DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Matemáticas. 22 de enero de 2015 (Prueba 3).

Nombre ____ **Grupo** ________________

1. Indica las afirmaciones que sean correctas.

(a) Si $x'(t) = x(t)^3 - t^2$ y $x(1) = 1$, entonces $x'(1) = 0$.

(b) La función $f(x) = e^{-2x}$ es una solución de la ecuación en diferencias $x_{n+1} = -2x_n$.

(c) De un modelo de Leslie para tres grupos de edad se conoce su valor propio dominante: $\lambda = 0.8$, así como un vector propio asociado: $v = (50, 30, 20)^t$. En tal caso, la población se estabilizará a largo plazo del siguiente modo: 50 individuos en el primer grupo, 30 individuos en el segundo y 20 en el tercero.

(d) Si $x' = 3(x - 2)$, entonces $x'' = 3$.

(e) Ninguna de las anteriores.

Solución: *(a) VERDADERO, dado que $x'(1) = x(1)^3 - 1^2 = 1^3 - 1^2 = 0$. (b) ABSURDO, puesto que una solución de una ecuación en diferencias es una lista de números y no una función. (c) FALSO. Como $\lambda < 1$, la población tiende a extinguirse a largo plazo. (d) Un DISPARATE.*[1]

2. La evolución de una determinada especie de hormiga de la pampa, sometida al acecho depredador de los pichiciegos, viene representada por la siguiente ecuación diferencial:

$$P'(t) = 0.2P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{\alpha}\right) - dP(t)\,,$$

donde $d > 0$ es el coeficiente que determina el ritmo de depredación y $\alpha > 0$ es un parámetro biológico. Inicialmente se dispone de 2000 hormigas ($P(0) = 2$) para llevar a cabo el estudio.

(a) El modelo tiene siempre dos puntos de equilibrio, cualesquiera que sean los valores (positivos) que tomen α y d.

(b) En este modelo α es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

(c) Si $\alpha = 5$ y $d = 0.1$ la población de hormigas tiende a 2500 a largo plazo.

(d) Si $\alpha = 7$ y $d = 0.15$ la población de hormigas decrece.

(e) Ninguna de las anteriores.

Solución: *(a) FALSO. El cálculo de los puntos de equilibrio resulta de resolver la ecuación*

$$0.2P\left(1 - \frac{P}{\alpha}\right) - dP = 0 \Rightarrow P\left[0.2\left(1 - \frac{P}{\alpha}\right) - d\right] = 0\,,$$

luego o bien $P = 0$ o bien

$$0.2\left(1 - \frac{P}{\alpha}\right) - d = 0 \Rightarrow \frac{0.2P}{\alpha} = 0.2 - d \Rightarrow P = \frac{\alpha(0.2 - d)}{0.2}\,.$$

Del cálculo anterior se desprende que hay dos puntos de equilibrio a menos que $d = 0.2$, en cuyo caso el único punto de equilibrio es $P = 0$.

(c) VERDADERO. Si $\alpha = 5$ y $d = 0.1$ los puntos de equilibrio son $P = 0$ y $P = 2.5$ (es decir, 2500 hormigas). En este caso es fácil comprobar que el signo de la derivada es positivo (por ejemplo, sustituyendo en la condición inicial $P = 2$), luego la población crece y tiende a largo plazo hacia el punto de equilibrio $P = 2.5$.

(d) VERDADERO. Si $\alpha = 7$ y $d = 0.15$ los puntos de equilibrio son $P = 0$ y $P = 1.75$, de donde se deduce que el modelo arranca de una situación de sobrepoblación. En este caso es fácil comprobar que el signo de la derivada se torna negativo, luego la población decrece.

[1] Aunque, para disgusto de muchos, no apareciese escrito $x'(t) = 3(x(t) - 2)$

3. Tres especies interactúan según el siguiente modelo de Lotka–Volterra:

$$\begin{cases} x' = (1 - x - 2y - z)x \\ y' = (x - z)y \\ z' = (1 + x - \beta y - z)z \end{cases},$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$ es un parámetro biológico relacionado con el medio.

(a) Si $\beta < 0$ todas las relaciones dos a dos son antagonistas.

(b) Todos los puntos de la forma $(0, y, 0)$ son de equilibrio.

(c) Si $\beta = 0$ hay un único estado de coexistencia.

(d) Si $\beta = 3$ hay infinitos estados de coexistencia.

(e) Ninguna de las anteriores.

Solución: *(a) VERDADERO. En todas las situaciones posibles de interacción de dos cualesquiera de las especies en ausencia de la tercera se observa que los coeficientes de influencia son uno positivo y otro negativo (nótese que, al ser* $\beta < 0$, $-\beta$ *es un número positivo, luego la presencia de* Y *beneficia a* Z*).*

(b) VERDADERO. Basta con verificar que las tres derivadas se anulan cuando sustituimos (x, y, z) *en el segundo miembro del sistema por un punto cualquiera de la forma* $(0, y, 0)$.

(c) FALSO. Si $\beta = 0$, *el sistema a resolver para encontrar los posibles estados de coexistencia es*

$$\begin{cases} 1 - x - 2y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ 1 + x - z = 0 \end{cases},$$

que no admite solución.

(d) FALSO. Si $\beta = 3$, *el sistema a resolver para encontrar los posibles estados de coexistencia es*

$$\begin{cases} 1 - x - 2y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ 1 + x - 3y - z = 0 \end{cases},$$

cuya única solución viene dada por $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{6}$.

4. Se considera el siguiente modelo de interacción entre especies:

$$\begin{cases} x' = (-x + y)x \\ y' = (1 + 2x - y)y \end{cases}.$$

(a) En ausencia de la especie Y, la especie X crece hacia su capacidad de carga.

(b) El único estado semitrivial para la especie Y es $(0, 1)$.

(c) A largo plazo, la evolución conjunta de ambas especies tiende hacia un estado de coexistencia.

(d) Si $x(0) = 2$ e $y(0) = 3$, las dos especies decrecen.

(e) Ninguna de las anteriores.

Solución: *(a) FALSO. En ausencia de la especie* Y, *la especie* X *se rige por la ecuación* $x' = -x^2$, *cuyas soluciones son todas decrecientes.*

(b) VERDADERO. En ausencia de la especie X, *la especie* Y *se rige por la ecuación* $y' = (1 - y)y$, *que tiene por puntos de equilibrio* $y = 0$ *e* $y = 1$.

(c) FALSO. No hay estados de coexistencia, ya que la única solución del sistema

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 1 + 2x - y = 0 \end{cases}$$

es $x = -1$, $y = -1$.

(d) FALSO. Basta con observar que el signo de las derivadas en ese punto es $x' > 0$, $y' > 0$.