DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Matemáticas. 23 de enero de 2014 (Prueba 3)

Nombre ____ **Grupo** ____________

1.- Tres especies interactúan en un determinado hábitat según el siguiente modelo:

$$\begin{cases} x' = (2 - x - y - z)x\,, \\ y' = (y - z)y\,, \\ z' = (1 + ax - y - 3z)z\,, \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro biológico relacionado con el medio. Indica las afirmaciones que sean correctas (no es necesario justificar las respuestas).

(a) En ausencia de la especie representada por $y(t)$ se tiene que, si $a < 0$, entonces la relación entre $x(t)$ y $z(t)$ es de competencia.

(b) Solo puede encontrarse algún estado de coexistencia si $a > -\frac{1}{2}$.

(c) En ausencia de la especie representada por $z(t)$, existen tres puntos de equilibrio para las especies $x(t)$ e $y(t)$.

(d) En ausencia de la especie representada por $x(t)$, el par de valores $\left(y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{4}\right)$ constituye un punto de equilibrio asintóticamente estable.

(e) Ninguna de las anteriores.

Solución: (a) El coeficiente de influencia de $x(t)$ sobre $z(t)$ es igual a -1 (negativo), luego la presencia de la especie $x(t)$ perjudica el desarrollo de la especie $z(t)$. Por otra parte, si se elige $a < 0$, el coeficiente de influencia de $x(t)$ sobre $z(t)$ se vuelve también negativo, luego la interacción entre ambas especies es de competencia y la afirmación (a) es VERDADERA.

(b) Los estados de coexistencia hay que buscarlos entre las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2 - x - y - z = 0\,, \\ y - z = 0\,, \\ 1 + ax - y - 3z = 0\,. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que, salvo para el caso $a = -2$, el sistema anterior admite como única solución a la terna

$$x = \frac{6}{4 + 2a}, \quad y = \frac{1 + 2a}{4 + 2a}, \quad z = \frac{1 + 2a}{4 + 2a}\,.$$

Basta, pues, con observar que para que las tres componentes de la solución sean positivas ha de tomarse $4 + 2a > 0$ y también $1 + 2a > 0$, lo cual se traduce en la condición común $a > -\frac{1}{2}$. Luego la afirmación (b) es VERDADERA.

(c) En ausencia de $z(t)$, la interacción entre las especies $x(t)$ e $y(t)$ viene regida por el sistema

$$\begin{cases} x' = (2 - x - y)x\,, \\ y' = y^2\,, \end{cases}$$

cuyos puntos de equilibrio resultan de resolver

$$\begin{cases} (2 - x - y)x = 0\,, \\ y = 0\,. \end{cases}$$

Por consiguiente, tales puntos de equilibrio son únicamente el trivial $(0,0)$ y el semitrivial $(2,0)$. Luego la afirmación (c) es FALSA.

(d) En ausencia de $x(t)$, la interacción entre las especies $y(t)$ y $z(t)$ viene regida por el sistema

$$\begin{cases} y' = (y - z)y\,, \\ z' = (1 - y - 3z)z\,. \end{cases}$$

Claramente $\left(y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{4}\right)$ es un punto de equilibrio (pues anula tanto y' como z'). Para estudiar su estabilidad recurrimos a esbozar el correspondiente retrato de fases (Figura 1).

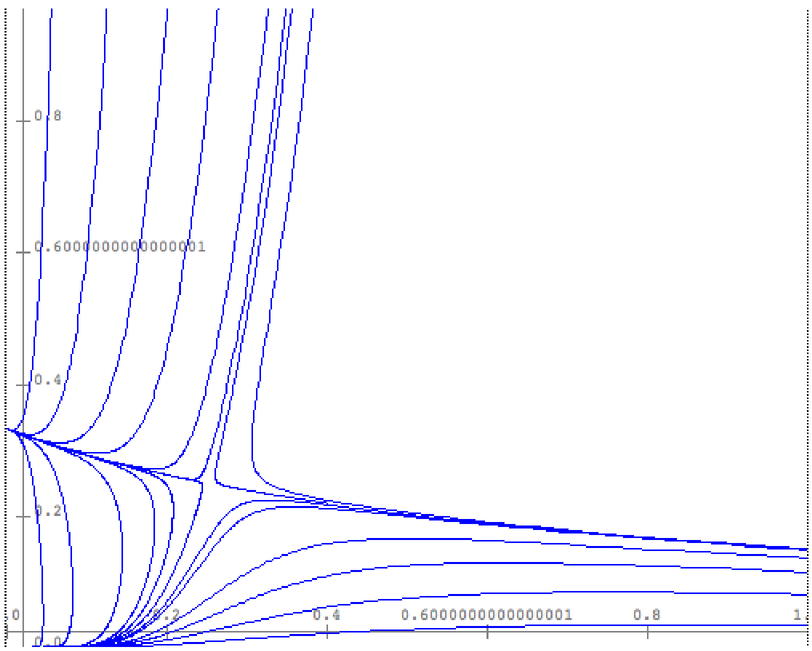

Figura 1: Esbozo del retrato de fases del ejercicio 1 (d)

Claramente el punto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ repele a las trayectorias, luego la afirmación (d) es FALSA.

2.- El número de bacterias que hay en un cultivo en el instante t (medido en días) se rige por la ley logística

$$P'(t) = \lambda P(t)\big(2 - P(t)\big)\,,$$

donde λ es un parámetro positivo. Inicialmente se cuenta con 1000 bacterias en el cultivo ($P(0) = 1$).

(a) Da una expresión de la tasa de crecimiento intrínseca del modelo en función del parámetro λ.

(b) Calcula los puntos de equilibrio del modelo y discute la estabilidad de los mismos.

(c) Determina el comportamiento a largo plazo de la población de bacterias.

(d) Determina el número de bacterias que habrá al cabo de un día.

(e) Determina el tiempo que habrá de transcurrir para que el cultivo alcance las 1500 bacterias.

Solución: (a) Se tiene

$$P'(t) = \lambda P(t)\big(2 - P(t)\big) = 2\lambda P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{2}\right)\,,$$

que representa un modelo logístico con tasa de crecimiento intrínseca $r = 2\lambda$ y capacidad de carga $K = 2$.

(b) Los puntos de equilibrio son los que resultan de resolver la ecuación $\lambda P(t)\big(2 - P(t)\big) = 0$, esto es, $P = 0$ y $P = 2$. Tras un sencillo análisis cualitativo, se puede verificar sin dificultad que las soluciones que arrancan entre 0 y 2 crecen hacia el estado $P = 2$ (dado que $P' > 0$ en esta región), en tanto que las que arrancan desde un régimen de sobrepoblación ($P > 2$) decrecen hacia el estado $P = 2$ (dado que $P' < 0$ en esta región), luego $P = 2$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable, en tanto que $P = 0$ es inestable.

(c) Como el dato inicial es $P(0) = 1$, hay que situar la solución en la región central (entre los dos puntos de equilibrio), luego el comportamiento de la misma será, como se convino en el apartado anterior, creciente hacia el nivel $P = 2$, hacia el que tiende a largo plazo.

(d) Las soluciones del modelo logístico son de la forma (consúltese la tabla pertinente)

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}} \,,$$

donde A es cualquier constante y r, K denotan la tasa de crecimiento intrínseca y la capacidad de carga, respectivamente. En nuestro caso $K = 2$ y $r = 2\lambda$, luego

$$P(t) = \frac{2}{1 + Ae^{-2\lambda t}} \,.$$

Como además $P(0) = 1$, se tiene que

$$1 = P(0) = \frac{2}{1 + A} \Rightarrow A = 1 \,,$$

luego la única solución a nuestro problema es la que viene dada por

$$P(t) = \frac{2}{1 + e^{-2\lambda t}} \,.$$

Bastará, por tanto, con evaluarla en $t = 1$, de donde resulta

$$P(1) = \frac{2}{1 + e^{-2\lambda}} \text{ (miles de) bacterias.}$$

(e) Se trata de calcular t tal que $P(t) = 1.5$. Se tiene

$$\frac{2}{1 + e^{-2\lambda t}} = 1.5 \Rightarrow 1.5\, e^{-2\lambda t} = 0.5 \Rightarrow e^{-2\lambda t} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2\lambda t = \ln(3) \Rightarrow t = \frac{\ln(3)}{2\lambda} \text{ días.}$$