Universidad de Granada — Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas	**Examen final** 14 de junio 2021

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

La duración del examen es de tres horas.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Se considera el funcional $\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \left(x^2 + y'(x)^2\right) dx$ definido en el dominio

$$\mathcal{D} = \left\{ C^2[0,1] \,:\, y(0) = y(1) = 0,\ \int_0^1 y(x)^2 \, \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

Se pide:

(i) Encuentra todos los extremales (puntos críticos) de $\mathcal{F}$.

(ii) Discute si $\mathcal{F}$ alcanza o no un mínimo en $\mathcal{D}$. En caso afirmativo, calcula dicho mínimo e indica dónde se alcanza.

(iii) Responde a los apartados anteriores en el caso en que

$$\mathcal{D} = \left\{ C^2[0,1] : \int_0^1 y(x)^2 \, \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

Solución 1. Denotemos $p = y'$ y $F(x, y, p) = p^2$. Entonces

$$\mathcal{F}[y] = \frac{1}{3} + \int_0^1 F(x, y, p) \, dx \,.$$

La forma de incorporar al funcional la ligadura presente en $\mathcal{D}$ es considerar la función corregida

$$F^*(x, y, p) = F(x, y, p) - \lambda y^2 = p^2 - \lambda y^2 \,.$$

La ecuación de Euler-Lagrange asociada a F^* viene dada por

$$0 = F^*_y - \frac{d}{dx}(F^*_p) = -2\lambda y - 2y''$$

o, equivalentemente,

$$y'' + \lambda y = 0 \,.$$

Esta ecuación debe resolverse sujeta a las condiciones de contorno $y(0) = y(1) = 0$. Los valores propios son en este caso $\lambda_n = n^2\pi^2$, $n \in \mathbb{N}$, en tanto que las funciones propias vienen dadas por $y_n(x) = B \operatorname{sen}(n\pi x)$, donde $B \in \mathbb{R}$.

El problema de minimización planteado adopta la forma de un problema de tipo isoperimétrico (salvo traslación), por lo que la existencia de mínimo en $\mathcal{D}$ está garantizada. De hecho, el mínimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ es $m = \frac{1}{3} + \lambda_1 = \frac{1}{3} + \pi^2$ y, de entre las infinitas funciones propias asociadas $y_1(x) = B \operatorname{sen}(\pi x)$, las únicas que satisfacen la ligadura son aquellas que cumplen

$$1 = B^2 \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x)^2 \, dx = B^2 \int_0^1 \left(\frac{1 + \cos(2\pi x)}{2} \right) dx = \frac{B^2}{2} \,,$$

de donde se deduce que

$$B = \pm\sqrt{2}\,.$$

Por consiguiente, $\mathcal{F}$ alcanza su valor mínimo en $\mathcal{D}$ en las funciones

$$y(x) = \pm\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\pi x)\,.$$

Finalmente, si las condiciones de contorno son $y'(0) = y'(1) = 0$, entonces los valores propios adoptan la forma

$$\lambda_0 = 0\,, \quad \lambda_n = n^2\pi^2\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

mientras que las funciones propias son

$$y_0(x) = C \in \mathbb{R}\,, \quad y_n(x) = A\cos\left(n\pi x\right)\,, \quad A \in \mathbb{R}\,, n \in \mathbb{N}\,.$$

Ahora ha de cumplirse

$$1 = \int_0^1 C^2\,dx = C^2\,,$$

luego el mínimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ es $m = \frac{1}{3} + \lambda_0 = \frac{1}{3}$ y se alcanza en

$$y(x) = \pm 1\,.$$

Ejercicio 2 (4 puntos)**.** Se considera el siguiente problema:

$$(P) = \left\{ \begin{array}{rcll} -\frac{1}{4}\Delta u + x\cdot\nabla u + (|x|^2+1)u & = f(x) & \text{en} & B(0,1), \\ u & = 0 & \text{en} & \partial B(0,1), \end{array} \right.$$

donde $B(0,1)$ es la bola unidad abierta de centro cero y radio uno en $\mathbb{R}^2$, $\partial B(0,1)$ denota su frontera, y $f \in L^2(B(0,1))$.

(i) Plantea la formulación variacional (o débil) del problema, que denotaremos por (P_V). (Es decir: encuentra un espacio de Hilbert X, un funcional bilineal $a : X \times X \to \mathbb{R}$ y un funcional lineal $F : X \to \mathbb{R}$ tales que el problema (P) pueda reescribirse de la forma $a(u,v) = F(v)$, para todo $v \in X$.)

(ii) Prueba que

$$\int_{B(0,1)} \Big(x\cdot\nabla\varphi(x)\,\varphi(x) + (|x|^2+1)\varphi(x)^2\Big)dx \geq 0 \tag{1}$$

para toda función φ en el espacio de Hilbert del item (i).

(iii) Demuestra que existe una única solución del problema (P_V). ¿En qué sentido es solución del problema (P)?.

(iv) ¿Permite el teorema de Lax-Milgram asociar al problema variacional anterior un problema de minimización? Justifica la respuesta.

Solución 2. (i) El espacio de Hilbert con el que vamos a trabajar, motivado por las condiciones de contorno, es $H_0^1(B(0,1))$. Definimos la forma bilineal $a : H_0^1(B(0,1)) \times H_0^1(B(0,1)) \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$a(u,\varphi) = \int_{B(0,1)} \Big(\frac{1}{4}\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x) + x\cdot\nabla u(x)\,\varphi(x) + (|x|^2+1)u(x)\varphi(x)\Big)\,dx\,.$$

Es fácil de comprobar, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que la forma bilineal está bien definida del hecho de que $u,\varphi \in H_0^1(B(0,1))$. Por otra parte, definimos la forma lineal $F : H_0^1(B(0,1)) \to \mathbb{R}$ del siguiente modo:

$$F(v) = \int_{B(0,1)} f(x)\varphi(x)\,dx\,.$$

De nuevo, podemos asegurar que F está bien definida para toda $\varphi \in H_0^1(B(0,1))$ en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

(ii) Usemos el teorema de Lax-Milgram para dar respuesta a este apartado. La forma bilineal es continua ya que

$$\begin{aligned}|a(u,\varphi)| &\leq \frac{1}{4}\|\nabla u\|_{L^2(B(0,1))}\|\nabla\varphi\|_{L^2(B(0,1))}\\ &\quad+\|x\|_{L^\infty(B(0,1))}\|\nabla u\|_{L^2(B(0,1))}\|\varphi\|_{L^2(B(0,1))}\\ &\quad+\||x|^2+1\|_{L^\infty(B(0,1))}\|u\|_{L^2(B(0,1))}\|\varphi\|_{L^2(B(0,1))}\\ &\leq C\,\text{máx}\left\{\frac{1}{4},\||x|^2+1\|_{L^\infty(B(0,1))},\|x\|_{L^\infty(B(0,1))}\right\}|||u|||\,|||\varphi|||\,,\end{aligned}$$

donde hemos considerado $|||G||| = \|\nabla G\|_{L^2(B(0,1))}$ la norma equivalente a la usual en $H_0^1(B(0,1))$ (de ahí la constante C).

Igualmente, F es continua en $H_0^1(\Omega)$ ya que

$$|F(\varphi)| \leq \|f\|_{L^2(B(0,1))}\|\varphi\|_{L^2(B(0,1))} \leq \|f\|_{L^2(B(0,1))}|||\varphi|||\,.$$

La desigualdad (1) es una consecuencia directa de la integración por partes del primer término y de las propiedades de φ en la frontera de la bola $B(0,1)$:

$$\begin{aligned}\int_{B(0,1)}\Big(x\cdot\nabla\varphi(x)\,\varphi(x) &+ (|x|^2+1)\varphi(x)^2\Big)dx\\ &= \int_{B(0,1)}\Big(x\cdot\frac{1}{2}\nabla\varphi(x)^2+(|x|^2+1)\varphi(x)^2\Big)dx\\ &= \int_{B(0,1)}\Big(-\operatorname{div}(x)\frac{1}{2}\varphi(x)^2+(|x|^2+1)\varphi(x)^2\Big)dx\\ &= \int_{B(0,1)}|x|^2\varphi(x)^2\,dx \geq 0\end{aligned}$$

Por otro lado, usando la desigualdad anterior, la forma bilineal es coerciva puesto que

$$\begin{aligned}a(u,u) &= \int_{B(0,1)}\Big(\frac{1}{4}|\nabla u(x)|^2 + x\cdot\nabla u(x)\,u(x)+(|x|^2+1)u(x)^2\Big)dx\\ &\geq \frac{1}{4}\int_{B(0,1)}|\nabla u(x)|^2\,dx = \frac{1}{4}|||u|||\,,\end{aligned}$$

en virtud de (1). En este caso la constante de coercividad es $\frac{1}{4}>0$.

Por tanto, tenemos una igualdad entre una forma bilineal, continua y coerciva y una forma lineal continual sobre $H_0^1(B(0,1))$ de la que deducimos la existencia de una única función $u\in H_0^1(B(0,1))$ que es solución del problema variacional

$$(P_V) = \left\{\begin{array}{rl}\text{encontrar} & u\in H_0^1(B(0,1))\\ \text{tal que} & a(u,\varphi)=F(\varphi),\ \forall\varphi\in H_0^1(B(0,1)).\end{array}\right.$$

Como comentamos en la parte teórica de este tema, el hecho de que $L^2(B(0,1))\subset H^{-1}(B(0,1))$ implica que la solución está, además, en $H^2(B(0,1))$, por lo que el problema (P) es satisfecho en casi todo punto de $B(0,1)$.

(iii) El teorema de Lax-Milgram no asegura que el problema (P) (o su equivalente variacional (P_V)) admita una formulación equivalente en términos de un problema de minimización, toda vez que el funcional $a(\cdot,\cdot)$ no es simétrico.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Consideramos las siguientes reacciones entre cuatro especies químicas A,B,C,D, con constantes de reacción $k_1,k_3,k_3>0$:

$$A+B\xrightarrow{k_1}C,\qquad C\xrightarrow{k_2}D,\qquad D\xrightarrow{k_3}2A$$

1. Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el comportamiento de las concentraciones a,b,c,d de las especies A,B,C,D.

2. Encuentra una ley de conservación que describa la conservación de la masa del sistema.

3. Dadas las concentraciones iniciales $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$, $c(0) = c_0$, $d(0) = d_0$, con $a_0, b_0, c_0, d_0 > 0$ como en el apartado anterior, ¿a qué equilibrio debe converger el sistema cuando $t \to +\infty$?

Solución 3. 1. Las ecuaciones ordinarias que se piden son

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a = -k_1 ab + 2k_3 d, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b = -k_1 ab, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c = k_1 ab - k_2 c, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}d = k_2 c - k_3 d.$$

2. Derivando y usando las ecuaciones anteriores Se puede ver que la cantidad $a(t)+b(t)+2c(t)+2d(t)$ es constante en tiempo.

3. Los equilibrios del sistema son de dos tipos:

$$a_\infty = \text{const.}, \qquad b_\infty = c_\infty = d_\infty = 0,$$

o bien

$$b_\infty = \text{const.}, \qquad a_\infty = c_\infty = d_\infty = 0.$$

Esperamos que el sistema converja a un equilibrio de los anteriores que además cumpla la ley de conservación. Si el equilibrio es del primer tipo esperamos que

$$a_\infty = a_0 + b_0 + 2c_0 + 2d_0,$$

y si es del segundo tipo esperamos que

$$b_\infty = a_0 + b_0 + 2c_0 + 2d_0.$$

De las ecuaciones se deduce que b es siempre no creciente, así que $b(t)$ no puede converger a un valor mayor que su valor inicial. Así que esperamos que

$$a(t) \to a_0 + b_0 + 2c_0 + 2d_0, \qquad b(t) \to 0,\ c(t) \to 0,\ d(t) \to 0$$

cuando $t \to +\infty$.