DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Matemáticas. 24 de enero de 2013 (Prueba 3).

Nombre ____ **Grupo** ____________

Ejercicio 1.- Tres especies (denotadas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$) interactúan en un determinado hábitat según el siguiente modelo de Lotka–Volterra:

$$\begin{cases} x' = (4 - x + y - 2z)x\,, \\ y' = (x + z)y\,, \\ z' = (1 + 2x - \alpha y - 5z)z\,, \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro biológico relacionado con los recursos y las condiciones del medio.

(a) Estudia las relaciones que se establecen entre las especies dos a dos según los posibles valores de α.

(b) ¿Hay estados de coexistencia para algún valor de α? En caso afirmativo, calcúlalos.

(c) Encuentra todos los puntos de equilibrio para las especies x e y (en ausencia de la especie z).

(d) En ausencia de la especie y, esboza el retrato de fases para las especies x y z y discute la estabilidad de los puntos de equilibrio.

(e) Interpreta biológicamente la situación del apartado anterior.

Solución: (a) La interacción entre las especies x e y es de tipo mutualista, pues los coeficientes de influencia de una sobre la otra son ambos positivos (e iguales a $+1$); las especies x y z siguen una relación de antagonismo, dado que z perjudica a x (con coeficiente de influencia igual a -2) y x beneficia a z (con coeficiente de influencia igual a $+2$); por último, en la relación establecida entre las especies y y z es claro que z actúa siempre en beneficio de y (con coeficiente de influencia igual a $+1$), en tanto que la acción de y sobre z dependerá del rango de valores en que se mueva el parámetro α. En efecto: si $\alpha > 0$, entonces y perjudica a z y la relación entre ambas especies es antagonista; si $\alpha < 0$, entonces también y favorece a z y se genera una relación de mutualismo; y si $\alpha = 0$, entonces y no influye sobre z y se establece en tal caso una relación de comensalismo.

(b) Para estudiar si hay o no estados de coexistencia ha de analizarse el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 4 - x + y - 2z = 0\,, \\ x + z = 0\,, \\ 1 + 2x - \alpha y - 5z = 0\,. \end{cases}$$

Quizá la manera más cómoda de resolver el sistema consista en despejar una de las incógnitas en la segunda ecuación (pongamos $z = -x$) y trasladar dicha información a las otras ecuaciones, de donde resulta

$$\begin{cases} 4 + x + y = 0\,, \\ 1 + 7x - \alpha y = 0\,. \end{cases}$$

Entonces $x = -4 - y$, luego $1 + 7(-4 - y) - \alpha y = 0$, de donde se desprende que $y = -\frac{27}{7+\alpha}$. Finalmente, se tiene que $x = -4 - y = -4 + \frac{27}{7+\alpha} = -\frac{1+4\alpha}{7+\alpha}$. Por consiguiente, para que existiesen estados de coexistencia habría de suceder que $\alpha < -7$ (para que el número de individuos en equilibrio de la especie y fuese positivo) y, simultáneamente, que $\alpha > -\frac{1}{4}$ (para que el número de individuos en equilibrio de la especie x fuese también positivo), lo cual es imposible. En conclusión, nuestro modelo de tres especies no admite estados de coexistencia.

(c) En ausencia de la especie z, el sistema diferencial que rige la evolución conjunta de las especies x e y se lee del siguiente modo:

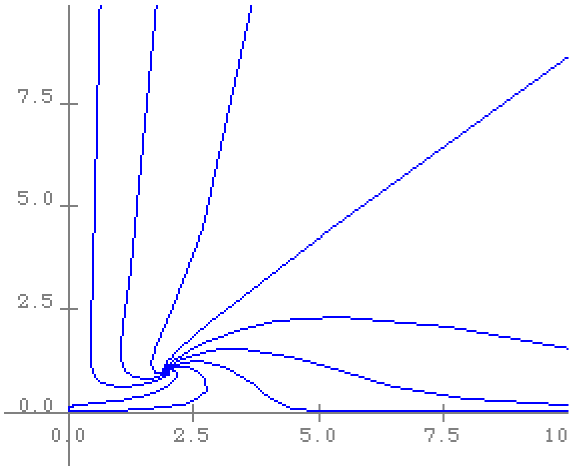

Figura 1: Esbozo del retrato de fases del ejercicio 1 (d)

$$\begin{cases} x' = (4 - x + y)x\,, \\ y' = xy\,. \end{cases}$$

Entonces (como siempre en estos casos) tendremos, por una parte, el estado trivial ($x = 0$, $y = 0$). Los estados semitriviales proceden de estudiar cómo se comporta cada especie en ausencia de la otra: en nuestra situación, si $y = 0$ se tiene $x' = (4 - x)x$, luego ha de ser claramente $x = 4$; en tanto que si $x = 0$, entonces $y' = 0$, lo que nos lleva a deducir que y puede asumir cualquier valor real. Finalmente, los restantes puntos de equilibrio son los que resultan de resolver el sistema

$$\begin{cases} 4 - x + y = 0\,, \\ x = 0\,, \end{cases}$$

que admite como única solución $x = 0$, $y = -4$. En definitiva, los puntos de equilibrio para la interacción entre las especies x e y son: $(x = 4, y = 0)$ y todos los de la forma $(x = 0, y = \lambda \in \mathbb{R})$.

(d) Véase Figura 1.

(e) Se trata de un modelo antagonista (con coeficiente de influencia de x sobre z igual a $+2$ y coeficiente de influencia de z sobre x igual a -2) en que se puede apreciar cómo, a largo plazo, ambas especies se estabilizan (colectivamente) en un número de individuos, $(x = 2, z = 1)$, que hace disminunir la capacidad de carga (individual) de x (igual a 4) y aumentar la de z (igual a $\frac{1}{5}$).

Ejercicio 2.- Supongamos que el número de bacterias que hay en un cultivo en el instante t, $N(t)$, se rige por la ley logística $x' = ax(3 - x)$, donde a es un parámetro positivo. Si inicialmente hay 1200 bacterias en el cultivo ($N(0) = 1{,}2$), se puede afirmar que

(a) La tasa de crecimiento intrínseca del modelo logístico en cuestión es $r = 3a$.

(b) $x = 3$ es un punto de equilibrio inestable.

(c) A largo plazo, la población de bacterias se estabiliza en torno a un cierto número de individuos.

(d) Al cabo de dos días habrá 3400 bacterias.

(e) Ninguna de las anteriores.

Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

Solución: La ley (logística) del enunciado corresponde, escrita en forma canónica, a la siguiente ecuación logística: $x' = 3ax\big(1 - \frac{x}{3}\big)$, cuyos parámetros biológicos son $r = 3a$ y $K = 3$. Luego el enunciado (a) es VERDADERO.

Que $x = 3$ es un punto de equilibrio del modelo es claro (se trata, de hecho, de la capacidad de carga del mismo). Sin embargo, no es cierto que se trate de un punto de equilibrio inestable, pues al ser $r = 3a > 0$ las soluciones de la ecuación logística tienden a largo plazo hacia la capacidad de carga (tanto las que arrancan desde la región biológica estándar, $0 < N < 3$, como las que lo hacen desde la región de sobrepoblación, $N > 3$). Esto nos conduce a afirmar que el enunciado (b) es FALSO y el (c) VERDADERO.

Si inicialmente se dispone de 1200 bacterias, es imposible que se rebase al cabo de cualquier periodo de tiempo el número de bacterias determinado por la capacidad de carga del modelo, por lo que el enunciado (d) es FALSO.