MODELOS MATEMÁTICOS II
CURSO 2019-20

JOSÉ LUIS LÓPEZ & JUAN SOLER

Ejercicios. Parte 1

EJERCICIO 1. Calcula las extremales en cada uno de los siguientes casos y discute si en alguna de ellas el funcional correspondiente alcanza un mínimo para cualquier valor $\alpha \in (0, \pi)$:

(a) $\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \big(y'(x)^2 + y(x)^2 + 2xy(x)\big)\, dx$ en $\mathcal{D} \cap C^2(0,1)$, donde $\mathcal{D} = \big\{y \in C^1[0,1] : y(0) = 0,\, y(1) = \alpha \in \mathbb{R}\big\}$.

(b) $\mathcal{F}[y] = \int_0^\alpha \big(y'(x)^2 - y(x)^2\big)\, dx$ en $\mathcal{D} \cap C^2(0,\alpha)$, donde $\mathcal{D} = \big\{y \in C^1[0,1] : y(0) = 0,\, y(\alpha) = 1 \in \mathbb{R}\big\}$.

Solución: (a) Denotemos $p := y'$ y $F(x,y,p) := p^2 + y^2 + 2xy$. En este caso la ecuación de Euler-Lagrange (EL) asociada es

$$0 = 2y + 2x - \frac{d}{dx}(2p) \Rightarrow y'' - y = x\,.$$

Es claro que $y_p(x) = -x$ es una solución particular de la ecuación anterior, por lo que su solución general vendrá dada por

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x} - x\,.$$

Imponiendo ahora las condiciones de contorno obtenemos las relaciones $A+B = 0$, $Ae + \frac{B}{e} = \alpha+1$, de donde se desprende que la única extremal del problema de minimización es

$$y_e(x) = \frac{\alpha+1}{e - \frac{1}{e}}\big(e^x - e^{-x}\big) - x = (\alpha+1)\frac{\operatorname{senh}(x)}{\operatorname{senh}(1)} - x\,.$$

En este caso tanto $\mathcal{F}$ como $\mathcal{D}$ son convexos cualquiera que sea $\alpha \in (0,\pi)$, luego existe el mínimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ y es y_e.

(b) En este caso $F(x,y,p) := p^2 - y^2$ y la ecuación de EL asociada es $y'' + y = 0$, cuya solución general viene dada por $y(x) =$

GRUPO A. EJERCICIOS

$A\cos(x) + B\,\mathrm{sen}(x)$. Imponiendo las condiciones de contorno se obtiene $A = 0$, $B = \frac{1}{\mathrm{sen}(\alpha)}$, luego la única extremal asociada a este problema de minimización es $y_e(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\mathrm{sen}(\alpha)}$. Por otra parte, el Hessiano de F es indefinido (tiene valores propios tanto positivos como negativos). Por consiguiente, a la luz de los criterios estudiados en clase no puede afirmarse que el funcional tenga mínimo a menos que $\mathcal{F}$ sea convexo sin que lo sea F. De hecho, este es exactamente nuestro caso. Incluimos aquí el argumento que garantiza la existencia de mínimo a título meramente informativo.[1]. Verificaremos en primer lugar que si la derivada de Fréchet del funcional satisface

$$\mathcal{F}'[y-z](y-z) \geq 0 \quad \forall y, z \in \mathcal{D}\,, \tag{1}$$

entonces $\mathcal{F}$ es convexo. Para ello bastará con comprobar que la función $u(\lambda) := \mathcal{F}[\lambda y + (1-\lambda)z] - \lambda\mathcal{F}[y] - (1-\lambda)\mathcal{F}[z]$ satisface la propiedad $u(\lambda) \leq 0$ para todo $0 \leq \lambda \leq 1$. Razonaremos por reducción al absurdo, asumiendo que existe $0 < a < 1$ para el que $u(a) > 0$. Sea también $0 < b < 1$ tal que $u(b) = \max_{0\leq\lambda\leq 1}\{u(\lambda)\}$, en cuyo caso se tiene $u'(b) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
u'(\lambda) = u'(\lambda) - u'(b) &= \mathcal{F}'[\lambda y + (1-\lambda)z](y-z) - \mathcal{F}[y] + \mathcal{F}[z] \\
&\quad -\mathcal{F}'[by + (1-b)z](y-z) + \mathcal{F}[y] - \mathcal{F}[z] \\
&= \big(\mathcal{F}'[\lambda y + (1-\lambda)z] - \mathcal{F}'[by + (1-b)z]\big)(y-z) \\
&= (\mathcal{F}'[Y] - \mathcal{F}'[Z])\left(\frac{Y-Z}{\lambda - b}\right) \geq 0
\end{aligned}$$

para todo $\lambda > b$ en virtud de (1), donde hemos denotado $Y = \lambda y + (1-\lambda)z$, $Z = by + (1-b)z$. En consecuencia se tendría que u es creciente a la derecha de b, lo cual es contradictorio con el hecho de que $u(1) = 0$.

Por consiguiente, es suficiente con que demostremos que se satisface la propiedad (1) para determinar que $\mathcal{F}$ es convexo. En nuestro caso

$$\mathcal{F}'[y](\varphi) = 2\int_0^\alpha y'(x)\varphi'(x)\,dx - 2\int_0^\alpha y(x)\varphi(x)\,dx\,,$$

luego

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'[y-z](y-z) &= 2\int_0^\alpha (y'(x) - z'(x))^2\,dx - 2\int_0^\alpha (y(x) - z(x))^2\,dx \\
&\geq 2\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1\right)\int_0^\alpha (y(x) - z(x))^2\,dx \geq 0\,,
\end{aligned}$$

[1] No se exige para la correcta resolución del ejercicio

donde se ha empleado la siguiente desigualdad de Poincaré en dimensión uno (con el valor óptimo de la constante):

$$\|y\|_{L^2(0,\alpha)} \leq \frac{\alpha}{\pi}\|y'\|_{L^2(0,\alpha)}\,.$$

$\square$

EJERCICIO 2. Encuentra las extremales y, caso de existir, el mínimo del funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 y'(x)^2 + x^2 y'(x)\right) dx$$

en $\mathcal{D} \cap C^2(1,2)$, donde $\mathcal{D} = \big\{y \in C^1[1,2] :\ y(1) = 0\big\}$.

Solución: Denotamos $F(x,y,p) := \frac{1}{2}x^2p^2 + x^2p$, de modo que la ecuación de EL asociada al problema de minimización es

$$0 = -\frac{d}{dx}(x^2p + x^2) \Rightarrow x^2y'' + 2xy' + 2x = 0\,,$$

que es del tipo Euler. Haciendo el cambio de variables $x = e^z$, $y(x) = u(z)$, obtenemos

$$y'(x) = \frac{du}{dz}\frac{1}{x} = \frac{du}{dz}e^{-z}\,,$$
$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dz}e^{-z}\right) = e^{-z}\left(-\frac{du}{dz}e^{-z} + \frac{d^2u}{dz^2}e^{-z}\right) = e^{-2z}\left(\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{du}{dz}\right)\,,$$

lo que se traduce en $u'' + u' = -2e^z$, de donde se deduce que ha de ser $u' + u = A - 2e^z$ con $A \in \mathbb{R}$. La solución general de la correspondiente ecuación homogénea es $u_h(z) = Ke^{-z}$, con $K \in \mathbb{R}$. Empleando ahora el método de variación de las constantes consideramos $u(z) = K(z)e^{-z}$ para obtener

$$K'(z)e^{-z} = A - 2e^z \Rightarrow K(z) = Ae^z - e^{2z} + B\,, \quad B \in \mathbb{R}\,.$$

En consecuencia

$$u(z) = A + Be^{-z} - e^z\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Deshaciendo el cambio de variables llegamos a

$$y(x) = A + \frac{B}{x} - x\,.$$

Imponemos finalmente las condiciones de contorno. La primera de ellas viene determinada por el propio dominio: $y(1) = 0$. La segunda procede de la relación $F_p(2, y(2), y'(2)) = 0$, que en nuestro caso se traduce en $4(y'(2)+1) = 0$ o, equivalentemente, $y'(2) = -1$. Entonces resulta

$$A + B - 1 = 0\,, \quad -\frac{B}{4} - 1 = -1\,,$$

de donde se sigue que $A = 1$, $B = 0$. Por consiguiente, la única extremal asociada al problema de minimización propuesto viene dada por $y_e(x) = 1 - x$. Tanto el funcional como el dominio son convexos, por lo que necesariamente $\mathcal{F}$ alcanza en y_e su mínimo en $\mathcal{D}$.

$\square$

EJERCICIO 3. [Principio de máxima entropía] Maximiza el siguiente funcional de entropía

$$\mathcal{F}[y] = -\int_0^\infty y(x)\ln(y(x))\,dx$$

en $\mathcal{D} \cap C^2(\mathbb{R}^+)$, donde

$$\begin{aligned}\mathcal{D} \;=\; \Big\{ & 0 < y \in C^1[0,\infty) : \, y(0) = a > 0, \, \lim_{x\to\infty} y(x) = 0, \\ & \int_0^\infty y(x)\,dx = 1, \, \int_0^\infty xy(x)\,dx = \frac{1}{a}\Big\}\,.\end{aligned}$$

Solución: El problema planteado equivale a minimizar el funcional $\widetilde{\mathcal{F}}[y] = \int_0^\infty y(x)\ln(y(x))\,dx$ en $\mathcal{D} \cap C^2(\mathbb{R}^+)$. Se trata de un problema de optimización con ligaduras, por lo que definimos $F^\star(x, y, p) := y\ln(y) - \lambda y - \mu xy$. La ecuación de EL asociada es $\ln(y) + 1 - \lambda - \mu x = 0$, de donde resulta $y(x) = e^{\mu x + \lambda - 1}$. Imponiendo ahora las condiciones de contorno se llega a que $e^{\lambda - 1} = a$ y a que debe elegirse $\mu < 0$ para que se satisfaga la condición límite en infinito. Verifiquemos finalmente las ligaduras: por una parte

$$1 = \int_0^\infty y(x)\,dx = \int_0^\infty e^{\mu x + \lambda - 1}\,dx = a\int_0^\infty e^{\mu x}\,dx = -\frac{a}{\mu}\,,$$

de donde se desprende que ha de ser $\mu = -a$. Por otra parte, la segunda ligadura es siempre satisfecha:

$$\int_0^\infty xy(x)\,dx = a\int_0^\infty xe^{-ax}\,dx = a\left(-\frac{x}{a}e^{-ax}\Big|_0^\infty + \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\,dx\right) = \frac{1}{a}\,.$$

Por consiguiente, la única extremal asociada al problema de minimización es $y_e(x) = ae^{-ax}$. Tanto el funcional como el dominio son convexos, por lo que el mínimo de $\widetilde{\mathcal{F}}$ (o, equivalentemente, el máximo de $\mathcal{F}$) existe y se alcanza en $y_e(x)$.

$\square$

EJERCICIO 4. Obtén una condición necesaria para que una función y (suficientemente regular) sea un mínimo local del funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_a^b \int_a^b K(x,z)y(x)y(z)\,dz\,dx + \int_a^b \big(y(x)^2 - 2y(x)f(x)\big)\,dx\,,$$

donde $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas dadas y K es simétrica ($K(x,z) = K(z,x)$).

(*Sugerencia:* deriva el funcional en el sentido de Fréchet y repite los argumentos que condujeron a la deducción que se hizo en clase de la ecuación de EL)

Solución: Para cualquier función test $\varphi \in C_0(a,b)$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[y+\epsilon\varphi] &= \int_a^b \int_a^b K(x,z)(y+\epsilon\varphi)(x)(y+\epsilon\varphi)(z)\,dz\,dx \\ &\quad + \int_a^b \big((y+\epsilon\varphi)(x)^2 - 2(y+\epsilon\varphi)(x)f(x)\big)\,dx\,, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon}\mathcal{F}[y+\epsilon\varphi] &= \int_a^b \int_a^b K(x,z)\varphi(x)(y+\epsilon\varphi)(z)\,dz\,dx \\ &\quad + \int_a^b \int_a^b K(x,z)(y+\epsilon\varphi)(x)\varphi(z)\,dz\,dx \\ &\quad + \int_a^b (2(y+\epsilon\varphi)(x)\varphi(x) - 2\varphi(x)f(x))\,dx\,. \end{aligned}$$

Evaluando en $\epsilon = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon}\mathcal{F}[y+\epsilon\varphi]\Big|_{\epsilon=0} &= \int_a^b \int_a^b K(x,z)\varphi(x)y(z)\,dz\,dx \\ &\quad + \int_a^b \int_a^b K(x,z)y(x)\varphi(z)\,dz\,dx \\ &\quad + \int_a^b (2y(x)\varphi(x) - 2\varphi(x)f(x))\,dx \\ &= \int_a^b \int_a^b (2K(x,z)y(z) + 2y(x) - 2f(x))\,\varphi(x)\,dx\,. \end{aligned}$$

Igualando a cero la expresión anterior deducimos, con base en el teorema fundamental del cálculo de variaciones, que debe cumplirse

$$\int_a^b K(x,z)y(z)\,dz + y(x) = f(x)\,.$$

$\square$

EJERCICIO 5. Explica cómo resolver mediante el método de separación de variables el problema de la ecuación de ondas en $0 \le x \le L$ si la condición de contorno en $x = 0$ es de Dirichlet homogénea y la condición de contorno en $x = L$ es de Neumann homogénea. En el caso de la cuerda vibrante esta situación corresponde a una cuerda fija en un extremo y libre en el otro. Resuelve el problema para una cuerda libre en los dos extremos.

Solución: Consideremos la ecuación $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ planteada en $[0,\infty) \times [0,L]$, con condiciones de contorno asociadas $u(t,0) = 0$, $u_x(t,L) = 0$. Si planteamos el método de separación de variables $u(t,x) = T(t)w(x)$, obtendríamos $T''(t)w(x) - c^2 T(t)w''(x) = 0$, o equivalentemente

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2\frac{w''(x)}{w(x)} = -\lambda \in \mathbb{R}\,,$$

lo que da lugar a dos problemas independientes. El primero de ellos consiste en encontrar las soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden $w''(x) + \frac{\lambda}{c^2}w(x) = 0$, sujetas a las siguientes condiciones de contorno: $w(0) = w_x(L) = 0$. Para valores del parámetro $\lambda \le 0$, la única solución posible es la trivial. Si $\lambda > 0$, entonces la solución general viene dada por

$$w(x) = A\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x\right)\,.$$

Al aplicar las condiciones de contorno obtenemos

$$A = 0\,, \quad \frac{B\sqrt{\lambda}}{c}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c}L\right) = 0\,,$$

de donde se desprende que los valores propios son de la forma $\lambda_n = \left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi c}{L}\right)^2$ y las funciones propias $w_n(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{L}x\right)$, con $n \in \mathbb{N}$. El resto del proceso sigue los pasos del desarrollo teórico expuesto en las notas de clase correspondientes a la semana 5. Ahora resolvemos $T_n''(t) + \left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi c}{L}\right)^2 T_n(t) = 0$, de donde se obtiene

$$T_n(t) = A\cos\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi c}{L}t\right) + B\operatorname{sen}\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi c}{L}t\right) ,$$

por lo que se propone como solución un perfil de la forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi c}{L}t\right) + B_n\operatorname{sen}\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi c}{L}t\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{L}x\right) .$$

Partiendo de datos iniciales arbitrarios $u(0,x) = \varphi(x)$ y $u_t(0,x) = \psi(x)$ se tendría

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\operatorname{sen}\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{L}x\right) , \tag{2}$$

$$\psi(x) = \frac{\pi c}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)B_n\operatorname{sen}\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{L}x\right) . \tag{3}$$

Para calcular los coeficientes A_n podemos multiplicar (2) por $\operatorname{sen}\left(\frac{(m-\frac{1}{2})\pi}{L}x\right)$ e integrar entre 0 y L, de donde se obtiene

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \varphi(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(m-\frac{1}{2})\pi}{L}x\right)\,dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(m-\frac{1}{2})\pi}{L}x\right)\,dx \\
&= A_m\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{(m-\frac{1}{2})\pi}{L}x\right)^2\,dx = \frac{L}{2}A_m\,.
\end{aligned}$$

Se procede análogamente en (3) para calcular B_n.

En el caso de una cuerda libre en los dos extremos ($w_x(t,0) = w_x(t,L) = 0$) se tiene

$$B = 0\,,\quad \frac{A\sqrt{\lambda}}{c}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c}L\right) = 0\,,$$

de donde se deduce que los valores propios son ahora

$$\lambda_0 = 0\,,\quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2,\ n\in\mathbb{N}\,,$$

por lo que las funciones propias vienen dadas por

$$w_0(x) = \text{constante}\,,\quad w_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\ n\in\mathbb{N}\,.$$

Resolviendo la ecuación para $T(t)$ obtenemos

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t\,, \quad T_n(t) = A\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right),\ n \in \mathbb{N},$$

por lo que se propone como solución un perfil de la forma

$$u(t,x) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Partiendo de datos iniciales arbitrarios $u(0,x) = \varphi(x)$ y $u_t(0,x) = \psi(x)$ se tiene

$$\varphi(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,, \tag{4}$$

$$\psi(x) = B_0 + \frac{\pi c}{L}\sum_{n=1}^{\infty} nB_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,. \tag{5}$$

Para calcular los coeficientes A_n podemos multiplicar (4) por $\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ e integrar entre 0 y L, de donde se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^L \varphi(x)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\,dx\\ &= A_m\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)^2\,dx = \frac{L}{2}A_m\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.\end{aligned}$$

Por otra parte, para calcular A_0 basta con integrar (4) entre 0 y L:

$$\int_0^L \varphi(x)\,dx = A_0 L\,.$$

Se procede análogamente en (5) para calcular B_n.

EJERCICIO 6. Resuelve explícitamente el problema asociado a la ecuación de ondas en $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, con velocidad $c = 1$, correspondiente a los datos iniciales

$$u(0,x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \le 2 \\ x-2, & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \\ 4-x, & \text{si} \quad 3 \le x \le 4 \\ 0, & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$$

y $u_t(0,x) = 0$. Dibuja el dominio de influencia de la condición inicial y el dominio de dependencia de un punto genérico (t,x), señalando en la gráfica los valores no nulos de la solución. ¿Para qué valores de $t > 0$ se cumple $u(t,0) \neq 0$? Dibuja la solución en tiempo $t = 2$. Resuelve el problema mixto con los mismos datos iniciales y con condiciones de Dirichlet homogéneas en el intervalo $0 \le x \le 6$.

(Nota aclaratoria: pese a que el dato inicial no satisface aparentemente las condiciones de regularidad que permiten aplicar con rigor los teoremas de la semana 5, procédase sin tener esto en cuenta)

Solución: La solución del problema la define la fórmula de D'Alembert:

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x+t \le 2 \\ \frac{x+t-2}{2}, & \text{si} \quad 2 \le x+t \le 3 \quad y \quad x-t \le 2 \\ x-2, & \text{si} \quad 2 \le x+t \le 3 \quad y \quad 2 \le x-t \le 3 \\ \frac{4-x-t}{2}, & \text{si} \quad 3 \le x+t \le 4 \quad y \quad x-t \le 2 \\ 1-t, & \text{si} \quad 3 \le x+t \le 4 \quad y \quad 2 \le x-t \le 3 \\ 4-x, & \text{si} \quad 3 \le x+t \le 4 \quad y \quad 3 \le x-t \le 4 \\ 0, & \text{si} \quad x+t \ge 4 \quad y \quad x-t \le 2 \\ \frac{x-t-2}{2}, & \text{si} \quad x+t \ge 4 \quad y \quad 2 \le x-t \le 3 \\ \frac{4-x+t}{2}, & \text{si} \quad x+t \ge 4 \quad y \quad 3 \le x-t \le 4 \\ 0, & \text{si} \quad x-t \ge 4 \end{cases}.$$

El soporte de la función $u(0,\cdot)$ está contenido en el intervalo $(2,4)$. Por tanto, su dominio de influencia viene dado por la figura siguiente, que está delimitada por las rectas $x = 2-t$ (por la izquierda) y $x = 4+t$ (por la derecha):

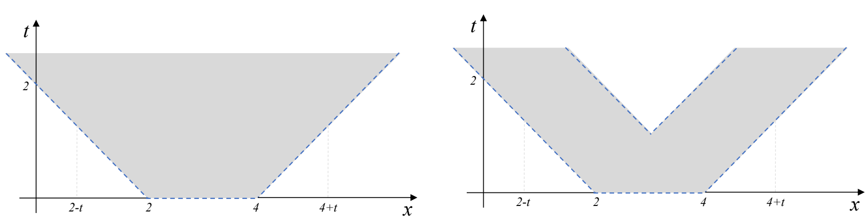

FIGURA 1. Dominio de influencia del intervalo $[2,4]$. En la Figura derecha se ha eliminado la zona en la que la solución es cero, como pedía el enunciado

Para un punto genérico (t,x), su dominio de dependencia lo representa la siguiente figura:

De la Figura deducimos que $u(t,0) \neq 0$ para $t > 2$.

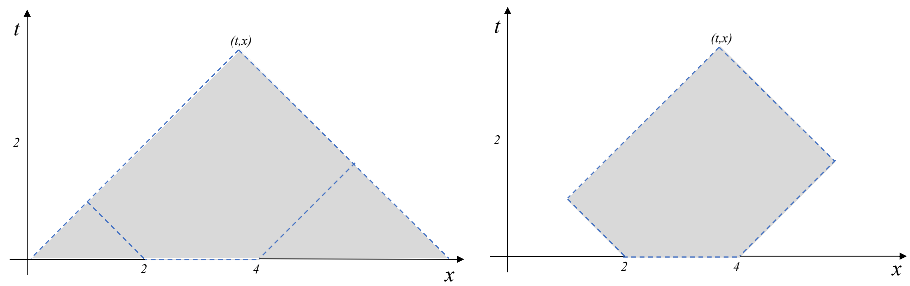

FIGURA 2. Dominio de dependencia del punto (t,x). Se han dejado en la figura derecha los valores para los que la función es no nula.

La solución para $t=2$ es (nótese que basta con adaptar la expresión de la solución general para este valor de t)

$$u(t=2,x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x\leq 0 \\ \frac{x}{2}, & \text{si} \quad 0\leq x\leq 1 \\ \frac{2-x}{2}, & \text{si} \quad 1\leq x\leq 2 \\ 0, & \text{si} \quad 2\leq x\leq 4 \\ \frac{x-4}{2}, & \text{si} \quad 4\leq x\leq 5 \\ \frac{6-x}{2}, & \text{si} \quad 5\leq x\leq 6 \\ 0, & \text{si} \quad x\geq 6 \end{cases},$$

y su gráfica tiene la siguiente forma:

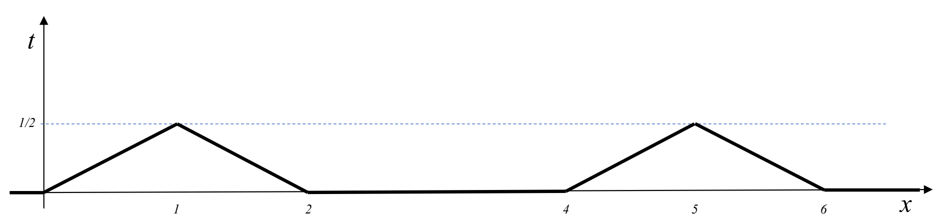

FIGURA 3. Representación gráfica de la función $u(t=2,x)$.

Para el problema mixto usamos el método de separación de variables: $u(t,x)=T(t)w(x)$, de donde resulta $T''(t)w(x)-T(t)w''(x)=0$, o equivalentemente

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{w''(x)}{w(x)}=-\lambda\in\mathbb{R}\,.$$

Aplicando las condiciones de contorno (Dirichlet homogéneas) se obtiene $w(0)=w(6)=0$, de donde se sigue que los valores propios asociados al problema de contorno para la ecuación $w''(x)+\lambda w(x)=0$ son $\lambda_n=$

$\left(\frac{n\pi}{6}\right)^2$ y las funciones propias son los múltiplos de $w_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{6}x\right)$, con $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, la ecuación diferencial $T_n'' + \left(\frac{n\pi}{6}\right)^2 T_n = 0$ tiene por solución general

$$T_n(t) = A\cos\left(\frac{n\pi}{6}t\right) + B\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{6}t\right)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Buscamos una solución que sea una superposición de las funciones $T_n(t)w_n(x)$, es decir:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi}{6}t\right) + B_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{6}t\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{6}x\right).$$

Imponemos finalmente las condiciones iniciales. De $u_t(0,x) = 0$ se deduce inmediatamente que $B_n = 0$. Los coeficientes A_n se calculan mediante el Teorema 4.2 de la semana 5, dado que $u(0,x) := \varphi(x)$ es continua, tiene derivada continua a trozos y satisface $\varphi(0) = \varphi(6) = 0$. Se tiene entonces que $A_n = \varphi_n$, donde

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= \frac{1}{3}\int_0^6 \varphi(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{6}x\right)dx \\
&= \frac{1}{3}\left[\int_2^3 (x-2)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{6}x\right)dx + \int_3^4 (4-x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{6}x\right)dx\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\int_2^3 x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{6}x\right)dx - \int_3^4 x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{6}x\right)dx\right] \\
&\quad + \frac{2}{n\pi}\left[6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 4\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right] \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[4\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - 6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right] \\
&\quad + \frac{12}{(n\pi)^2}\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right] \\
&\quad + \frac{2}{n\pi}\left[6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 4\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right] \\
&= \frac{12}{(n\pi)^2}\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right].
\end{aligned}$$

EJERCICIO 7. Resuelve el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad \text{en } [0,\infty)\times[0,L] \\ u(0,x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{L}x\right) + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{L}x\right), \quad x\in[0,L] \\ u_t(0,x) = 0, \quad x\in[0,L] \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \ \text{en } [0,\infty) \end{cases}$$

Solución: El problema planteado satisface las hipótesis del Teorema 4.1. (semana 5) en el intervalo $I=[0,L]$, con $\varphi(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$ (que es una función de clase C^2 con derivada tercera continua a trozos) y $\psi \equiv 0$ (que es obviamente una función de clase C^1 con derivada segunda continua a trozos). En efecto, es inmediato verificar que $0 = \varphi(0) = \varphi(L) = \varphi''(0) = \varphi''(L) = \psi(0) = \psi(L)$. Además, la solución es única en virtud del método de la energía. Procedemos a continuación a calcular dicha solución. Emplearemos para ello el método de separación de variables: $u(t,x) = T(t)w(x)$, que en nuestro caso se traduce en $T''(t)w(x) - c^2T(t)w''(x) = 0$, o equivalentemente

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2\frac{w''(x)}{w(x)} = -\lambda \in \mathbb{R},$$

lo que da lugar a dos problemas independientes. El primero de ellos consiste en encontrar las soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden $w''(x) + \frac{\lambda}{c^2}w(x) = 0$, sujetas a las siguientes condiciones de contorno: $w(0) = w(L) = 0$. Se trata de un problema de Sturm-Liouville que admite por valores propios a todos los de la forma $\lambda_n = \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2$ y por funciones propias a los múltiplos de $w_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, con $n\in\mathbb{N}$. El segundo problema a resolver es, pues, la ecuación diferencial $T_n'' + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T_n = 0$, cuya solución general es

$$T_n(t) = A\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right), \quad A,B\in\mathbb{R}.$$

Nuestra candidata a solución será, por consiguiente, una superposición definida de la siguiente forma:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Solo nos queda imponer las condiciones iniciales para saber cómo hemos de elegir los coeficientes A_n y B_n en la expresión anterior. Se tiene:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{L}x\right),$$

$$u_t(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0\,.$$

Por tanto, ha de ser $B_n = 0$ para todo $n \geq 1$, $A_1 = 1$, $A_3 = \frac{1}{2}$ y $A_n = 0$ para cualquier $n \neq 1, 3$. Por consiguiente, la única solución a nuestro problema viene dada por

$$u(t,x) = \cos\left(\frac{\pi c}{L}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi c}{L}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{L}x\right).$$

EJERCICIO 8. Resuelve el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + x^2, & \text{en } [0,\infty)\times[0,1] \\ u(0,x) = x^3 - x, & x \in [0,1] \\ u_t(0,x) = 0, & x \in [0,1] \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & \text{en } [0,\infty) \end{cases}$$

(*Sugerencia: emplea un procedimiento similar al del Ejercicio 2 de la semana 5).*

Solución: Buscamos una solución que sea de la forma

$$u(t,x) = u_p(x) + u_h(t,x)\,, \tag{6}$$

donde $u_p(x)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea

$$(u_p)_{tt} = c^2 (u_p)_{xx} + x^2 \tag{7}$$

sujeta a las condiciones de contorno

$$u_p(0) = u_p(1) = 0\,, \tag{8}$$

en tanto que $u_h(t,x)$ proviene de resolver la ecuación homogénea

$$(u_h)_{tt} = c^2 (u_h)_{xx} \tag{9}$$

junto con las condiciones de contorno

$$u_h(t,0) = u_h(t,1) = 0 \tag{10}$$

y los datos iniciales

$$u_h(0,x) = x^3 - x - u_p(x)\,, \quad (u_h)_t(0,x) = 0\,, \tag{11}$$

conforme a (6). Para estas u_p y u_h se tendría

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = 0 + (u_h)_{tt} = c^2(u_h)_{xx}\,,\\
&c^2u_{xx} + x^2 = c^2(u_p)_{xx} + c^2(u_h)_{xx} + x^2 = (u_p)_{tt} + c^2(u_h)_{xx} = c^2(u_h)_{xx}\,,\\
&u(0,x) = u_p(x) + u_h(0,x) = u_p(x) + x^3 - x - u_p(x) = x^3 - x\,,\\
&u_t(0,x) = 0 + (u_h)_t(0,x) = 0\,,\\
&u(t,0) = u_p(0) + u_h(t,0) = 0\,,\\
&u(t,1) = u_p(1) + u_h(t,1) = 0\,,
\end{aligned}$$

en virtud de (6) y (11). Luego la función construida en (6) sería, en efecto, la solución de nuestro problema.

Etapa 1: cálculo de u_p. Como $u_p(x)$ no depende de t, al sustituir en la ecuación (7) resulta $c^2u_p'' = -x^2$, de donde se desprende (sin más que integrar dos veces) que

$$u_p(x) = -\frac{1}{12c^2}x^4 + Ax + B\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Imponiendo las condiciones de contorno (8) resulta $B = 0$ y $A = \frac{1}{12c^2}$, luego

$$u_p(x) = \frac{1}{12c^2}x(1 - x^3)\,.$$

Etapa 2: cálculo de u_h. Buscamos ahora una solución de la ecuación (9) sujeta a las condiciones de contorno e iniciales (10) y (11), respectivamente. El método de variables separadas nos proporciona soluciones de la forma $u(t,x) = T(t)w(x)$, de modo que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2\frac{w''(x)}{w(x)} = -\lambda \in \mathbb{R}\,,$$

lo que da lugar a dos problemas independientes. El primero de ellos consiste en encontrar las soluciones de $w''(x) + \frac{\lambda}{c^2}w(x) = 0$ sujetas a las condiciones de contorno $w(0) = w(1) = 0$. En este caso los valores propios son $\lambda_n = (n\pi c)^2$ y las funciones propias $w_n(x) = \mathrm{sen}(n\pi x)$, con $n \in \mathbb{N}$. El segundo problema a resolver es $T_n'' + (n\pi c)^2T_n = 0$, cuya solución general es

$$T_n(t) = A\cos(n\pi ct) + B\,\mathrm{sen}\,(n\pi ct)\;, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

La solución que buscamos será, por consiguiente, una superposición definida de la siguiente forma:

$$u_h(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(n\pi ct) + B_n\,\mathrm{sen}\,(n\pi ct)\right]\mathrm{sen}(n\pi x)\,.$$

Solo nos queda imponer las condiciones iniciales para saber cómo hemos de elegir los coeficientes A_n y B_n en la expresión anterior. Se tiene:

$$u_h(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\pi x) = x^3 - x - \frac{1}{12c^2}x(1-x^3)\,,$$
$$(u_h)_t(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi c B_n \operatorname{sen}(n\pi x) = 0\,.$$

Por una parte, se tiene que $B_n = 0$ para todo $n \geq 1$. Para identificar los coeficientes A_n usaremos el Teorema 4.2 de la semana 5. Se tiene

$$x^3 - x - \frac{1}{12c^2}x(1-x^3) = \sum_n \alpha_n \operatorname{sen}(n\pi x)\,,$$

con

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= 2\int_0^1 \left(\frac{1}{12c^2}x^4 + x^3 - \left(1+\frac{1}{12c^2}\right)x\right)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx \\
&= \frac{1}{6c^2}\left(-\frac{x^4}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 + \frac{4}{n\pi}\int_0^1 x^3\cos(n\pi x)\,dx\right) \\
&+ 2\left(-\frac{x^3}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 + \frac{3}{n\pi}\int_0^1 x^2\cos(n\pi x)\,dx\right) \\
&- 2\left(1+\frac{1}{12c^2}\right)\left(-\frac{x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{6c^2}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{12}{(n\pi)^2}\int_0^1 x^2\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx\right) \\
&+ \frac{6}{n\pi}\int_0^1 x^2\cos(n\pi x)\,dx + \frac{1}{6c^2}\frac{(-1)^n}{n\pi} \\
&= \frac{6}{n\pi}\int_0^1 x^2\cos(n\pi x)\,dx - \frac{2}{(cn\pi)^2}\int_0^1 x^2\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx \\
&= \frac{6}{n\pi}\left(\frac{x^2}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx\right) \\
&= -\frac{2}{(cn\pi)^2}\left(-\frac{x^2}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx\right) \\
&= \frac{2}{c^2(n\pi)^5}\left[4 + (-1)^n\left((1+6c^2)(n\pi)^2 - 2\right)\right].
\end{aligned}$$

EJERCICIO 9. Una cuerda de longitud π, con los extremos fijos e inicialmente en reposo, es desplazada de su posición inicial $u(0,x) =$

$\varphi(x)$. Su movimiento está frenado por la resistencia del aire, que es proporcional a la velocidad en cada punto, de modo que la ecuación del movimiento puede escribirse de la siguiente forma:

$$u_{tt} = u_{xx} - 2\beta u_t\,, \quad x \in [0,\pi]\,,$$

con $0 < \beta < 1$. Calcula la expresión general de la solución.

Solución: Que la cuerda tenga los extremos fijos significa que $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$. Por otra parte, que esté inicialmente en reposo se traduce en $u_t(t,x) = 0$. Por consiguiente, el problema a resolver es

$$\left\{\begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} - 2\beta u_t, \quad \text{en } [0,\infty) \times [0,\pi] \\ u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,\pi] \\ u_t(0,x) = 0, \quad x \in [0,\pi] \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ \text{ en } [0,\infty) \end{array}\right. .$$

Emplearemos para ello el método de separación de variables: $u(t,x) = T(t)w(x)$, que al sustituir en la ecuación de ondas de nuestro problema resulta en $T''(t)w(x) - T(t)w''(x) + 2\beta T'(t)w(x) = 0$, o equivalentemente

$$\frac{T''(t) + 2\beta T'(t)}{T(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = -\lambda \in \mathbb{R}\,,$$

lo que da lugar a dos problemas independientes. El primero de ellos consiste en resolver la ecuación diferencial $w''(x) + \lambda w(x) = 0$ junto con las condiciones de contorno $w(0) = w(\pi) = 0$. Los valores propios son en este caso $\lambda_n = n^2$ y las funciones propias $w_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$, con $n \in \mathbb{N}$. Como consecuencia, la ecuación diferencial que hay que resolver para encontrar $T(t)$ es $T_n''(t) + 2\beta T_n'(t) + n^2 T_n(t) = 0$, cuya solución general es

$$T_n(t) = e^{-\beta t}\left(A\cos(\sqrt{n^2-\beta^2}\,t) + B\operatorname{sen}(\sqrt{n^2-\beta^2}\,t)\right)\,,$$

pues la ecuación característica $\mu^2 + 2\beta\mu + n^2 = 0$ tiene por raíces $\mu_\pm = -\beta \pm i\sqrt{n^2-\beta^2}$. La solución que buscamos será, por consiguiente, una superposición definida de la siguiente forma:

$$u(t,x) = e^{-\beta t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(\sqrt{n^2-\beta^2}\,t) + B_n\operatorname{sen}(\sqrt{n^2-\beta^2}\,t)\right)\operatorname{sen}(nx)\,.$$

Imponiendo finalmente las condiciones iniciales resulta

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx) = \varphi(x)\,,$$

$$u_t(0,x) = -\beta \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{n^2-\beta^2}\operatorname{sen}(nx) = 0\,,$$

luego $A_n = \varphi_n$ (esto es, los coeficientes que aparecen en el desarrollo del Teorema 4.2 en las notas de la semana 5) y

$$B_n = \frac{\beta\varphi_n}{\sqrt{n^2-\beta^2}}\,,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, la solución buscada es

$$u(t,x) = e^{-\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos(\sqrt{n^2-\beta^2}\,t) + \frac{\beta\varphi_n}{\sqrt{n^2-\beta^2}} \operatorname{sen}(\sqrt{n^2-\beta^2}\,t) \right) \operatorname{sen}(nx)\,.$$

EJERCICIO 10. Sea $B(0,1/2) \subset \mathbb{R}^2$ la bola centrada en el origen de $\mathbb{R}^2$ y de radio $1/2$. Discute para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ la función $f : B(0,1/2) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |\ln|x||^k$ pertenece a $H^1(B(0,1/2))$.

Solución: Las derivadas débiles de primer orden de f son de la forma

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = k \ \mathrm{signo}(\ln|x|) \frac{x_i}{|x|^2} |\ln|x||^{k-1}\,.$$

Para verificar las propiedades de integrabilidad tanto de f como de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ introducimos coordenadas polares. Por una parte, se tiene

$$\|f\|^2_{L^2(B(0,1/2))} = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} r(\ln r)^{2k}\, dr < \infty\,,$$

pues $\lim_{r\to 0}\{r|\ln r|^{2k}\} = 0$ cualquiera que sea $k \in \mathbb{R}$. Por otra parte, necesitamos elegir $k < \frac{1}{2}$ para que la siguiente integral tenga sentido:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(B(0,1/2))} &= 2\pi k^2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r}(\ln r)^{2k-2}\, dr \\
&= 2\pi k^2 \left((\ln r)^{2k-1}\Big|_0^{\frac{1}{2}} - (2k-2)\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r}\ln r (\ln r)^{2k-3}\, dr \right) \\
&= 2\pi k^2 \left(\left(\ln\frac{1}{2}\right)^{2k-1} - (2k-2)\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r}(\ln r)^{2k-2}\, dr \right)\,,
\end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r}(\ln r)^{2k-2}\,dr = \frac{(\ln \frac{1}{2})^{2k-1}}{2k-1}\,,$$

luego

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(B(0,1/2))} = \frac{2\pi k^2 (\ln \frac{1}{2})^{2k-1}}{2k-1} < \infty\,.$$

Por consiguiente, basta con elegir $k < \frac{1}{2}$ para asegurar que $f \in H^1(B(0,1/2))$.

EJERCICIO 11. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y regular, proporciona ejemplos de que las siguientes inclusiones no son ciertas en general:

(i) $L^2(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$.
(ii) $H^2(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$.
(iii) $H^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.
(iv) $L^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.
(v) $H^1(\Omega) \subset C(\Omega)$.

Solución: (i) La función característica de un subconjunto $\omega \subset \Omega$. (ii) Cualquier función de clase $C^2(\Omega)$ que no se anule sobre la frontera. (iii) La del Ejercicio 10. (iv) $f(x) = \frac{1}{|x|}$ en $\Omega = B(0,1)$. (v) La función de Dirichlet.

EJERCICIO 12. Sean $u \in H^2(\mathbb{R}^2)$ y

$$u_n(x,y) = n^{-a}\, u(n^{-b}x, n^{-c}y)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Encuentra $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,, \\ \|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \frac{1}{n^2}\,\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,, \\ \|\Delta u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \frac{1}{n^4}\,\|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,. \end{aligned}$$

¿Se puede afirmar que la sucesión $\{u_n\}$ es acotada en $H^2(\mathbb{R}^2)$?

Solución: En primer lugar tenemos

$$\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = n^{-a+\frac{b+c}{2}}\,\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,,$$

luego ha de cumplirse

$$2a = b + c\,. \tag{12}$$

En segundo lugar

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = n^{-a}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left|\Big(n^{-b}\frac{\partial u}{\partial x}, n^{-c}\frac{\partial u}{\partial y}\Big)(n^{-b}x, n^{-c}y)\right|^2 dy\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\,,$$

de donde concluimos que ha de ser

$$a = 2\,,\quad b = c\,. \tag{13}$$

Finalmente

$$\|\Delta u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = n^{-a}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left|\Big(n^{-2b}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + n^{-2c}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)(n^{-b}x, n^{-c}y)\Big)\right|^2 dy\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\,,$$

luego

$$a + b = 4\,. \tag{14}$$

Combinando (12), (13) y (14) obtenemos $a = b = c = 2$. La sucesión $\{u_n\}$ es acotada en $H^2(\mathbb{R}^2)$, en tanto que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,,\\
\|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \frac{1}{n^2}\,\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,,\\
\|\Delta u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \frac{1}{n^4}\,\|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,.
\end{aligned}$$

EJERCICIO 13. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio acotado y $f, g_1, \ldots, g_d \in L^2(\Omega)$. Demuestra que el problema de contorno

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta u = f - \mathrm{div}\,(g) \text{ en } \Omega\\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{15}$$

admite una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$. Si es posible, caracterízala como la solución de un problema de minimización.

Solución: La formulación débil asociada al problema (15) es

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx = \int_\Omega (f - \mathrm{div}\,(g))\varphi\,dx$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ (véase (a) en la página 19 de las notas de la semana 4). Podemos plantearnos en tal caso aplicar el teorema de Lax-Milgram con las siguientes elecciones:

$$H = H_0^1(\Omega)\,, \quad a(u,\varphi) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx\,, \quad F(\varphi) = \int_\Omega (f - \mathrm{div}\,(g))\varphi \, dx\,.$$

El funcional $a(\cdot,\cdot)$ es claramente bilineal y simétrico. La continuidad de $a(\cdot,\cdot)$ se sigue de

$$|a(u,\varphi)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}\,.$$

Por otra parte, la coercividad de $a(\cdot,\cdot)$ es consecuencia de

$$a(u,u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = |||u|||^2_{L^2(\Omega)}\,. \tag{16}$$

(véase el ítem (ii) del Ejercicio 3 de la semana 4). Finalmente,

$$\begin{aligned} |F(\varphi)| &= \left| \int_\Omega (f - \mathrm{div}\,(g))\varphi \, dx \right| = \left| \int_\Omega (f\varphi + g \cdot \nabla \varphi) \, dx \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \big) \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}\,, \end{aligned}$$

por lo que $F : H_0^1 \to \mathbb{R}$ es lineal y continua. Por consiguiente, el teorema de Lax-Milgram garantiza la existencia y unicidad de solución débil de (15) en $H_0^1(\Omega)$. Además, dicha solución puede verse como el mínimo del siguiente funcional:

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \|\nabla \varphi\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega (f - \mathrm{div}\,(g))\varphi \, dx\,.$$

EJERCICIO 14. Se considera el siguiente problema:

$$(P) = \left\{ \begin{array}{rll} -\epsilon \Delta u + \beta(x) \cdot \nabla u + \alpha(x) u &= f(x) & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

donde Ω es un compacto de $\mathbb{R}^d$ con frontera $\partial\Omega$ regular, $\epsilon > 0$, $\alpha \in C^0(\Omega)$, $\beta \in C^0(\Omega)^d$ una función vectorial y $f \in L^2(\Omega)$.

(i) Plantea la formulación variacional del problema.[2]

(ii) Suponiendo que

$$\int_\Omega \Big(\beta(x) \cdot \nabla \varphi(x)\, \varphi(x) + \alpha(x) \varphi(x)^2 \Big) dx \geq 0 \tag{17}$$

[2]Es decir, encuentra un espacio de Hilbert X, un funcional bilineal $a : X \times X \to \mathbb{R}$ y un funcional lineal $F : X \to \mathbb{R}$ tales que el problema (P) pueda reescribirse de la forma $a(u,v) = F(v)$, para todo $v \in X$

para toda función φ definida en el espacio funcional del ítem (i), demuestra que existe una única solución del problema (P).

(iii) ¿Permite el teorema de Lax-Milgram asociar al problema variacional anterior un problema de minimización? Justifica la respuesta.

Solución: (i) El espacio de Hilbert con el que vamos a trabajar, motivado por las condiciones de contorno, es $H_0^1(\Omega)$. Definimos la forma bilineal $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$a(u,\varphi) = \int_\Omega \Big(\epsilon \nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x) + \beta(x) \cdot \nabla u(x)\, \varphi(x) + \alpha(x) u(x)\varphi(x)\Big)\, dx\,.$$

Es fácil de comprobar, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que la forma bilineal está bien definida a partir de las propiedades de α, β (que son funciones continuas sobre el compacto Ω y, por tanto, acotadas) y del hecho de que $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$. Por otra parte, definimos la forma lineal $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ del siguiente modo:

$$F(v) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx\,.$$

De nuevo, podemos asegurar que F está bien definida para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

(ii) Usemos el teorema de Lax-Milgram para dar respuesta a este apartado. La forma bilineal es continua ya que

$$\begin{aligned} |a(u,\varphi)| &\leq \epsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \max\{\epsilon, \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}\} |||u|||\, |||\varphi|||\,, \end{aligned}$$

donde hemos considerado $||| \cdot |||$ (definida en (16)), que es una norma equivalente a la usual en $H_0^1(\Omega)$ (de ahí la constante C).

Igualmente, F es continua en $H_0^1(\Omega)$ ya que

$$|F(\varphi)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} |||\varphi|||\,.$$

Por otro lado, la forma bilineal es coerciva puesto que

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega \Big(\epsilon |\nabla u(x)|^2 + \beta(x) \cdot \nabla u(x)\, u(x) + \alpha(x) u(x)^2\Big) dx \\ &\geq \epsilon \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx = \epsilon |||u|||\,, \end{aligned}$$

en virtud de (17). En este caso la constante de coercividad es $\epsilon > 0$.

Por tanto, tenemos una igualdad entre una forma bilineal, continua y coerciva y una forma lineal continual sobre $H_0^1(\Omega)$ de la que deducimos la existencia de una única función $u \in H_0^1(\Omega)$ que es solución del problema variacional

$$(P_V) = \begin{cases} \text{encontrar} & u \in H_0^1(\Omega) \\ \quad \text{tal que} & a(u,\varphi) = F(\varphi),\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Como comentamos en la parte teórica de este tema, el hecho de que $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ implica que la solución está, además, en $H^2(\Omega)$, por lo que el problema (P) es satisfecho en casi todo punto de Ω.

(iii) El teorema de Lax-Milgram no asegura que el problema (P) (o su equivalente variacional (P_V)) admita una formulación equivalente en términos de un problema de minimización, toda vez que el funcional $a(\cdot,\cdot)$ no es simétrico.

EJERCICIO 15. Sean $I = [0,1]$ y $\alpha, \beta \in C^\infty(I)$ tales que

$$\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0\,, \quad \beta(x) \geq \beta_0 > 0\,, \quad \forall x \in [0,1]\,.$$

Sea también $f \in L^2(I)$. Se considera el siguiente problema: encontrar $u \in H^4(0,1)$ tal que

$$(P) = \begin{cases} u^{4)}(x) - (\alpha(x)u'(x))' + \beta(x)u(x) &= f(x), \quad x \in (0,1) \\ u(0) = u''(0) = u(1) = u'(1) = 0 \end{cases} .$$

(i) Teniendo en cuenta que $H^2(0,1) \subset C^1(0,1)$, plantea una formulación variacional del problema (P).
(ii) Prueba que el problema variacional establecido en (i) admite una única solución.
(iii) Prueba que la solución del problema variacional planteado en (i) es solución de (P), sabiendo que la solución del problema variacional está en $H^4(0,1)$.
(iv) ¿Permite el teorema de Lax-Milgram asociar al problema variacional anterior un problema de minimización? Justifica la respuesta.

Solución: (i) Consideramos el espacio

$$V = \Big\{\varphi \in H^2(0,1),\ \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi'(1) = 0\Big\}. \tag{18}$$

Como $H^2(0,1) \subset C^1(0,1)$, la derivada de primer orden está bien definida pero la derivada segunda no; es por ello que $\varphi''(0)$ no aparece en la definición de V. Hay que probar (ejercicio) que V es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $H^2(0,1)$, en cuyo caso se tendría que V

es también un espacio de Hilbert (con el produto escalar heredado de $H^2(0,1)$).

Multiplicamos (P) por $\varphi \in V$ e integramos por partes en $[0,1]$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx &= -\int_0^1 \Big(u^{3)}\varphi' + \alpha u'\varphi' + \beta u\varphi\Big)dx + u^{3)}\varphi\Big]_0^1 - \alpha u'\varphi\Big]_0^1 \\
&= \int_0^1 \Big(u''\varphi'' + \alpha u'\varphi' + \beta u\varphi(x)\Big)dx - u''\varphi'\Big]_0^1 \\
&= \int_0^1 \Big(u''\varphi'' + \alpha u'\varphi' + \beta u\varphi\Big)dx\,.
\end{aligned}
$$

Como partimos de una función $u \in H^4(0,1)$ (en particular, $u'' \in H^2(0,1) \subset C^1(0,1)$), se tiene que las derivadas segunda y tercera de u están definidas en todo punto, lo que permite afirmar que todos los términos de frontera desaparecen. Por tanto, definimos la forma bilineal $a : V \times V \to \mathbb{R}$ como

$$
a(u,v) = \int_0^1 \Big(u''\varphi'' + \alpha u'\varphi' + \beta u\varphi\Big)dx\,,
$$

y la forma lineal $F : V \to \mathbb{R}$ como

$$
F(v) = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx\,.
$$

El problema variacional queda definido como sigue:

$$
(P_V) = \left\{ \begin{array}{rl} \text{encontrar} & u \in V \\ \text{tal que} & a(u,\varphi) = F(\varphi),\ \forall \varphi \in V \end{array} \right. .
$$

(ii) La aplicación $a(\cdot,\cdot)$, claramente bilineal, también es continua:

$$
\begin{aligned}
|a(u,\varphi)| &\le \|u''\|_{L^2(0,1)}\|\varphi''\|_{L^2(0,1)} + \|\alpha\|_{L^\infty(0,1)}\|u'\|_{L^2(0,1)}\|\varphi'\|_{L^2(0,1)} \\
&\quad + \|\beta\|_{L^\infty(0,1)}\|u\|_{L^2(0,1)}\|\varphi\|_{L^2(0,1)} \\
&\le C\|u\|_{H^2(0,1)}\|\varphi\|_{H^2(0,1)}\,,
\end{aligned}
$$

con $C = \max\{1, \|\alpha\|_{L^\infty(0,1)}, \|\beta\|_{L^\infty(0,1)}\}$. Además, es coerciva en V:

$$
\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_0^1 \Big((u'')^2 + \alpha(u')^2 + \beta u^2\Big)dx \\
&\ge \min\{1, \alpha_0, \beta_0\}\|u\|^2_{H^2(0,1)}\,.
\end{aligned}
$$

Finalmente, F es continua en V:

$$
|F(\varphi)| \le \|f\|_{L^2(0,1)}\|\varphi\|_{L^2(0,1)} \le \|f\|_{L^2(0,1)}\|\varphi\|_{H^2(0,1)}\,.
$$

Por tanto, el Teorema de Lax-Milgram asegura que existe una única solución $u \in V \subset H^2(0,1)$.

(iii) Como $u \in V \cap H^4(0,1)$, basta con integrar por partes dos veces en la ecuación variacional, usando las condiciones de contorno de V, para llegar a

$$\int_0^1 \Big(u^{4)} - (\alpha u')' + \beta u - f\Big)\varphi \, dx - u''(0)\varphi'(0) = 0.$$

Como esta igualdad debe satisfacerse para toda función $\varphi \in V$, podemos restringirnos a las que verifiquen $\varphi'(0) = 0$. Como además $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ y $\varphi \in V \subset C^1(0,1)$, deducimos que

$$u^{4)} - (\alpha u')' + \beta u = f.$$

Finalmente, para un elemento $\varphi \in V$ genérico (es decir, que no ha de satisfacer necesariamente $\varphi'(0) = 0$) deducimos que necesariamente $u''(0) = 0$, lo que completa las condiciones del problema (P).

(iv) Puesto que la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica, el teorema de Lax-Milgram asegura que el problema (P) (y su problema variacional asociado (P_V)) es equivalente a

$$(P_M) = \begin{cases} \text{encontrar} \quad u \in V \\ \quad \text{tal que} \quad \mathcal{F}[u] = \min_{\varphi \in V} \mathcal{F}[\varphi], \quad \mathcal{F}[\varphi] = \dfrac{1}{2} a(\varphi,\varphi) - F(\varphi) \end{cases}.$$

EJERCICIO 16. [Teorema de Noether] Considérense $0 < x_0 < x_1$ y el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} x y'(x)^2 \, dx \,, \tag{19}$$

junto con la siguiente transformación:

$$\widetilde{x} = \phi(x,y;\epsilon) = e^{e^{2\epsilon} \ln x} \,, \quad \widetilde{y} = \psi(x,y;\epsilon) = y e^{\epsilon} \,. \tag{20}$$

(i) Demuestra que se cumple

$$\phi(\widetilde{x},\widetilde{y};\nu) = \phi(x,y;\epsilon+\nu) \,, \quad \psi(\widetilde{x},\widetilde{y};\nu) = \psi(x,y;\epsilon+\nu) \,,$$

para cualesquiera $\epsilon, \nu \in \mathbb{R}$.

(ii) Demuestra que

$$\int_a^b x y'(x)^2 \, dx = \int_{\phi(a,y(a);\epsilon)}^{\phi(b,y(b);\epsilon)} \widetilde{x} \, \widetilde{y}'(\widetilde{x})^2 \, d\widetilde{x}$$

para cualquier subintervalo $[a,b] \subset [x_0, x_1]$.

(iii) Para transformaciones uniparamétricas que cumplen la propiedad de simetría establecida en (ii), el teorema de Noether afirma que la magnitud

$$N(x,y,y') := F_{y'} B + \big(F - y' F_{y'}\big) A$$

es constante sobre cualquier extremal de

$$\mathcal{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\, dx\,,$$

donde

$$A(x, y) = \frac{d}{d\epsilon}\phi(x, y; \epsilon)\Big|_{\epsilon=0}\,, \quad B(x, y) = \frac{d}{d\epsilon}\psi(x, y; \epsilon)\Big|_{\epsilon=0}$$

son los llamados *generadores* de la transformación.

Calcula los generadores y encuentra la magnitud conservada $N(x, y, y')$ para el funcional (19) y la transformación (20).

(iv) Emplea la ecuación de Euler-Lagrange asociada al funcional (19) para comprobar que $N(x, y, y')$ es constante sobre las extremales de $\mathcal{F}$.

(v) Encuentra todas las extremales de $\mathcal{F}$ que satisfacen $y(1) = 1$ y $N(x, y, y') = 0$.

Solución: (i) Se tiene

$$\begin{aligned}\phi(\widetilde{x}, \widetilde{y}; \nu) &= e^{e^{2\nu}\ln\widetilde{x}} = e^{e^{2\nu}e^{2\epsilon}\ln x} = \phi(x, y; \epsilon+\nu)\,,\\ \psi(\widetilde{x}, \widetilde{y}; \nu) &= \widetilde{y}e^{\nu} = ye^{\epsilon}e^{\nu} = \psi(x, y; \epsilon+\nu)\,.\end{aligned}$$

(ii) En virtud de la regla de la cadena, se tiene

$$\begin{aligned}\widetilde{x}\,\widetilde{y}'(\widetilde{x})^2 d\widetilde{x} &= \widetilde{x}\left(\frac{d\widetilde{y}}{dy}y'(x)\frac{dx}{d\widetilde{x}}\right)^2 d\widetilde{x} = \widetilde{x}\left(e^{\epsilon}y'(x)e^{-2\epsilon}\frac{x}{\widetilde{\widetilde{x}}}\right)^2 e^{2\epsilon}x^{e^{2\epsilon}-1}\,dx\\ &= \frac{1}{\widetilde{\widetilde{x}}}\big(xy'(x)\big)^2 x^{e^{2\epsilon}-1}\,dx = xy'(x)^2\,dx\,.\end{aligned}$$

(iii) Se tiene

$$A(x, y) = \big(2e^{2\epsilon}\widetilde{x}\ln x\big)\Big|_{\epsilon=0} = 2x\ln x\,, \quad B(x, y) = \widetilde{y}\Big|_{\epsilon=0} = y\,.$$

Por consiguiente,

$$N(x, y(x), y'(x)) = F_{y'}B + \big(F - y'F_{y'}\big)A = 2xy'(x)\big(y(x) - x\ln x\, y'(x)\big)\,.$$

(iv) La ecuación de EL es

$$0 = F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = -\frac{d}{dx}(2xy'(x))\,. \tag{21}$$

Por tanto, para cualquier solución de (21) se satisface

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}N(x,y(x),y'(x)) &= \frac{d}{dx}(2xy'(x))\big(y(x)-xy'(x)\ln x\big)\\ &\quad+2xy'(x)\big(-y'(x)\ln x-xy''(x)\ln x\big)\\ &= \frac{d}{dx}(2xy'(x))\big(y(x)-2xy'(x)\ln x\big)\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

(v) La solución general de (21) es $y(x)=C_1\ln x+C_2$, con $C_1,C_2\in\mathbb{R}$. Como ha de ser $y(1)=1$, necesariamente $C_2=1$. Por otra parte, al evaluar N en $\big(y(x)=C_1\ln x+1, y'(x)=\frac{C_1}{x}\big)$ obtenemos $N=2C_1$, que únicamente se anula si $C_1=0$. Por consiguiente, la única extremal que satisface las condiciones pedidas es la constante $y\equiv 1$.

EJERCICIO 17. Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[y]=\int_{-1}^{1}(x+2)^2(y'(x))^2\,dx$$

definido en

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \Bigg\{y\in C_0^1(-1,1),\ \int_{-1}^{1}y^2(x)\,dx=1,\\ &\qquad \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{sen}\Big(\frac{3\pi}{\ln 3}\ln(x+2)\Big)y(x)\,dx=0\Bigg\}.\end{aligned}$$

¿Tiene $\mathcal{F}$ mínimo en $\mathcal{D}\cap C^2(-1,1)$? En caso afirmativo, calcúlalo e indica en qué función se alcanza.

Solución: Denotamos $p=y'$, $F(x,y,p)=(2+x)^2p^2$,

$$F^*(x,y,p)=F(x,y,p)-\lambda y^2-\frac{\mu}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{sen}\Big(\frac{3\pi}{\ln 3}\ln(x+2)\Big)y\,.$$

La ecuación de EL asociada a F^* es

$$\begin{aligned}0 &= F_y^*-\frac{d}{dx}F_p^*\\ &= F_y-2\lambda y-\frac{\mu}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{sen}\Big(\frac{3\pi}{\ln 3}\ln(x+2)\Big)-\frac{d}{dx}F_p\\ &= -2\lambda y-\frac{\mu}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{sen}\Big(\frac{3\pi}{\ln 3}\ln(x+2)\Big)-2\frac{d}{dx}\big((x+2)^2p\big)\\ &= -2(x+2)^2y''-4(x+2)y'-2\lambda y-\frac{\mu}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{sen}\Big(\frac{3\pi}{\ln 3}\ln(x+2)\Big),\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$(x+2)^2y'' + 2(2+x)y' + \lambda y + \frac{\mu}{2\sqrt{x+2}} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{\ln 3}\ln(x+2)\right) = 0\,,$$

con condiciones de contorno $y(-1) = y(1) = 0$. Si verificamos que

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{\ln 3}\ln(x+2)\right) \tag{22}$$

es una función propia del problema de contorno homogéneo

$$(x+2)^2y'' + 2(2+x)y' + \lambda y = 0\,, \quad y(-1) = y(1) = 0\,, \tag{23}$$

entonces el problema de minimización planteado entraría en la categoría de problemas isoperimétricos, cuyas soluciones fueron estudiadas en las notas de clase correspondientes a la semana 2.

Para resolver (23) empleamos el cambio de variables propio de las ecuaciones diferenciales de tipo Euler: $x + 2 = e^z$, $y(x) = u(z)$, de donde resulta

$$y'(x) = \frac{du}{dz}\frac{1}{x+2} = \frac{du}{dz}e^{-z}\,,$$
$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dz}e^{-z}\right) = e^{-z}\left(-\frac{du}{dz}e^{-z} + \frac{d^2u}{dz^2}e^{-z}\right) = e^{-2z}\left(\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{du}{dz}\right)\,,$$

lo que se traduce en

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + \lambda u = 0\,, \tag{24}$$

con condiciones de contorno asociadas

$$u(0) = u(\ln(3)) = 0\,. \tag{25}$$

Para valores $\lambda \le \frac{1}{4}$ la única solución del problema anterior es la trivial. Por tanto, los valores propios hay que buscarlos en el rango $\lambda > \frac{1}{4}$, en cuyo caso la solución general de (24) es

$$u(z) = e^{-\frac{z}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}z\right) + B\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}z\right)\right) \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Imponiendo las condiciones de contorno (25) se obtiene

$$A = 0\,, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\ln(3)\right) = 0\,,$$

de donde se desprende que los valores propios son de la forma

$$\lambda_n = \frac{1}{4}\left[1 + \left(\frac{2n\pi}{\ln(3)}\right)^2\right]\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

en tanto que las funciones propias son

$$\Phi_n(z) = Ke^{-\frac{z}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ln(3)} z\right) , \quad K \in \mathbb{R} .$$

Deshaciendo el cambio de variable se tiene

$$\Phi_n(x) = \frac{K}{\sqrt{x+2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ln(3)} \ln(x+2)\right) ,$$

luego la función Φ de (22) coincide con Φ_3. Basándonos entonces en la teoría de problemas isoperimétricos (Teorema 1.1 de las notas de clase correspondientes a la semana 2 y posibles variaciones del mismo) podemos concluir que el mínimo de $\mathcal{F}$ se alcanza en $\Phi_1(x) = \frac{K}{\sqrt{x+2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ln(3)} \ln(x+2)\right)$ y vale $\lambda_1 = \frac{1}{4}\left[1 + \left(\frac{2\pi}{\ln(3)}\right)^2\right]$. Para calcular K basta con imponer que se cumplan las ligaduras. La segunda se cumple automáticamente por la propiedad de ortogonalidad de las funciones propias (véase la Nota 1.2 en la documentación de la semana 2). Para que se cumpla la primera se requiere que

$$\begin{aligned} 1 &= K^2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{x+2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ln(3)} \ln(x+2)\right)^2 dx \\ &= \frac{K^2 \ln(3)}{\pi} \left(\frac{\frac{\pi}{\ln(3)} \ln(x+2)}{2} - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\ln(3)} \ln(x+2)\right)}{4} \right) \Bigg]_{-1}^{1} \\ &= \frac{K^2}{2} \ln(3) , \end{aligned}$$

luego $K = \pm\sqrt{\frac{2}{\ln(3)}}$. En conclusión, $\mathcal{F}$ alcanza el mínimo en las funciones $\Phi_1 = \pm\sqrt{\frac{2}{\ln(3)}} \frac{1}{\sqrt{x+2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ln(3)} \ln(x+2)\right)$ y $\mathcal{F}[\Phi_1] = \lambda_1$.