Universidad de Granada | **Prueba II** | MODELOS MATEMÁTICOS II
Dpto. Matemática Aplicada | 04/06/2018 | Grado en Matemáticas
Facultad de Ciencias

Apellidos | Firma

Nombre | D.N.I o pasaporte | $3^{\text{o}}A$ | $3^{\text{o}}B$ | 4^{o}

EJERCICIO 1. Se considera el siguiente problema de valores iniciales para la ecuación de ondas unidimensional:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & c \neq 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases} . \tag{1}$$

Emplea el método de la transformada de Fourier (recuerda: $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x y}\, dx$) para demostrar que la solución del problema anterior viene dada por la conocida fórmula de D'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)]\,.$$

(*Ayuda: puede que te resulte útil en algún momento utilizar la identidad* $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\big(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\big)$.)

Solución: Aplicando la transformada de Fourier (en la variable x) a la ecuación de ondas se obtiene

$$\hat{u}_{tt} = c^2 \hat{u_{xx}} = -4c^2\pi^2 y^2 \hat{u}\,,$$

cuya familia general de soluciones viene dada por $\hat{u}(y,t) = A(y)\cos(2c\pi y t) + B(y)\,\mathrm{sen}(2c\pi y t)$. Para determinar las funciones A y B debemos imponer las condiciones iniciales (transformadas), a saber: $\hat{u}(y,0) = \hat{f}(y)$, $\hat{u}_t(y,0) = 0$. Se tiene:

$$\begin{aligned} &\hat{f}(y) = \hat{u}(y,0) = A(y)\,, \\ &0 = \hat{u}_t(y,0) = \big[-2c\pi y A(y)\,\mathrm{sen}(2c\pi y t) + 2c\pi y B(y)\cos(2c\pi y t)\big](y,0) = 2c\pi y B(y)\,, \end{aligned}$$

luego ha de ser $B \equiv 0$. Por consiguiente, la transformada de Fourier de la solución de (1) viene dada por la siguiente expresión:

$$\hat{u}(y,t) = \hat{f}(y)\cos(2c\pi y t) = \frac{1}{2}\hat{f}(y)\big(e^{2ic\pi y t} + e^{-2ic\pi y t}\big)\,.$$

Tomamos finalmente la transformada de Fourier inversa de $\hat{u}$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(y,t) e^{2\pi i y x}\, dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\big(e^{2ic\pi y t} + e^{-2ic\pi y t}\big) e^{2\pi i y x}\, dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\big(e^{2\pi i y(x+ct)} + e^{2\pi i y(x-ct)}\big)\, dy \\ &= \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)]\,. \end{aligned}$$

EJERCICIO 2. Se considera el siguiente proceso químico:

$$
\begin{aligned}
S + X &\xrightarrow{k_1} 2X \\
X + Y &\xrightarrow{k_2} 2Y \\
Y &\xrightarrow{k_3} P
\end{aligned}
$$

donde k_1, k_2, k_3 son constantes positivas que indican la velocidad a la que ocurre cada reacción. Denotamos $[S], [X], [Y], [P]$ las concentraciones de cada una de las sustancias químicas que intervienen en el mismo, las cuales dependen exclusivamente del tiempo $t \geq 0$.

(a) Emplea la ley de acción de masas para escribir las ecuaciones diferenciales del modelo.

(b) Estudia las dimensiones de k_1, k_2 y k_3.

(c) Supongamos que la concentración de S se mantiene constante a lo largo del proceso: $[S](t) \equiv s > 0$. Denotamos $X_0 := [X](0)$ e $Y_0 := [Y](0)$. Se considera el tiempo adimensional $\tau = k_1 X_0 t$ y el cambio de variables

$$
x(\tau) = \frac{[X]\left(\frac{\tau}{k_1 X_0}\right)}{X_0}, \quad y(\tau) = \frac{[Y]\left(\frac{\tau}{k_1 X_0}\right)}{Y_0}.
$$

Determina el sistema de ecuaciones diferenciales satisfecho por x e y. ¿Admite solución? ¿Es única? Justifica la respuesta.

(d) Determina los estados de equilibrio (soluciones estacionarias) del sistema diferencial del apartado (c).

Solución: (a) El sistema de ecuaciones diferenciales asociado al proceso químico en cuestión es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{d[S]}{dt} &= -k_1[S][X] \\
\frac{d[X]}{dt} &= 2k_1[S][X] - k_1[S][X] - k_2[X][Y] = k_1[S][X] - k_2[X][Y] \\
\frac{d[Y]}{dt} &= 2k_2[X][Y] - k_2[X][Y] - k_3[Y] = k_2[X][Y] - k_3[Y] \\
\frac{d[P]}{dt} &= k_3[Y]
\end{aligned}
$$

(b) Se tiene $\frac{[[c]]}{[[t]]} = [[k_1]][[c]]^2$, luego $[[k_1]] = ([[c]][[t]])^{-1}$. Idéntico para k_2. Finalmente $\frac{[[c]]}{[[t]]} = [[k_3]][[c]]$, por lo que $[[k_3]] = [[t]]^{-1}$.

(c) Se tiene:

$$
\begin{aligned}
x'(\tau) &= \frac{1}{X_0}\frac{1}{k_1 X_0}\frac{d[X]}{dt}\left(\frac{\tau}{k_1 X_0}\right) = \frac{1}{k_1 X_0^2}\left\{k_1[S]\left(\frac{\tau}{k_1 X_0}\right)[X]\left(\frac{\tau}{k_1 X_0}\right) - k_2[X]\left(\frac{\tau}{k_1 X_0}\right)[Y]\left(\frac{\tau}{k_1 X_0}\right)\right\} \\
&= \frac{s}{X_0}x(\tau) - \frac{k_2 Y_0}{k_1 X_0}x(\tau)y(\tau), \\
y'(\tau) &= \frac{1}{Y_0}\frac{1}{k_1 X_0}\frac{d[Y]}{dt}\left(\frac{\tau}{k_1 X_0}\right) = \frac{1}{k_1 X_0 Y_0}\left\{k_2[X]\left(\frac{\tau}{k_1 X_0}\right)[Y]\left(\frac{\tau}{k_1 X_0}\right) - k_3[Y]\left(\frac{\tau}{k_1 X_0}\right)\right\} \\
&= \frac{k_2}{k_1}x(\tau)y(\tau) - \frac{k_3}{k_1 X_0}y(\tau).
\end{aligned}
$$

Los segundos miembros son de clase C^∞, luego el sistema diferencial admite una única solución maximal definida en un intervalo $[0, \omega)$ en virtud del teorema de Cauchy-Picard-Lindelöf.

(d) Los estados de equilibrio son las soluciones de

$$\begin{aligned} \frac{s}{X_0}x - \frac{k_2 Y_0}{k_1 X_0}xy = 0\,, \\ \frac{k_2}{k_1}xy - \frac{k_3}{k_1 X_0}y = 0\,. \end{aligned}$$

Es obvio que $x = 0, y = 0$ es solución. Por otra parte, si $x \neq 0$ ha de ser $\frac{s}{X_0} - \frac{k_2 Y_0}{k_1 X_0}y = 0$ para que se satisfaga la primera de las ecuaciones, esto es, $y = \frac{k_1 s}{k_2 Y_0}$. En tal caso, la segunda ecuación solamente se cumpliría si $\frac{k_2}{k_1}x - \frac{k_3}{k_1 X_0} = 0$, es decir, $x = \frac{k_3}{k_2 X_0}$. En resumen, no hay más que dos estados de equilibrio: el trivial ($x = y = 0$) y el par $x = \frac{k_3}{k_2 X_0}, y = \frac{k_1 s}{k_2 Y_0}$.