MODELOS MATEMÁTICOS II
CURSO 2019-20

JOSÉ LUIS LÓPEZ & JUAN SOLER

Ejercicios. Parte 2

EJERCICIO 1. Emplea la ley de acción de masas para escribir (y reducir al máximo) el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias asociado a cada uno de los siguientes procesos químicos:

(i) El dióxido de nitrógeno (NO_2) reacciona con monóxido de carbono (CO) para formar monóxido de nitrógeno (NO) y dióxido de carbono (CO_2) en dos fases:

$$2NO_2 \xrightarrow{k_1} NO + NO_3\,,$$
$$NO_3 + CO \xrightarrow{k_2} NO_2 + CO_2\,.$$

(ii) El proceso de hidrogenación del etileno (C_2H_4) para transformarse en etano (C_2H_6) puede explicarse en términos del siguiente mecanismo:

$$H_2 \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} 2H\,,$$
$$C_2H_4 + H \xrightarrow{k_2} C_2H_5\,,$$
$$C_2H_5 + H \xrightarrow{k_3} C_2H_6\,.$$

Encuentra en cada caso los estados de equilibrio.

Solución: (i) Se tiene

GRUPO A. EJERCICIOS

$$\begin{aligned}
\frac{d[NO_2]}{dt} &= k_2[NO_3][CO] - 2k_1[NO_2]^2\,,\\
\frac{d[NO]}{dt} &= k_1[NO_2]^2\,,\\
\frac{d[NO_3]}{dt} &= k_1[NO_2]^2 - k_2[NO_3][CO]\,,\\
\frac{d[CO]}{dt} &= -k_2[CO][NO_3]\,,\\
\frac{d[CO_2]}{dt} &= k_2[NO_3][CO]\,.
\end{aligned}$$

Emplearemos la siguiente notación para los datos iniciales: $[X](0) = [X]_0$. De las ecuaciones segunda y quinta se desprende que

$$\begin{aligned}
[NO](t) &= [NO]_0 + k_1\int_0^t [NO_2]^2(s)\,ds\\
&= k_1\int_0^t [NO_2]^2(s)\,ds\,, \qquad (1)\\
[CO_2](t) &= [CO_2]_0 + k_2\int_0^t [NO_3](s)[CO](s)\,ds\\
&= k_2\int_0^t [NO_3](s)[CO](s)\,ds\,, \qquad (2)
\end{aligned}$$

si asumimos de forma natural que $[NO]_0 = [CO_2]_0 = 0$. Por consiguiente, basta con resolver el siguiente sistema (cerrado) de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
\frac{d[NO_2]}{dt} &= k_2[NO_3][CO] - 2k_1[NO_2]^2\,,\\
\frac{d[NO_3]}{dt} &= k_1[NO_2]^2 - k_2[NO_3][CO]\,,\\
\frac{d[CO]}{dt} &= -k_2[CO][NO_3]\,,
\end{aligned}$$

para obtener también las expresiones de $[NO](t)$ y $[CO_2](t)$ a través de (1) y (2). Incluso puede observarse que $\frac{d}{dt}([NO_2]+2[NO_3]-[CO]) = 0$, luego $[CO](t) = [NO_2](t) + 2[NO_3](t) - K$, con $K \in \mathbb{R}$, y el sistema anterior quedaría reducido a

$$\begin{aligned}
\frac{d[NO_2]}{dt} &= k_2[NO_3]([NO_2]+2[NO_3]-K)-2k_1[NO_2]^2\,,\\
\frac{d[NO_3]}{dt} &= k_1[NO_2]^2-k_2[NO_3]([NO_2]+2[NO_3]-K)\,.
\end{aligned}$$

Los estados de equilibrio resultan de considerar $[NO_2]_{eq}=0$ (como se deduce de la ecuación para $[NO_2](t)$) y resolver el sistema

$$\begin{aligned}
0 &= k_2[NO_3][CO]-2k_1[NO_2]^2\,,\\
0 &= k_1[NO_2]^2-k_2[NO_3][CO]\,,\\
0 &= [CO][NO_3]\,.
\end{aligned}$$

Para que se satisfaga la tercera ecuación, o bien $[CO]_{eq}=0$ o bien $[NO_3]_{eq}=0$. En el primer caso se tiene

$$\begin{aligned}
&[CO]_{eq}=[NO_2]_{eq}=0\,,\\
&[NO]_{eq}=[NO]_0,\ [CO_2]_{eq}=[CO_2]_0,\ [NO_3]_{eq}=[NO_3]_0\,.
\end{aligned}$$

Si por el contrario se diera la segunda opción (es decir, $[NO_3]_{eq}=0$), entonces a los anteriores se unen los siguientes estados de equilibrio, razonando de forma análoga:

$$\begin{aligned}
&[NO_3]_{eq}=[NO_2]_{eq}=0\,,\\
&[CO]_{eq}=[CO]_0,\ [NO]_{eq}=[NO]_0,\ [CO_2]_{eq}=[CO_2]_0\,.
\end{aligned}$$

(ii) Se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d[H_2]}{dt} &= k_{-1}[H]^2-k_1[H_2]\,,\\
\frac{d[H]}{dt} &= 2k_1[H_2]-2k_{-1}[H]^2-k_2[C_2H_4][H]-k_3[C_2H_5][H]\,,\\
\frac{d[C_2H_4]}{dt} &= -k_2[C_2H_4][H]\,,\\
\frac{d[C_2H_5]}{dt} &= k_2[C_2H_4][H]-k_3[C_2H_5][H]\,,\\
\frac{d[C_2H_6]}{dt} &= k_3[C_2H_5][H]\,.
\end{aligned}$$

En este caso es fácil observar que la última ecuación puede reescribirse en forma integral como[1]

$$
\begin{aligned}
[C_2H_6](t) &= [C_2H_6]_0 + k_3 \int_0^t [C_2H_5](s)[H](s)\,ds \\
&= k_3 \int_0^t [C_2H_5](s)[H](s)\,ds \qquad (3)
\end{aligned}
$$

si asumimos de forma natural que $[C_2H_6]_0 = 0$, debido a lo cual el sistema diferencial se reduce a

$$
\begin{aligned}
\frac{d[H_2]}{dt} &= k_{-1}[H]^2 - k_1[H_2]\,, \\
\frac{d[H]}{dt} &= 2k_1[H_2] - 2k_{-1}[H]^2 - k_2[C_2H_4][H] - k_3[C_2H_5][H]\,, \\
\frac{d[C_2H_4]}{dt} &= -k_2[C_2H_4][H]\,, \\
\frac{d[C_2H_5]}{dt} &= k_2[C_2H_4][H] - k_3[C_2H_5][H]\,.
\end{aligned}
$$

Incluso se dispone de la siguiente ley de conservación:

$$
\frac{d}{dt}\big(2[H_2] + [H] - 2[C_2H_4] - [C_2H_5]\big) = 0\,,
$$

de donde se desprende que

$$
[C_2H_5](t) = 2[H_2](t) + [H](t) - 2[C_2H_4](t) - K\,, \quad K \in \mathbb{R}\,, \qquad (4)
$$

luego el sistema diferencial de partida se reduce a

$$
\begin{aligned}
\frac{d[H_2]}{dt} &= k_{-1}[H]^2 - k_1[H_2]\,, \\
\frac{d[H]}{dt} &= 2k_1[H_2] - 2k_{-1}[H]^2 - k_2[C_2H_4][H] - k_3[C_2H_5][H] \\
&= 2k_1[H_2] - 2k_{-1}[H]^2 - k_2[C_2H_4][H] \\
&\quad -k_3[H]\big(2[H_2] + [H] - 2[C_2H_4] - K\big)\,, \\
\frac{d[C_2H_4]}{dt} &= -k_2[C_2H_4][H]\,,
\end{aligned}
$$

suplementado por la relación (3).

Los estados de equilibrio resultan de resolver

[1] Emplearemos la misma notación para los datos iniciales que en el apartado anterior: $[X](0) = [X]_0$

$$
\begin{aligned}
0 &= k_{-1}[H]^2 - k_1[H_2]\,,\\
0 &= 2k_1[H_2] - 2k_{-1}[H]^2 - k_2[C_2H_4][H] - k_3[C_2H_5][H]\,,\\
0 &= [C_2H_4][H]\,,\\
0 &= k_2[C_2H_4][H] - k_3[C_2H_5][H]\,,\\
0 &= [C_2H_5][H]\,.
\end{aligned}
$$

Si $[H]_{eq} \neq 0$, entonces $[C_2H_4]_{eq} = [C_2H_5]_{eq} = 0$. La lista se completa con $[C_2H_6]_{eq} = [C_2H_6]_0$, $[H]_{eq} = [H]_0$ y $[H_2]_{eq} = \frac{k_{-1}}{k_1}[H]_0^2$.

Si $[H]_{eq} = 0$, entonces también ha de satisfacerse $[H_2]_{eq} = 0$, que se completa con $[C_2H_4]_{eq} = [C_2H_4]_0$, $[C_2H_5]_{eq} = [C_2H_5]_0$ y $[C_2H_6]_{eq} = [C_2H_6]_0$.

EJERCICIO 2. Se considera el siguiente sistema de reacciones químicas:

$$
\begin{aligned}
&A \xrightarrow{k_1} X\,,\\
&B + X \xrightarrow{k_2} Y + C\,,\\
&2X + Y \xrightarrow{k_3} 3X\,,\\
&X \xrightarrow{k_4} D\,,
\end{aligned}
$$

donde las concentraciones de A, B, C, D se suponen constantes.

(i) Emplea la ley de acción de masas para escribir las ecuaciones diferenciales del modelo.
(ii) Estudia las dimensiones de cada una de las ratios de las reacciones que participan en el proceso.
(iii) Se considera el tiempo adimensional $\tau = k_1 t$ y el cambio de variables

$$
u(\tau) = \sqrt{\frac{k_3}{k_1}}\,[X]\left(\frac{\tau}{k_1}\right)\,, \quad v(\tau) = \sqrt{\frac{k_3}{k_1}}\,[Y]\left(\frac{\tau}{k_1}\right)\,.
$$

Deduce el sistema de ecuaciones diferenciales satisfecho por u y v. ¿Admite solución? ¿Es única? Justifica la respuesta.
(iv) Determina los estados de equilibrio del sistema diferencial deducido en (iii).

Solución: (i) Como las concentraciones de A, B, C, D se suponen constantes, bastará con escribir las ecuaciones diferenciales satisfechas por

$[X]$, $[Y]$:

$$\begin{aligned}\frac{d[X]}{dt} &= k_1[A] - k_2[B][X] + k_3[Y][X]^2 - k_4[X]\,,\\ \frac{d[Y]}{dt} &= k_2[B][X] - k_3[Y][X]^2\,.\end{aligned}$$

(ii) Un análisis dimensional de la primera ecuación[2] nos conduce a

$$\frac{[[C]]}{[[T]]} = [[k_1]][[C]] + [[k_2]][[C]]^2 + [[k_3]][[C]]^3 + [[k_4]][[C]]\,,$$

de donde se desprende que

$$[[k_1]] = [[k_4]] = [[T]]^{-1}\,, \quad [[k_2]] = ([[C]][[T]])^{-1}\,, \quad [[k_3]] = ([[C]]^2[[T]])^{-1}\,.$$

(iii) Denotamos $[A](0) = A_0$ y $[B](0) = B_0$, por lo que $[A](t) = A_0$ y $[B](t) = B_0$ para todo $t \geq 0$. Derivando el cambio de variables se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= \sqrt{\frac{k_3}{k_1}}\frac{1}{k_1}\frac{d[X]}{dt}\left(\frac{\tau}{k_1}\right)\\ &= \sqrt{\frac{k_3}{k_1}}\frac{1}{k_1}\left[k_1A_0 - k_2B_0[X]\left(\frac{\tau}{k_1}\right) + k_3[Y]\left(\frac{\tau}{k_1}\right)[X]^2\left(\frac{\tau}{k_1}\right) - k_4[X]\left(\frac{\tau}{k_1}\right)\right]\\ &= \sqrt{\frac{k_3}{k_1}}A_0 - \frac{k_2}{k_1}B_0u + vu^2 - \frac{k_4}{k_1}u\,,\\ \frac{dv}{d\tau} &= \sqrt{\frac{k_3}{k_1}}\frac{1}{k_1}\frac{d[Y]}{dt}\left(\frac{\tau}{k_1}\right)\\ &= \sqrt{\frac{k_3}{k_1}}\frac{1}{k_1}\left[k_2B_0[X]\left(\frac{\tau}{k_1}\right) - k_3[Y]\left(\frac{\tau}{k_1}\right)[X]^2\left(\frac{\tau}{k_1}\right)\right]\\ &= \frac{k_2B_0}{k_1}u - vu^2\,.\end{aligned}$$

Por consiguiente, el sistema diferencial resuelto por $u(\tau)$, $v(\tau)$ responde a la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= vu^2 - (\alpha+\gamma)u + \beta\,,\\ \frac{dv}{d\tau} &= \gamma u - vu^2\,,\end{aligned}$$

con

$$\alpha = \frac{k_4}{k_1}\,, \quad \beta = \sqrt{\frac{k_3}{k_1}}A_0\,, \quad \gamma = \frac{k_2}{k_1}B_0\,.$$

[2] También podríamos hacerlo con la segunda para obtener las dimensiones de k_2 y k_3

El problema de valores iniciales asociado admite una única solución maximal dado que los segundos miembros son de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ (en particular, localmente lipschitzianos en las variables u, v).

(iv) Los estados de equilibrio del proceso son las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} 0 &= vu^2 - (\alpha+\gamma)u + \beta\,, \\ 0 &= \gamma u - vu^2\,, \end{aligned}$$

De la segunda ecuación de deduce que $uv = \gamma$, pues la posibilidad $u = 0$ no es válida para la primera ecuación (supuesto $A_0 > 0$, luego $\beta > 0$). Sustituyendo esta información en la primera ecuación obtenemos $u = \frac{\beta}{\alpha}$, luego $v = \frac{\alpha\gamma}{\beta}$. En consecuencia, solo hay un estado de equilibrio que viene dado por

$$(u_{eq}, v_{eq}) = \left(\frac{\sqrt{k_1 k_3}}{k_4} A_0, \frac{k_2 k_4}{\sqrt{k_1^3 k_3}} \frac{B_0}{A_0} \right) .$$

Si fuese $A_0 = 0$, entonces $\beta = 0$ y de la primera ecuación se deduciría $u_{eq} = 0$, quedando $v_{eq} = v_0$.

EJERCICIO 3. Considérese la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\,. \tag{5}$$

Se pide:

(i) Dada la función $\phi(x) = \pi e^{-2\pi|x|}$, comprueba que $\hat{\phi}(y) = \frac{1}{1+y^2}$.

(ii) Con la ayuda de (i), emplea el método de la transformada de Fourier para construir la solución de (5).

Solución: (i) Formalmente se tiene

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(y) &= \pi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi|x|} e^{-2\pi i x y}\, dx \\ &= \pi \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi x} e^{-2\pi i x y}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-2\pi x} e^{-2\pi i x y}\, dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1-iy} e^{2\pi x(1-iy)} \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1+iy} e^{-2\pi x(1+iy)} \Big|_{0}^{+\infty} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1-iy} + \frac{1}{1+iy} \right\} = \frac{1}{1+y^2}\,. \end{aligned}$$

En efecto, basta con separar las partes real e imaginaria para obtener

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(y) &= \pi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi|x|} e^{-2\pi i x y}\, dx \\ &= \pi \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi|x|} \cos(2\pi x y)\, dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi|x|} \operatorname{sen}(2\pi x y)\, dx \right\} \\ &= 2\pi \int_{0}^{+\infty} e^{-2\pi x} \cos(2\pi x y)\, dx = \frac{1}{1+y^2}\,,\end{aligned}$$

como se sigue de una simple integración por partes.[3]

(ii) Tomando la transformada de Fourier en la ecuación (5) se obtiene

$$4\pi^2 y^2 \hat{u}(y) + \hat{u}(y) = \hat{f}(y)\,,$$

en virtud de la propiedad de derivación establecida en la Proposición 2.2 (semana 8). Despejando $\hat{u}$ resulta

$$\hat{u}(y) = \frac{\hat{f}(y)}{1+4\pi^2 y^2} = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(y) \widehat{h_{\frac{1}{2\pi}}\phi}\,, \tag{6}$$

donde hemos empleado la Proposición 2.1 (semana 8). Finalmente, basta con tomar la transformada inversa de Fourier en (6) para obtener

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\big(f * h_{\frac{1}{2\pi}}\phi\big) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} f(y)\, dy\,.$$

EJERCICIO 4. Sea $u(t,x)$ la solución del problema de valores inicales para la ecuación del calor unidimensional $u_t = u_{xx}$ con dato inicial $u(0,x) = u_0(x) \geq 0$. Se definen los momentos de primer y segundo orden asociados a u como

$$M_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x u(t,x)\, dx\,, \quad M_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 u(t,x)\, dx\,,$$

respectivamente. Se pide:

(i) Comprueba que $M_1(t)$ es una cantidad que se conserva en el tiempo.

(ii) Comprueba que $M_2(t) = M_2(0) + 2M(0)t$ (luego no se conserva en el tiempo), donde $M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)\, dx$ denota la masa asociada a u.

[3]Nótese que la integral asociada a la parte imaginaria es nula porque el integrando es una función impar y el recinto de integración un intervalo simétrico. Análogamente, el integrando asociado a la parte real es una función par, por lo que $\int_{-\infty}^{+\infty} = 2\int_0^{+\infty}$

Solución: (i) Se tiene

$$\begin{aligned} M_1'(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x u_t(t,x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x u_{xx}(t,x)\,dx \\ &= x u_x \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u_x(t,x)\,dx = 0\,, \end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned} x u_x(t,x) &= \frac{x}{\sqrt{4\pi t}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\frac{1}{2t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(x-y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy\right) \to 0 \end{aligned}$$

cuando $|x| \to \infty$.

(ii) Se tiene

$$\begin{aligned} M_2'(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 u_t(t,x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 u_{xx}(t,x)\,dx \\ &= x^2 u_x \Big|_{-\infty}^{+\infty} - 2\int_{-\infty}^{+\infty} x u_x(t,x)\,dx \\ &= -2xu \Big|_{-\infty}^{+\infty} + 2\int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)\,dx\,, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $M_2'(t) = 2M(0)$ en virtud de la propiedad de conservación de la masa ($M(t) = M(0)$ para todo $t > 0$) y de que $xu \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. Por consiguiente, ha de ser

$$M_2(t) = M_2(0) + 2M(0)t\,.$$

EJERCICIO 5. Dada una ecuación de reacción-difusión, ¿podría haber ondas viajeras estrictamente crecientes? En caso afirmativo, ¿cómo sería la velocidad de propagación de las mismas en los modelos FKPP y biestable? Interpreta los resultados.

Solución: Consideremos la ecuación de reacción-difusión genérica

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(u(t,x))\,,$$

con $f(0) = f(1) = 0$. Buscamos perfiles de la forma $u(t,x) = U(x-ct)$, con U estrictamente creciente y tal que $U(-\infty) = 0$ y $U(+\infty) = 1$. Sustituyendo en la ecuación observamos que una condición necesaria es

$$U''(z) + cU'(z) + f(U(z)) = 0\,.$$

Multiplicando ahor por $U'(z)$ e integrando obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U'(z)U''(z)\,dz + c\int_{-\infty}^{+\infty} (U'(z))^2\,dz + \int_{-\infty}^{+\infty} U'(z)f(U(z))\,dz = 0\,.$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} U'(z)U''(z)\,dz &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dz}(U'(z))^2\,dz \\
&= \frac{1}{2}\big(U'(+\infty)^2 - U'(-\infty)^2\big) = 0\,, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} U'(z)f(U(z))\,dz &= \int_0^1 f(w)\,dw\,,
\end{aligned}$$

se llega a

$$c\int_{-\infty}^{+\infty} U'(z)^2\,dz = -\int_0^1 f(w)\,dw\,,$$

de donde se deduce que en el modelo FKPP ha de ser $c < 0$. En lo que concierne al modelo biestable hay que hacer una distinción de casos en función del valor que adopta la constante β, pues en este caso $\int_0^1 f(w)\,dw = -\frac{\beta}{6} + \frac{1}{12}$, que puede cambiar de signo:

$$\left\{\begin{array}{l} \beta < \frac{1}{2} \Rightarrow c < 0 \\ \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 0 \\ \beta > \frac{1}{2} \Rightarrow c > 0 \end{array}\right. .$$

EJERCICIO 6. Calcula, caso de que existan, soluciones decrecientes (no constantes) de tipo onda viajera para los siguientes problemas:

(i) La ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

(ii) La ecuación de Burger viscosa:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

Solución: Consideramos en ambos casos $D > 0$.

(i) El cambio de variables $u(t,x) = U(z)$, con $z = x - ct$, conduce a

$$-cU'(z) - DU''(z) = 0\,.$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$U(z) = A + Be^{-\frac{cz}{D}}\,,$$

donde A y B constantes de integración. Para que U sea constante en $\pm\infty$ se requiere que $B = 0$. Por tanto, la única posibilidad es que U sea constante y esto contradice la hipótesis de decrecimiento.

(ii) El cambio de variables $u(t,x) = U(z)$, con $z = x - ct$, conduce a

$$-cU'(z) + \frac{1}{2}\left(U(z)^2\right)' - DU''(z) = 0\,,$$

o equivalentemente

$$-cU(z) + \frac{1}{2}U(z)^2 - DU'(z) = B\,,$$

donde B es una constante de integración. Podemos escribir esta ecuación como[4]

$$\frac{dU}{dz} = \frac{1}{2D}\left(U^2 - 2cU - 2B\right)\,,$$

lo que conduce a

$$\int_{U(z_0)}^{U(z)} \frac{dV}{V^2 - 2cV - 2B} = \frac{z - z_0}{2D}.$$

Tratando el primer término como una integral racional, tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{dV}{V^2 - 2cV - 2B} &= -\frac{1}{V_2 - V_1}\int \left\{\frac{1}{V - V_1} + \frac{1}{V_2 - V}\right\} dV \\ &= \frac{1}{V_2 - V_1}\ln\left(\frac{V_2 - V}{V - V_1}\right)\,,\end{aligned}$$

donde $V_1 = c - \sqrt{c^2 + 2B}$ y $V_2 = c + \sqrt{c^2 + 2B}$ son las raíces del polinomio de segundo grado del denominador. Esto implica la condición $c^2 > -2B$ para que este tipo de ondas viajeras existan. Denotemos $H_0 = \frac{V_2 - U(z_0)}{U(z_0) - V_1} > 0$. Resolviendo la ecuación anterior resulta

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\sqrt{c^2 + 2B}}\ln\left(\frac{V_2 - U(z)}{H_0(U(z) - V_1)}\right) = \frac{z - z_0}{2D} \\ &\Rightarrow V_2 - U(z) = H_0\, e^{\frac{\sqrt{c^2+2B}}{D}(z - z_0)}(U(z) - V_1) \\ &\Rightarrow \left(1 + H_0\, e^{\frac{\sqrt{c^2+2B}}{D}(z - z_0)}\right)U(z) = V_2 + H_0 V_1\, e^{\frac{\sqrt{c^2+2B}}{D}(z - z_0)}\,,\end{aligned}$$

luego

$$U(z) = \frac{V_2 + H_0 V_1\, e^{k(z - z_0)}}{1 + H_0\, e^{k(z - z_0)}}\,,$$

[4] Los puntos de equilibrio de esta ecuación son $U_\pm = c \pm \sqrt{c^2 + 2B}$. Para que U sea constante en $\pm\infty$ se requiere $U_- < U < U_+$. En efecto, si fuese $U > U_+$ se tendría $\lim_{|z|\to\infty} U(z) = +\infty$, en tanto que si $U < U_-$ se tendría $\lim_{|z|\to\infty} U(z) = -\infty$

con $k = \frac{V_2 - V_1}{2D} = \frac{\sqrt{c^2+2B}}{D} > 0$.

Veamos finalmente que el perfil de la onda viajera es decreciente:

$$U'(z) = \frac{k e^{k(z-z_0)}}{\left(1 + H_0\, e^{k(z-z_0)}\right)^2} H_0 (V_1 - V_2) < 0\,.$$

La velocidad de la onda viajera es, por tanto, $c = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$.