UNIVERSIDAD DE GRANADA
Modelos Matemáticos II. 31 de mayo de 2019

EJERCICIO 1. El objetivo de este ejercicio es resolver el siguiente problema de difusión:

$$\begin{cases} u_t = u_x + u_{xx} & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \end{cases}, \tag{1}$$

donde $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ denota la clase de Schwartz en $\mathbb{R}$.

(i) Demuestra la siguiente propiedad de la transformada de Fourier (recuerda que $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ixy}\, dx$):

$$\widehat{\phi(x-a)}(y) = e^{-2\pi iay}\hat{\phi}(y)\,, \quad \forall\, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall\, a \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) Emplea el método de la transformada de Fourier para encontrar una solución del problema (1).

(*Ayuda: puede que te resulte de utilidad saber que* $\widehat{e^{-\alpha^2 x^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{|\alpha|} e^{-\frac{\pi^2 y^2}{\alpha^2}}$.)

(iii) Comprueba que la solución calculada conserva la masa, esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\, dx \quad \forall\, t \geq 0\,.$$

SOLUCIÓN: (i) Se tiene:

$$\widehat{\phi(x-a)}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-a) e^{-2\pi ixy}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) e^{-2\pi i(z+a)y}\, dz = e^{-2\pi iay}\hat{\phi}(y)\,.$$

(ii) Utilizando la definición y las propiedades de la transformada de Fourier (en la variable x), se tiene:

$$\begin{aligned} \widehat{u_t}(y) &= \hat{u}_t(y)\,, \\ \widehat{u_x}(y) &= -2\pi iy\hat{u}(y)\,, \\ \widehat{u_{xx}}(y) &= -4\pi^2 y^2 \hat{u}(y)\,. \end{aligned}$$

Aplicando ahora la transformada de Fourier (en la variable x) a la ecuación del problema y haciendo uso de las reglas anteriores obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= -2\pi iy\hat{u} - 4\pi^2 y^2 \hat{u}\,, \\ \hat{u}(0,y) &= \widehat{u_0}(y)\,, \end{aligned}$$

que es un PVI con las variables separadas que tiene por solución

$$\hat{u}(t,y) = \widehat{u_0}(y) e^{-(2\pi iy + 4\pi^2 y^2)t}\,.$$

Finalmente, basta con observar

$$e^{-(2\pi iy+4\pi^2y^2)t} = e^{-2\pi iyt}\,\widehat{\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}}(y) = \widehat{\frac{e^{-\frac{(x-t)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}}(y)\,,$$

donde hemos empleado la regla proporcionada en la ayuda con $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, así como la propiedad expuesta en (i) con $a = t$. Por consiguiente, podemos expresar

$$\hat{u}(t,y) = \widehat{u_0}(y)\,\widehat{\frac{e^{-\frac{(x-t)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}}(y)\,,$$

de donde se desprende que

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-t)^2}{4t}} * u_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y-t)^2}{4t}}u_0(y)\,dy\,.$$

(iii) Se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\,dx &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y-t)^2}{4t}}\,dx\Big)\,dy \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4t}}\,dz\int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2}\,dw\int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)\,dy\,.
\end{aligned}$$

EJERCICIO 2. Se considera el siguiente proceso químico:

$$\begin{aligned}
A + S &\xrightarrow{k_1} B \\
B &\xrightarrow{k_2} A + P
\end{aligned} \tag{2}$$

donde $k_1, k_2 > 0$ indican la velocidad a la que ocurre cada reacción. Denotamos $[A], [S], [B], [P]$ las concentraciones de cada una de las sustancias químicas que intervienen en el mismo, las cuales dependen exclusivamente del tiempo salvo $[S]$ y $[P]$, que se suponen constantes para todo $t \geq 0$. Si las concentraciones iniciales de $[A]$ y $[B]$ son $[A_0] = [B_0] = 1$, determina todos los estados de equilibrio del proceso.

SOLUCIÓN: Como las concentraciones de S y P son constantes a lo largo del tiempo ($[S](t) = s$, $[P](t) = p$ para todo $t \geq 0$) nos limitaremos a escribir las ecuaciones diferenciales satisfechas por $[A]$ y $[B]$:

$$\begin{aligned}
\frac{d[A]}{dt} &= k_2[B] - k_1 s[A]\,, \\
\frac{d[B]}{dt} &= k_1 s[A] - k_2[B]\,.
\end{aligned}$$

Es claro que $[A] + [B]$ es una cantidad conservada, luego $[A](t) + [B](t) = [A_0] + [B_0] = 2$. Por otra parte, los estados de equilibrio resuelven el siguiente sistema de ecuaciones:

$$k_2[B] - k_1 s[A] = 0\,,$$

de donde se desprende que ha de cumplirse $k_2(2 - [A]) - k_1 s[A] = 0$, luego

$$[A] = \frac{2k_2}{k_2 + k_1 s}\,, \quad [B] = 2 - [A] = \frac{2k_1 s}{k_2 + k_1 s}\,.$$