes inconvenientes si no se adapta a las distintas características y circunstancias del alumnado al que va dirigido.

Referencias

Arcos, A., Rueda, M., Muñoz, J and González, S. (2010). Experiences in virtual learning within the Master of Statistics of the University of Granada. *Proceedings of ICEMT* 2010, pp. 263-266.

MOODLE http://docs.moodle.org/es/Portada

SWAD http://swad.ugr.es/info/

Tablón de docencia UGR http://www.ugr.es/Informatica/info/tab-docencia.htm

Una propuesta para la enseñanza del teorema de Bayes a través de un juego de dados y de resolución de problemas

José Marcos Lopes

Universidad Estatal Paulista

Resumen

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica-pedagógica para la enseñanza del Teorema de Bayes en la cual se emplea un juego de dados (original) asociado con la resolución de problemas. La resolución de problemas es utilizada como punto de partida para la construcción de los conceptos matemáticos. El juego propuesto se fundamenta en *Game of Kasje*, presentado originalmente en (Schuh, 1968). A través del uso de este juego se formulan varios problemas, que al ser resueltos con una adecuada intervención del profesor, permiten estimular a los alumnos en la construcción y/o reconstrucción de todos los conceptos básicos de la teoría de la probabilidad, en particular, el estudio del Teorema de Bayes. La estrategia propuesta puede ser aplicada en la escuela secundaria, y también puede auxiliar en la práctica de profesores que enseñan esos conceptos matemáticos.

Palabras clave: Teorema de Bayes, probabilidad, juegos, resolución de problemas, enseñanza de matemática.

1. Introducción

La probabilidad es una rama de la matemática que trata sobre el estudio y modelación de fenómenos aleatorios o no determinísticos. Por fenómeno aleatorio se entiende como el suceso (o evento) que al ser repetido sobre condiciones idénticas puede generar resultados diferentes.

Consideramos que existen dos objetivos, no completamente separados, para el estudio de la probabilidad en la enseñanza secundaria. Primero: la probabilidad es parte de la matemática y base de otras disciplinas (Batanero, 2006). Y, segundo: la probabilidad es esencial para preparar a los estudiantes, puesto que el azar y los fenómenos aleatorios impregnan nuestra vida y nuestro entorno (Bennet, 1998).

La probabilidad debe ser vista como un conjunto de ideas y procedimientos que permiten aplicar la matemática en casos de la vida real y que puede cuantificar e identificar conjuntos de datos o informaciones que no pueden ser cuantificadas en forma directa o exacta. Como ejemplo se pueden mencionar: la climatología, los juegos de lotería, el contrato de un seguro, entre otros. Como señala Batanero (2006), bajo estas circunstancias la probabilidad no es una propiedad física tangible y por lo tanto objetiva a los sucesos que lo rodean (como son: el color, peso, superficie, temperatura), sino que se convierte en una percepción o grado de aceptación de lo verosímil de la persona que asigna la probabilidad de ocurrencia del suceso (que puede ocurrir, o no).

Según Díaz y La Fuente (2006) “El razonamiento sobre probabilidad condicional inversa y su cálculo usando el Teorema de Bayes tiene una gran importancia en el diagnóstico, evaluación, toma de decisiones y aplicación de la inferencia estadística”.

Los contenidos de la probabilidad son considerados difíciles tanto por los alumnos de escuela secundaria como por muchos profesores. Corbalán (2002) señala que:

> El esfuerzo por encontrar propuestas atractivas tiene que ser mayor en los casos en que la materia a estudiar sea más ardua, por el motivo que sea (abstracción, dificultad, alejamiento de la práctica diaria, ...). Por dar un ejemplo, todo lo relativo a la asignación de probabilidades es

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 601-608). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

> de una gran dificultad para el alumnado de secundaria, por motivos intrínsecos y porque en general no lo han visto hasta esa edad. Por ello habrá que hacer un gran esfuerzo para presentar de forma lúdica el tema (p. 15).

En este artículo usamos un juego de dados y la resolución de problemas para la enseñanza de los conceptos básicos de la teoría de la probabilidad.

2. Aspectos sobre el uso de juegos y de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática

Muchos autores han destacado la importancia de implementar los juegos en la enseñanza, particularmente en el área de las matemáticas. Las contribuciones realizadas por teóricos como Piaget y Vigotsky justifican el surgimiento de propuestas pedagógicas en que el juego es concebido para favorecer el aprendizaje del alumno. Dentro de esa metodología de aprendizaje existe la necesidad de la participación activa del alumno en la construcción de su propio conocimiento (Kamii & DeVries, 1980; Corbalán, 2002).

Corbalán (2002) considera que el mejor empleo que se puede dar a los juegos en las clases de matemáticas sería crear todos los días, sea cual sea el tópico que se trate, un ambiente lúdico.

> Tener como norte que no hay aventura más apasionante que la del descubrimiento y que no hay mejor manera de disfrutarla que por medio de la tensión que produce la competencia lúdica. Que incluso lo más sesudo y abstruso puede presentarse como un enigma a descubrir, con la satisfacción que produce (p. 13).

Para ser útil en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, un buen juego debe proponer algo interesante y desafiante para los alumnos, permitir que realizen una autoevaluación de su desempeño, y garantizar una participación activa de los jugadores en el juego, de inicio a fin (Kamii & De Vries, 1980). Por otro lado Corbalán (2002) describe que un buen juego debe tener dos características básicas: poseer pocas reglas y durar poco tiempo.

Los juegos pueden ser utilizados para la construcción de los conceptos matemáticos siempre que exista una intencionalidad y un buen planeamiento de las actividades que rodean el juego. Pueden ser requeridas varias sesiones de clase, y los conceptos matemáticos alrededor del juego pueden ser explorados a través de situaciones-problema.

Considerándose el constructivismo de Piaget, el profesor debe tomar decisiones de acuerdo con la manera que el alumno piensa y siente en cada situación. El profesor debe elegir la forma de modificar o inventar nuevos juegos. Al igual que cada alumno necesita reinventar el conocimiento para hacerlo suyo, cada profesor necesita construir su propia forma de trabajar los juegos para la enseñanza de la matemática (Kamii & De Vries, 1980).

Para la enseñanza de la probabilidad, Corbalán (2002) sugiere el uso de juegos pré-instruccionales, o sea, aquellos que se utilizan previamente a la adquisición de los conceptos o procedimientos.

> Supongamos que estamos en el proceso de introducir um concepto especialmente complicado para nuestros alumnos: la probabilidad. Es conveniente (casi se puede asegurar que prácticamente necesario) realizar toda una bateria de actividades antes de poder pasar a cualquier tipo de definición o de formalización, aunque no sea muy precisa o rigurosa. En ese núcleo es muy recomendable introducir juegos (pp. 34-35).

La resolución de problemas debe ser considerada como la principal estrategia para la enseñanza de la matemática. Tal como considera Van de Walle (2007), “las evidencias tienden a mostrar que la resolución de problemas es una poderosa y eficaz herramienta para el aprendizaje. Los alumnos resuelven problemas, no para aplicar la matemática, sino para aprender una nueva matemática” (p. 37).

Existen diferentes interpretaciones y diferentes formas de abordar la resolución de problemas. Según lo expuesto por Schroeder y Lester Jr. (1989), existen tres interpretaciones para el uso de la resolución de problemas:

> Primera. Enseñar sobre la resolución de problemas: el profesor trabaja con alguna variante del modelo de resolución de problemas de Polya.
> Segunda. Enseñar a resolver problemas: el profesor se concentra en la forma en que la matemática es enseñada y en lo que puede ser aplicado.
> Tercera. Enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas: la resolución de problemas se convierte en una metodología de enseñanza, como un punto de partida y un medio de enseñar matemática. El problema es visto como un elemento que puede potenciar un proceso de construcción de conocimiento. Los problemas son propuestos de modo que contribuyan a la formación de los conceptos antes de la presentación formal en un lenguaje matemático (pp. 31-34).

Cuando se pretende enseñar Matemática a través de la resolución de problemas, el problema debe ser cuidadosamente seleccionado, y servirá como un elemento para potenciar el proceso de construcción de conocimiento. Igualmente deberá contribuir en la formación de los conceptos que se pretenden estudiar, aún antes de la presentación en el lenguaje matemático formal. El foco está en la acción por parte de los alumnos. Como señala Batanero (2001),

> el trabajo del profesor es en cierta medida inverso del trabajo del matemático profesional: En lugar de 'inventar' métodos matemáticos adecuados para resolver problemas, debe 'inventar' problemas interesantes que conduzcan a un cierto conocimiento matemático. Esta formulación del aprendizaje matemático se corresponde con las teorias constructivistas, ampliamente asumidas" (p. 124).

En la enseñanza tradicional de probabilidad, el profesor presenta definiciones, fórmulas y propiedades, para después resolver ejercicios utilizando tales conceptos. Todo se realiza de una forma descontextualizada y, por lo tanto, los alumnos no alcanzan a percibir el surgimiento de estas fórmulas y acaban por mitificar la Matemática. Creemos que esa forma de enseñar puede contribuir para la falta de comprensión de este importante contenido matemático.

3. El juego

Este juego utiliza dos dados, y es disputado por dos jugadores, Juan y María. Son considerados casos vencedores

(4; 1) o (1; 4) vale 1 punto;	(4; 2) o (2; 4) vale 2 puntos;
(4; 3) o (3; 4) vale 3 puntos;	(4; 4) vale 4 puntos;
(4; 5) o (5; 4) vale 5 puntos;	(4; 6) o (6; 4) vale 6 puntos.

Cada participante podrá realizar hasta dos lanzamientos. Si en el primer lanzamiento el participante no consigue obtener una cara 4 entonces se realizará un segundo lanzamiento con los dos dados. Si en el primer lanzamiento aparece en alguno de los dados una cara con 4, se resguarda este dado y se decide si se lanza o no el otro dado más una vez. Gana el juego el participante que obtenga la mayor puntuación. Cuando los dos jugadores obtengan la misma puntuación entonces se realizará una nueva partida.

Comentarios sobre el juego

El juego propuesto en este artículo está basado en *Game of Kasje* (Schuh, 1968). Como el juego utiliza dados entonces el factor suerte no puede ser totalmente despreciado. También es imposible la determinación de una estrategia siempre victoriosa. De este modo el juego nunca pierde sentido, y cada partida será probablemente diferente al anterior. Las reglas del juego poseen intrínsicamente nociones de probabilidad, por lo que cada

participante deberá establecer, en cada jugada, su mejor estrategia para aumentar sus posibilidades de victoria. Siguiendo las definiciones presentadas por Corbalán (2002), se puede afirmar que el juego propuesto en éste artículo une el conocimiento, la estrategia y el azar.

Se supone para este juego la utilización de dados libres de sesgo, es decir, que cada lado posee igual probabilidad de aparecer (lados equiprobables). Juan es quien realiza primero sus lanzamientos. En el caso que Juan consiga (4; 1) o (1; 4), o sea, 1 punto en el primer lanzamiento, entonces él deberá lanzar el segundo dado una vez más. Pues no es posible disminuir su puntuación. Ahora, si Juan obtiene 3 puntos, con (4; 3) o (3; 4) en su primer lanzamiento, y decide lanzar el segundo dado, él tendrá una oportunidad entre 6 de permanecer con la misma puntuación (es decir, obtener un 3 en el lanzamiento del segundo dado), dos oportunidades en 6 de disminuir su puntuación (es decir, obtener 1 ó 2 en el lanzamiento del segundo dado) y tres oportunidades en 6 de mejorar su puntaje (o sea, sacar un 4, 5 ó 6 en el lanzamiento del segundo dado).

Se puede presentar el caso en que un jugador no marque puntos. Esto ocurre cuando no obtiene un lado 4 en sus dos oportunidades de lanzamiento.

Como Juan es quien realiza primero sus lanzamientos, María estará en mejor posición para aprovechar o no su segundo lanzamiento, ya que conoce de antemano la puntuación obtenida por Juan. Por tal motivo, para hacer que el juego sea más justo se deben realizar varias partidas en las cuales se alterna el participante que realiza sus primeros lanzamientos.

4. Teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes

Desde esta sección se asume que los alumnos ya han estudiado los conceptos de Experimento Aleatorio, Suceso, Definición de Probabilidad (Laplace) y Probabilidad Condicional. Asumimos también para Juan la seguinte estrategia.

Estrategia de Juan: Si en el primer lanzamiento se obtiene 1, 2 ó 3 puntos, entonces él realiza el segundo lanzamiento con un solo dado para conseguir mejorar su puntuación. Dado el caso que Juan obtenga 4, 5 ó 6 puntos en el primer lanzamiento, él para. Si él no consigue ningún punto en el primer lanzamiento, lanza de nuevo los dos dados.

Inicialmente, todos los alumnos deberán participar del juego. El objetivo de esta acción es hacer que ellos adquieran pleno conocimiento y dominio de sus reglas. Después de realizado el juego, el profesor puede hacer las siguientes preguntas.

- ¿El jugador siempre debe aprovechar el segundo lanzamiento?
- ¿El segundo jugador tiene mayor posibilidad de vencer?

En ese momento, los alumnos responderán estas preguntas a través de la intuición y por la experiencia adquirida en las partidas jugadas. Al final del trabajo, después de la resolución de los problemas propuestos, y los conceptos probabilísticos estudiados, se espera que los alumnos consigan justificar matemáticamente las preguntas hechas, y calcular las probabilidades de victoria de cada jugador; Juan y María.

Los alumnos deben usar su lenguaje propio en las soluciones de los problemas. El profesor escoge uno de los grupos para dar su respuesta. Posteriormente, se discutirán las respuestas ciertas y erradas presentadas por los otros grupos en una pequeña plenaria. Después de la presentación de los problemas será realizada, por el profesor, la sistematización de las ideas o contenido matemático a través del rigor y de los formalismos característicos de la matemática. En este momento se presentan definiciones y propiedades del tema estudiado. Después de la sistematización del concepto matemático el profesor trabaja con los alumnos, en grupo o individualmente, la respuesta de varios ejercicios vinculando los conceptos estudiados. Los ejercicios (problemas) también pueden involucrar

situaciones del juego que hayan sido encontrados y seleccionados del libro didáctico. Las respuestas para estos ejercicios serán obtenidas a través del empleo de las definiciones, propiedades, lemas y teoremas, anteriormente sistematizadas en el salón de clase. Es necesario que el profesor refuerce el uso de terminologías nuevas propias del asunto. El objetivo principal de esta acción es hacer que los alumnos interioricen los temas estudiados y se refuerce el desarrollo de actitudes y habilidades en la resolución de problemas. En este momento se estará enseñando a los alumnos a resolver problemas.

Problema 1. ¿Cuál es la probabilidad de Juan marcar 1 punto en este juego?

Comentarios y sugerencias: Para Juan marcar un punto y teniendo en cuenta la estrategia adoptada, se debe considerar los siguientes casos:

(i) Juan obtiene 0 puntos en el primer lanzamiento y obtiene 1 punto en el segundo lanzamiento de los dos dados. En este caso se tiene la probabilidad,

$$p_1 = \frac{25}{36} \text{ x } \frac{2}{36} = 0.0385802$$

(ii) (Juan obtiene 1, 2 ó 3 puntos en el primer lanzamiento, y el lado 1 en el lanzamiento del segundo dado. En este caso se tiene la probabilidad,

$$p_2 = \frac{6}{36} \text{ x } \frac{1}{6} = 0.0277778$$

Entonces la probabilidad de Juan marcar 1 punto será dada por:

$$p = p_1 + p_2 = 0{,}066358 \equiv 6{,}63\,\%.$$

Se debe observar que cuando en el primer lanzamiento Juan obtiene 4, 5 ó 6 puntos, entonces el juego es suspendido y en este caso él no puede marcar solo 1 punto. Por tal motivo no se considera en la solución del *problema 1*, los casos en que Juan obtenga 4, 5 ó 6 puntos en su primer lanzamiento. El objetivo de este problema es estudiar los conceptos de suma y producto de probabilidad. En el cálculo de las posibilidades p_1 y p_2, el profesor debe destacar la existencia de dos exigencias que deben ser cumplidas, y destacar el papel de la "**y**", por eso se multiplica. Ahora, para el cálculo de la probabilidad p de Juan marcar 1 punto, se debe destacar el papel del "**o**". Para este caso puede ocurrir una situación o otra que mismo así Juan continúa marcando 1 punto, y por ese motivo sumamos.

De manera análoga al *problema 1*, se puede mostrar que la probabilidad de Juan marcar 2 puntos, que es igual a la probabilidad de marcar 3 puntos, es dada por p = 0.0663579 ≡ 6.63%. La probabilidad de Juan marcar 4 puntos es dada por $p = 0.0748455 \equiv 7.48\,\%$. Y, la probabilidad de Juan marcar 0 punto es $p = \frac{25}{36} \text{ x } \frac{25}{36} \equiv 48.22\,\%.$

Problema 2. ¿Cuál es la probabilidad de Juan marcar 5 puntos en este juego?

Comentarios y sugerencias: Definimos los siguientes sucesos:

B = {Juan marcó 5 puntos en el juego};

A_1 = {Juan obtuvo 0 puntos en el primer lanzamiento};

A_2 = {Juan obtuvo 1 punto en el primer lanzamiento};

A_3 = {Juan obtuvo 2 puntos en el primer lanzamiento};

A_4 = {Juan obtuvo 3 puntos en el primer lanzamiento};

A_5 = {Juan obtuvo 5 puntos en el primer lanzamiento}.

Así, $P(B) = [(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4) \cup (B \cap A_5)]$.

Como los sucesos $(B \cap A_1)$, $(B \cap A_2)$, $(B \cap A_3)$, $(B \cap A_4)$ y $(B \cap A_5)$ son mutuamente excluyentes, tenemos que:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4) + P(B \cap A_5).$$

Ahora, usando la definición de Probabilidad Condicional obtendremos:

$$P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + P(A_3).P(B|A_3) + P(A_4).P(B|A_4) + P(A_5).P(B|A_5)$$

$$= \frac{25}{36} \text{x} \frac{2}{36} + \frac{2}{36} \text{x} \frac{1}{6} + \frac{2}{36} \text{x} \frac{1}{6} + \frac{2}{36} \text{x} \frac{1}{6} + \frac{2}{36} \text{x } 1 = 0.1219133 \equiv 12.19\%.$$

Se observa que $P(B|A_5)$ =1, ya que Juan no utilizará su segundo lanzamiento si obtiene 5 puntos en el primer lanzamiento. De manera análoga al *problema 2*, se puede mostrar que la probabilidad de Juan marcar 6 puntos es dada por p = 0.1219133 ≡ 12.19 %. Así, Juan tiene la misma probabilidad de marcar 5 ó 6 puntos. Se tiene que la suma de las probabilidades de Juan marcar 1, 2, ..., 6 puntos, y de no marcar ningún punto es igual a 1.

Después de trabajar con problemas como los presentados anteriormente, puede resultar más fácil para el profesor sistematizar el siguiente teorema.

Teorema de la Probabilidad Total. Sea B un suceso para el cual se conocen las probabilidades condicionadas $P(B|A_i)$ para i = 1, ... , n. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n sucesos mutuamente excluyentes que forman un sistema exhaustivo; es decir que $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ y $P(A_i) > 0$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces:

$$P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + \ldots + P(A_n).P(B|A_n).$$

El siguiente problema tiene por objetivo el uso del Teorema de la Probabilidad Total y también el concepto de Probabilidad Condicional.

Problema 3. ¿Cuál es la probabilidad de Juan obtener 0 puntos en el primer lanzamiento sabiendo que Juan marcó 5 puntos en el juego?

Comentarios y sugerencias: Sí se consideran los mismos sucesos como definidos para la solución del *problema 2*, debemos calcular $P(A_1|B)$. Así

$$P(A_1|B) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(A_1).P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{25}{36} \text{x} \frac{2}{36}}{0.1219133} = 0.3164564 \equiv 31.64\%.$$

Las dos primeras igualdades de la relación anterior, siguen directamente de la definición de probabilidad condicional y $P(B)$ = 0.1219133, ya fue calculada en el *problema 2*. Para el desarrollo del *problema 3* utilizamos el siguiente e importante teorema.

Teorema de Bayes. Con las mismas condiciones del teorema de la Probabilidad Total, si $P(B) > 0$ entonces,

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i).P(B \mid A_i)}{P(A_1).P(B \mid A_1) + P(A_2).P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_n).P(B \mid A_n)}$$

para i, i = 1, 2, ... , n.

Cuando María realiza sus lanzamientos, su posibilidad de victoria está condicionada a los puntos que Juan obtuvo a priori. Teniendo en cuenta que María realizó su juego después de Juan, María adoptaría la siguiente estrategia.

Estrategia de María: Si en su primer lanzamiento María obtiene una puntuación mayor que la de Juan, el juego termina con la victoria de María. Si obtiene una puntuación menor que la de Juan en su primer lanzamiento, ella utiliza su segundo lanzamiento. Ahora, de haber un empate con Juan, en el primer lanzamiento, María utilizará su segundo lanzamiento en el caso de que Juan haya obtenido 3 puntos o menos.

Teniendo en cuenta la estrategia adoptada, puede demostrarse que la probabilidad de María ganar este juego es $p \equiv 36.25$ %, la probabilidad de que María pierda es $p \equiv 35.60$ % y para empatar es $p \equiv 28.15$ %.

Se puede concluir que la probabilidad de María vencer el juego es ligeramente mayor que la probabilidad de perder. El segundo jugador está en mejor situación, ya que conoce la puntuación obtenida por su adversario.

5. Consideraciones finales

Todos los problemas elaborados reflejan situaciones del juego. El empleo del juego no solo es para motivar los alumnos, también se está utilizando como un desencadenador de aprendizaje. Las situaciones-problema que se representan en este artículo son originales y fueron formuladas con el fin de contemplar en sus resoluciones conceptos de probabilidad.

Lo que se busca con estas herramientas es un desarrollo de raciocinio deductivo del alumno y no la memorización de fórmulas. La memorización puede ser temporal, mientras que el raciocinio y el conocimiento adquirido son para toda la vida.

La metodología de trabajo con juegos y resolución de problemas sugerida en este artículo sigue la tendencia constructiva de la enseñanza y el aprendizaje en la Matemática. El alumno se convierte en el constructor de su propio conocimiento, mientras que el profesor se convierte en un mediador que incentiva y facilita el aprendizaje, interviniendo y polemizando.

No existe un único y mejor camino para enseñar matemática. El profesor debe conocer varias alternativas de trabajo, para así ofrecer en cada tópico, un proyecto didáctico-pedagógico eficaz que sea llamativo para sus alumnos.

El trabajo con contenidos de probabilidad es considerado difícil por muchos profesores. Así la principal contribución que se pretende ofrecer con este trabajo es una forma de enseñanza diferente, no contemplada en los libros didácticos, y que puede auxiliar y colaborar con la práctica en sala de clase de los profesores que enseñan los conceptos iniciales de probabilidad.

Referencias

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística.* Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. En P. Flores; J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales, CD ROM.

Bennet, D. J. (1998). *Randomness*. New York: Cambridge University Press.

Corbalán, F. (2002). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Síntesis.

Díaz, C. y de La Fuente, I. (2006). Enseñanza del teorema de Bayes con apoyo tecnológico. En P. Flores; J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales. CD ROM.

Kamii, C. y DeVries. R. (1980). *Group games in early education: Implications of Piaget's theory*. Washington: National Association for the Education of Young Children.

Schoroeder, T. L.; Lester Jr. F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. En P. R. Trafton; A. P. Shulte (Eds.), *New directions for elementary school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, (Year Book).

Schuh, F. (1968). *The master book of mathematical recreations*. New York: Dover Publications, Inc.

Van de Walle, J. A. (2007). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally* (6th ed.). Boston: Pearson.

Análisis de un Recurso para el Cálculo de Probabilidades en Experimentos Sencillos

Ruiz Reyes, Karen y Contreras García, José Miguel

Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo muestra una descripción y análisis de un recurso de Internet para la enseñanza de la probabilidad simple, en el tercer ciclo de enseñanza primaria, mediante unas actividades propuestas para los estudiantes. El applet permite explorar varios experimentos de extracción, sin reposición, de bolas de una caja y calcular la probabilidad de distintos sucesos, utilizando la Regla de Laplace.

Este recurso, útil para la enseñanza de los conceptos probabilísticos definidos en los decretos de enseñanza mínimas del MEC (2006), plantea una serie de enunciados, en donde el usuario debe calcular la mayor probabilidad, utilizando para ello todos los conceptos aprendidos en clase, de extraer la bola de un color, señalando los casos favorables y los posibles, de la bola que más probabilidad tenga de ser sacada de la caja, e indicar qué color es más probable. Es decir, este recurso ayuda a trabajar con objetos probabilísticos, complejos para esa edades, mediante simulaciones y visualizaciones, siguiendo las nuevas orientaciones de los decretos españoles.

En este trabajo se señalan los principales objetos matemáticos implícitos en el recurso, las dificultades posibles de los estudiantes, como también, algunas variantes y otros recursos de exploración relacionados con la simulación de experimentos aleatorios.

Palabras clave: Applet, probabilidad, enseñanza primaria.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 603-604). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Análisis de un Recurso para el Cálculo de Probabilidades en Experimentos Sencillos

Karen Ruiz Reyes
karenruizreyes@gmail.com
Universidad de Granada

José Miguel Contreras García
jmcontreras@ugr.es
Universidad de Granada

Descripción

Este trabajo muestra una descripción y análisis de un recurso de Internet para la enseñanza de la probabilidad simple, en el tercer ciclo de enseñanza primaria, mediante unas actividades propuestas para los estudiantes. El applet permite explorar varios experimentos de extracción, sin reposición, de bolas de una caja y calcular la probabilidad de distintos sucesos, utilizando la Regla de Laplace.

Este recurso, útil para la enseñanza de los conceptos probabilísticos definidos en los decretos de enseñanza mínimas del MEC (2006), plantea una serie de enunciados, en donde el usuario debe calcular la mayor probabilidad, utilizando para ello todos los conceptos aprendidos en clase, de extraer la bola de un color, señalando los casos favorables y los posibles, de la bola que más probabilidad tenga de ser sacada de la caja, e indicar qué color es más probable. Es decir, este recurso ayuda a trabajar con objetos probabilísticos, complejos para esas edades, mediante simulaciones y visualizaciones, siguiendo las nuevas orientaciones de los decretos españoles.

En este trabajo se señalan los principales objetos matemáticos implícitos en el recurso, las dificultades posibles de los estudiantes, como también, algunas variantes y otros recursos de exploración relacionados con la simulación de experimentos aleatorios.





En una segunda fase, el applet realiza cuestiones para que el usuario calcule la mayor probabilidad de extraer la bola de un color.



Dirección en Internet:
http://repositorio.educa.jccm.es/portal/odes/matematicas/azar_y_probabilidad/mt11_oa03_es/index.html

Dificultades posibles de los estudiantes:

La principal dificultat se plantea en la interpretación del lenguaje del Applet. Al finalizar el recurso muestra una serie de problemas para el cálculo de probabilidades simples, donde se pide elegir "cual tiene más probabilidades de sacar una bola de color, rojo o azul" y rellenar la fórmula de Laplace. No se especifica si el suceso, al que se ha de realizar la probabilidad, es para un cierto color, y no se indica que solo se ha de rellenar la fórmula para el suceso con mayor probabilidad.

Objetos matemáticos implícitos en el recurso

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación
Situaciones-problemas	- Cálculo de probabilidades simples en un muestreo sin reposición	- Experimentación del cambio de probabilidades al cambiar la composición de los sucesos
Lenguajes	- Visual	- Composición espacio muestral (A, $\bar{B}$) - Extracción de las bolas - Cálculo de probabilidades
	- Verbal	- Explicación de la situación
	- Icónico	- Iconos que representan los sucesos y resultados
	- Matemático	- Cálculo de probabilidades
	- A, $\bar{B}$	- Sucesos
	- $P(A)$, $P(\bar{B})$, ...	- Probabilidad de los sucesos
Conceptos	- Experimento aleatorio	- Experimento de extracción de bolas de una caja
	- Sucesos	- Bolas rojas y bolas azules
	- Espacio muestral	- Conjunto de posibilidades del experimento
	- Probabilidad simple	- Medida relativa del área de cada parte respecto al total
	- Muestreo sin reposición	- Los elementos extraídos no se vuelven a colocar en la caja
	- Casos favorables	- Número de bolas de un color determinado
	- Casos posibles	- Número total de bolas que hay en la caja
	- Espacio total	- Suceso formado por todas las bolas
Procedimientos	- Extracción	- Se elige una bola de la caja
	- No reposición	- Después de elegir una bola no se devuelve a la caja
	- Regla de Laplace	- Cociente entre casos favorables y casos posibles
	- Cálculo de probabilidades	- Se aplicaría la fórmula de Laplace
	- Comparación de probabilidades	- Representación de las distintas probabilidades simples; visualmente las puede comparar el alumno
	- Representación gráfica	- Disposición del nº de bolas
	- Ordenación	- Ordenamos de mayor a menor para calcular cual es la probabilidad mayor
Propiedades	- La probabilidad es un valor entre 0 y 1	- El número de casos favorables es menor o igual que el número de casos posibles, será cero cuando no tengamos ningún caso favorable.
	- Ordenación probabilidades	- Una probabilidad de un suceso es mayor que otra cuando el número de casos favorables de éste sea mayor que el número de casos favorables de otro suceso (siempre que tengamos el mismo nº de casos totales)
Argumentos	- Visualizaciones	- Visualización de las distintos sucesos y su relación

Objetos recursos de exploración

Nombre	Dirección
Juegos de Azar: Lanzamiento de los dados	http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/agrega/visualizador-1/es/pode/presentacion/visualizadorSinSecuencia/visualizar-datos.jsp
Experiencias Aleatorias	http://www.ceipjuanherreraalcausa.es/Recursosdidacticos/SEXTO/datos/03_Mates/datos/05_rdi/ud15/1/01.htm
Probabilidad de un Evento en un Experimento Aleatorio	http://odas.educarchile.cl/objetos_digitales_NE/ODAS_Matematica/Ed_Matematica/probabilidad_evento_experimento_aleatorio/index.html
Probabilidades	http://www.editorialteide.es/elearning/Primaria.asp?IdJuego=853&IdTipoJuego=8
Probabilidad	http://www.editorialteide.es/elearning/Primaria.asp?IdJuego=923&IdTipoJuego=8

Referencias

- Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (2011). Teaching statistics in school mathematics.-Challenges for teaching and teacher education- A Joint ICMI/IASE Study. ICMI Study volume 14. New York: Springer
- Contreras, J. M. (2011). Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Godino, J., Wilhelmi, M. R., Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 4(2), 1-26.

Aplicaciones de la estadística a otras áreas: ¿Es necesaria la estadística en la historia del arte?

Contreras García, Javier

Universidad de Granada

Resumen

Quizá el hecho de intentar acercar dos disciplinas tan distantes como la Estadística y la Historia del Arte, resulte ciertamente complicado. No obstante los lazos de unión, entre ambas disciplinas existen, debido principalmente a la necesidad de dotar a esta disciplina de una metodología científica.

La relación entre la Estadística y la Historia del Arte ha sido tratada en la literatura. Autores como Martín (1985), Álvarez (1987) revisaron esta relación basándose meramente en aspectos cuantitativos, como por ejemplo el uso de materiales o la producción artística. Por ejemplo, Álvarez realiza análisis, tanto analíticos como gráficos, a partir de agrupaciones de la producción de Goya según la temática elegida o la posible cronología de ésta. Otras aplicaciones de la estadística al campo de las artes son descritas por Apellániz y Clavo (2013), que clasifican y predicen el tipo de animal presente en las pinturas rupestres del paleolítico, o Hughes, Graham y Rockmore (2010) que aplican la estadística a la autentificación de obras de arte, proporcionando medidas cuantificables y objetivas para examinar el estilo artístico, y otras dimensiones perceptivas, a partir de la codificación dispersa.

En este trabajo mostramos como dos áreas tan dispares como estas pueden interactuar, siendo la estadística una herramienta para alcanzar fines propuestos por los historiadores del arte.

Palabras clave: Estadística, aplicaciones de la estadística, historia del arte

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 605-606). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.


Álvarez Martín aplicó análisis, tanto analíticos como gráficos, a partir de agrupaciones de la producción de Goya según la temática elegida o la posible cronología de ésta.
Martín González revisó la aplicación de técnicas cuantitativos para su uso en la clasificación de materiales pictóricos o en la producción artística.
Aplicaciones de la estadística a otras áreas: ¿Es necesaria la estadística en la historia del arte?
Javier Contreras García
Universidad de Granada
Quizá el hecho de intentar acercar dos disciplinas tan distantes como la Estadística y la Historia del Arte, resulte ciertamente complicado. No obstante los lazos de unión, entre ambas disciplinas existen, debido principalmente a la necesidad de dotar a esta disciplina de una metodología científica.
En este trabajo, con limitaciones de espacio, mostramos como dos áreas tan dispares como estas pueden interactuar, siendo la estadística una herramienta para alcanzar fines propuestos por los historiadores del arte.
Apellániz y Clavo clasifican y predicen el tipo de animal presente en las pinturas rupestres del paleolítico a partir de modelos estadísticos
La estadística se utiliza en la construcción para medir resistencia de hormigones y patologías a partir de Controles de Calidad, Teoría de Muestras y Ajuste de Mínimos Cuadrados.
Hughes, Graham y Rockmore aplican la codificación dispersa para autentificar obras de arte

Aprendiendo Probabilidad en la Web

Lara Porras, Ana María, Román Montoya, Yolanda y Pérez Bueno, Fernando

Universidad de Granada

Resumen

En los últimos años, el proceso de adaptación de los créditos europeos al sistema de créditos actual ha motivado una importante serie de cambios en el desarrollo de la labor docente. Estos cambios han venido incrementados con la incorporación de las TIC's en el aula tanto para la búsqueda de información como para el procesamiento y posterior aplicación de las técnicas analizadas. En este proceso formativo, las nuevas tecnologías de información y comunicación y, concretamente, Internet, juegan un papel fundamental. El alumno ha de saber utilizarlas, y el profesor está obligado a orientar al alumno en la utilización de determinadas páginas y de determinados materiales que favorezcan su desarrollo formativo.

Intentamos focalizar y dirigir a través de preguntas, problemas o proyectos el aprendizaje de los alumnos, animándoles a trabajar con los principales conceptos de la Probabilidad. Para ello proponemos realizar una serie de procesos donde la investigación, la búsqueda y selección de información, el debate, análisis y síntesis de las conclusiones permitan que los conceptos se conviertan en herramientas de aprendizaje más que en objeto de aprendizaje. El alumno no debe perderse en el inmenso y confuso océano que es Internet, el objetivo de este trabajo es guiarlo a través de diversas webs centradas en los contenidos indicados.

La presentación de los distintos enfoques de la Probabilidad se hace y se discute en el aula, pero fundamentalmente es desarrollada por los alumnos. Para ello y dada la extensión de documentación de este tipo en Internet, proponemos a nuestros alumnos trabajar en algunos sitios webs como:
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Azar_y_probabilidad/index.htm

Palabras clave: Probabilidad, Web, Enseñanza virtual.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 607-608). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

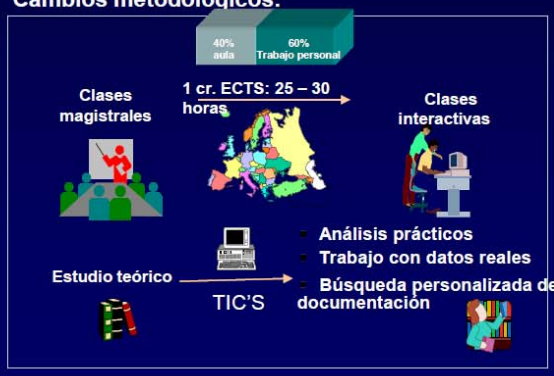
I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria

Organizado por el Grupo de Investigación Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria
Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Aprendiendo probabilidad en la Web

Lara-Porras, A.[1], Román-Montoya, Y[2]. Pérez-Bueno, F[3]
[1]alara@ugr.es [2]yroman@ugr.es [3]ferztk@gmail.com
Universidad de Granada

Cambios metodológicos:

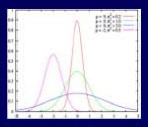


Contexto de aplicación:

Alumnos: Primer curso del Grado en Biología
Tema: Cálculo de Probabilidades
Asignatura: Bioestadística

Programa de la asignatura:





Inferencia Estadística



Objetivo del proyecto:

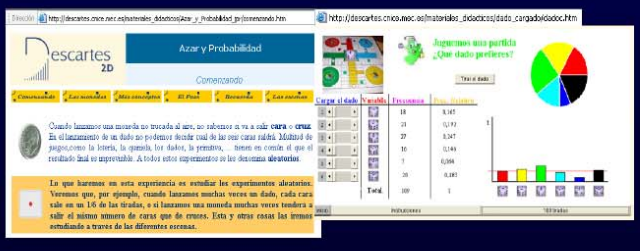
- Utilización de las TICs como herramienta educativa
- Introducción de conceptos a través de juegos y experimentos interactivos en la web

Aplicación práctica:

Introducción de los **conceptos elementales** de la teoría de la probabilidad (suceso, frecuencia, etc.).

Partiendo de ejemplos prácticos se definen distintos conceptos y se enuncian las **reglas y leyes básicas de la probabilidad** (**regla de Laplace y ley de los grandes números**).

La página termina con los primeros conceptos de probabilidad de **sucesos compuestos** atendiendo a los casos de unión e intersección de sucesos



Resultados y Conclusiones:

- Valoración positiva del **uso del ordenador** y de **Internet** en el aprendizaje de la Estadística.
- Utilización de la red como herramienta de trabajo en el estudio.
- Relevancia del **trabajo en equipo** gracias al contraste de ideas y la puesta en práctica de las estrategias consensuadas y desarrolladas conjuntamente en el aula.
- **Razonamientos lógicos**. Exposición coherente de argumentos como paso previo a la resolución de un problema.
- Mejora cuantitativa en las **calificaciones finales** gracias al mayor interés que los alumnos muestran por la asignatura.
- Incremento del **nivel de asistencia y participación** en el aula de un 75%
- Creciente y continua **demanda del alumnado** de nuevos ejercicios y tareas en el desarrollo del temario

Cálculo de la probabilidad condicional y de Bayes en hoja de cálculo

Anjo, Álvaro

alvaroanjo@gmail.com, Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres, 8125-254 Quarteira

Resumen

El cálculo de probabilidades es una de las áreas de las matemáticas que presentan más dificultades en la escuela secundaria, por lo que la existencia de una hoja de cálculo para determinar rápidamente la solución es muy atractivo. Y la hoja de cálculo tiene un comportamiento muy interesante: cuando se cambian los datos, es posible estudiar «¿qué pasaría si ?».

Se consideró la clase de problemas que afectan a la probabilidad condicional, el teorema de Bayes y la probabilidad total. La presentación de los datos y la solución debe estar en forma de diagrama de árbol, tablas de contingencia y diagramas de Venn. Este proceso de enseñanza y aprendizaje evidenció resultados muy interesantes.

Se explica la construcción de una hoja de cálculo que cumpla con los requisitos mencionados arriba, utilizando el cálculo sistemático.

Palabras clave: hojas de cálculo, diagrama de árbol, tablas de contingencia. Teorema de Bayes.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 609-610). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Babelomics: una herramienta web para la enseñanza del análisis estadístico de datos genómicos

Francisco García-García[1,2], Martina Marbà Maya[1,2], David Montaner González[1]

1. Unidad de Bioestadística, Instituto de Medicina Computacional, Centro de Investigación Príncipe Felipe. Valencia, España.
2 Nodo de Genómica Funcional. Instituto Nacional de Bioinformática.

Objetivo

Los avances tecnológicos han motivado la demanda de nuevos recursos estadísticos y bioinformáticos en el área de la Genómica. Nuestro objetivo ha sido el desarrollo de una herramienta web que facilite el acceso y comprensión de la Estadística en el análisis de datos genómicos: **Babelomics (www.babelomics.org)** [1]

Métodos

A. Diseño y desarrollo de la herramienta web

Se incluyeron varios elementos:

- Creación de un equipo técnico e investigador multidisplinar.
- Infraestructura computacional para almacenamiento, gestión y análisis de datos.
- Incorporación de tutorial detallado, módulo de ayuda y asistencia online.
- Formación del uso de la herramienta a través de work-shops nacionales e internacionales.



A. Diseño e implementación de Babelomics.

B. ¿Cómo funciona Babelomics?

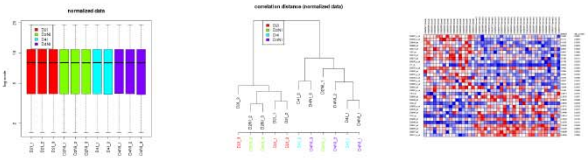
- Tras la carga de los datos, se preprocesan y exploran los datos.
- Existen diferentes estrategias de análisis: clasificación supervisada (predictores), clasificación no supervisada (clustering) y evaluación de la expresión diferencial (comparación de grupos experimentales, análisis de correlación, supervivencia y series temporales). .
- El análisis estadístico se completa con el uso de herramientas de interpretación biológica de los resultados.



B. Fases en el análisis estadístico de datos de expresión génica.

C. Docencia universitaria con Babelomics

- Se incorporó el uso de Babelomics en la programación de varias asignaturas estadísticas de grados y másters universitarios.
- Esta aportación práctica facilitó la comprensión del métodos estadísticos en sus diferentes fases: el análisis descriptivo inicial, la exploración de los datos, el análisis inferencial y la interpretación de resultados [2].



C. Resultados gráficos obtenidos en las diferentes fases del análisis estadístico

Conclusiones

- Babelomics es una herramienta que ha potenciado la formación estadística en profesionales del área de la Genómica.
- Además Babelomics ha aproximado las tareas del mundo profesional al mundo académico, permitiendo el desarrollo de competencias específicas en el uso de aplicaciones web de análisis estadístico que mejoran el acceso al mercado laboral de los estudiantes universitarios.

Referencias

[1] Medina *et al.* (2010) Nucleic Acids Research, 38: W210-213 **[2]** Molecular Cloning: A Laboratory Manual (4rd Edition). Ch 8, pages 577-587.

Cálculo de la probabilidad condicional y de Bayes en hoja de cálculo

Anjo, Álvaro

Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres, 8125-254 Quarteira

Resumen

El cálculo de probabilidades es una de las áreas de las matemáticas que presentan más dificultades en la escuela secundaria, por lo que la existencia de una hoja de cálculo para determinar rápidamente la solución es muy atractivo. Y la hoja de cálculo tiene un comportamiento muy interesante: cuando se cambian los datos, es posible estudiar «¿qué pasaría si ?».

Se consideró la clase de problemas que afectan a la probabilidad condicional, el teorema de Bayes y la probabilidad total. La presentación de los datos y la solución debe estar en forma de diagrama de árbol, tablas de contingencia y diagramas de Venn. Este proceso de enseñanza y aprendizaje evidenció resultados muy interesantes.

Se explica la construcción de una hoja de cálculo que cumpla con los requisitos mencionados arriba, utilizando el cálculo sistemático.

Palabras clave: hojas de cálculo, diagrama de árbol, tablas de contingencia. Teorema de Bayes.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 611-612). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL Y DE BAYES EN HOJA DE CÁLCULO

Anjo, Álvaro
alvaroanjo@gmail.com
Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres, 8125-254 Quarteira

INTRODUÇÃO

Um dos problemas que um professor de matemática enfrenta é determinar rapidamente uma solução que satisfaça um certo conjunto de dados. Isto permite facilmente criar problemas ou verificar as soluções dos alunos.

O cálculo de probabilidades é uma das áreas da matemática que levantam mais dificuldades no ensino básico ou secundário.

Condições adequadas na sala de aula
- livro de matemática, por aluno
- calculadora gráfica, por aluno
- computador, folha de cálculo, Internet, projetor

Folha de cálculo é muito útil se permitir analisar e calcular a solução do :
- problema direto (X --> Y)
- problema inverso (X <-- Y)

Conceitos e fórmulas de Probabilidades :
- probabilidade condicional,
- teoremas de Bayes,
- probabilidade Total,

Processos utilizados para resolver problemas :
- diagrama em árvore,
- tabela de contingência,
- diagrama de Venn.

Multiplicidade dos problemas.
Para estudar o problema direto e problema inverso para qualquer conjunto de dados, a folha de cálculo torna-se demasiado grande para conter todos os problemas possíveis.
Perde-se a vantagem de rapidez de introdução de

PROBLEMA-1

Exame 835, MACS, 2009, 1ªF, item 3,

Numa Escola Secundária verificou-se que 60% dos alunos de MACS são raparigas. Das raparigas, 25% são loiras, 50% têm cabelo castanho, e as restantes têm cabelo preto. Dos rapazes, 12,5% são loiros, 50% têm cabelo castanho, e os restantes têm cabelo preto.

Escolheu-se, ao acaso, um aluno de MACS
Qual é a probabilidade do aluno escolhido:
1. ter cabelo loiro
2. ser rapariga, sabendo-se que tem cabelo preto.

SOLUÇÃO NO COMPUTADOR

		Calc 1	Calc 2	Calc 3	Calc 4
P(Mas)		0,4	0,4	0,4	0,4
P(Fem)	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
P(Loi)			0,2	0,2	0,2
P(Cas)			0,5	0,5	0,5
P(Pre)				0,3	0,3
P(Mas ∩ Loi)			0,05	0,05	0,05
P(Mas ∩ Cas)			0,2	0,2	0,2
P(Mas ∩ Pre)				0,15	0,15
P(Fem ∩ Loi)		0,15	0,15	0,15	0,15
P(Fem ∩ Cas)		0,3	0,3	0,3	0,3
P(Fem ∩ Pre)			0,15	0,15	0,15
P(Mas / Loi)				0,25	0,25
P(Mas / Cas)				0,4	0,4
P(Mas / Pre)					0,5
P(Fem / Loi)				0,75	0,75
P(Fem / Cas)				0,6	0,6
P(Fem / Pre)					0,5
P(Loi / Mas)	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
P(Loi / Fem)	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
P(Cas / Mas)	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
P(Cas / Fem)	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
P(Pre / Mas)					0,375
P(Pre / Fem)				0,25	0,25

Outras perguntas podem ser feitas sobre o problema.

CÁLCULO SISTEMÁTICO

O valor de uma incógnita é determinado logo que uma equação que relaciona aquela variável com outras variáveis é verdadeira. E o cálculo continua, sistematicamente, até determinar os restantes valores das variáveis.

Este cálculo pode ser representado por uma topologia em árvore, onde os nós representam as variáveis e os ramos apontam para variáveis dependentes.

Na prática verificou-se que 2 a 4 fórmulas por variável é suficiente para conectar algebricamente as variáveis e produzir a solução em menos de 8 iterações.

O cálculo sistemático determina a função composta (sequência de fórmulas válidas), partindo de um conjunto de variáveis não nulas e da lista de fórmulas por incógnita; este desempenho

FÓRMULÁRIO

Todas as variáveis precisam de ficar ligadas algebricamente.
Não é necessário programar explicitamente funções compostas na folha de cálculo; é suficiente adicionar uma equação que complete a ligação algébrica em alguma das iterações.

FÓRMULAS GERAIS

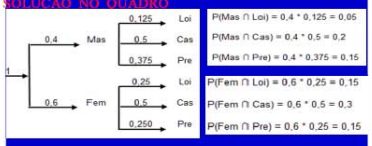
complemento	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
De Morgan	$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$
De Morgan	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$
reunião	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
condicional	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B\|A)$
Bayes	$P(B\|A) = P(B) \times P(A\|B) / P(A)$
total n var.	$P(A) = \sum_1^n P(A \cap B_i) \times P(B_i)$
total 2 var.	$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

FÓRMULAS PARTICULARES

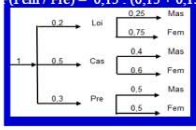
acontecimentos independentes $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

PROBLEMA-1

SOLUÇÃO NO QUADRO



P(Loi) = 0,05 + 0,15 = 0,20
P(Fem / Pre) = 0,15 : (0,15 + 0,15) = 0,50



Outras perguntas podem ser feitas

PROBLEMA-2

Os conjuntos A e B apresentam as seguintes caraterísticas:

$|A \cap B| = 10$; $|A \cap \neg B| = 18$; $|\neg A \cap B| = 5$

$P(A / \neg B) = 0,6$

1. Calcule o cardinal de A e o cardinal de B.
2. Calcule $P(\neg B / A)$
3. Construa o diagrama de Venn, para A e B
4. A e B representam acontecimentos independentes?

ESQUEMAS DE FÓRMULAS

Seja a equação:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

As outras equações são:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(B)$$

$$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A)$$

e de igual modo para as variantes:

$\bar{A} \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $A \cup \bar{B}$, $\bar{A} \cup B$

PROGRAMAÇÃO DA FOLHA DE CÁLCULO

	A	B	C	D	E	F
1	Total, S			45	45	45
2	A		28	28	28	28
3	B		15	15	15	15
4	¬A				17	17
5	¬B		30	30	30	30
6	A ∩ B	10		10	10	10
7	A ∩ ¬B	18	18	18	18	18
8	¬A ∩ B	5	5	5	5	5
9	¬A ∩ ¬B			12	12	12
10	A ∪ B			33	33	33
11	A ∪ ¬B			40	40	40
12	¬A ∪ B				27	27
13	¬A ∪ ¬B				35	35
14						
15	P(A)				0,6222	0,6222
16	P(B)				0,3333	0,3333
17	P(¬A)					0,3778
18	P(¬B)				0,6667	0,6667
19	P(A ∩ B)				0,2222	0,2222
20	P(A ∩ ¬B)				0,4	0,4
21	P(¬A ∩ B)				0,1111	0,1111
22	P(¬A ∩ ¬B)				0,2667	0,2667
23	P(A ∪ B)				0,7333	0,7333
24	P(A ∪ ¬B)				0,8889	0,8889
25	P(¬A ∪ B)					0,6
26	P(¬A ∪ ¬B)					0,7778
27	P(A / B)			0,6667	0,6667	0,6667
28	P(A / ¬B)	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
29	P(¬A / B)			0,3333	0,3333	0,3333
30	P(¬A / ¬B)				0,4	0,4
31	P(B / A)			0,3571	0,3571	0,3571
32	P(B / ¬A)					0,2941
33	P(¬B / A)			0,6429	0,6429	0,6429
34	P(¬B / ¬A)					0,7059

PROGRAMAÇÃO da CÉLULA C2:

=SE(B2<>""; B2; SE(E(B1<>""; B4<>"");B1-B4;
SE(E(B10<>""; B3<>""; B6<>""); B10+B6-B3;
SE(E(B6<>"";B31<>""); B6/B31; ""))))

EXPLICAÇÃO

SE(B2<>""; B2;
se valor anterior não é nulo então fica com esse valor.

SE(E(B1<>""; B4<>""); B1-B4;
se Total e ¬A são não nulos então A = Total – ¬A

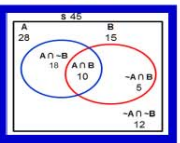
SE(E(B10<>""; B3<>""; B6<>""); B10+B6-B3;

PROBLEMA-2

SOLUÇÃO

- Ver tabela acima

- Diagrama de Venn



- Con

	P(A∩B)=0		P(A∩B)=P(A)*P(B)	
	P(A∪B)=1		P(A)=P(A/B)	
		P(A∩B)>0		P(B)=P(B/A)
	Contrári	Compati	Indep	Indep	Indep
A, B	Não	Sim	Não	Não	Não

CONCLUSÃO

Este processo de ensino-aprendizagem têm-se mostrado muito eficaz. Os alunos estão motivados e gostam de aprender.
Os resultados escolares estão acima da média

Cognición situada y enfoque sociocultural Vigotskiano en la enseñanza de la estadística

Obando Bastidas, Jorge Alejandro[1] *y Sanchez Castellanos Maria Teresa*[2]

[1]Universidad Cooperativa de Colombia
[2]Universidad de los llanos

Resumen

El presente estudio aborda elementos necesarios y requeridos para determinar que la estadística es una ciencia que forma parte y es producto de la actividad diaria en el contexto y la cultura de una región. Se describen los principios del paradigma de la cognición situada vinculado al enfoque sociocultural vigotskiano, para tal caso se revisan periódicos, revistas, folletos, libros, textos y se recogen opiniones de docentes en la apropiación de ejemplos con datos reales que mezclan las diferentes actividades sociales en la enseñanza de la estadística. Se concluye que para la enseñanza de esta ciencia se requieren estrategias que incluyan como insumo principal el contexto y sus problemas socioculturales.

Palabras clave: Cognición situada, enfoque sociocultural, enseñanza de la estadística.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 613-614). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Cognición situada y enfoque sociocultural Vigotskiano en la enseñanza de la estadística

Obando Bastidas Jorge Alejandro[1]
Sanchez Castellanos Maria Teresa[2]
[1]jorgealejo21@gmail.com , Universidad Cooperativa de Colombia
[2]maytcas72@gmail.com, Universidad De los llanos

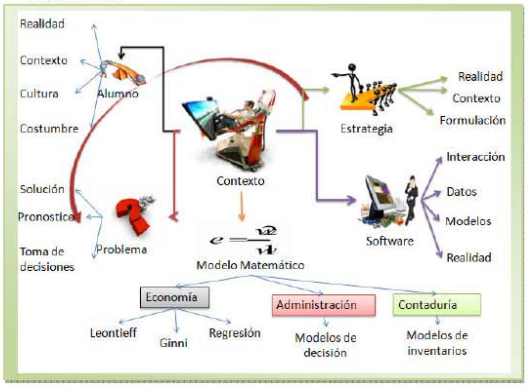
Resumen

El presente estudio aborda elementos necesarios y requeridos para determinar que la estadística es una ciencia que forma parte y es producto de la actividad diaria en el contexto y la cultura de una región. Se describen los principios del paradigma de la cognición situada vinculado al enfoque sociocultural vigotskiano, para tal caso se revisan periódicos, revistas, folletos, libros, textos y se recogen opiniones de docentes en la apropiación de ejemplos con datos reales que mezclan las diferentes actividades sociales en la enseñanza de la estadística. Se concluye que para la enseñanza de esta ciencia se requieren estrategias que incluyan como insumo principal el contexto y sus problemas socioculturales.

Metodología

La adaptación de los medios de comunicación: Televisión, periódicos durante el proceso académico del año 2012, permitió reunir datos específicos para desarrollar las actividades académicas de la estadística descriptiva y probabilística, además la recolección de información mediante encuestas en docentes y personas del contexto pertenecientes a diferentes sectores de la economía permitió relacionar aun más el contexto con el aula de clase. De la misma manera se simulan modelos estadísticos y matemáticos en contextos sociales para medir índices de pobreza, modelos económicos, modelos de regresión y modelos matemáticos aplicados problemas reales del contexto.

Introducción

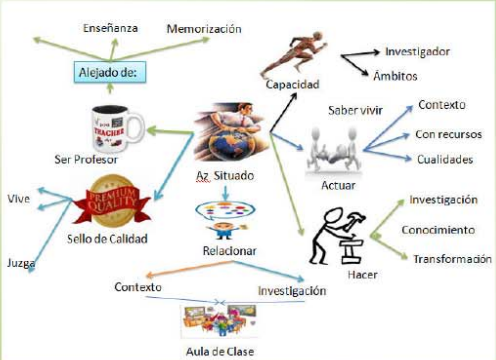


La grafica indica como del contexto real y físico con todos sus problemas es factible recoger elementos de información que permiten llevar a cabo tareas y actividades académicas en el aula de clase. Por tanto el contexto se convierte en una estrategia que permite mezclar la realidad, la casuística en la ejemplificación de la estadística, de la misma manera el software permite la implementación de modelos los cuales son factibles de simular y en donde los modelos estadísticos juegan un papel muy importante.

El carácter situacional de la actividad de aprendizaje implica un énfasis en una visión comprensiva, que compromete a toda la persona más que al receptor actual de un cuerpo de conocimiento factual sobre el mundo, en la actividad en y con el mundo y en el hecho de que el agente, la actividad y el mundo se constituyen mutuamente." (Lacasa, 1994).

En ese proceso el sujeto reconstruye los significados, asistido desde el exterior por la mediación de "otros significativos", que ayudan a construir el "sí mismo" del sujeto, y aprende a participar de manera adecuada en su medio, con la mediación de otros se apropia de las competencias necesarias para actuar según lo requerido (Vigotsky)
De esta manera bajo este proceso de enseñanza el estudiante aprovecha la realidad, la problemática, la casuística para desarrollar procesos de aprendizaje, el docente hace uso de ellos.

Resultados



Se reconocen capacidades para investigar en diferentes ámbitos, en donde se reconoce el contexto como principal actor. Se enseña como el saber actuar y vivir en contexto guarda relación con los recursos del medio y las cualidades cognitivas que se tengan. De la misma manera el saber hacer en contexto permite llevar a cabo investigación, producir conocimiento. La investigación muestra también una relación del contexto y los problemas de investigación los cuales son factibles de llevarlos al aula de clase. De esta manera se obtiene un formación con un sello de calidad que permiten tanto a docentes como estudiantes tener otra perspectiva del conocimiento

Discusión final

La aplicación de instrumentos permitió recoger ejemplos del contexto real y adaptarlos en el aula de clase, se reconoce en los estudiantes actitudes diferentes y disposiciones para el aprendizaje, además de mitifigar los elementos abstractos de la estadística. De la misma manera se da vida a las formulas, los problemas reales despiertan el interés por el aprendizaje. El impacto es evidente y las actitudes del estudiante indican que estos procedimientos que implica la implementación del aprendizaje situado es bueno y recomendable.

Bibliografía

Lacasa, P. Aprender en la escuela, aprender en la calle, 130-135. Visor Distribuciones, 1994, citando a Lave, J., & Wenger, E. Situated Learning, Madrid, 1991.
VIGOTSKY, L. S.: El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Crítica. Grupo Editorial Grijalbo.

Diseño de herramientas interactivas orientadas a la resolución de problemas de estadística en el ámbito de las ciencias del deporte

López-Iñesta, Emilia, Zacarés González, Mario

Universidad Católica de Valencia "San Vicente Mártir"

Resumen

La introducción del Espacio Europeo de Educación Superior ha fomentado en los últimos años un interés por la metodología docente en el ámbito universitario y brinda la oportunidad de diseñar y probar nuevos escenarios en el proceso de enseñanza-aprendizaje en los que las nuevas tecnologías juegan un papel fundamental. En este trabajo se exponen las ventajas de la utilización de lecciones guiadas implementadas en la plataforma Moodle y orientadas a la resolución de problemas de Estadística en el grado de Ciencias de la Actividad Física y el Deporte. El interés por incluir esta herramienta se puede ver desde una doble perspectiva, ya que permite por un lado evaluar al alumnado de manera inmediata y por otro, resulta un recurso flexible orientado al autoaprendizaje y trabajo autónomo del estudiante. Los resultados muestran que se trata de una actividad interactiva y motivadora que supone un reto para el estudiante en el que pone a prueba sus capacidades y le permite autoevaluar el grado de asimilación de los contenidos teóricos desarrollados en las clases presenciales.

Palabras clave: Estadística, autoaprendizaje, trabajo autónomo.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 615-616). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Diseño de herramientas interactivas orientadas a la resolución de problemas de estadística en el ámbito de las ciencias del deporte

M. Zacarés[1], E.López-Iñesta[2]

[1]Facultad de Veterinaria y Ciencias Experimentales, Universidad Católica de Valencia "San Vicente Mártir"

[2]Facultad de Ciencias de la Actividad Física y el Deporte, Universidad Católica de Valencia "San Vicente Mártir"

Motivación

La introducción del Espacio Europeo de Educación Superior (EES) ha fomentado en los últimos años un interés por la metodología docente en el ámbito universitario y brinda la oportunidad de diseñar y probar nuevos escenarios en el proceso de enseñanza-aprendizaje en los que las nuevas tecnologías juegan un papel fundamental.

La implementación de la asignatura de **Estadística en el Grado de Ciencias de la Actividad Física y el Deporte** bajo las directrices del EES ha planteado nuevas problemáticas y retos a resolver:

- La disminución del peso de las clases presenciales ha supuesto una reducción del tiempo dedicado en clase a desarrollar las competencias relacionadas con la resolución de problemas. En la gran mayoría de casos el **tiempo dedicado resulta insuficiente.**
- El alumnado de nuestro grado procede de itinerarios formativos preuniversitarios muy dispares: bachiller (científico, letras, ciencias sociales) y ciclos formativos. Como consecuencia existen **diferentes ritmos de aprendizaje** en el aula que en muchas ocasiones suponen una dificultad añadida para el correcto seguimiento de la asignatura y que puede conducir a una falta de interés por la misma.

Ante esta problemática, hemos desarrollado una herramienta interactiva orientada a la resolución de problemas de Estadística cuyos **objetivos** son:

- **Completar y profundizar** en los conocimientos adquiridos en clase.
- **Compensar las carencias formativas** del alumnado mediante una herramienta **flexible y adaptada al ritmo de aprendizaje de cada alumno**
- Incentivar el **autoaprendizaje** y el **trabajo continuo**
- Disponer de un instrumento adicional de evaluación continua del alumno
- **Desarrollar competencias** relacionadas con la resolución de problemas y las TIC's

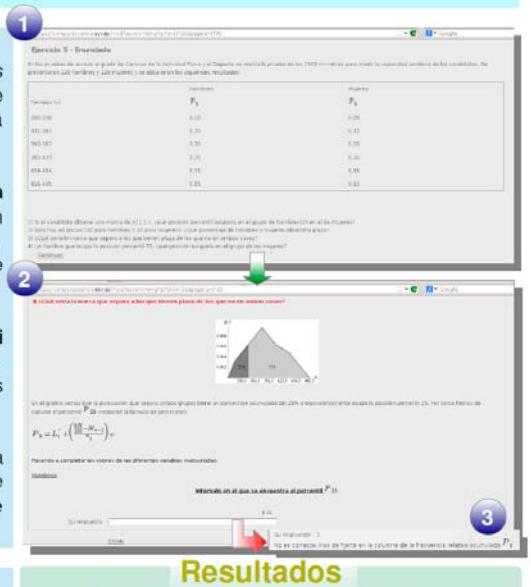
Características de la herramienta

1. La herramienta desarrollada se basa en el recurso *Lecciones* de la plataforma Moodle. Cada *lección* consiste en una serie de problemas que el alumno ha de resolver de forma interactiva y a través de la plataforma *online*.

2. La lección está diseñada para que el alumno **aprenda a resolver los problemas paso a paso**. Cada problema consiste en una serie de páginas en las que se formula una o varias preguntas (numérica, verdadero/falso u opción múltiple) que el alumno ha de responder.

3. **Sólo se permite avanzar en la resolución del problema si se introduce la respuesta correcta**. En caso de que la respuesta sea incorrecta la herramienta proporciona información sobre los contenidos teóricos involucrados en la pregunta.

4. No hay un tiempo prefijado para la resolución de cada problema y se puede retomar la resolución en el punto donde se dejó la última vez **adaptándose completamente al ritmo de aprendizaje del alumno**.



Implementación en la asignatura

- Se han implementado **dos lecciones por cada uno de los módulos** que componen la asignatura (Estadística descriptiva, Probabilidad e Inferencia Estadística).
- El factor de ponderación de esta actividad en el global de la asignatura es del **15%**.
- **No se tiene en cuenta el número de errores cometidos** siempre que se supere una nota mínima al final del ejercicio. En caso de no alcanzar dicha nota, **el alumno puede repetir el ejercicio tantas veces como sea necesario hasta superarla**.
- Las lecciones se han de realizar a medida que se desarrollan los contenidos teóricos en clase y **únicamente se puntúa la actividad si se ha realizado dentro del plazo establecido**. En caso contrario el alumno puede hacerla a lo largo de todo el semestre pero no se le ponderará en la nota final.

Resultados

La herramienta ha tenido una gran aceptación ya que cerca del 90% del alumnado completa todas las lecciones. Como consecuencia se han observado las siguientes mejoras de carácter general:

- **Mayor motivación del alumno** ya que dispone de una herramienta de autoevaluación que le permite ser consciente de sus propios progresos.
- **Mayor seguimiento de la asignatura** ya que la herramienta minimiza los problemas derivados de la formación preuniversitaria del alumno.
- **Aumento de la calificación promedio de la prueba escrita final** (consistente en varios problemas) debido a que la herramienta facilita la adquisición de habilidades para la resolución de problemas

Nota: *Esta experiencia ha sido desarrollada en el marco de una Red de Innovación Educativa. Los autores agradecen la financiación recibida desde el Vicerrectorado de Convergencia Europea y Calidad de la Universitat de València, a través del proyecto Finestra Oberta con código UV-SFPIE_FO12-80215.*

Educação Estatística e uso de *software* educativo para análise de dados

Campêlo, Siquele R. Carvalho y Liliane M. T. Lima

UFPE

Resumen

Gráficos e tabelas enquanto recursos para a comunicação de dados são encontrados frequentemente nos diversos meios de comunicação e por sua veiculação constante, entendê-los é um aspecto relevante para a participação do indivíduo na vida social. Para analisar gráficos é fundamental compreender como estes foram organizados, a ordem dos dados e sua relação com o contexto da informação que veicula, processo que envolve leitura, interpretações, construção de sentido e inferências. O software educativo no ensino de Estatística, pode se constituir como ferramenta para a ampliação das experiências com o saber matemático e estatístico, além de ajudar estudantes a desenvolver o raciocínio estatístico e aprender novas formas de representar dados. Em nossa pesquisa realizamos um estudo sobre as possibilidades de uso de tecnologias no trabalho com o Tratamento da Informação, em particular sobre a interpretação de gráficos no software TinkerPlots. Para isso, temos como proposta metodológica analisar o software, a partir do uso do programa por alunos do 5° ano do Ensino Fundamental, em situações de resolução de situações problema envolvendo a interpretação de gráficos. Os alunos vivenciaram inicialmente uma etapa de familiarização com o software, seguida de uma etapa de interpretação de situações problemas, de quatro tipos: problemas de uma variável; problema de duas variáveis; problemas em que os estudantes são solicitados a analisar a tendência do gráfico, e problemas de construção de um novo caso. Os resultados da pesquisa apontam para a importância do software no favorecimento de diferentes formas de representação de dados, bem como no enriquecimento de estratégias de resolução de problemas envolvendo o Tratamento da Informação.

Palavras chave: Educação estatística; *Software* educativo; Interpretação de gráficos.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 617-618). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA E USO DE *SOFTWARE* EDUCATIVO PARA ANÁLISE DE DADOS

CAMPÊLO, SIQUELE R. CARVALHO[1], CARVALHO, LILIANE M. T. LIMA [2]
[1]SIQUELE@GMAIL.COM, UFPE
[2]LMTLCARVALHO@GMAIL.COM, UFPE.

INTRODUÇÃO

Gráficos e tabelas enquanto recursos para a comunicação de dados são encontrados frequentemente em diversos contextos sociais. De acordo com Carvalho, Monteiro e Campos (2010, p. 214), a interpretação de gráficos "não se resume apenas a ler dados" mas é um processo de resolução de problemas, cuja aparência do gráfico, a natureza das questões, os tipos de informações e as experiências daqueles que interpretam são aspectos a serem considerados. Como resultado, a interpretação de gráficos não é um processo espontâneo, mas encontra-se fortemente dependente das situações de ensino organizadas pelo professor. No entanto, a interpretação e construção de gráficos ainda são habilidades consideradas complexas por alunos e professores e as dificuldades relacionam-se à construção de escalas, aos eixos, à comparação dos dados, à relação das informações com intervalos de tempo, dentre outras (SELVA, 2009). A utilização das tecnologias tem crescido na área de interpretação e produção de gráficos fornecendo novas formas de analisar, de explorar dados e de pensar em ideias estatísticas, permitindo que os estudantes tenham o foco na interpretação de resultados e na compreensão de conceitos. De acordo com Garfield & Ben-zvi (2008) o uso da tecnologia no Ensino de Estatística é proveitoso quando feito para acessar, analisar e interpretar dados reais, automatizar cálculos e processos, produzir e modificar gráficos, além de criar simulações para apresentar conceitos abstratos. Nesse sentido, nossa pesquisa busca aprofundar o estudo sobre o uso de tecnologias para a interpretação de gráficos, especificamente sobre o *software* *TinkerPlots 2.0* (KONOLD E MILLER, 2005) . Desenvolvido para estudantes de 10 a 14 anos, este *software* pode ajudar estudantes na investigação de dados e conceitos estatísticos. Assim, ordenando, empilhando e separando os dados, os estudante vão progressivamente organizando os dados para responder questões e com isso, criar seus próprios gráficos.

METODOLOGIA

Participaram do estudo 3 alunos do 5º ano do ensino Fundamental de uma escola da rede particular de ensino do Recife-PE, Brasil. O estudo foi feito em duas sessões em dias consecutivos, de acordo com o esquema abaixo:

1ª DIA	▪ Entrevista sobre o perfil dos alunos ▪ Familiarização com o *Software* (Banco de dados "Gatos").
2ª DIA	▪ Interpretação e resolução de situações-problema (Bancos de dados: "Peso das mochilas", "Dinossauros" e "Peixes"). ▪ Entrevista (conhecer a avaliação do aluno sobre o *software*)

A etapa de interpretação envolvia quatro tipos de problema: problemas de uma variável; problema de duas variáveis; problemas em que os estudantes são solicitados a analisar a tendência do gráfico, e problemas de construção de um novo caso.

RESULTADOS E ANÁLISE

Os resultados apresentados baseiam-se na análise de um dos problemas interpretados por uma dupla de participantes no segundo dia do estudo. A sequência A, B, C e D da Figura 1, exemplificam algumas das visualizações produzidas pela dupla diante das questões propostas:

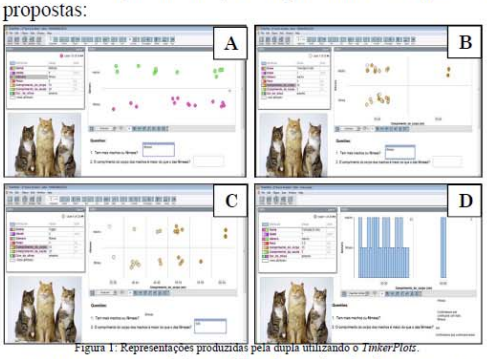


Figura 1: Representações produzidas pela dupla utilizando o *TinkerPlots*.

Dentre as estratégias utilizadas pela dupla com o uso do *TinkerPlots*, temos: arrastar a variável gênero para a área dos p*lots* e utilizar a ferramenta *Case Count* que quantifica os casos para cada gênero (A); Arrastar os *plots* horizontalmente, facilitando a comparação entre as variáveis (B), mudança de representação com o aumento dos intervalos (C), criação de nova representação visual dos dados com gráfico de barras (D).

De forma geral, a dupla respondeu aos problemas propostos explorando mais as alterações na escala e também construindo representações diversas (como o gráfico de barras) diferentes daquelas com ícones circulares. As representações criadas a partir do *software* foram fundamentais nos momentos de dúvidas e ajudaram a encontrar soluções para os desafios, pois a relação entre variáveis com diferenças às vezes muito tênues foram facilitadas pelas visualizações construídas no *software*. Assim, a análise dos dados aponta o *Tinkerplots* como ferramenta para possibilitar diferentes formas de representação de dados, bem como a promoção do enriquecimento de estratégias de resolução de problemas sobre interpretação de gráficos.

REFERÊNCIAS

CARVALHO, L. M. T. L.; MONTEIRO, C. E. F. M.; CAMPOS, T. M. M. Refletindo sobre a interpretação de gráficos como uma atividade de resolução de problemas. In: LOPES, C. E.; COUTINHO, C. Q. S. C.; ALMOULOUD, S. A. (Orgs.). **Estudos e reflexões em Educação Estatística**. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2010.

GARFIELD, J., & BEN-ZVI, D. Developing Students' Statistical Reasoning Research and Teaching Practice. Springer Publishers, 2008.

KONOLD, C., & MILLER, C., D. **TinkerPlots: Dynamic data exploration.** Emeryville, CA: Key Curriculum Press, 2005.

SELVA, Ana C. V. Gráficos de barras na Educação Infantil e séries iniciais: propondo um modelo de intervenção pedagógica. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (orgs.). **A pesquisa em educação matemática:** repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009.

El blog como medio de difusión de la Estadística

Salmerón, R. y Ocaña-Peinado F. M.

Universidad de Granada

Resumen

El blog www.estadisticaportodaspartes.blogspot.com/ pretende que el alumno descubra las potencialidades de la Estadística y la Probabilidad, sus aplicaciones en la vida real, la necesidad de estas dos disciplinas en la sociedad actual, así como malos usos e interpretaciones erróneas de las mismas, tales como tablas o gráficos, por parte de instituciones y/o medios de comunicación. En definitiva, pretendemos que el alumno de cualquier ámbito no matemático afronte con menos temor y de una manera, creemos innovadora, las asignaturas con contenidos de Estadística y Probabilidad.

Además, uno de los principales objetivos es hacerlo interactivo, de forma que el alumno sea parte activa del mismo aportando sugerencias y situaciones que a su juicio sean publicables en un post, de tal forma que se fomente el razonamiento crítico. También se desea que sea abierto a toda la comunidad estadística en cuanto a la proposición de los temas a tratar, y estaremos agradecidos de cualquier sugerencia de mejora.

En definitiva, con www.estadisticaportodaspartes.blogspot.com/ los autores pretenden aportar un pequeño grano de arena dentro del año internacional de la Estadística en la divulgación de esta disciplina, así como establecer abiertamente la necesidad de su obligatoria impartición desde las primeras etapas de la Educación.

Palabras clave: Blog, Estadística por todas partes, cultura estadística, razonar, aplicaciones de la Estadística.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 619-620). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

ESTADISTICAPORTODASPARTES
El blog como medio de difusión de la Estadística

R. Salmerón y F.M. Ocaña-Peinado
romansg@ugr.es, fmocan@ugr.es

Introducción: el primer post

En primer lugar, queremos darte la bienvenida a este blog. Es todo un placer que dediques parte de tu tiempo a leer estas líneas y recibiremos con agrado cualquier participación. Esperamos estar a la altura de tus expectativas.

En este primer post presentamos algunas de las ideas principales del blog. En el camino que iniciamos hoy, queremos reivindicar el papel protagonista que ha de tener la Estadística como herramienta indispensable para toma de decisiones. Si hoy en día por ejemplo, se conoce que factores de riesgo en la aparición de enfermedades cardiovasculares son el consumo de alcohol o el sobrepeso, es gracias a la Estadística y a sus modelos.

Asimismo, también pretendemos mostrar cómo un uso incorrecto de gráficos y/o resultados estadísticos expuestos en prensa, o en informes de instituciones u organismos puede llevar a una toma de decisiones o a interpretaciones erróneas. Samuel S. Wilks (1906-1964), parafraseando a Herbert G. Wells (1866-1946), ya indicaba que *"llegará el día en el que el pensamiento estadístico será una condición tan necesaria para la convivencia eficiente, como la capacidad de leer y escribir"*. Hace poco y, ahondando en esta misma línea, el profesor Garicano ya incluye la Estadística como una de las claves de la Educación en el futuro.

Se dice que hoy en día estamos inmersos en la sociedad de la información. También, que la información es poder. La Estadística está por todas partes, porque la información nos viene de multitud de fuentes. Alguien tiene que analizar los datos, extraer la información que contienen y utilizarla para apoyo a investigadores o para la mejora del funcionamiento de organismos o empresas. En nuestra sociedad sería insólito ver a un sociólogo construyendo un puente, a un arquitecto practicando una cirugía dental o a un odontólogo hacer un estudio sociológico para una población. No es extraño sin embargo, que cualquiera de estos profesionales maneje modelos estadísticos complejos y lleve a cabo diversos análisis estadísticos sin poseer la formación adecuada. Por último, una reflexión: ¿Confiarías en que te realizara tu operación de apendicitis, por ejemplo, un cerrajero? Nosotros al menos, no. Por ello, si alguna vez te ves en la necesidad de llevar a cabo un análisis estadístico, te recomendamos que lo lleve a cabo un profesional de la Estadística.



Aplicación a la docencia

El blog **http://www.estadisticaportodaspartes.blogspot.com** pretende que el alumno descubra las potencialidades de la Estadística y la Probabilidad, sus aplicaciones en la vida real, la necesidad de estas dos disciplinas en la sociedad actual, así como malos usos e interpretaciones erróneas de las mismas, tales como tablas o gráficos, por parte de instituciones y/o medios de comunicación. En definitiva, pretendemos que el alumno de cualquier ámbito no matemático afronte con menos temor y de una manera, creemos innovadora, las asignaturas con contenidos de Estadística y Probabilidad. Además, uno de los principales objetivos es hacerlo interactivo, de forma que el alumno sea parte activa del mismo aportando sugerencias y situaciones que a su juicio sean publicables en un post, de tal forma que se fomente el razonamiento crítico. También se desea que sea abierto a toda la comunidad estadística en cuanto a la proposición de los temas a tratar, y estaremos agradecidos de cualquier sugerencia de mejora.

En definitiva, con **http://www.estadisticaportodaspartes.blogspot.com** los autores pretenden aportar un pequeño grano de arena dentro del año internacional de la Estadística en la divulgación de esta disciplina, así como establecer abiertamente la necesidad de su obligatoria impartición desde las primeras etapas de la Educación.

Primeros resultados

Si bien hemos publicado apenas 8 post disfrutamos de 5486 visitas. Es decir, alrededor de 685 visitas por cada publicación.

Además, como se puede observar en la siguiente tabla (y en el gráfico de la derecha) estas visitas están muy repartidas.

Lugar	Porcentaje de visitas
España	58'3%
Estados Unidos	15'9%
Colombia	9'6%
Otros países	15'9%

Por tanto, consideramos que el proyecto cuenta ya con un importante respaldo. El cual es fundamental para recorrer todo el camino que queda por delante.



El uso de software libre en la enseñanza de la Estadística

García Rubio, Noelia, Gámez Martínez, Matías, Alfaro Navarro, José Luis y Alfaro Cortés, Esteban

Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen

El gran desarrollo del software libre, junto con la situación económica que atraviesa el país y, por ende, las universidades españolas, ha provocado un incremento en el uso de este tipo de software en la enseñanza de distintas materias, especialmente en asignaturas instrumentales como la Estadística.

El beneficio que reporta el uso de software libre no se limita al ahorro de cantidades prohibitivas de dinero destinadas al mantenimiento de la licencia de algunos programas, sino que también proporciona al alumnado un gran número de ventajas, como mayores posibilidades de trabajo autónomo con equipos propios dentro y fuera de las aulas y la adquisición de competencias en el uso de lenguajes de programación, muy positivamente valorados entre la comunidad científica y en determinados entornos laborales.

No obstante, el uso de este tipo de software para la docencia puede generar algún problema organizativo, especialmente en clases con grupos numerosos. En este trabajo abordamos la experiencia del uso del lenguaje R en la asignatura de Análisis Estadístico de Datos en los grados de Economía y Administración y Dirección de Empresas de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Albacete mediante una adaptación del método de enseñanza mutua durante el primer semestre del curso 2011/2012. En este sentido, se recogen las principales limitaciones y problemas surgidos, así como las soluciones propuestas para el satisfactorio desarrollo de las clases.

Palabras clave: Software libre, R, docencia estadística, método mutuo.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 621-622). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria

Organizado por el Grupo de Investigación
Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria
Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

El uso de software libre en la enseñanza de la Estadística

García Rubio, Noelia; Gámez Martínez, Matías;
Alfaro Navarro, José Luis; Alfaro Cortés, Esteban

Área de Estadística Económica y Empresarial
F. C.C. Económicas y Empresariales Albacete
Autora de contacto: noelia.garcia@uclm.es

El gran desarrollo del software libre, junto con la situación económica que atraviesa el país y, por ende, la mayoría de universidades españolas en los últimos años, ha provocado un incremento en el uso de este tipo de software en la enseñanza de distintas materias, especialmente en el caso de asignaturas instrumentales como la Estadística.

El beneficio que reporta el uso de software libre no se limita al importante ahorro de cantidades prohibitivas de dinero destinadas al mantenimiento de la licencia de algunos programas, sino que también proporciona al alumnado un gran número de ventajas, entre las que podemos citar mayores posibilidades de trabajo autónomo con equipos propios dentro y fuera de las aulas y la adquisición de competencias en el uso de lenguajes de programación, muy valorados entre la comunidad científica y en determinados entornos laborales.

No obstante, el uso de este tipo de software para la docencia puede generar algún problema organizativo, especialmente en clases con grupos numerosos. En este trabajo abordamos la experiencia del uso del programa R en la asignatura de Análisis Estadístico de Datos en los grados de Economía y A.D.E. de la F.C.C.E.E. y Empresariales de Albacete mediante una adaptación de sistema del método de enseñanza mutua durante el primer semestre del curso 2011/2012. En este sentido, se recogen las principales limitaciones y problemas surgidos, así como las soluciones propuestas para el satisfactorio desarrollo de las clases.

Empleo de OCW-UPM en la docencia de Estadística aplicada para estudiantes de posgrado

Ayuga-Téllez, Esperanza y González-García, Concepción

Universidad Politécnica de Madrid

Resumen

En la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) se imparte la titulación de "Licenciado en Ciencias Ambientales" para estudiantes de posgrado. En el primer curso se imparte la asignatura de "Matemáticas y Estadística Aplicada". La asignatura es semestral de 7,5 créditos y de carácter fundamental.

Durante el curso 2007/2008 se desarrollaron una guía de aprendizaje y materiales para el seguimiento de la asignatura que se incorporaron al proyecto OCW-UPM (publicaciones de asignaturas de la UPM adheridas al Consorcio Open Course Ware). En OCW cada curso posee formato digital y contiene los materiales pedagógicos de la asignatura impartida, con una estructura y funcionamiento que facilitan la consulta de los diferentes apartados. Además, los cursos publicados permanecen a disposición gratuita a través de Internet, para que cualquier lector o usuario pueda utilizarlos. Se puede acceder a los materiales de la asignatura en el enlace: http://ocw.upm.es/estadistica-e-investigacion-operativa/matematicas-y-estadistica-aplicada .

Estos materiales se emplean desde el curso 2008/2009 para la consulta y autoaprendizaje de los estudiantes de posgrado. Algunos de ellos compaginan el trabajo por cuenta ajena con sus actividades de formación, por lo que estos materiales les resultan de mucha utilidad para superar la evaluación de la materia. La media del porcentaje de alumnos con calificaciones superiores al suspenso ha aumentado desde que dichos materiales están disponibles.

Palabras clave: Comparativa cursos, recursos docentes, Ciencias Ambientales Estadística aplicada, tasas eficiencia.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 623-624). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

OpenCourseWare
Universidad Politécnica de Madrid

Empleo de OCW-UPM en la docencia de Estadística aplicada para estudiantes de posgrado

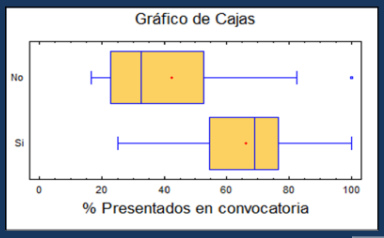
Ayuga-Téllez, Esperanza[1], González-García, Concepción[2]
1 esperanza.ayuga@upm.es , 2 concepcion.gonzalez@upm.es

En la licenciatura en Ciencias Ambientales (2º ciclo, plan 1996), se ha impartido la asignatura de *"Matemáticas y Estadística aplicada"*, troncal, de 7,5 créditos antiguos (1 crédito = 10 h presenciales).

Durante el curso 2007/2008 se desarrolló un curso de la asignatura que se incorporó al proyecto OCW-UPM (publicaciones de asignaturas de la UPM adheridas al Consorcio Open Course Ware).

http://ocw.upm.es/estadistica-e-investigacion-operativa/matematicas-y-estadistica-aplicada

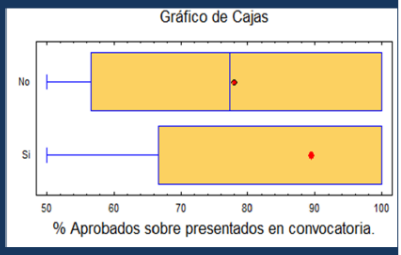
Datos: Se dispone del nº de matriculados, nº de presentados y de las calificaciones de las convocatorias de enero y septiembre desde el curso 2000/01 al 2012/13, en total 25 convocatorias.
Se han obtenido los indicadores de rendimiento académico Presentados/Matriculados y Aprobados/Presentados (ambos en %), comparando antes del curso 2008/09 y después de este curso, para ver si existen diferencias que se puedan atribuir a la existencia del material de apoyo en OCW. Para los análisis se ha tomado como Aprobados = nº aprobados + nº notables + nº sobresalientes.



Resultados: en el gráfico de cajas del % presentados se observa el aumento de presentados a las convocatorias a partir del recurso en OCW (Si).
El contraste de la t para comparación de las medias (varianzas iguales, p-v = 0,46), con una P = 0,026 permite rechazar la igualdad de medias de *% presentados* antes y después del material de apoyo en OCW, al 95 %.

En el gráfico de cajas del % Aprobados), se observa el aumento en media de presentados a las convocatorias a partir del recurso en OCW. El contraste de la *t* (varianzas iguales), P-Valor = 0,147 no permite rechazar la igualdad de medias de *% aprobados.*

Resumen Estadístico para %Aprobados		
Recurso OCW	**No**	**Si**
Frecuencia	14	11
Media	77,89	89,3945
Mediana	77,37	100
Desv. tip.	19,26	18,6669
Error est.	5,148	5,62829
Asim. tip.	-0,235	-1,9098
Curtosis tip.	-1,25	0,28978



Conclusiones: La incorporación del material de apoyo en OCW mejora la presencia de alumnos en convocatorias de exámenes de manera significativa, aumentando la media del % de aprobados sobre presentados.

Enseñanza de la Estadística en la formación de matronas de la Comunidad Valenciana

García-García Francisco

Instituto de Medicina Computacional, Centro de Investigación Príncipe Felipe. Nodo de Genómica Funcional del Instituto Nacional de Bioinformática.

Resumen

La matrona es una profesional de la Salud Pública reconocida en todos los sistemas sanitarios por su papel relevante en la maternidad y la atención integral durante el ciclo vital de la mujer en todas sus fases: salud reproductiva, climaterio y sexualidad.

En su formación se incorporan aspectos tecnológico-científicos y entre ellos destaca el aprendizaje de la Estadística que posibilita la toma de decisiones en proyectos de prevención y promoción de la salud.

En la Unidad Docente de Matronas de la Comunidad Valenciana se ha vertebrado la enseñanza de la Estadística mediante el desarrollo de un proyecto de investigación por parte de cada una de las matronas en formación. Los trabajos son tutorizados por diversos profesionales de la Epidemiología y Estadística.

El proceso de aprendizaje diseñado está formado por:

– Sesiones teórico-prácticas presenciales, donde se imparten los conceptos básicos en el uso de herramientas estadísticas.

1. Integración de las prácticas desarrolladas en centros asistenciales dentro de la fase de recogida de los datos del proyecto.

2. Tutorización grupal online.

3. Puesta en común de resultados obtenidas y su transferencia a la práctica clínica.

Palabras clave: Epidemiología, Salud Pública, enseñanza de la Estadística, matronas.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 625-626). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Enseñanza de la Estadística en la formación de matronas de la Comunidad Valenciana

Francisco García-García[1,2]

1. Unidad de Bioestadística, Instituto de Medicina Computacional, Centro de Investigación Príncipe Felipe. Valencia, España.
2 Nodo de Genómica Funcional. Instituto Nacional de Bioinformática.

Introducción

- La matrona es una profesional de la Salud Pública reconocida en todos los sistemas sanitarios por su papel relevante en la maternidad y la atención integral durante el ciclo vital de la mujer en todas sus fases: salud reproductiva, climaterio y sexualidad.
- En su formación se incorporan aspectos tecnológico-científicos y entre ellos destaca el aprendizaje de la Estadística que posibilita la toma de decisiones en proyectos de prevención y promoción de la salud.

Objetivos

Creación y desarrollo de un proceso formativo en Estadística, en la Unidad Docente de Matronas de la Comunidad Valenciana.

Material y métodos

- El proceso de aprendizaje se vertebró en el desarrollo de un proyecto de investigación por parte de las matronas.
- Los trabajos se realizan en grupo y se tutorizaron por diversos profesionales de la Epidemiología y Estadística.
- Se distinguieron varias fases:

A. Sesiones teórico-prácticas presenciales

En ellas se impartieron los conceptos básicos del análisis estadístico-epidemiológico, creación y gestión de bases de datos y uso de herramientas para el análisis estadístico de los datos. (Fig. 1 y 2).

B. Prácticas en centros asistenciales

Integración de las prácticas desarrolladas en unidades de atención primaria y especializada, donde habitualmente se realizó la recogida de los datos del proyecto.

C. Tutorización online

- Elaboración del protocolo del proyecto de investigación.
- Determinación del tamaño muestral.
- Evaluación del diseño de la base de datos.

D. Tutorización grupal presencial

- Elección de estrategia de análisis estadístico.
- Orientación sobre la elaboración del informe de resultados.

E. Comunicación de resultados

- Elaboración del trabajo final del periodo de formación.
- Exposición de resultados.



Figura 1. Wiki de la actividad formativa.



Figura 2. Herramientas de análisis estadístico

Conclusiones

En el colectivo de las matronas, los procesos formativos de la Estadística mejoraron:

- Su capacidad de diseño de estudios en Salud Pública.
- Toma de decisiones en proyectos de prevención y promoción de la salud.
- Promoción de transferencia de resultados obtenidos a la práctica clínica

Referencias

https://sites.google.com/site/2012matronas/ Wiki de trabajo de la promoción XII de matronas

Enseñanza no presencial de la estadística a través del uso de herramientas web

Tarazona Campos, Sonia[1]

[1]sotacam@eio.upv.es, Universitat Politècnica de València (UPV)

Resumen

El aprendizaje de la estadística requiere no sólo de la comprensión de conceptos teóricos, sino también de su aplicación a casos prácticos y del manejo de software para el análisis de datos. Es por ello que, en general, la enseñanza presencial de esta disciplina suele favorecer el aprendizaje del alumno.

Este estudio describe la metodología y los resultados obtenidos en el primer año de funcionamiento de una asignatura de estadística *on-line*: Métodos Estadísticos, que abarca Estadística Descriptiva, Distribuciones de Probabilidad, Inferencia Básica, ANOVA y Modelos de Regresión. Esta asignatura está incluida en el curso específico de adaptación al grado en Ingeniería Agroalimentaria y del Medio Rural de la UPV para titulados en Ingeniería Técnica Agrícola.

Se utilizó la plataforma web de la UPV (Poliformat) para poner el material de la asignatura a disposición de los alumnos, para realizar exámenes *on-line*, para depositar los informes de los problemas resueltos mediante el software estadístico *Statgraphics*, o bien para las consultas de los alumnos.

El uso de estas herramientas junto con el material proporcionado y un control continuado del progreso del alumno facilitó la obtención de unos resultados excepcionales en la evaluación final, a pesar de tratarse de alumnos que, en su mayoría, no estaban familiarizados con el uso de Internet, compaginaban los estudios con su actividad laboral y carecían de hábitos de estudio al haber finalizado sus estudios más de cinco años antes.

Palabras clave: Estadística, Enseñanza no presencial, Herramientas web.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 627-628). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Enseñanza no presencial de la estadística a través del uso de herramientas web

Sonia Tarazona Campos

Dep. Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad, Universitat Politècnica de València (UPV)

Introducción

Este trabajo describe la metodología y resultados obtenidos en la asignatura "Métodos Estadísticos", incluida en el programa del curso de adaptación al grado en Ingeniería Agroalimentaria y del Medio Rural de la UPV para los titulados en Ingeniería Técnica Agrícola, e impartida por primera vez durante el curso 2012-13. La asignatura es semipresencial y la docencia se imparte principalmente *on-line*, a través de la plataforma web de formación de la UPV (PoliformaT, Figura 2).

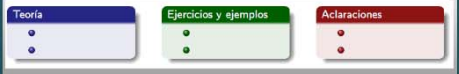
Unidades didácticas

1. Introducción a la estadística.
2. Estadística descriptiva unidimensional y bidimensional.
3. Distribución normal y distribuciones en el muestreo.
4. Inferencia estadística básica en poblaciones normales y sobre proporciones.
5. Análisis de la varianza multifactorial.
6. Modelos de regresión lineal múltiple.

Perfil del alumnado

- 28 alumnos matriculados. Edad media > 35 años.
- Todos finalizaron sus estudios de ingeniería técnica más de 5 años antes.
- Muchos de ellos, poco familiarizados con el uso de Internet.
- Más del 50% de los alumnos trabajaban o tenían cargas familiares.

Figura 1. Formato de ficha didáctica.



Recursos docentes

- PoliformaT: Programación docente: semanas a dedicar a cada tema, fechas de disponibilidad de las pruebas on-line, fechas límite de entrega de trabajos prácticos, etc.
- PoliformaT: Fichas con el desarrollo de los conceptos teóricos a estudiar y/o las referencias bibliográficas donde consultarlos, problemas resueltos, ejemplos de análisis mediante Statgraphics, bibliografía complementaria,... (ver Figura 1).
- PoliformaT: Formulario y tablas de probabilidad.
- Publicaciones UPV: Libro de texto (Romero y Zúnica, 2008, "Métodos Estadísticos en Ingeniería, Ed. UPV) y libro de problemas (Barceló y Tarazona, 2010, "Ejercicios resueltos de Diseño de Experimentos").
- PoliformaT : Correo electrónico, chat, foros, espacios para compartir documentos, pruebas on-line,...
- Clases presenciales: 0.5h al inicio del curso (presentación) y 4.5h durante la semana anterior al examen final (enero).

Evaluación

Pruebas on-line de cada tema	40%
Trabajo práctico Statgraphics	30%
Examen final presencial	30%

- Nota mínima en cada parte: 4.
- Pruebas on-line (PoliformaT): 4-5 preguntas tipo test o de respuesta breve generadas aleatoriamente a partir de una batería de preguntas desarrollada por el profesor. A realizar al final de cada tema, disponibles durante 10 días y con tiempo limitado de resolución de 1h. Se corrigen de forma automática y el alumno recibe su resultado de inmediato.
- Trabajo práctico: Problemas de cada tema, a resolver mediante software estadístico (Statgraphics). El grupo (2 a 4 alumnos) elabora un informe con el análisis y conclusiones, que deposita en PoliformaT. Tras la 1ª entrega, se evalúa el trabajo y se permite una 2ª entrega en la que se pueden corregir los errores y mejorar la puntuación.
- Examen presencial: 2 convocatorias. 4-5 ejercicios a resolver mediante el uso de calculadora y formulario en 2h.

Resultados

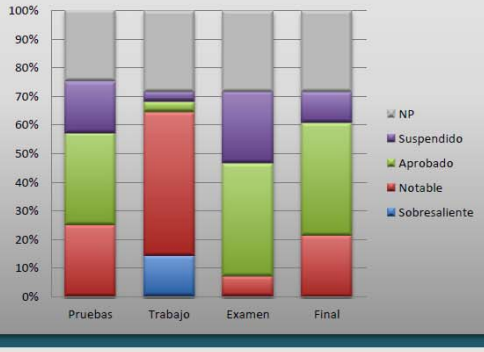
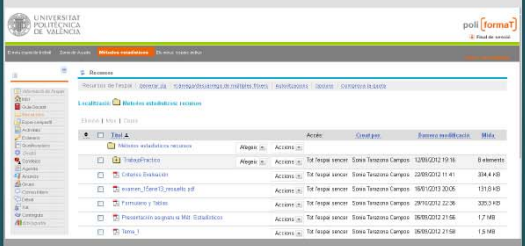


Figura 2. PoliformaT (herramienta web UPV).



Conclusiones

- La enseñanza no presencial de la estadística es viable mediante el uso de herramientas web apropiadas junto a un buen material de apoyo y, especialmente, un seguimiento continuo del alumno para la evaluación de sus progresos y la resolución de dudas.
- Las pruebas on-line y trabajos prácticos resultaron muy útiles para que el alumno llevara la asignatura al día y conociera su progreso.
- El 99% de las consultas y dudas de los alumnos se resolvieron vía correo electrónico, sin necesidad de tutorías presenciales.
- De los 20 alumnos que se sometieron al proceso de evaluación, un 85% han aprobado la asignatura. Teniendo en cuenta el perfil de alumnado, este resultado se puede considerar un éxito. Los alumnos mostraron gran satisfacción con el aprendizaje conseguido.

Estadística en una Tablet: APPES

Ruiz Castro, J.E., Aguilera, A.M., Escabias, M., García Montero, J., Raya Miranda, R.

Universidad de Granada

Resumen

El avance de la tecnología en el campo de la información y comunicación en los últimos años ha permitido el cambio metodológico del aprendizaje. A nivel de PC son muchas las herramientas desarrolladas donde poder ofrecer al alumnado una posibilidad de interrelación alumno-materia-profesor, como son Moodle, wiki,… Por otro lado, son muchos los programas informáticos realizados para facilitar la transmisión de conocimientos en distintos campos de aprendizaje. Las nuevas tecnologías se hacen presentes también en el campo de la enseñanza de la Estadística. Se ha desarrollado software específico para el auto-aprendizaje, se han creado soportes específicos para el estudio de la Probabilidad y Estadística, y se ha trabajado en la virtualización de la Estadística. Hoy día, nacen nuevas tecnologías que deben tenerse en cuenta en la enseñanza. En los últimos años se ha visto como las Tablets y el acceso a Internet móvil se convierte en una nueva corriente en la sociedad. En este trabajo se presenta una aplicación para Tablet PC que permite la enseñanza de la Estadística desde un punto de vista teórico y práctico: APPES. Esta aplicación desarrolla un nuevo software para el autoaprendizaje de la Estadística que podrá ser de uso docente. Las propias características de una Tablet, así como la estructura computacional de la aplicación desarrollada, permiten facilitar el aprendizaje de la Estadística a personas con necesidades educativas especiales.

Palabras clave: Estadística, Tablet, Necesidades Educativas Especiales, APPES

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 629-630). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Estadística en una Tablet: APPES

Juan Eloy Ruiz Castro, Ana M. Aguilera del Pino, Manuel Escabias Machuca, Javier García Montero, Rocío Raya Miranda
jeloy@ugr.es aaguiler@ugr.es escabias@ugr.es javiergarciam75@hotmail.com rraya@ugr.es

Universidad de Granada

Objetivo: El principal objetivo de este trabajo es presentar una nueva metodología para el aprendizaje de la Estadística mediante el desarrollo de aplicaciones para una tablet: APPES

1. Las nuevas tecnologías en educación: ¿problema o ayuda?

Las nuevas tecnologías permiten acceder a la información más fácilmente

↓

Una gran cantidad de información disponible puede ser un problema en el proceso de enseñanza-aprendizaje

↓

El esfuerzo del docente debe centrarse en la dirección del proceso de aprendizaje:

- ❑ Eligiendo la información apropiada y transmitiéndola
- ❑ Dando fuentes de conocimiento apropiadas
- ❑ Tutelando a los estudiantes
- ❑ Ayudando a lo estudiantes en la interpretación correcta y a ser críticos

2. El uso apropiado de las nuevas tecnologías da lugar al aprendizaje electrónico: *e-learning/e-teaching*

- Enseñanza basada en web (WBT)
- Enseñanza a través de plataformas educativas y software desarrollado (CBT)
- Enseñanza a través de internet (IBT)
- Enseñanza virtual y semi-virtual

Herramientas


Internet
Intranet/extranet


Audio o video


TV por satélite


CD-ROM. . .

3. El aprendizaje e-learning/e-teaching de la Estadística

En los años recientes ha habido un desarrollo de una amplia variedad de herramientas para la enseñanza de la Estadística:

- ➢ Desarrollo de libros electrónicos y webs específicas.
- ➢ Herramientas HTML multimedia.
- ➢ Soportes interactivos para el estudio de la Probabilidad y Estadística (CDPYE). *García-Ligero et al. (2009)*
- ➢ Emuladores de programas específicos estadísticos para su aprendizaje. *García-Leal et al. (2006)*
- ➢ SCORMS con contenidos teóricos, guías de auto-aprendizaje, viedo-tutoriales, tests de autoevaluación,... *Aguilera et al. (2010)*
- ➢ Campus virtuales universitarios online con un amplio número de cursos de Estadística: WebCT

ESTADÍSTICA EN UNA TABLET: APPES

- Implementación de APPs de EStadística para una tablet
- Incorporación de aspectos teóricos y prácticos
- Metodología de aprendizaje interactiva. *Ruiz-Castro et al. (2013)*
- Facilita el aprendizaje a personas con necesidades educativas especiales (NEE)



REFERENCIAS

- García-Ligero, M.J., Hermoso, A., Maldonado, J.A., Román, P. and Torres, F. (2009). New trends for teaching Probability using CDPYE. Investigación Operacional, 30(2), 173-185.
- García Leal, J.; Hidalgo Ruiz, E.; Lara Porras, A; Quesada Rubio, J.M.; Ramos Ábalos, E.; Raya Miranda, R.; Ruiz Castro, J.E.; Sánchez Borrego, I.R. y Tarifa Blanco, J. (2006) New methodology for teaching statistics in Biology: an interactive guide to learning with SPSS. 7th International Conference on Teaching Statistics Proceedings, p. 117.
- Aguilera, A.M., Aguilera-Morillo, C. y Valderrama, M.J. (2010). New experiences in a virtual environment: e-learning in the statistics of the future. International Conference on Education and New Learning Technologies (EDULEARN10) Proceedings CD, Ed. IATED, 2010, 1795-1801.
- Ruiz-Castro, J.E., Aguilera, A.M., Escabias, M., García-Montero, J. Raya-Miranda, R. (2013) Tablets in the learning of descriptive statistics: APPES. INTED 2013 Proceedings CD, 7 pp.

Evaluación de Competencias en la asignatura Cálculo de Probabilidades I

Rosales Moreno, María Jesús, Huete Morales, María Dolores, Quesada Rubio, José Manuel, Del Moral Ávila, María José, Navarrete Álvarez, Esteban.

Universidad de Granada

Resumen

El marco universitario actual exige el diseño de estrategias que conduzcan a la adecuada adquisición de las competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales asignadas a las asignaturas y a la objetiva evaluación del proceso. Este trabajo presenta una propuesta para la evaluación de la adquisición de las competencias generales y específicas asignadas a la asignatura "*Cálculo de Probabilidades I*" ubicada en el Grado en Estadística impartido en la Universidad de Granada.

La evaluación orientada al aprendizaje ha requerido seleccionar modalidades de enseñanza, escenarios y tareas en virtud de las competencias a enseñar. Evaluar su adquisición ha implicado valorar de forma integrada sus componentes y ha obligado a la generación de diferentes estrategias, técnicas e instrumentos, algunos de ellos novedosos respecto a la evaluación tradicional. Se ha diseñado un proceso de evaluación enmarcado en el mismo proceso formativo del alumnado que integra además a los alumnos como nuevos agentes evaluadores por medio de la *evaluación entre iguales*, *coevaluación* y *autoevaluación*.

El sistema de calificación diseñado asigna notas a las evidencias de desempeño y conocimientos asociadas a las competencias, y establece un sistema ponderado de calificación final coherente con las pautas del título de Grado en Estadística.

Para favorecer futuras acciones de mejora, se han diseñado las pautas y seleccionado instrumentos que permiten la evaluación de nuestra propuesta formativa-evaluativa.

Palabras clave: Evaluación de competencias, Cálculo de probabilidades.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 631-632). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

EVALUACIÓN DE COMPETENCIAS EN LA ASIGNATURA CÁLCULO DE PROBABILIDADES I

Rosales Moreno, M, J., Huete Morales, M.D., Quesada Rubio, J.M., Del Moral Ávila, M.J., Navarrete Álvarez, E.

Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Granada

El marco universitario actual exige el diseño de estrategias que conduzcan a la adecuada adquisición de las competencias asignadas a las asignaturas y a la objetiva evaluación del proceso. Este trabajo presenta una propuesta para la evaluación de la adquisición de las competencias generales y específicas asignadas a la asignatura *"Cálculo de Probabilidades I"* ubicada en el Grado en Estadística impartido en la Universidad de Granada.

OBJETIVOS: Diseñar un sistema evaluativo competencial integrado con el sistema de enseñanza-aprendizaje, *(evaluación orientada al aprendizaje)*, que incorpore nuevas técnicas, instrumentos y agentes y que sea coherente con las pautas de evaluación del título de Grado en Estadística.



1. Desagregación de Competencias

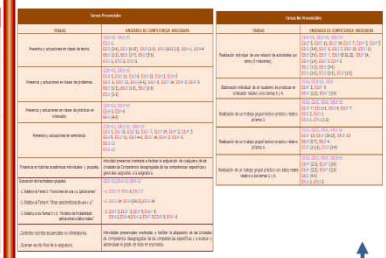
Se ha construido ocho tablas que para cada competencia general o específica presenta conjuntamente la desagregación de ésta en unidades de competencia, contenidos del Programa asociados a dichas unidades y un código que facilitará la identificación de las tareas que se van a proponer con la adquisición de los conocimientos, habilidades y actitudes asociadas a cada unidad de competencia.

Se presenta parte de una de ellas:



2. Modelo Enseñanza-Aprendizaje

Analizadas las competencias, contexto, tipo de alumnos y medios, se han seleccionado las **modalidades de enseñanza**, **escenarios** y el **plan de trabajo** (tareas presenciales y no presenciales). Se han construido tablas en las que a cada una de las tareas propuestas se les ha adjuntado los códigos que reflejan los conocimientos, habilidades y actitudes asociadas a las unidades de competencia a las que éstas se orientan:

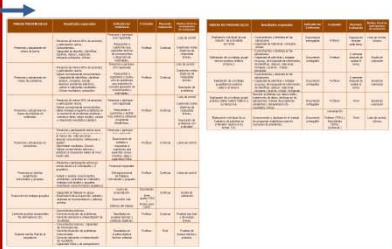


3A. Evaluación de Competencias

Establecidos los **resultados esperados** de las tareas, los **criterios de valoración** se refieren a su realización, calidad y destreza en la ejecución. Las **técnicas de evaluación** seleccionadas han sido: de observación (lista de control, escalas de valoración, rúbricas), de ejecución, de papel y lápiz y orales. Se propone a los estudiantes como nuevos **evaluadores** por medio de la *evaluación entre iguales* (exposiciones de trabajos grupales), *autoevaluación* (valoración de la adquisición de competencias) y *coevaluación* (cuaderno final de prácticas en ordenador).

Ha sido necesario construir un total de 12 **instrumentos** con la herramienta EvalComix, (http://venus.uca.es/evalcomix/eval/index.php), que permite el diseño y creación de listas de control, escalas de valoración, rúbricas,...

Se han elaborado tablas en las que se presentan de forma integrada toda la información:



4. Pautas de Evaluación



3B. Sistema de Calificación

Fieles a las pautas de evaluación en el título de Grado, se ha elaborado un sistema de calificación ponderado que permitirá la calificación final del alumno.



Formación permanente del profesorado de matemática en la enseñanza de la estadística Caso: l.b. pbro. Manuel Arocha

Santamaría L, María B y Sanoja de Ramírez, Julia
UPEL

Resumen

La finalidad de este estudio es mediar en el proceso de enseñanza de la Estadística con una participación activa y reflexiva por parte de los profesores de matemática. Para propiciar una formación del profesorado donde sea protagonista de su capacitación y además lo motive y le provea de herramientas conceptuales y metodológicas para la enseñanza de la Estadística, de forma tal que sea crítico y reflexivo de su praxis. Se apoya en el Paradigma Sociocrítico, con una metodología de investigación-acción Colaborativa que incorpora a los ocho docentes de Matemática y treinta estudiantes de segundo año del Liceo Bolivariano Presbítero Manuel Arocha, Tinaquillo, Venezuela. Siguiendo las fases de investigación descritas en el modelo de Lewin (1990), una espiral de ciclos, compuesta de cuatro fases: Observación, Planificación, Acción y Reflexión. Se utilizaron como técnicas de recolección de la información: Entrevista, Observación y Encuesta. Se emplearon técnicas de análisis cuantitativo y cualitativo. Entre los resultados se tienen que tanto los docentes como los estudiantes poseen una actitud positiva hacia la estadística y mediante el plan de acción se pudo evidenciar la alta motivación por aprender estadística para la vida por parte de los estudiantes. El plan de acción permitió a los docentes reflexionar y criticar su práctica educativa; y ayudó al desenvolvimiento de éstos, en desarrollar competencias, actualizarse y fortalecer sus conocimientos para un mejor proceso educativo.

Palabras clave: Formación Permanente, Enseñanza de la Estadística, Profesorado de Matemática, Investigación-acción Colaborativa.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 633-634). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

República Bolivariana de Venezuela
Universidad Pedagógica Experimental Libertador , Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara"
Departamento de Matemática
Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática usando Nuevas Tecnologías
Línea: Educación Estadística

FORMACIÓN PERMANENTE DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA. CASO: L.B. PBRO. MANUEL AROCHA

Msc. Santamaría L María B, Dra. Sanoja de Ramírez Julia
[1]maryfer@gmail.com, UPEL Maracay, [2]jusanoja@gmail.com, UPEL Maracay

INTRODUCCIÓN

FORMACIÓN PERMANENTE DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA

¿Por qué? Por ser

- La estadística un tema olvidado
- Uno de los objetivos fundamentales del currículo venezolano (C.N.B.)

Al respecto

León (1998), Batanero (2002) y Santamaría y Sanoja (2008), exprean que los docentes:
- No abordan adecuadamente los contenidos
- Carecen de estrategias metodológicas motivadoras
- Obvian los tópicos de Estadística por estar al final del libro texto
- Afirman desconocer los tópicos de Estadística

Por lo que

Pareciera necesario fomentar un plan de formación metodológico permanente para la enseñanza de la Estadística, siendo el docente protagonista de su preparación

Estos nos llevan a plantearnos

¿Una acción mediadora logrará la transformación del proceso de enseñanza de la Estadística con una participación activa y reflexiva por parte de los docentes de matemática, en el Liceo Bolivariano Presbitero Manuel Arocha

Y por ende a plantear como objetivo

: Intervenir en el proceso de enseñanza de la Estadística con la participación activa y reflexiva de docentes y alumnos del Liceo Bolivariano Presbítero Manuel Arocha.

BASES TEÓRICAS

- Formacion Permanente del Profesorado (Serres,2007)
- Método por Proyecto (Mora,2004)

METÓDICA

- Paradigma Sociocrítico (Lewin, 1990)
- Enfoque analítico-reflexivo
- Metodología investigación-acción-colaborativa (IAC) (Lewin, 1990)
- Población: 8 docentes y 30 Estudiantes

RESULTADOS

Momento I Iniciativa y aceptación

Componentes	Mínimo	Máximo	Media	Desv. Std.
Afectivo	24	30	26,88	2,17
Cognitivo	24	28	26,25	1,39
Valor	35	45	40,25	3,50
Dificultad	15	24	19,37	3,25
Total	103	125	112,75	7,32

Momento II Crecimiento Profesional

MATRIZ FODA

FORTALEZAS	OPORTUNIDADES
•Estabilidad en el cargo •Impartir la asignatura de Matemática •El CNB exige como prioridad la enseñanza de los contenidos de Estadística dentro del área de Matemática	•Crecimiento profesional y personal •Querer actualizar sus conocimientos •Motivados en participar en su formación •Formar parte de la reflexión y crítica de su propia praxis •Trabajar en equipo
DEBILIDADES	**AMENZAS**
•Poca demanda de cursos y Talleres en la zona •Enseñanza tradicional •Prioridad a contenidos algebraicos •Utilizan sólo los libros de texto	•El factor tiempo fuera de la institución •La distribución de horas por secciones en el liceo •Poco espacio para trabajar dentro de la institución

Momento III Accionar en el aula

ESTUDIANTES	DOCENTES
•Presentan deficiencias en el domino de los conceptos básicos •No disponen de un conocimientos instrumental de la Estadística para su aplicación en la cotidianidad •Actitud positiva hacia la Estadística	•Decidieron trabajar con el método por Proyecto •Prevalece una actitud positiva hacia la Estadística.

•REFLEXIÓN DEL ACCIONAR EN EL AULA

•Docentes comprenden que enseñar Estadística en la cotidianidad hace que los estudiantes esten motivados a apropiarse de los conceptos y perciban y comprendan su realidad..
•La metodología por proyecto permitió que los estudiantes le vieran la utilidad de la Estadística como herramienta para la solución de situaciones problemas.
•Los docentes se sintieron muy motivados a seguir trabajando de esta manera al ver los resultados en sus estudiantes.

CONCLUSIONES

- Docentes sienten necesidad de aprender Estadística para su desenvolvimiento en su praxis y para la vida
- Actitud Positiva y sentimiento favorable hacia la Estadística por parte de los docentes.
- Los docentes tienen necesidad de una formación en Estadística y su didáctica.
- Esta metodología de IAC, permitió a los docentes observar y cambiar su praxis educativa en cuanto a la enseñanza de la Estadística

REFERENCIAS

Batanero, C. (2002). *Presente y Futuro de la Educación Estadística.* [Documento en línea]. Disponible: http//www.ugr.es/local/batanero. [Consulta: 2008, octubre 07]
León, N. (1998). Explorando las nociones básicas de probabilidad a nivel superior. *Revista Paradigma.2*, 6-10
Lewin, K. (1990). La Investigación-acción y los problemas de las minorías. En M. C. Salazar (Comp.), *La Investigación-Acción Participativa. Inicios y Desarrollos.* (pp. 15-25). Madrid, España: Popular.
Mora, D (2004). *Tópicos en Educación Matemática.* GIDEM. Caracas, Venezuela.
Santamaría, M. y Sanoja, J. (2008). *Explorando las actitudes hacia la estadística en los profesores de Matemática del Liceo Bolivariano Presbítero Manuel Arocha.* UPEL Maracay
Serres, Y. (2007), Formación de Docentes de Matemática para trabajar por proyectos. *Revista Enseñanza de la Matemática.*17 (1), 71-85.

La aventura del azar: aprender estadística experimentando

Torrado Robles, Nuria y Huertas Cejudo, Edmundo José

Universidad de Coimbra

Resumen

En este trabajo se propone un marco didáctico en el cual los modelos de enseñanza de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria se ven reflejados a partir de un conjunto de actividades lúdicas que acercan al alumnado al estudio matemático de los fenómenos aleatorios relacionados con el azar desde un entorno más experimental y divertido. La propuesta de este trabajo se fundamenta teóricamente en los conceptos básicos de combinatoria, estadística y probabilidad utilizando en ocasiones el ordenador como herramienta de trabajo para facilitar la asignación de probabilidades a sucesos aleatorios, especialmente cuando hay que recurrir a técnicas combinatorias para efectuar recuentos. En definitiva, intentamos fomentar el interés por los fenómenos aleatorios en general, presentes en nuestra vida cotidiana, a través del juego, lo que anima a los estudiantes a poner más empeño en el estudio de materias a priori no interesantes o con excesiva dificultad para ellos.

Palabras clave: experimentos, actividades lúdicas, estadística, probabilidad, azar.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 635-636). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

La aventura del azar: aprender estadística experimentando

[1]Nuria Torrado Robles y [2]Edmundo José Huertas Cejudo

[1] nuria.torrado@gmail.com , [2] ehuertasce@gmail.com, Universidad de Coimbra

1. RESUMEN

En este trabajo se propone un marco didáctico en el cual los modelos de enseñanza de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria se ven reflejados a partir de un conjunto de actividades lúdicas que acercan al alumnado al estudio matemático de los fenómenos aleatorios relacionados con el azar desde un entorno más experimental y divertido. La propuesta de este trabajo se fundamenta teóricamente en los conceptos básicos de combinatoria, estadística y probabilidad utilizando en ocasiones el ordenador como herramienta de trabajo para facilitar la asignación de probabilidades a sucesos aleatorios, especialmente cuando hay que recurrir a técnicas combinatorias para efectuar recuentos. En definitiva, intentamos fomentar el interés por los fenómenos aleatorios en general, presentes en nuestra vida cotidiana, a través del juego, lo que anima a los estudiantes a poner más empeño en el estudio de materias a priori no interesantes o con excesiva dificultad para ellos.

2. EXPERIMENTANDO CON COCHES Y CABRAS

En la actualidad, la Estadística y la Probabilidad, son dos áreas de las Matemáticas de gran importancia, principalmente por su presencia en diversos y múltiples ámbitos de nuestra vida cotidiana. Además, se encuentran presentes en muchos otros campos científicos, tales como, Economía, Sociología, Ciencias de la Salud, Ingeniería, Educación, etc. Por todo ello, es fundamental proponer actividades que puedan resultar motivadoras para el alumnado, de forma que despertemos el interés y la predisposición al aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad. En palabras de Serrano, Cañizares y Batanero *"La enseñanza de la probabilidad debe tener como base la experimentación con dispositivos como dados, ruletas, monedas, etc., y la introducción gradual de los conceptos y notación probabilística para explicar matemáticamente las regularidades observadas en los datos recogidos"*.

En esta sección, a modo de ejemplo, vamos a exponer una actividad para desarrollar en el aula con la finalidad de que el alumnado comprenda un poco mejor el concepto de probabilidad condicionada. Por nuestra experiencia, podemos afirmar que, en general, este concepto no es asimilado correctamente por los estudiantes.

2.1 PLANTEAMIENTO DEL JUEGO

Una manera divertida y amena para que los alumnos puedan entender con mayor facilidad el significado de la probabilidad condicionada es el **Problema del Monty Hall**. Dicho problema está inspirado por el concurso televisivo estadounidense *Let's Make a Deal* (Hagamos un trato) y su nombre proviene del propio presentador: Monty Hall.



El concursante debe elegir una puerta de entre tres (todas cerradas) y el premio consiste en llevarse lo que se encuentre detrás de la puerta elegida. Se sabe con certeza que tras una de ellas se oculta un coche, y tras las otras dos hay unas cabras. Una vez que el concursante haya elegido una puerta y le comunique al público y al presentador su elección, Monty abrirá una de las otras puertas y mostrará que detrás hay una cabra. En este momento se le da la opción al concursante, si lo desea, de cambiar de puerta.

¿Debe el concursante mantener su elección inicial o cambiar de puerta? ¿Hay alguna diferencia?

2.2 EL JUEGO EN EL AULA

La presentación en el aula interesa que sea llamativa y algo colorista, con unas pinceladas de espectáculo, donde el profesor haga de presentador televisivo.

El material necesario para desarrollar el concurso en el aula serían tres cajas de diferente color, un coche y dos cabras de juguete que quepan dentro de las cajas.

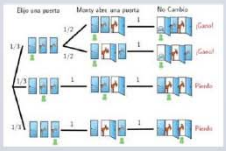
Para el desarrollo del juego pediríamos a un número significativo de alumnos que, de forma secuencial, fueran participando en el juego como concursantes. Tras cada participación anotaríamos el resultado del juego en la siguiente tabla de frecuencias:

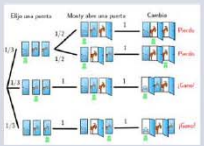
	GANÓ	PERDIÓ
CAMBIANDO		
SIN CAMBIAR		

Finalmente calcularíamos las probabilidades para cada uno de los posibles casos.

2.3 RESOLUCIÓN Y CONCLUSIONES

Por lo general, se tiende a pensar que la probabilidad de ganar el coche es igual a ½, ya que al final del juego quedan dos puertas cerradas. Pero este razonamiento es erróneo. En realidad, la probabilidad de ganar o perder el juego depende de si el concursante cambió o no de puerta. Las probabilidades resultantes pueden explicarse mediante los siguientes gráficos, diferenciando entre las dos vertientes del juego.





REFERENCIAS

[1] Cañizares, M.J. y Batanero, C. *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades*. Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", ISSN 1131-9321, Nº 40, 1998, pags. 153-156.

[2] Garzon, A.L. y Garcia Forero, M. *Diseño de una secuencia de actividades para la enseñanza de la probabilidad simple en estudiantes de sexto grado*. 10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, 2009.

[3] Pajares Garcia, A. y Tomeo Perucha, V. *Didáctica de la Estadistica y la Probabilidad en secundaria: experimentos motivadores*. Cuaderno de trabajo nº 03/2009. UCM.

[4] Serrano, L., Batanero, C. y Ortiz, J. *Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato*. Suma, 22, 43-50, 1996.

O Ensinar e o Aprender Estatística em uma Ação Pedagógica Fundamentada na Teoria da Biologia do Conhecer

Suzi Samá Pinto, Mauren Moreira Porciúncula da Silva y Débora Pereira Laurino

Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Resumo

A presente pesquisa tem como objetivo analisar o ensinar e o aprender estatística em uma ação pedagógica fundamentada na Teoria da Biologia do Conhecer de Maturana e Varela. Nesta proposta, o papel do professor é de propiciar um espaço de experimentação e diálogo, no qual o estudante possa ir construindo o seu atuar, realizando-se como um ser biológico e social. Esta pesquisa foi realizada em duas disciplinas de estatística de cursos de graduação em uma universidade do Extremo Sul do Brasil. As disciplinas foram organizadas com a finalidade de minimizar a ênfase em aspectos técnicos e operacionais, de forma a incitar nos estudantes uma atitude ativa e co-responsável no seu processo de aprendizagem. Ao longo da disciplina, foram aplicados instrumentos de avaliação com a finalidade de coletar opiniões e sentimentos dos estudantes a respeito da disciplina e do trabalho educativo proposto. Estes instrumentos foram constituídos por questões fechadas e abertas analisadas pela abordagem multimétodos que congrega métodos quantitativos e qualitativos. No decorrer da análise foi possível perceber o quanto a experiência de investigar a própria práxis auxiliou na condução das atividades em sala de aula, valorizando a participação dos estudantes na construção do ambiente educacional e da compreensão dos conceitos estatísticos trabalhados. Esperamos que as reflexões tecidas ao longo deste trabalho possam estimular novas discussões sobre o aprender e o ensinar estatística.

Palavras-chave: Ensino de Estatística; Ação Pedagógica Relacional; Ensino Superior.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 637-638). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria



O Ensinar e o Aprender Estatística em uma Ação Pedagógica Fundamentada na Teoria da Biologia do Conhecer

Suzi Samá Pinto, Mauren Moreira Porciúncula da Silva, Débora Pereira Laurino

Este resumo tem como objetivo analisar **o ensinar e o aprender estatística** em uma ação pedagógica fundamentada na Teoria da Biologia do Conhecer de Maturana e Varela.

Esta pesquisa foi realizada em duas disciplinas de estatística de cursos de graduação da Universidade Federal do Rio Grande – FURG. As disciplinas foram organizadas com a finalidade de minimizar a ênfase em aspectos técnicos e operacionais, de forma a **incitar nos estudantes uma atitude ativa e co-responsável no seu processo de aprendizagem**.

No decorrer da análise foi possível perceber o quanto a experiência de investigar a própria práxis auxiliou na condução das atividades em sala de aula, **valorizando a participação dos estudantes na construção do ambiente educacional** e da compreensão dos conceitos estatísticos trabalhados.

Nesta proposta, o papel do professor é de propiciar um **espaço de experimentação e diálogo**, no qual o estudante possa ir construindo o seu atuar, realizando-se como um ser biológico e social.

Ao longo das disciplinas, foram aplicados instrumentos de avaliação com a finalidade de coletar **opiniões e sentimentos dos estudantes a respeito da disciplina** e do trabalho educativo proposto. Estes instrumentos foram constituídos por questões fechadas e abertas analisadas pela abordagem multimétodos que congrega métodos quantitativos e qualitativos.

Esperamos que as **reflexões tecidas** ao longo deste trabalho possam **estimular novas discussões** sobre o aprender e o ensinar estatística.

suzisama@furg.br maurenmoreira@furg.br deboralaurino@furg.br
Universidade Federal do Rio Grande - Brasil

O ensino da Inferência Estatística em cursos de graduação: um estudo de caso

Henning, Elisa[1]. Konrath, Andréa Cristina[2] y Ramos, Marcelo Sávio[1]

[1]UDESC
[2]UFSC

Resumo

A Estatística assume um papel importante no progresso científico e tecnológico, assim como, na formação do cidadão. Como disciplina, a Estatística está presente em praticamente todos os cursos de graduação no Brasil, mas muitos acadêmicos apresentam dificuldades para compreender os temas trabalhados. Por exemplo, conceitos de inferência estatística, como estimação e testes de hipóteses, podem não ser bem assimilados quando trabalhados apenas com aulas expositivas. Assim, a utilização de atividades práticas pode ser uma alternativa no processo de ensino-aprendizagem em cursos introdutórios de Estatística no ensino superior. O presente trabalho relata a experiência de uma atividade prática realizada com turmas de cursos de computação. O objetivo principal era que os alunos, a partir de um trabalho prático, compreendessem o processo de amostragem, estimação de parâmetros e testes de hipóteses. Os trabalhos foram realizados por grupos de 2 a 3 alunos, abrangendo situações correntes do dia-a-dia dos alunos ou temas de interesse destes. Toda a parte computacional foi feita com auxílio do ambiente R, incentivando-se os alunos a construção de rotinas. Ao final, os trabalhos foram apresentados e discutidos em aula, incluindo suas limitações. Concluiu-se que experiências como estas são positivas, pois permitem trabalhar de forma efetiva o conteúdo, incentivando o pensamento crítico a partir da discussão.

Palavras chave: Educação Estatística. Inferência Estatística. Ensino superior.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 639-640). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

O ensino da Inferência Estatística em cursos de graduação: um estudo de caso

Elisa Henning (UDESC) elisa.henning@udesc.br
Andréa Cristina Konrath (UFSC) andreack@gmail.com
Marcelo Sávio Ramos (UDESC) marcelo.savio.ramos@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

A Estatística assume um papel importante no progresso científico e tecnológico, assim como, na formação do cidadão. Como disciplina, a Estatística está presente em praticamente todos os cursos de graduação no Brasil, mas muitos acadêmicos apresentam dificuldades para compreender os temas trabalhados. Por exemplo, conceitos de inferência estatística, como estimação e testes de hipóteses, podem não ser bem assimilados quando trabalhados apenas com aulas expositivas.

A utilização de atividades práticas pode ser uma alternativa no processo de ensino-aprendizagem em cursos introdutórios de Estatística no ensino superior. O presente trabalho relata a experiência de uma atividade prática realizada com turmas de cursos da área de computação. O objetivo principal era que os alunos, a partir de um trabalho prático, compreendessem o processo de amostragem, estimação de parâmetros e testes de hipóteses.

2. METODOLOGIA

Os trabalhos foram realizados por grupos de 2 a 3 alunos, abrangendo situações correntes do dia-a-dia dos alunos ou temas de interesse destes. As atividades abrangiam:

- ❑trabalhar os conceitos de população e amostra;
- ❑efetuar de forma planejada a coleta de dados;
- ❑realizar a análise exploratória de dados, identificando gráficos e medidas necessárias à resolução do problema;
- ❑calcular e interpretar um intervalo de confiança para a média;
- ❑ou efetuar um teste de hipóteses.

Toda a parte computacional foi feita com auxílio do ambiente R (R Core Team, 2012), incentivando-se os alunos a elaboração de rotinas.

Agradecemos aos alunos das disciplinas de Probabilidade e Estatística do Curso de Tecnologia e Análise em Desenvolvimento de Sistemas (CCT/UDESC) do ano de 2012 pela colaboração.

3. ALGUNS TEMAS ESCOLHIDOS PELOS ALUNOS

Estimação de média

- ❑análise de atrasos da linha de ônibus que leva ao Campus;
- ❑quantidade média de confeitos coloridos em um tubinho de 30g;
- ❑quantidade média de chocolates num pacote;
- ❑peso médio de um tipo de pão;
- ❑quantos movimentos são necessários para montar o cubo de Rubik.





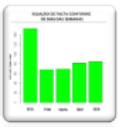
Teste qui quadrado

- ❑verificar se a proporção de confeitos coloridos, por cor, em pacotes não difere;
- ❑verificar se há alguma associação entre o número de faltas e o dia da semana em um curso profissionalizante.

Ao final, os trabalhos foram apresentados e discutidos em aula, incluindo as limitações destes, como por exemplo, a questão da aleatoriedade.

Estes conteúdos foram cobrados em avaliação escrita. A maioria dos alunos obteve êxito nas questões relativas a estes assuntos.







4. CONCLUSÃO

O objetivo principal desta atividade foi despertar os alunos para uma análise crítica deste importante tema, levando-os a discutir e compreender, dentro de suas limitações, este processo. Os resultados foram positivos, principalmente do ponto de vista qualitativo.

Concluiu-se que experiências como estas são positivas, pois permitem além de trabalhar de forma efetiva o conteúdo, incentivando o pensamento crítico a partir da discussão.

Olimpíada de Estadística: un recurso para fomentar el desarrollo de la cultura estadística

Rodríguez, María Inés y Herrera, María Inés

Universidad Nacional de Río Cuarto.

Resumen

Con la intención de estimular la participación de estudiantes de nuestro país, en las Primeras Competencias Internacionales de Alfabetización Estadística, organizadas por el IASE en 2009, iniciamos contactos con los Ministerios de Educación y de Ciencia y Tecnología de Córdoba, nuestra provincia. Surgió así, la inquietud de instaurar similares actividades en nuestra región, dando inicio a las denominadas Olimpíadas de Estadística de Córdoba (OEC), que desde el año 2010 realizamos anualmente. El plan de actividades de las olimpíadas abarca tres etapas de evaluación: escolar, zonal y provincial. Además, involucra la confección de material de entrenamiento, asesoramiento para el desarrollo de iniciativas institucionales y también la realización de talleres de formación docente en didáctica de la estadística y la probabilidad. El propósito de las OEC es, fundamentalmente, fomentar la enseñanza de la estadística en la escuela, estimulando el desarrollo del pensamiento estocástico y no sólo del pensamiento determinístico, en el aula de matemática. Se pretende que el alumno adquiera habilidad para recoger y relacionar datos empíricos dentro de contextos de su interés, favoreciendo así el desarrollo de capacidades y habilidades que contribuyan a formar ciudadanos críticos de la información. La intención de esta presentación es mostrar la organización y las distintas actividades que se desarrollan durante el año académico dentro del marco de estas competencias.

Palabras clave: evaluación, alfabetización estadística, pensamiento estocástico.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 641-642). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Olimpíada de Estadística: un recurso para fomentar el desarrollo de la cultura estadística

María Inés Rodríguez - María Inés Herrera
mrodriguezbriguet@gmail.com - manyherrera@yahoo.com

Universidad Nacional de Río Cuarto- Argentina .

En el año 2009 entre el Gobierno de la Provincia de Córdoba y la Universidad Nacional de Río Cuarto se firma el convenio que determina las acciones conjuntas para la realización anual de las Olimpíadas de Estadística de Córdoba, la única de esta disciplina desarrollada en nuestro país.

Gobierno de la PROVINCIA DE CÓRDOBA

Ministerio de Educación
Ministerio de Ciencia y Tecnología

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RÍO CUARTO

Facultad de Ciencias Exactas
Centro de Enseñanza de las Ciencias

ÁREA LOGÍSTICA (Direcc. de Divulgación y Enseñanza de las Ciencias)

ÁREA ACADÉMICA y DE EVALUACIÓN (Dpto. de Matemática)



Objetivo

Potenciar la producción de conocimiento científico - tecnológicos innovadores para la resolución de problemas con eficacia y eficiencia, integrando estratégicamente el saber, saber hacer, saber ser y saber convivir.

Focalizando en estos tres aspectos centrales:

- Fomentar el campo de conocimiento de la Estadística para potenciar procesos de enseñanza y aprendizaje que contribuyan a la construcción de un pensamiento científico tecnológico.
- Incorporar el uso de la computadora como herramienta de trabajo áulico y de aprendizaje en todas las áreas de la ciencia, desarrollando habilidades necesarias para operar en la vida cotidiana.
- Fomentar el intercambio y la integración de conocimientos y experiencias Estadísticas y Matemáticas entre los educandos y educadores.

¿Cómo participar?

Según los niveles educativos, los alumnos deberán dar respuesta a una situación problemática estadística.
Modalidades: 1) Individual y 2) grupal.
Tiempo para realizar la evaluación: 2 hs.

¿Cuáles son las categorías?

- Categoría E
  Nivel Primario: Quinto y Sexto grado
- Categoría F
  Nivel medio: Primer Año
- Categoría G
  Nivel Medio: Segundo y Tercer año
- Categoría H
  Nivel Medio: Cuarto y quinto año
- Categoría I
  Nivel Medio: Sexto

En 2010 se concretó la 1ª OEC con una participación cercana a un centenar de estudiantes de 10 a 18 años, provenientes de distintas ciudades de la provincia de Córdoba. La 2ª OEC se realizó en 2011 y la 3ª en 2012 . Cada año fue incrementándose el número de colegios participantes, en especial los del sector público de enseñanza.

¿Qué otras actividades se realizan?

- **Capacitación de docentes mediante la realización del Seminario Taller "Alfabetización Estadística" para la práctica docente en la Educación Primaria y Secundaria**
- **Preparación de material guía para docentes y guía de entrenamiento para alumnos.**

La estadística ha jugado un papel esencial en el desarrollo de la sociedad moderna. En Argentina la incorporación de la estadística en la escuela, como una manera de desarrollar habilidades que contribuyan a formar ciudadanos críticos de la información, generalmente no es todavía un hecho. Deseamos incentivar la creación de una red de educadores de distintas provincias que promuevan la enseñanza de la estadística en los niveles obligatorios de educación.

olimpiadasestadisticacba@gmail.com

http://dmat.exa.unrc.edu.ar/Olimpiadas%20de%20Estadistica

Probabilidades e cidadania nas aulas de matemática: uma combinação impossível?

Carlos Mourinha
Escola Luís Sttau Monteiro Loures

Resumen

Este trabalho tem por objectivo revelar como as actividades realizadas nas aulas de Matemática podem contribuir para a promoção da cidadania explorando tarefas onde os alunos ampliem e evidenciem conceitos de cidadania permitindo-lhes tomar consciência e desencadeando atitudes cívicas, tornando-os cidadãos mais participativos num futuro próximo. Neste sentido, foi proposto a alunos de duas turmas do 9º ano de escolaridade de uma escola nos arredores de Lisboa, com idades compreendidas entre 13 e 16 anos, a realização de uma tarefa com conteúdos de probabilidades na disciplina de Matemática. A principal questão orientadora da investigação foi, como é que podemos explorar uma tarefa com conteúdos de probabilidades e desenvolver vivências de cidadania nas aulas de matemática? O contexto da tarefa a realizar pelos alunos era o tempo que os alunos com necessidades educativas especiais usufruíam na realização dos testes.

O principal resultado revela que os alunos na resolução da tarefa mobilizaram nos seus argumentos conhecimentos matemáticos sobre probabilidades, o que nos leva a concluir da necessidade de pensar e construir tarefas matemáticas onde a ligação a temas de cidadania estejam presentes.

Palavras-chave: Educação para a Cidadania, Matemática e a Cidadania e aprendizagem da Matemática em contexto real.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 643-644). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

PROBABILIDADES E CIDADANIA NAS AULAS DE MATEMÁTICA:UMA COMBINAÇÃO IMPOSSÍVEL?

Objectivos do Estudo

- Desenvolver conceitos de probabilidades aplicados a situações reais
- Identificar potencialidades e/ou limitações deste tipo de tarefa

Questões de Investigação

- Como é que podemos explorar uma tarefa com conteúdos de probabilidades e desenvolver vivências de cidadania nas aulas de matemática? E este tipo de tarefas contribui para promover cidadãos mais críticos e participativos?
- Qual é o seu impacto no desempenho dos alunos?

Enquadramento do Estudo

A Cidadania

✓ Em 2012, o Ministério da Educação e Ciência elaborou uma revisão da estrutura curricular que estará em vigor no ano lectivo de 2012-2013. Esta revisão refere a Educação para a Cidadania como tema transversal a todas as áreas curriculares com conteúdos e orientações programáticas definidas nas não como disciplina de oferta obrigatória.

✓ Os professores das diferentes disciplinas deverão criar/aplicar tarefas que vão de abordarem os conteúdos leccionados incluam temas de cidadania.

O contexto da Cidadania relacionado com a Matemática

"Não há nenhum ramo da Matemática, por mais elementar que seja, que não possa ser alguma vez aplicado aos fenómenos do mundo real"

Lobachevski (Geómetra, 2011). Probabilidades com diversas e estratégias divertidas. Lisboa: RBA)

"O pensamento matemático permite ao aluno ficar-lo compreender o mundo que nos rodeia e perceber quando deve utilizar este ou aquele modelo matemático"

C. Monteiro (2006, Dezembro, p.1. Uma conversa sobre Educação Matemática. Educação e Matemática, Revista da Associação dos Professores de Matemática.)

A Matemática

- A Matemática tem um papel de relevo pela sua participação e influência na sociedade que nos rodeia...

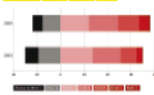
...no entanto a realidade ao nível dos resultados escolares e a avaliação de estudos internacionais revela que o ensino e a aprendizagem desta área curricular continua a necessitar de muita atenção da parte de todos os envolvidos de forma a melhorar os resultados que apresentaram uma evolução positiva nos referidos estudos internacionais (exemplo: PISA).

Enquadramento do Estudo

Literacia Matemática – Resultados do PISA

ANO	2006	2009	2012
Pontuação (portugal)	466	488	487

(a média europeia é de 500 pontos).

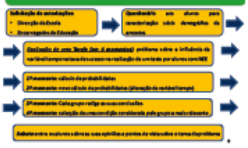


Entre 2003 e 2009, a percentagem de alunos com nível médio e excelentes aumentou 9,5 pontos e os níveis negativos diminuíram 2,9 pontos.

- O ensino tradicional da matemática deve ser substituído por uma *Educação Matemática* dos alunos levando-os a aprender a ter um ponto de vista matemático sobre diversas situações em contexto real, onde procuram de conhecer alguns conceitos matemáticos, mas o conteúdo essencial será o seu utilização como ferramenta para o pensamento, a reflexão e a acção.

Matos, J.F. (2002, Outubro. Educação Matemática e Cidadania. *Quadrante, 11* (1). Editorial)

Metodologia: Etapas do Estudo



Participantes no Estudo:

- Alunos do 9º ano de escolaridade de duas turmas (A e B) de uma escola do concelho de Loures
- Alunos com idades compreendidas entre os 13 e os 16 anos, sendo 12 rapazes e 30 raparigas

Planificação da Tarefa

- Aula anterior à realização da tarefa (45 minutos) formação dos grupos com 3 ou 4 elementos, indicação do porta-voz do grupo e entrega do questionário para caracterização sociodemográfica da turma
- 1 Bloco de 90 minutos para a realização dos momentos 1, 2, 3 e 4
- 1 Bloco de 90 minutos para a realização do Debate

Apresentação de resultados



Análise dos resultados:

Turma A

- 2 grupos não conseguiram aplicar os conteúdos das probabilidades
- No Debate, verificou-se uma melhoria no desempenho dos alunos
- A avaliação final desta turma traduziu-se em cinco grupos com avaliação satisfaz/satisfaz bem e apenas um com avaliação negativa

Turma B

- 2 grupos não conseguiram aplicar os conteúdos das probabilidades
- No Debate, apenas um grupo melhorou o seu nível de desempenho
- A avaliação final desta turma traduziu-se em três grupos com avaliação satisfaz/satisfaz bem e dois com avaliação negativa

Conclusões

- A tarefa permitiu aos alunos a exploração e a interligação de diferentes conteúdos matemáticos, com a vantagem de serem aplicados em contexto real
- A tarefa potencia o trabalho de grupo e o estudo promovendo a transversalidade entre a disciplina de Matemática e a Educação para a Cidadania.
- Os alunos desenvolveram competências para a exploração do problema em análise através da discussão, da argumentação e fundamentação das suas ideias com base na análise dos resultados obtidos.

Carlos Mourinha
Escola EB 2/3 Luis Sttau Monteiro - Loures

Problemas que involucran probabilidad en las pruebas de acceso a la Universidad en el Distrito Andaluz

Carretero Rivas, Magdalena S. y Contreras García, José Miguel

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo estudiamos la dificultad que presentan los alumnos antes de iniciar sus estudios universitarios al enfrentarse a problemas que involucren probabilidad condicional, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Para ello, analizaremos el tipo de problemas propuestos en las pruebas de Selectividad del Distrito Andaluz relativos a probabilidad, tanto condicional, total y como problemas bayesianos, en la especialidad de Bachillerato de Ciencias Sociales, ya que es en ésta donde los estudiantes reciben la enseñanza de estos conceptos.

Clasificaremos estos problemas y plantearemos los objetos matemáticos que pueden ser tratados en este tipo de problemas.

Palabras clave: Probabilidad, pruebas de acceso, enseñanza, probabilidad condicional

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 645-646). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria
Organizado por el Grupo de Investigación
Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria
Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Problemas que involucran probabilidad en las pruebas de acceso a la universidad en el distrito andaluz

Carretero Rivas, Magdalena S. y Contreras García, J.M.

INTRODUCCIÓN

Antes de iniciar sus estudios universitarios, los alumnos han de enfrentarse a problemas que involucren probabilidad condicional, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes, principalmente si estos aceden a la pruebas de acceso desde la especialidad de Bachillerato de Ciencias Sociales. Para ello, analizaremos el tipo de problemas propuestos en las pruebas de Selectividad del Distrito Andaluz relativos a probabilidad, tanto condicional, total y como problemas bayesianos, en la especialidad de Bachillerato de Ciencias Sociales y Humanidades.

OBJETIVOS

Evaluar el tipo de problemas, para plantear posibles estrategias de resolución y percibir los posibles errores que cometen los estudiantes preuniversitarios en los problemas con contenidos probabilísticos.

MATERIAL Y MÉTODO

✓Pruebas de acceso a la universidad, especialidad de Ciencias Sociales y Humanidades del currículo oficial

✓Directrices y orientaciones generales para las pruebas de acceso a la universidad para la prueba de Matemáticas aplicada a las ciencias sociales II

	2003											
Contenidos	P1A	P1B	P2A	P2B	P3A	P3B	P4A	P4B	P5A	P5B	P6A	P6B
Probabilidad simple	x	x	x	x	x		x		x	x	x	x
Probabilidad compuesta	x	x		x	x		x	x	x	x	x	x
Probabilidad condicionada	x	x		x	x		x			x	x	x
Espacio muestral			x		x			x				
Sucesos	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x
Sucesos simples	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x
Sucesos compuestos								x				
Dependencia								x				
Independencia						x		x			x	
Regla de Laplace			x		x			x	x	x		x
Teorema de Bayes	x	x		x	x		x			x		x
Teo. Probab. Total	x			x	x					x	x	x
Descomposición proba. Condicionada	x	x		x	x	x	x			x	x	x
Sucesos equiprobables												
Espacio suceso condicionado												
P.experimento compuesto								x				
Tabla de contingencia												
Complementario	x	x		x	x	x	x		x		x	x
Leyes de De Morgan		x					x		x			
Probabilidad de la unión de sucesos		x				x			x			

Mostramos un ejemplo de las pruebas usadas en 2003 (1,2,3 para el ordinario de Junio y 4, 5, 6 para septiembre) con dos opciones (A o B) para cada una.
En ella especificamos los contenidos y objetivos que se pretenden evaluar, según las Directrices y orientaciones generales para las pruebas de acceso a la universidad, junto con otros objetos probabilísticos necesarios para la enseñanza de este tema.

Recursos didácticos para la enseñanza del paquete estadístico SPSS en el Grado de Logopedia

Vargas, Cristina; Cañadas, Gustavo R.; Aguayo, Raimundo; Cañadas, Guillermo A.; Pérez, José M. ; De la Fuente, Emilia I.

Universidad de Granada

Resumen

El Grado del Logopedia fue implementado en el curso académico 2010-2011, evolucionando de Diplomatura a Grado. Ello ha supuesto una ampliación en la formación de los logopedas y en la necesidad de crear recursos didácticos específicos para esta área de conocimiento. Por ello, el objetivo del presente trabajo fue desarrollar un modelo competencial de formación práctica para la asignatura Fundamentos de Metodología en Logopedia, elaborando recursos específicos para el área de estadística. Concretamente, se creó materiales didácticos sobre el uso del paquete estadístico SPSS adaptados al área de conocimiento de Logopedia. Consiguientemente, se utilizaron diferentes recursos: a) plataforma de la asignatura a través del Centro de Enseñanzas Virtuales de la Universidad de Granada (CEVUG); b) material didáctico teórico sobre el paquete estadístico SPSS; c) casos prácticos y bases de datos para trabajar con el paquete estadístico SPSS; d) autoevaluaciones en la plataforma para la valoración de su propio rendimiento. Los alumnos trabajaron de forma continuada a lo largo del curso, haciendo uso de los recursos disponibles en la plataforma (por ejemplo, autoevaluaciones y foros). La media obtenida en la evaluación del paquete estadístico SPSS en el presente curso académico (M = 8,63) fue superior a la del curso académico anterior donde no se usaron tales recursos didácticos (M = 6,26), obteniéndose una mejora en el conocimiento adquirido.

Palabras clave: Logopedia; Estadística descriptiva e inferencial; Paquete estadístico SPSS.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 647-648). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

RECURSOS DIDÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA DEL PAQUETE ESTADÍSTICO SPSS EN EL GRADO DE LOGOPEDIA (PID 11-401)

Vargas, C., Cañadas, G. R. , Aguayo, R., Cañadas, G. A., Pérez, J. M. y De la Fuente, E. I.
Universidad de Granada

Introducción

La implementación del Espacio Europeo de Educación Superior en la Universidad de Granada se llevó a cabo en el curso académico (2010-2011). Ello ha supuesto importantes cambios de roles para adaptarse a estas nuevas necesidades, por ejemplo, el profesor orienta a los alumnos para que éstos construyan sus propios conocimientos de forma autónoma a partir de los diferentes materiales, recursos y fuentes de información (De la Fuente et al., 2009a; De la Fuente et al., 2009b). Esto es especialmente importante en disciplinas como Logopedia que en dicho curso académico ha pasado de Diplomatura a Grado. Este cambio amplía sensiblemente la formación de los logopedas, lo que conlleva dificultad de encontrar material teórico y práctico específico para este nuevo Grado. En concreto, en la asignatura *Fundamentos de Metodología en Logopedia*, donde el alumno debe conocer e integrar los fundamentos metodológicos y el análisis de datos de investigaciones en Logopedia, el material de casos prácticos junto con sus análisis específicos son escasos en esta área.

Por ello, el objetivo del presente trabajo fue desarrollar un modelo competencial de formación práctica para la asignatura *Fundamentos de Metodología en Logopedia*, elaborando recursos específicos para el área de estadística. En la obtención de dicho objetivo se planteó: a) Crear una plataforma e-Learning Moodle (software libre); b) Elaborar material didáctico teórico sobre el uso del paquete estadístico SPSS; c) Crear bases de datos y casos prácticos adaptados al área de conocimiento de Logopedia; d) Desarrollar autoevaluaciones en la plataforma para la valoración de su propio rendimiento.

Método

Participantes

Participaron 104 alumnos que cursaban la asignatura de *Fundamentos de Metodología en Logopedia*, donde el 45,2% lo hicieron durante en el curso académico 2010-2011, y el 54,8% en el curso académico 2011-2012.

Materiales

Plataforma de la asignatura

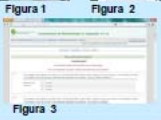
Se creó la plataforma e-Learning de la asignatura (http://campusvirtual.ugr.es/moodle/course/view.php?id=897) usando para ello el software libre Moodle. Esta plataforma facilita un entorno de formación virtual a través del Centro de Enseñanzas Virtuales de la Universidad de Granada (CEVUG).

Materiales didácticos

A través de la plataforma los alumnos podían acceder a diversos recursos, entre ellos: a) Material didáctico de aspectos teórico sobre el uso del paquete estadístico SPSS (Figura 1); b) Ejercicios prácticos y bases de datos (Figura 2); y c) Autoevaluaciones (Figura 3).


Figura 1


Figura 2


Figura 3

Procedimiento

En primer lugar, se crearon los materiales didácticos teóricos- prácticos para el uso del paquete estadístico SPSS. A continuación se generó la plataforma de la asignatura donde se ubicaron todos los contenidos creados en la fase anterior, incluyendo también un foro de discusión relativo al uso del paquete estadístico. A todos estos recursos sólo tuvieron acceso los alumnos que cursaron la asignatura el curso académico 2011-2012. En ambos cursos los alumnos asistieron a 7 prácticas presenciales sobre el uso del paquete estadísticos SPSS. Una vez finalizada las prácticas presenciales, los alumnos realizaron una prueba de evaluación dos semanas después en el aula de informática donde debían de realizar los análisis pertinentes para poder responder a las preguntas planteadas.

Resultados

El 67,3% de los alumnos no habían cursado asignaturas de estadísticas en cursos académicos previos y el 88,3% usaron el SPSS en horarios no presenciales.

La media obtenida en la evaluación del uso del SPSS en el cuso académico 2010-2011 fue de 6,26 y la desviación típica de 2,38. La media obtenida en el curso académico 2011-2012 ha sido de 8,63 y la desviación típica de 1,92. Se encontró diferencias estadísticamente significativas en la calificación media obtenida en la evaluación sobre el paquete estadístico SPSS, $t102 = -5{,}614$, $p < 0{,}001$, siendo superior en el curso académico 2011-2012.

Discusión

El establecimiento de la plataforma como marco en el que desarrollar la docencia, así como la creación de materiales didácticos específicos sobre el uso del paquete estadísticos SPSS para los alumnos que cursaban la asignatura *Fundamentos de Metodología en Logopedia* facilitó el proceso enseñanza-aprendizaje. En consecuencia, los alumnos que disponían de los recursos previamente citados en el curso académico 2011-2012 obtuvieron una mejora en el conocimiento adquirido en relación al uso del paquete estadístico SPSS comparado con los alumnos del curso académico 2010-2011 quienes no disponían de esos recursos.

Referencias

De la Fuente, E. I., Lozano, L. M., Vargas, C., Cañadas, G. A., García, I., Cañadas, G. R., García-Cueto, E., San Luis, C., Martín, M. (2009a). *Elaboración de una página Web y un CD-ROM interactivo para la asignatura Análisis de Datos en Psicología*. Proyecto de Innovación Docente (PID 07- 01- 03) presentado en la II jornadas de Innovación Docente de la Universidad de Granada.

De la Fuente, E. I., Vargas, C., Lozano, L. M., Cañadas, G. R., García-Cueto, E., San Luis Costas, C., Martín, M. y Cañadas, G. A. (2009b). *CD-ROM- Interactivo: Análisis de Datos en Psicología: Estadística Descriptiva*. Granada: SIDER S. C.

*El presente trabajo se ha llevado a cabo en el marco del programa de Innovación y Buenas Prácticas Docentes concedidos por la Universidad de Granada en la convocatoria 2011-2012, código PID 11-401.

I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria. Granada, 5 y 6 de abril de 2013

¿Se plantea una necesidad de formación estadística en el Grado de Maestro?

Arteaga Martínez, Blanca y Navarro Asencio, Enrique

Universidad Internacional de La Rioja

Resumen

Este póster pretende, tras el cambio surgido con la implantación del nuevo enfoque en el EEES, centrar la atención en un aspecto común en todas las Universidades y grados, el Trabajo Fin de Grado (TFG), regulado por el RD. 1393/2007. Este RD en su artículo 12, sobre las directrices para el diseño de títulos de Graduado, expone en su tercer apartado la necesidad de la elaboración y la defensa de un trabajo final. Asimismo especifica que debe realizarse al término del plan de estudios y estar relacionado con la evaluación de competencias que se asocien al título correspondiente.

El estudio realizado pone atención en el Grado de Maestro en Primaria, en sus diferentes acepciones dadas para estos estudios, y en particular en las universidades del territorio nacional de titularidad privada.

El planteamiento del trabajo parte de la concepción dada a un trabajo de estas características, que debe ser introductorio para la investigación educativa y, por tanto, reclama la necesidad de formación y manejo de técnicas estadísticas. Los estudiantes pueden no tener este tipo de competencias exigidas. Y se pretende averiguar si los nuevos planes educativos se adaptan, o no, para dar respuesta a este nuevo marco de necesidad estadística.

Los resultados muestran que la mayor parte de las universidades analizadas no consideran estas competencias en la formación que se ofrece a los futuros maestros de educación primaria.

Palabras clave: Trabajo Fin de Grado, Maestro, Primaria, estadística.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 649-650). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

¿SE PLANTEA UNA NECESIDAD DE FORMACIÓN ESTADÍSTICA EN EL GRADO DE MAESTRO?

Arteaga, B. y Navarro, E.

Universidad Internacional de La Rioja

Resumen:

Este póster pretende, tras el cambio surgido con la implantación del nuevo enfoque en el EEES, centrar la atención en un aspecto común en todas las Universidades y grados, el Trabajo Fin de Grado (TFG), regulado por el RD. 1393/2007. Este RD en su artículo 12, sobre las directrices para el diseño de títulos de Graduado, expone en su tercer apartado la necesidad de la elaboración y la defensa de un trabajo final. Asimismo especifica que debe realizarse al término del plan de estudios y estar relacionado con la evaluación de competencias que se asocien al título correspondiente.

El estudio realizado pone atención en el Grado de Maestro en Primaria, en sus diferentes acepciones dadas para estos estudios, y en particular en las universidades del territorio nacional de titularidad privada.

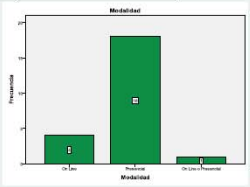
El planteamiento del trabajo parte de la concepción dada a un trabajo de estas características, que debe ser introductorio para la investigación educativa y, por tanto, reclama la necesidad de formación y manejo de técnicas estadísticas. Los estudiantes pueden no tener este tipo de competencias exigidas. Y se pretende averiguar si los nuevos planes educativos se adaptan, o no, para dar respuesta a este nuevo marco de necesidad estadística.

Los resultados muestran que la mayor parte de las universidades analizadas no consideran estas competencias en la formación que se ofrece a los futuros maestros de educación primaria.

Muestra:

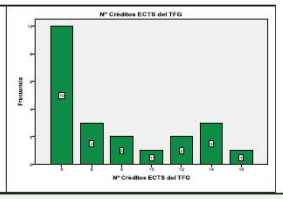
Modalidad	
On Line	Universidad a Distancia de Madrid
	Universidad Internacional de La Rioja
	Universidad Internacional Isabel I de Castilla
	Universitat Internacional Valenciana
Presencial	Mondragón Unibertsitatea
	Universidad Alfonso X El Sabio
	Universidad Camilo José Cela
	Universidad Cardenal Herrera-CEU
	Universidad Católica de Valencia San Vicente
	Universidad Católica San Antonio
	Universidad Católica Santa Teresa de Jesús d
	Universidad de Deusto
	Universidad de Navarra
	Universidad de Vic
	Universidad Europea de Madrid
	Universidad Francisco de Vitoria
	Universidad Internacional de Catalunya
	Universidad Pontificia Comillas
	Universidad Pontificia de Salamanca
	Universidad Ramón Llull
	Universidad San Pablo-CEU
	Universitat Abat Oliba CEU
On Line o Presencial	Universidad Antonio de Nebrija

	Frecuencia	Porcentaje
On Line	4	17,4
Presencial	18	78,3
On Line o Presencial	1	4,3
Total	23	100,0



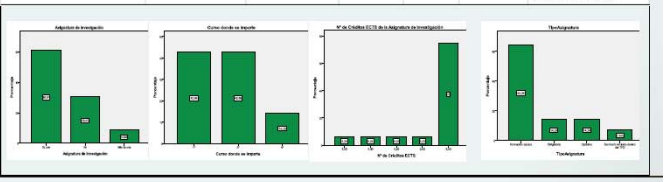
Resultados (I):

Nº Créditos ECTS del TFG	
N Válidos	22
Perdidos	1
Media	8,91
Mediana	8,00
Moda	6
Desv. típ.	3,571
Mínimo	6
Máximo	18



Resultados (II):

Universidad	Nº Créditos ECTS del TFG	Asignatura de Investigación	Curso donde se imparte	Tipo Asignatura	Nº de Créditos ECTS	Nombre
Mondragón Unibertsitatea	6	Sí, una	.	.	6	Investigación en la escuela
Universidad a Distancia de Madrid	14	No	.	.	.	No
Universidad Alfonso X El Sabio	6	Sí, una	.	Optativa	6	Investigación e innovación en la didáctica de: Educación Física, CC.SS., Matemáticas y Lengua Castellana-Literatura
Universidad Antonio de Nebrija	14	Sí, una	2º	Formación básica	6	Metodología, Innovación e Investigación Educativa
Universidad Camilo José Cela	10	Más de una	1º	Formación básica	6	Observación e investigación en el aula
Universidad Cardenal Herrera-CEU	6	No	.	.	.	No
Universidad Católica de Valencia San Vicente Mártir	12	No	.	.	.	No
Universidad Católica San Antonio	6	Sí, una	1º	Formación básica	6	Métodos, diseño y técnicas de investigación educativa
Universidad Católica Santa Teresa de Jesús de Ávila	.	.	.	.	.	No
Universidad de Deusto	8	Sí, una	1º	Formación básica	6	Métodos y Técnicas de Investigación
Universidad de Navarra	6	Sí, una	1º	Obligatoria	6	Investigación Educativa
Universidad de Vic	6	Sí, una	4º	Seminario incluido dentro del TFG	3	Seminario: Métodos de Investigación (dentro del TFG)
Universidad Europea de Madrid	6	Sí, una	4º	.	6	Innovación e Investigación educativa
Universidad Francisco de Vitoria	6	Sí, una	1º	Optativa	6	Bases metodológicas de la investigación educativa
Universidad Internacional de Catalunya	6	No	.	.	.	No
Universidad Internacional de La Rioja	14	Sí, una	1º	Formación básica	4	Teoría y práctica de la Investigación educativa
Universidad Internacional Isabel I de Castilla	18	Sí, una	2º	Formación básica	6	Innovación y proyectos educativos en Educación Primaria
Universidad Pontificia Comillas	8	Más de una	2º	Formación básica	4,5	Métodos de investigación e innovación educativa
Universidad Pontificia de Salamanca	8	Sí, una	2º	Formación básica	6	Metodología de Investigación e Innovación Educativa
Universidad Ramón Llull	12	No	.	.	.	No
Universidad San Pablo-CEU	6	Sí, una	2º	Formación básica	6	Innovación Educativa, TIC y Metodología de la Investigación
Universitat Abat Oliba CEU	9	No.	.	.	.	No
Universitat Internacional Valenciana	9	Sí, una	2º	Obligatoria	5	Metodología de investigación e innovación educativa



Conclusiones:

- La distribución de créditos asignados al TFG oscila entre 6 ECTS (opción más común, el 45% de las universidades), hasta los 18 de la Universidad Internacional Isabel I de Castilla.
- Dos universidades no tienen el TFG en activo. La Universidad Alfonso X el sabio y la Universidad Católica santa Teresa de Jesús de Ávila.
- El 60,9% incorpora una asignatura de investigación en el plan de estudios. Dos universidades (8,7%) ofertan más de una, una obligatoria y otra optativa. Un 30,4% no ofertan asignatura de investigación.
- Lo más común es cursarla en los dos primeros cursos del grado. Sólo el 14,2% la oferta en el último curso del grado.
- En el 75% de las universidades la asignatura consta de 6 ECTS (60 horas de trabajo). El otro 25% oscila entre 3 y 5 ECTS.
- En el 78,6% de las universidades la asignatura es de formación básica u obligatoria. En dos casos (14,3%) es optativa. Y en la Universidad de Vic la incluye como seminario dentro del TFG.
- Estas asignaturas incluyen pequeños apartados con contenidos de análisis de datos, que no parecen incluir competencias relacionadas con la Estadística, comprensión e interpretación de los datos.

Uma visão da Educação Estatística no Extremo Sul da Costa do Brasil

Suzi Samá Pinto y Mauren Moreira Porciúncula da Silva

Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Resumo

Este resumo apresenta as ações do Grupo de Pesquisa Educação Estatística de uma Universidade Federal do Extremo Sul do Brasil. Teoricamente fundamentado na Epistemologia Genética de Piaget e na Biologia do Conhecer de Maturana e Varela, e acreditando no potencial das tecnologias digitais como uma alternativa para provocar a emoção e contribuir para a conservação e recuperação de informação no cérebro, em 2011, o grupo começou a produzir objetos de aprendizagem, multimídia e interativos, para promover a literacia estatística. A primeira produção foi AVATAR, um *webquest* que solicita as características dos estudantes e, em seguida, faz uma busca em um banco de dados de imagens, para compor um avatar. A característica mais importante deste objeto de aprendizagem é que cada questão foi projetada para oportunizar o trabalho com diferentes métodos estatísticos em sala de aula. Em 2012, o grupo iniciou o projeto de extensão Leme – Letramento Multimídia Estatístico, com o objetivo de alfabetizar estatisticamente e incluir digitalmente, a cada ano, 300 cidadãos em situação de vulnerabilidade social, garantindo a inclusão do ser humano na sociedade da informação digital. Essas ações estão promovendo o desenvolvimento da literacia estatística na região. E agora o grupo potencializa o estudo com o uso de métodos de pesquisa quantitativos como Teoria de Resposta ao Item e Análise de Componentes Principais para estudar a alfabetização estatística, fundamentada em teorias cognitivas.

Palavras-chave: Literacia Estatística; Tecnologias Digtais; Cognição.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 651-652). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Resumo

Uma visão da Educação Estatística no Extremo Sul da Costa do Brasil

Suzi Samá Pinto[1], Mauren Moreira Porciúncula da Silva[2]

Este resumo apresenta as ações do Grupo de Pesquisa em Educação Estatística da Universidade Federal do Rio Grande - FURG do Extremo Sul do Brasil.

Teoricamente fundamentado na Epistemologia Genética de Piaget e na Biologia do Conhecer de Maturana e Varela, e acreditando no potencial das tecnologias digitais como uma alternativa para provocar a emoção e contribuir para a conservação e recuperação de informação no cérebro, em 2011, o grupo começou a produzir objetos de aprendizagem, multimídia e interativos, para promover a literacia estatística.

AVATAR

A primeira produção foi AVATAR, um webquest que solicita as características dos estudantes e, em seguida, faz uma busca em um banco de dados de imagens, para compor um avatar. A característica mais importante deste objeto de aprendizagem é que cada questão foi projetada para oportunizar o trabalho com diferentes métodos estatísticos em sala de aula.

LEME

Em 2012, o grupo iniciou o projeto de extensão Leme – Letramento Multimídia Estatístico, com o objetivo de alfabetizar estatisticamente e incluir digitalmente, a cada ano, 300 cidadãos em situação de vulnerabilidade social, garantindo a inclusão do ser humano na sociedade da informação digital.

Essas ações estão promovendo o desenvolvimento da literacia estatística na região.

Essas ações estão promovendo o desenvolvimento da literacia estatística na região. E agora o grupo potencializa o estudo com o uso de métodos de pesquisa quantitativos como Teoria de Resposta ao Item e Análise de Componentes Principais para estudar a alfabetização estatística, fundamentada em teorias cognitivas.

1 suzisama@furg.br, Universidade Federal do Rio Grande – FURG - Brasil
2 maurenmoreira@furg.br, Universidade Federal do Rio Grande – FURG - Brasil

http://www.leme.furg.br/



Un recurso para la enseñanza de la Estadística: video tutoriales para las prácticas de ordenador

Caballero Águila, Raquel, Martínez Rodríguez, Ana María y Oya Lechuga, Antonia

Universidad de Jaén

Resumen

La implantación de los títulos de grado ha motivado una actualización de las metodologías docentes utilizadas tradicionalmente. En el escenario actual, el rol del alumnado requiere de una mayor participación e implicación. La incorporación de nuevas herramientas en nuestra práctica docente, muchas de ellas basadas en las Tecnologías de la Información y la Comunicación, permite mejorar el aprendizaje independiente del alumnado. En la planificación metodológica de cada asignatura, recogida en la correspondiente guía docente, aparece de forma explícita el número de horas de trabajo autónomo requerido para que el alumnado asimile los contenidos desarrollados. La disponibilidad de material curricular a través de Internet (apuntes en formato digital, resolución de ejercicios, prácticas de ordenador guiadas, video tutoriales, etc.) que se adapte al ritmo de aprendizaje de los estudiantes, sin limitación de horario, y que permita reforzar y complementar los contenidos desarrollados en las clases presenciales, fomenta y facilita el trabajo autónomo del estudiante, así como la adquisición de conocimientos, habilidades y competencias profesionales. Una de las actividades en las que se desarrolla cualquier asignatura con contenidos de Estadística son las sesiones prácticas de resolución de problemas numéricos con ordenador. En este trabajo describimos el diseño y desarrollo de video tutoriales sobre prácticas guiadas para la resolución con ordenador de casos prácticos de Estadística.

Palabras clave: Estadística, prácticas de ordenador, video tutoriales.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 653-654). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Un recurso para la enseñanza de la Estadística: video-tutoriales para las prácticas de ordenador

Caballero Águila, R., Martínez Rodríguez, A. M., Oya Lechuga, A.
Departamento de Estadística e I.O., Universidad de Jaén

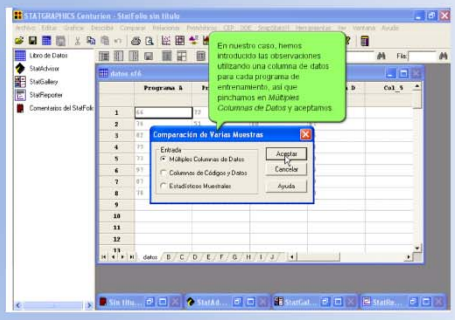
Resumen

Una de las actividades en las que se desarrolla cualquier asignatura con contenidos de Estadística son las sesiones prácticas de resolución de problemas numéricos con ordenador. En este póster mostramos el diseño y desarrollo de video-tutoriales sobre prácticas guiadas para la resolución con ordenador de casos prácticos de Estadística.

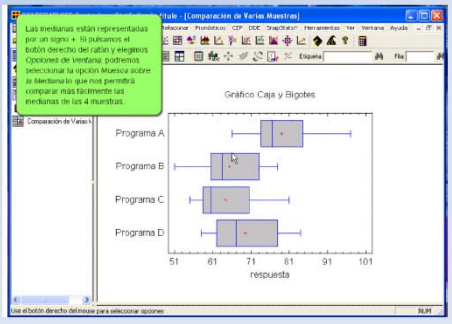
✓ En la enseñanza de la Estadística es imprescindible el uso de programas informáticos que permitan la aplicación práctica de las técnicas estudiadas y preparen al estudiante para ejercer su actividad profesional en un futuro.

✓ La selección de un software adecuado se realiza atendiendo a criterios tales como: la complejidad del mismo, un entorno amigable, la materia a tratar, la formación previa del estudiante, su futura actividad profesional, etc.

El paquete Statgraphics es intuitivo, sencillo y metodológicamente adecuado para estudiantes de todos los niveles; además, se encuentra disponible en la Universidad de Jaén.



Ejemplos ilustrativos



Herramientas

statgraphics centurion XV — statistical analysis software, training & consulting — www.statgraphics.com

ViewletBuilder4 — Video-tutoriales

nero EXPRESS 6 — Imagen ISO del CD

Una experiencia didáctica en la enseñanza de los modelos Binomial y Poisson para el estudio de patrones de dispersión espacial

Nóbrega Suárez José Renato

Universidad Central de Venezuela

Resumen

Se expone un ejercicio didáctico para explicar dos modelos probabilísticos requeridos en el tema de patrones de dispersión espacial de organismos, en cursos universitarios de Ecología. Cada estudiante simula la dispersión aleatoria de 90 individuos sobre un área dividida en 100 cuadros con coordenadas, mediante una tabla de dígitos aleatorios. Antes de simular, se discuten preguntas claves para afianzar conceptos necesarios en la explicación de los modelos: ¿cuál es la probabilidad de que un cuadro sea escogido en un ensayo de selección aleatoria?, ¿cuántos individuos podría recibir un cuadro?, ¿es posible que todos los individuos caigan en un único cuadro? Luego una pregunta para elaborar un pronóstico: ¿cuántos cuadros vacíos esperas al culminar la simulación? El estudiante contrasta su pronóstico con el valor esperado según el modelo probabilístico que rige el proceso, incentivándolo así a realizar la simulación con mayor interés y curiosidad para verificarlo. Analizados los resultados, el estudiante constata que el número de cuadros vacíos en su experiencia no discrepa notablemente del valor predicho por el modelo. Se explica el patrón obtenido con el modelo binomial haciendo la analogía entre el ingreso de un individuo en un cuadro con el revoleo de una moneda. Se cierra con el modelo Poisson como aproximación cada vez mejor de la binomial en la medida en que el número de cuadros e individuos incrementan proporcionalmente, manteniendo constante el promedio de individuos por cuadro.

Palabras clave: Distribución Binomial, Distribución Poisson, Dispersión Espacial

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 655-656). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Una experiencia didáctica en la enseñanza de los modelos Binomial y Poisson para el estudio de patrones de dispersión espacial

De Nóbrega Suárez José Renato
renato.nobrega @ciens.ucv.ve, Unidad Docente de Bioestadística, Departamento de Ecología, Escuela de Biología,
Universidad Central de Venezuela

1. Introducción

Se expone un ejercicio didáctico para explicar dos modelos probabilísticos requeridos en el tema de patrones de dispersión espacial de organismos, en cursos universitarios de Ecología. Cada estudiante simula la dispersión aleatoria de 90 puntos (individuos de una especie biológica hipotética) sobre un área cerrada dividida en 100 cuadros georeferenciados según la fila y columna donde se ubica (**Figura 1**). El estudiante genera 90 pares ordenados de dígitos, vía tabla de dígitos aleatorios u hoja Excel, que representan las coordenadas de los cuadros seleccionados para ubicar los puntos (un cuadro puede ser seleccionado varias veces). Previo a la simulación se discuten preguntas claves para orientar el proceso y afinar conceptos estadísticos.

2. Las preguntas

¿Cuál es la probabilidad, asociada a cada cuadro, de ser escogido en un particular ensayo de selección? Objetivo: reconocer que el ingreso de cada punto al área representa, en cada cuadro, la ejecución de un ensayo Bernoulli: el cuadro es seleccionado (recibe el punto) o no, con probabilidades 0,01 y 0,99 respectivamente.

¿Cuántos puntos podrían caer en un cuadro particular? ¿Es <u>posible</u> que los 90 puntos queden en un único cuadro? ¿Cuán factible sería este suceso?
Objetivo: reconocer la variable aleatoria X, "número de puntos en cuadro", y diferenciar entre los valores que teóricamente puede adoptar (X: 0,1…..90) y la probabilidad de cada uno.

¿Cuántos cuadros podrían quedar vacíos? Objetivo: incentivar al estudiante a realizar la simulación con interés y curiosidad al obligarlo a elaborar un pronóstico que contrastará con el valor esperado según el modelo probabilístico que rige el proceso, y que el profesor informará. En este caso el valor esperado es de 40 cuadros vacíos (redondeando). En experiencias previas la moda de los pronósticos de los estudiantes se ubica en 30 cuadros.

Realizadas las simulaciones, la estadística descriptiva básica de la variable (distribución de frecuencia, media y varianza) y constatada la discrepancia o no entre el pronóstico del estudiante y el del modelo, se procede a su explicación.

3. La explicación de los modelos

3.1. El modelo Binomial

Se inicia con el modelo binomial. Es útil la analogía entre la experiencia de dispersar n=90 puntos en un área dividida en 100 cuadros y observar el número de puntos que caen en un cuadro, con la experiencia binomial de revolear n=90 veces una moneda no equilibrada (cuya probabilidad de cara en cada revoleo es constante e igual a 0,01), y observar el número de caras. Luego la probabilidad de que la variable binomial X "número de puntos en un cuadro " adopte un valor x determinado, vendrá dada por la función de probabilidad binomial b(x;n,p),con n=90, p=0,01 , y X: 0,1,2…..90.

$$P(X = x) = b(x;n,p) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

Se calcula la probabilidad para X=0, y el valor esperado de cuadros vacíos a partir de una muestra de 100 cuadros: P(X=0).100 = 0,4047. 100 = 40,47. En este punto es útil la analogía con la experiencia de revolear 90 veces cada una de 100 monedas, idénticas en la probabilidad p=0,01 de obtener cara en un revoleo, y preguntarse por el número esperado de monedas en las que no se obtendrían caras en ninguno de los revoleos.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

Figura 1: Área cuadriculada para la simulación. Cuadros con coordenadas.

3.2. El modelo Poisson

Se introduce la expresión de la función Poisson indicando que es una buena aproximación de la binomial dada las condiciones de la experiencia: número de ensayos Bernoulli grande (n=90) con baja probabilidad del suceso éxito (p=0,01). Se constata comparando la probabilidad binomial para x=0 con la correspondiente según la Poisson. Destacar que su único parámetro μ coincide su expectativa, y que esta corresponde a la expectativa binomial:

$$E(X) = n.p = 90.0,01 = 0,90$$

Se cierra indicando que si la experiencia se repitiese varias veces, incrementando el número de cuadros y el número de individuos al multiplicarlos por un mismo factor cada vez mayor, manteniendo constante el promedio de puntos por cuadro, la aproximación de la binomial a la Poisson será cada vez mejor. Se ilustra esto con la **tabla 1** y presentando la expresión matemática de la aproximación límite:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} b(x;n,p) = \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^x}{x!}$$

Tabla 1: Aproximación de la binomial a la Poisson

	Probabilidad Binomial			Probabilidad Poisson
Variable X	n = 90 p = 0,01 E(X)=0,9	n = 900 p = 0,001 E(X)=0,9	n = 9000 p = 0,0001 E(X)=0,9	μ = 0,9
0	0,404732	0,406387	0,406551	0,40657
1	0,367938	0,366114	0,365933	0,365913
2	0,165386	0,164733	0,164668	0,164661
3	0,049003	0,049359	0,049394	0,049398
≥4	0,01294	0,013407	0,013454	0,013459

Wonderland…. attitudes towards statistics of portuguese university students

Nascimento Maria[1], Estrada Roca Assumpta[2] y Martins J. Alexandre[3]

[1]Universidad de Tras-os-Montes e Alto Douro
[2] Universidad de Lleida
[3]Instituto Politécnico da Guarda, UDI/IPG

Abstract

Nowadays it is important to value the students' attitudes when they begin a new Study Cycle (Bologna University Cycle) for two sets of reasons: the formative results and its own influence in the teaching learning process. This study emerged in line with some of ours previous works about the Attitudes Towards Statistics research in different contexts. The Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada (Estrada Attitudes Towards Statistics Scale, EAEE, 2002) was used within Statistics courses in order to plan future actions to the university future teachers and others. The portuguese translation of this scale was validated by a panel of experts. All the items are distributed within a matrix of pedagogical and anthropological components.

The analysis was done among 341 students of a northern portuguese university in different degrees. Statistics is a course taught in the third semester in all degrees, except in Economy and Management where it is taught in the fifth semester. Our preliminary analysis describes the students general data. We also present the conclusions and in summary: despite the different degrees studied we were surprised by the results' similarity, between the studied degrees either in the total scores or in the pedagogical and anthropological components. Among these students the slightly positive attitudes are promising and according to the Cheshire cat: And you've picked up a bit of an attitude, still curious and willing to learn, I hope.

Palabras clave: Attituds towards statistics, Statistic Education, Universitary students.

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 657-658). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Wonderland.... actitudes hacia la estadística en estudiantes universitarios portugueses

Nascimento, Maria[1], Estrada, Assumpta [2] y Martins, J. Alexandre[3]

[1] mmsn@utad.pt, Universidad de Tras-os-Montes e Alto Douro (Portugal)
[2] aestrada@matematica.udl.cat, Universidad de Lleida ,
[3] jasvm@ipg.pt, Instituto Politécnico da Guarda, UDI/IPG (Portugal)

RESUMEN:

El trabajo que aquí presentamos se centra en el estudio de las actitudes hacia la Estadística de estudiantes universitarios de una universidad en el norte de Portugal. Analizamos las respuestas a los ítems de la Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada EAEE (Estrada, 2002). Nuestros resultados indican la necesidad de seguir trabajando por y para los estudiantes, potenciando su formación estadística pero sin olvidar la componente afectiva.

PALABRAS CLAVE: Actitudes hacia la estadística, Educación estadística, Estudiantes universitario.

ABSTRACT:

The work presented focuses on the study of the attitudes towards statistics of students in a university in the north of Portugal. We analyzed the answers to the items of the Scale of Attitudes towards Statistics of Estrada, EAEE (Estrada, 2002). Our results indicate the need for further work by and for students, strengthening their statistical training but without forgetting its emotional component.

KEY WORDS: Attitudes towards statistics, Statistic Education , Universitary students

INTRODUCCIÓN :

Las actitudes son parte integrante de todas las materias de aprendizaje y ocupan un lugar central en el acto educativo, guiando el proceso perceptivo y cognitivo que comporta el aprendizaje de cualquier contenido educativo.

¿POR QUÉ ESTUDIARLAS? → REFLEXIONES en la implantación del Plan Bolonia (Portugal 2010)

Pretendemos

Fundamentar la acción didáctica que permita incidir en:

- las actitudes de los estudiantes
- la mejora de la enseñanza de la Estadística en distintas carreras universitarias

Phillipp (2007) considera las actitudes como "sentimientos, acciones o pensamientos que manifiesta una persona respecto a una materia".

Siempre se expresan positivamente o negativamente (agrado/desagrado, gusto/disgusto), surgen favorables en edades muy tempranas pero evolucionan negativamente con el paso del tiempo.

En nuestro estudio utilizamos como instrumento de medición de actitudes la Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada EAEE (Estrada, 2002), en versión portuguesa , validada por panel de jueces (Martins y col. 2011). Dicha escala está compuesta por 23 ítems, 12 afirmativos frente a 11 negativos, que se distribuyen según componentes pedagógicas y antropológicas

Componentes Pedagógicas	Componentes Antropológicas		
	Social	Educativa	Instrumental
Afetivo	1, 15, 23	3, 16, 9	5, 14, 17, 21
Cognitivo	6, 7	10, 12, 19	2, 22
Comportamental	13, 20	18, 8	4, 11

El cuestionario fue respondido por 341 estudiantes de una universidad del norte de Portugal .

La estadística es una asignatura impartida en el tercer curso (5° semestre) a los estudiantes de Enseñanza Básica (Magisterio) y Enología mientras que en Ingenierías, Economía y Gestión se imparte en segundo curso (3° semestre).



ANÁLISIS DE RESULTADOS





- Dado que los cuestionarios fueron respondidos al inicio del semestre, los estudiantes nos dan una visión de su formación estadística previa como una materia poco aplicada.
- Los ítems menos valorados la realzan como asignatura y no tanto como algo de uso cotidiano.
- Contradictoriamente en los ítems más valorados los estudiantes asumen como fundamental la enseñanza de la estadística en la escuela y perciben la necesidad en cualquier ámbito (ciencias o letras en cuanto a titulaciones) y para todos los ciudadanos
- Admiten algunos malos usos (por ejemplo, en la publicidad o en la política)
- En cuanto a la relación entre componentes destacamos la sociocognitiva como la mas fuerte (actitudes mas positivas) y los valores mas bajos corresponden a la instruental-comportamental .

CONCLUSIONES:

- Las actitudes en general fueron moderadas o positivas, con una puntuación promedio global ligeramente superior a la posición teórica de indiferencia y con resultados inferiores a los de Estrada y cols. (2010) con futuros profesores españoles y peruanos en consonancia con las diferencias de énfasis del currículo en estos países.
- Sorprende la similitud de resultados con actitudes moderadamente positivas tanto en puntuaciones totales como por componentes en titulaciones tan distintas (E. Básica ,Ingenierías, Enología, Economía y Gestión)
- Los resultados obtenidos son esperanzadores y como dice el Gato Cheshire: *And you've picked up a bit of an attitude, still curious and willing to learn, I hope.*

BIBLIOGRAFÍA

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Estrada, A.; Bazán, J. y Aparicio, A. (2010), Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores españoles y peruanos. *UNION*, 24. ISSN: 1815-0640 http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=96

Martins, J., Nascimento, M. & Estrada, A. (2011). Attitudes of teachers towards statistics: a preliminary study with portuguese teachers. *Proceedings of CERME 7 Rzeszow, Poland, 9-13 February.* On line: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/ WG/8/CERME_Martins-Nascimento-Estrada.pdf

Phillipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affects. In F. Lester (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Publishing and NCTM.

•Agradecimientos: Trabajo apoyado por el Proyecto SEJ2010-14947/EDUC. MCYT-FEDER, por Centro de Matemática de la UTAD (CM-UTAD) y por PEst-OE/EGE/UI4056/2011 – proyecto de la UDI/IPG apoyado por la Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT).

