UNIVERSIDAD DE GRANADA
Modelos Matemáticos II. 8 de junio de 2021

EJERCICIO 1. Emplea la transformada de Fourier para encontrar la solución del siguiente problema de valores iniciales:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} = u_{xx}\,, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(0,x) = 0\,, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(0,x) = e^{-|x|}\,, & x \in \mathbb{R} \end{array} \right. .$$

Ayuda: si denotamos χ_I la función característica del intervalo I, esto es:

$$\chi_I(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in I, \\ 0, & x \notin I \end{array} \right. ,$$

se tiene que

$$\widehat{\chi_{[-\alpha,\alpha]}}(y) = \frac{\operatorname{sen}(2\pi\alpha y)}{\pi y}\,.$$

SOLUCIÓN: Tomando la transformada de Fourier (con respecto a la variable $x \in \mathbb{R}$) en la ecuación en derivadas parciales y usando dos veces la propiedad de derivación $\widehat{u_x}(y) = 2\pi y \hat{u}(y)$ se obtiene

$$\hat{u}_{tt}(t,y) = -4\pi^2 y^2 \hat{u}(t,y)\,,$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en t (con coeficientes constantes) para cada $y \in \mathbb{R}$ fijo. De la ecuación característica asociada

$$\mu^2 + 4\pi^2 y^2 = 0$$

se obtiene

$$\mu_\pm = \pm 2\pi i |y|\,,$$

por lo que

$$\hat{u}(t,y) = A\cos(2\pi|y|t) + B\operatorname{sen}(2\pi|y|t)\,.$$

Por otra parte, las condiciones iniciales transformadas son de la forma

$$\hat{u}(0,y) = 0\,, \quad \hat{u}_t(0,y) = \widehat{e^{-|x|}}\,,$$

de donde resulta $A = 0$ y $2\pi B|y| = \widehat{e^{-|x|}}$, luego

$$B = \frac{\widehat{e^{-|x|}}}{2\pi|y|}\,.$$

En consecuencia, la solución del PVI transformado es

$$
\begin{aligned}
\hat{u}(t,y) &= \frac{\widehat{e^{-|x|}}\,\mathrm{sen}(2\pi|y|t)}{2\pi|y|} = \frac{\widehat{e^{-|x|}}\,\mathrm{sen}(2\pi yt)}{2\pi y} \\
&= \frac{1}{2}\widehat{e^{-|x|}}\,\widehat{\chi_{[-t,t]}} = \frac{1}{2}\widehat{\left(e^{-|x|} * \chi_{[-t,t]}\right)},
\end{aligned}
$$

donde se ha usado la ayuda que ofrece el enunciado. Tomando finalmente la transformada inversa de Fourier se desprende que

$$
u(t,x) = \frac{1}{2}\left(e^{-|x|} * \chi_{[-t,t]}\right) = \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} e^{-|x-y|}\,dy\,.
$$

EJERCICIO 2. Se considera el siguiente proceso químico:

$$
\begin{aligned}
&A \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} X \\
&B \xrightarrow{k_2} Y + D \\
&2X + Y \xrightarrow{k_3} 3X
\end{aligned}
$$

donde $k_1, k_{-1}, k_2, k_3 > 0$ son las respectivas ratios de cada reacción y donde las concentraciones de las sustancias A, B y D se asumen constantes. Se pide:

(i) Construye las ecuaciones del modelo.

(ii) Estudia las dimensiones de las ratios.

(iii) Se define el tiempo adimensional $\tau = k_{-1}t$ y

$$
u(\tau) = \sigma[X]\left(\frac{\tau}{k_{-1}}\right), \quad v(\tau) = \sigma[Y]\left(\frac{\tau}{k_{-1}}\right),
$$

donde hemos denotado $\sigma = \sqrt{\frac{k_3}{k_{-1}}}$. Construye las ecuaciones del modelo adimensionalizado.

(iv) Calcula los estados de equilibrio del modelo adimensional deducido en (iii).

SOLUCIÓN:

(i) Se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{d[X]}{dt} &= k_1 A_0 - k_{-1}[X] + k_3[X]^2[Y]\,, \\
\frac{d[Y]}{dt} &= k_2 B_0 - k_3[X]^2[Y]\,,
\end{aligned}
$$

donde se ha denotado $A_0 = [A](t)$ y $B_0 = [B](t)$ para todo $t \geq 0$.

(ii) Un análisis dimensional de las ecuaciones nos conduce a

$$\begin{aligned} \frac{[[C]]}{[[T]]} &= [[k_1]][[C]] + [[k_{-1}]][[C]] + [[k_3]][[C]]^3 \,, \\ \frac{[[C]]}{[[T]]} &= [[k_2]][[C]] + [[k_3]][[C]]^3 \,, \end{aligned}$$

de donde se desprende que

$$[[k_1]] = [[k_{-1}]] = [[k_2]] = [[T]]^{-1} \,, \quad [[[k_3]] = ([[C]]^2[[T]])^{-1} \,.$$

(iii) Derivando el cambio de variables se obtiene

$$\begin{aligned} &\frac{du}{d\tau} = \frac{\sigma}{k_{-1}} \frac{d[X]}{dt} \left(\frac{\tau}{k_1} \right) \\ &= \frac{\sigma}{k_{-1}} \left[k_1 A_0 - k_{-1}[X] \left(\frac{\tau}{k_{-1}} \right) + k_3 [X]^2 \left(\frac{\tau}{k_{-1}} \right) [Y] \left(\frac{\tau}{k_{-1}} \right) \right] \\ &= \frac{\sigma k_1 A_0}{k_{-1}} - u + \frac{k_3}{\sigma^2 k_{-1}} u^2 v \,, \\ &\frac{dv}{d\tau} = \frac{\sigma}{k_{-1}} \frac{d[Y]}{dt} \left(\frac{\tau}{k_1} \right) \\ &= \frac{\sigma}{k_{-1}} \left[k_2 B_0 - k_3 [X]^2 \left(\frac{\tau}{k_{-1}} \right) [Y] \left(\frac{\tau}{k_{-1}} \right) \right] \\ &= \frac{\sigma k_2 B_0}{k_{-1}} - \frac{k_3}{\sigma^2 k_{-1}} u^2 v \,. \end{aligned}$$

Por consiguiente, las ecuaciones adimensionales del modelo son:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \frac{\sqrt{k_3} k_1 A_0}{k_{-1}^{3/2}} - u + u^2 v \,, \\ \frac{dv}{d\tau} &= \frac{\sqrt{k_3} k_2 B_0}{k_{-1}^{3/2}} - u^2 v \,. \end{aligned}$$

(iv) Los estados de equilibrio resuelven el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\sqrt{k_3} k_1 A_0}{k_{-1}^{3/2}} - u + u^2 v \,, \\ 0 &= \frac{\sqrt{k_3} k_2 B_0}{k_{-1}^{3/2}} - u^2 v \,. \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones resulta

$$u_{eq} = \frac{\sqrt{k_3}}{k_{-1}^{3/2}} \big(k_1 A_0 + k_2 B_0 \big) \,.$$

En consecuencia,

$$v_{eq} = \frac{\sqrt{k_3} k_2 B_0}{k_{-1}^{3/2} u_{eq}^2} = \frac{k_2 B_0 k_{-1}^{3/2}}{\sqrt{k_3}(k_1 A_0 + k_2 B_0)^2} \, .$$