DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Matemáticas. 2 de diciembre de 2014 (Prueba 2).

Nombre ____ **Grupo** ______________

1. Los individuos de una determinada especie animal se distribuyen por edades en tres grupos según la siguiente matriz de Leslie:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 10 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.92 & 0 \end{pmatrix}$$

Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

(a) L es ergódica.

(b) Ningún individuo del primer grupo de edad pasa al segundo entre dos recuentos consecutivos.

(c) $v = (1000, 100, 92)^T$ es un vector propio de L.

(d) A largo plazo, el primer grupo de edad representa aproximadamente el 83.8 % de la población total.

(e) Ninguna de las anteriores.

Solución: El primer enunciado es VERDADERO. Basta con construir el consabido árbol de ergodicidad para apercibirse de ello:

$$\begin{aligned} &A \to B \to A + C \to B + A \to A + C + B \\ &B \to A + C \to B + A \to A + C + B \\ &C \to A \to B \to A + C \to B + A \to A + C + B \end{aligned}$$

El segundo enunciado es claramente FALSO, dado que la tasa de supervivencia del primer grupo de edad es no nula.

Para verificar (c) basta con efectuar el producto Lv y observar si el resultado es o no un múltiplo del vector v. Se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 10 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.92 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \\ 92 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \\ 92 \end{pmatrix},$$

luego v es un vector propio de la matriz L asociado al valor propio $\lambda = 1$, de donde se desprende que el tercer enunciado es VERDADERO.

Del cálculo anterior se deduce también que $\lambda = 1$ ha de ser el valor propio dominante de L (de cuya existencia sabemos porque pueden encontrarse dos tasas de fecundidad consecutivas en L que son positivas: 0.8 y 10), pues es el único valor propio positivo de L,[1] luego el vector v del ítem (c) es un vector propio dominante de L. En consecuencia, v contiene las proporciones de cada grupo de edad a largo plazo. En particular, en el primer grupo de edad se concentrará el

$$\frac{1000}{1000 + 100 + 92} \times 100 \approx 83.8\,\%$$

del total de la población. Por consiguiente, el enunciado (d) es VERDADERO.

[1] Recuérdese que en cualquier matriz de Leslie el valor propio dominante, caso de existir, es su único valor propio positivo

2. El ataque de una determinada población de pulgones a dos grupos de plantas (A y B) viene representado por el siguiente esquema en diferencias:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

donde x_n e y_n denotan, respectivamente, las proporciones de pulgones que invaden los grupos vegetales A y B en el n–ésimo recuento.

Se sabe que, a largo plazo, el 25 % de los pulgones tienden a permanecer en plantas del grupo A y el 75 % restante en plantas del grupo B. Es sabido también que solamente el 10 % de los pulgones que en un recuento están localizados en plantas del grupo A permanecen en el mismo grupo en el recuento siguiente.

Se pide:

(a) Construye la matriz de transición del modelo.

(b) Si la distribución de pulgones en un recuento es $(0.6, 0.4)^T$, determina la misma en el recuento siguiente.

(c) Si inicialmente hay 40 pulgones, ¿cuántos cambian de B a A de un recuento al siguiente? ¿Cuántos se asentarán a largo plazo en el grupo B?

(d) Se ha verificado experimentalmente que cada dosis de un producto químico específico es capaz de *disuadir* a 10 pulgones en plantas del grupo A y a 30 en plantas del grupo B. ¿Cuántas dosis harán falta en cada uno de los grupos de plantas para erradicar la plaga?

Solución: (a) La matriz M ha de ser de probabilidad, toda vez que describe la dinámica de un modelo de estados. Eso quiere de decir que los coeficientes a, b, c y d han de ser todos ≥ 0 y que las dos columnas de M deben sumar la unidad. Sabemos de partida que el 10 % de los pulgones que en un recuento están localizados en plantas del grupo A permanecen en el mismo grupo en el recuento siguiente, lo que traducido en términos del modelo significa que $a = 0.1$ en la matriz M. Esta condición implica automáticamente que ha de ser $c = 0.9$ para que la suma de la primera columna resulte igual a 1. Finalmente, para calcular los coeficientes b y d empleamos el hecho importante de que conocemos un vector propio de M. En efecto, en virtud del enunciado sabemos que a largo plazo el 25 % de los pulgones tienden a permanecer en plantas del grupo A y el 75 % restante en plantas del grupo B, de donde deducimos que $v = (1, 3)^T$ ha de ser un vector propio (dominante) de M. Debe cumplirse, en particular, la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 0.1 & b \\ 0.9 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

de la que se desprende que $0.1 + 3b = \lambda$ y $0.9 + 3d = 3\lambda$. Procediendo a sustituir, por ejemplo, el valor de λ expresado por la primera ecuación en la segunda, obtenemos $0.9 + 3d = 3(0.1 + 3b) = 0.3 + 9b$. Teniendo en cuenta finalmente que debe ser $d = 1 - b$ para que M sea de probabilidad, nos queda $0.9 + 3(1 - b) = 0.3 + 9b$, de donde podemos despejar el valor de b, que resulta ser igual a 0.3; en consecuencia, $d = 1 - 0.3 = 0.7$. La conclusión es que

$$M = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.9 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

(b) Basta con efectuar el cálculo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.9 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.82 \end{pmatrix}.$$

(c) Si inicialmente hay 40 pulgones, el número de ellos no variará a lo largo del proceso descrito en el ejercicio por tratarse de un modelo de estados. La proporción de pulgones que a largo plazo se asientan en plantas del grupo B viene dada por la segunda componente del vector propio dominante $v = (1, 3)^T$, cuando la normalizamos dividiéndola por la suma de ambas componentes: $\frac{3}{4}$. Es decir, las tres cuartas partes de la población total de pulgones (40) se concentrará en B a largo plazo o, lo que es lo mismo, la tendencia a largo plazo es de 30 pulgones en el grupo B. Sin embargo, a la pregunta *¿cuántos pulgones cambian de B a A de un* *recuento al siguiente?* no podemos responder precisando una cantidad concreta. Lo único que podemos decir al respecto es que tal cantidad será el 30 % (hemos de fijarnos en el coeficiente $b = 0.3$ de la matriz M) de los individuos que hubiera en B en el recuento de partida.[2]

(d) Dado que a largo plazo la distribución de pulgones es 10 en A y 30 en B (según indican las proporciones del vector propio dominante y teniendo en cuenta que el número total de pulgones se mantiene constante e igual a 40), será suficiente con aplicar una única dosis del producto de marras en cada grupo de plantas para erradicar la plaga.

[2]Por ejemplo: si partiésemos de las proporciones indicadas por el vector del apartado (b), $(0.6, 0.4)^T$, tendríamos que en dicho estado habría 24 pulgones en A (el 60 % de 40) y 16 en B (el 40 % de 40). En tal caso podríamos decir que el número de pulgones que cambian de B a A de este recuento al siguiente será el 30 % de 16, esto es, aproximadamente 5