UNIVERSIDAD DE GRANADA
Modelos Matemáticos II. 25 de mayo de 2016

EJERCICIO 1. Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_{-2}^{2} (x+3)^2 \left(y'(x)\right)^2 \, dx \,,$$

definido en

$$\begin{aligned}\mathcal{D} \;=\; & \big\{ y \in C^0[-2,2] \cap C_0^1(-2,2) \text{ tal que} \\ & \int_{-2}^{2} (y(x))^2 \, dx \;=\; 1, \; \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{x+3}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ln(5)} \ln(x+3) \right) y(x) \, dx \;=\; 0 \Big\} \,.\end{aligned}$$

Justifica la existencia de mínimo de $\mathcal{F}[y]$ en $\mathcal{D} \cap C^2[-2,2]$ y calcúlalo.

Solución: Comenzamos construyendo el funcional

$$F^*(x,y,p) = (x+3)^2 p^2 - \lambda y^2$$

y escribiendo el problema de contorno de Euler-Lagrange asociado al mismo:[1]

$$\begin{aligned}& F_y^* - \frac{d}{dx}(F_p^*) = -2\lambda y - \frac{d}{dx}\big(2(x+3)^2 p\big) = 0 \,, \\ & y(-2) = y(2) = 0 \,.\end{aligned}$$

O, equivalentemente,

$$\begin{aligned}& (x+3)^2 y'' + 2(x+3) y' + \lambda y = 0 \,, \\ & y(-2) = y(2) = 0 \,.\end{aligned}$$

Se trata de una ecuación diferencial de tipo Euler, que puede reducirse a una con coeficientes constantes mediante el cambio de variable $x+3 = e^z$. En efecto, considerando $y(x) := u(z)$ es claro que

$$\begin{aligned}y'(x) &= \frac{du}{dz}\frac{1}{x+3} = \frac{du}{dz} e^{-z} \,, \\ y''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dz} e^{-z} \right) = e^{-z} \left(-\frac{du}{dz} e^{-z} + \frac{d^2u}{dz^2} e^{-z} \right) = e^{-2z} \left(\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{du}{dz} \right) \,,\end{aligned}$$

lo que se traduce en

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + \lambda u = 0 \,,$$

[1] Obsérvese que se ha omitido en la expresión de F^* la contribución correspondiente a la segunda ligadura, que es nula en virtud de un cálculo hecho en clase

con

$$0 = y(x=-2) = u(z=0)\,, \quad 0 = y(x=2) = u(z=\ln(5))\,.$$

En caso de que la primera función propia asociada a este problema de Sturm–Liouville coincida con la que determina la segunda ligadura, deducimos que el mínimo que pide el ejercicio es el segundo valor propio, en virtud de un teorema estudiado en clase. Una simple inspección de casos nos lleva a concluir que los valores propios del problema anterior se encuentran entre los que satisfacen la condición $\lambda > \frac{1}{4}$, para los que la solución general se escribe del siguiente modo:

$$u(z) = e^{-\frac{z}{2}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\,z\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\,z\right)\right]\,.$$

Usando ahora las condiciones de contorno se llega a que debe cumplirse

$$A = 0\,, \quad \mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\,\ln(5)\right) = 0\,,$$

de donde se desprende que los valores propios han de ser

$$\lambda_n = \frac{1}{4} + \left(\frac{n\pi}{\ln(5)}\right)^2\,, \quad n \geq 1\,,$$

en tanto que las funciones propias responden a la forma

$$\phi_n(z) = Ce^{-\frac{z}{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi z}{\ln(5)}\right)\,, \quad n \geq 1\,.$$

Observamos entonces que la segunda ligadura de $\mathcal{D}$ es exactamente la relación de ortogonalidad entre $y(x)$ y la primera función propia, ϕ_1. En consecuencia, como el funcional es de la forma $\int_a^b [p(x)(y'(x))^2 - q(x)y(x)^2]\,dx$ (con $a = -2$, $b = 2$, $p(x) = (x+3)^2$ y $q \equiv 0$) y las ligaduras son de tipo isoperimétrico, del antedicho teorema se desprende no solamente la existencia de mínimo de nuestro problema, sino que además su valor es $\lambda_2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{2\pi}{\ln(5)}\right)^2$.

■

EJERCICIO 2.

Sea $\Omega = (-1,1)\times(-1,1) \subset \mathbb{R}^2$. Se define la función

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - x^2, & x > 0 \\ 1 + x^2, & x \leq 0 \end{cases}\,.$$

Prueba que existen las derivadas débiles de primer orden de f. ¿Para qué valores de $p \in [1,+\infty]$ se cumple que $f \in W^{1,p}(\Omega)$?

Solución: Es claro que $f \in C^1(\Omega)$, luego existen las derivadas débiles de primer orden de f puesto que existen las correspondientes derivadas en sentido clásico; de hecho, coinciden:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} -2x, & x > 0 \\ 2x, & x \le 0 \end{cases}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \equiv 0\,.$$

Si $1 \le p < \infty$, se tiene

$$\begin{aligned} \|f\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega |f(x,y)|^p\,dx\,dy = \int_{-1}^1\int_0^1 |1-x^2|^p\,dx\,dy + \int_{-1}^1\int_{-1}^0 |1+x^2|^p\,dx\,dy \\ &\le \int_{-1}^1\int_0^1 dx\,dy + \int_{-1}^1\int_{-1}^0 2^p\,dx\,dy \le 2 + 2^{p+1} < +\infty\,. \end{aligned}$$

Por consiguiente, puede afirmarse que $f \in L^p(\Omega)$ para todo $1 \le p < \infty$. En lo que respecta al caso $p = \infty$, se tiene que $|f(x,y)| \le 2$ para todo $(x,y) \in \Omega$, luego también $f \in L^\infty(\Omega)$.

Para concluir basta con observar a qué espacios $L^p(\Omega)$ pertenecen las derivadas débiles de primer orden de f. Se tiene:

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|^p dx\,dy = \int_{-1}^1\int_{-1}^1 |2x|^p\,dx\,dy \\ &\le \int_{-1}^1\int_{-1}^1 2^p\,dx\,dy \le 2^{p+2} < +\infty\,, \quad \forall\, 1 \le p < \infty\,, \\ \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{L^\infty(\Omega)} &\le 2\,. \end{aligned}$$

En conclusión, podemos asegurar que $f \in W^{1,p}(\Omega)$ para todo $1 \le p \le \infty$.

■

EJERCICIO 3.

Sea $u \in C^2((0,\infty)\times\mathbb{R})$ la solución del siguiente problema de valores iniciales para la ecuación de ondas unidimensional:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \alpha(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(0,x) = \beta(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}, \tag{1}$$

donde α y β son funciones suficientemente regulares con soporte compacto en $\mathbb{R}$. Denotamos

$$C(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t(t,x)^2\,dx\,, \quad P(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x(t,x)^2\,dx\,,$$

la energía cinética y potencial asociadas a $u(t,x)$, respectivamente.

(i) Demuestra que la siguiente expresión

$$u(t,x) = \frac{1}{2}[\alpha(x+t) + \alpha(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \beta(y)\,dy$$

es solución de (1).

(ii) Si los datos iniciales α y β tienen soporte compacto en $\mathbb{R}$, demuestra que también lo tiene la solución de (1).

(iii) Usa el resultado de (ii) para comprobar que la energía total asociada al problema, $E(t) = C(t) + P(t)$, es constante en el tiempo.

(iv) Usando la fórmula de (i), demuestra que $C(t) = P(t)$ si $t \geq T$, para algún valor de $T > 0$ suficientemente grande.

(v) Se considera ahora el problema variacional asociado al siguiente funcional:

$$\mathcal{F}[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}[u](t,x)\, dx\, dt\,, \quad \text{con } \mathcal{L}[u] = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2\,.$$

1. Demuestra que $\mathcal{F}$ es invariante frente a traslaciones temporales, es decir, frente a cambios del tipo $u(t,\tau) \mapsto T_\tau(u) = u(t+\tau, x)$.
2. Sea u una solución del problema $\mathcal{F}[u] = \text{mín}_{v \in C_0^2(\mathbb{R}^2)} \left\{\mathcal{F}[v]\right\}$. Calcula $\frac{\partial}{\partial \tau}\mathcal{F}[T_\tau(u)]\big|_{\tau=0}$ y deduce de su expresión[2] la conservación de energía para la ecuación de ondas.

Solución: (i) Se tiene:

$$u_t(t,x) = \frac{1}{2}[\alpha'(x+t) - \alpha'(x-t)] + \frac{1}{2}\big(\beta(x+t) + \beta(x-t)\big)\,. \tag{3}$$

Por consiguiente, las condiciones iniciales se verifican trivialmente. Por otra parte,

$$\begin{aligned} u_x(t,x) &= \frac{1}{2}[\alpha'(x+t) + \alpha'(x-t)] + \frac{1}{2}\big(\beta(x+t) - \beta(x-t)\big)\,, \qquad (4)\\ u_{tt}(t,x) &= \frac{1}{2}[\alpha''(x+t) + \alpha''(x-t)] + \frac{1}{2}\big(\beta'(x+t) - \beta'(x-t)\big)\,,\\ u_{xx}(t,x) &= \frac{1}{2}[\alpha''(x+t) + \alpha''(x-t)] + \frac{1}{2}\big(\beta'(x+t) - \beta'(x-t)\big)\,, \end{aligned}$$

luego $u_{tt} = u_{xx}$.

También puede alcanzarse la fórmula del enunciado de una manera constructiva. En efecto, si introducimos las coordenadas $\xi = x+t$, $\eta = x-t$, en virtud de la regla de la cadena se tiene que $\partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta$, así como $\partial_t = \partial_\xi - \partial_\eta$. Por tanto, $\partial_t - \partial_x = -2\partial_\eta$ y $\partial_t + \partial_x = 2\partial_\xi$. De este modo, la ecuación de ondas adopta la forma $(\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)u = 0$, lo que en términos de las nuevas

[2] Nótese que

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\mathcal{F}[T_\tau(u)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}'[T_\tau(u)]\frac{\partial T_\tau(u)}{\partial \tau}\, dx\, dt\,, \tag{2}$$

donde $\mathcal{L}'$ denota la derivada de Fréchet de $\mathcal{L}$, es decir, el operador de Euler-Lagrange asociado al funcional $\mathcal{F}$

coordenadas se traduce en $u_{\xi\eta} = 0$, que admite por soluciones las funciones de la forma $u = f(\xi) + g(\eta)$. Evaluando en $t = 0$ obtenemos

$$\alpha(x) = f(x) + g(x)\,, \quad \beta(x) = f'(x) - g'(x)\,.$$

Integrando ahora la segunda ecuación en el intervalo $[x-t, x+t]$ llegamos a

$$\begin{aligned}
\int_{x-t}^{x+t} \beta(y)\, dy &= f(x+t) - f(x-t) - g(x+t) + g(x-t) \\
&= u(t,x) - \big(f(x-t) + g(x+t)\big) \\
&= u(t,x) - \big(\alpha(x+t) + \alpha(x-t) - u(t,x)\big) \\
&= 2u(t,x) - \alpha(x+t) - \alpha(x-t)\,,
\end{aligned}$$

de donde se desprende el resultado.

(ii) Sean α y β tales que $\mathrm{sop}(\alpha) \subset [-R_\alpha, R_\alpha]$ y $\mathrm{sop}(\beta) \subset [-R_\beta, R_\beta]$. Si consideramos $R = \text{máx}\{R_\alpha, R_\beta\}$, es claro que $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se anulan para $|x| > R$. En consecuencia, $u(t,x)$ (tal como viene descrita en la fórmula de d'Alembert del apartado (i)) se anula para $|x| > R + t$. El razonamiento es análogo para las derivadas de primer orden.

(iii) Se tiene

$$\begin{aligned}
E'(t) &= C'(t) + P'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{tt}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} u_x u_{xt}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{tt}\, dx + \lim_{A\to\infty} \Big\{ u_t u_x\big|_{x=-A}^{x=A} \Big\} - \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{xx}\, dx = 0\,,
\end{aligned}$$

después de haber integrado por partes en el segundo sumando de la derecha, y teniendo en cuenta la propiedad demostrada en (ii) para garantizar que la contribución de frontera es nula.

(iv) Se trata de comprobar que $\int_{-\infty}^{\infty} [u_x^2 - u_t^2]\, dx = 0$ para valores suficientemente grandes de t. En virtud de las expresiones (3) y (4), podemos calcular

$$u_x^2 - u_t^2 = [\alpha'(x+t) + \beta(x+t)][\alpha'(x-t) - \beta(x-t)]\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} [u_x^2 - u_t^2]\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha'(x+t) + \beta(x+t)][\alpha'(x-t) - \beta(x-t)]\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha'(z) + \beta(z)][\alpha'(z-2t) - \beta(z-2t)]\, dz\,,
\end{aligned}$$

que se anula claramente cuando t es suficientemente grande para salirnos simultáneamente de los soportes de α' y β.

(v) 1. Se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[T_\tau(u)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} u_t(t+\tau, x)^2 - \frac{1}{2} u_x(t+\tau, x)^2 \right\} dx\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} u_t(t, x)^2 - \frac{1}{2} u_x(t, x)^2 \right\} dx\, dt = \mathcal{F}[u]\,.
\end{aligned}$$

2. El operador de Euler-Lagrange asociado a $\mathcal{F}$ viene dado por

$$\mathcal{L}'[u] = \mathcal{L}_u - \frac{d}{dx}(\mathcal{L}_p) - \frac{d}{dt}(\mathcal{L}_q) = u_{xx} - u_{tt}\,,$$

donde hemos denotado $p = u_x$ y $q = u_t$. Por consiguiente, como $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'[T_\tau(u)]\frac{\partial T_\tau(u)}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} &= \big[u_{xx}(t+\tau,x) - u_{tt}(t+\tau,x)\big]u_t(t+\tau,x)\big|_{\tau=0} \\ &= \big[u_{xx}(t,x) - u_{tt}(t,x)\big]u_t(t,x) = 0\,, \end{aligned} \tag{5}$$

puesto que u es un mínimo de $\mathcal{F}$ por hipótesis, luego ha de satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange $u_{xx} - u_{tt} = 0$. Por tanto, de la fórmula (2) se desprende

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\mathcal{F}[T_\tau(u)]\bigg|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}'[T_\tau(u)]\frac{\partial T_\tau(u)}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} dx\,dt = 0\,.$$

Integrando la expresión (5) con respecto a la variable x y usando la fórmula de integración por partes obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big[u_{xx}(t,x) - u_{tt}(t,x)\big]u_t(t,x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t u_x)(t,x)\bigg|_{x=-\infty}^{x=+\infty} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \big[u_x(t,x)u_{tx}(t,x) + u_t(t,x)u_{tt}(t,x)\big]\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \big[\big(u_x^2\big)_t(t,x) + \big(u_t^2\big)_t(t,x)\big]\,dx \\ &= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{2}\big[\big(u_x^2\big)(t,x) + \big(u_t^2\big)(t,x)\big]\,dx\,, \end{aligned}$$

luego $E'(t) = 0$ y, por tanto, la energía se conserva en el tiempo. Obsérvese que el término de frontera que aparece en el desarrollo anterior es nulo debido a que $u(t,\cdot)$ tiene soporte compacto en $\mathbb{R}$.

$\blacksquare$