DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Matemáticas. 5 de diciembre de 2013 (Prueba 2)

Nombre ____ **Grupo** ____________

1.- Se considera la siguiente estructuración grupal de una población de tejones en función de su peso: infrapeso ($<$ 10 kg.), peso adecuado (entre 10 y 16 kg.) y sobrepeso ($>$ 16 kg.). Es conocido que, de un trimestre al siguiente, el 30 % de los tejones continúa en régimen de infrapeso, el 60 % continúa en régimen de sobrepeso, el 20 % pasan de tener un peso adecuado al sobrepeso y el 10 % pasan de tener un peso adecuado al infrapeso. Por otra parte, si la distribución inicial de pesos responde a las proporciones $(0.4, 0.4, 0.2)^T$ (según el orden infrapeso–peso adecuado–sobrepeso), lo que se observa al cabo de tres meses es que estas han variado del siguiente modo: $(0.16, 0.36, 0.48)^T$. Se pide:

(i) Construye la matriz del modelo.

(ii) Justifica teóricamente que existe el valor propio dominante de la matriz del modelo y encuéntralo.

(iii) Si inicialmente hay 1000 tejones, determina cuántos habrá al cabo de dos años. ¿Y a largo plazo?

(iv) Determina las proporciones de cada grupo de pesos a largo plazo.

(v) Si, después de un largo periodo de vigilancia de sus hábitos alimenticios, pretendiéramos combatir el sobrepeso de los tejones con un plan de dieta individualizado, ¿de cuántos planes habría que disponer al cabo de dicho periodo?

Solución: (i) Trasladando las informaciones que aporta el enunciado a la matriz de transición del modelo que pretende construirse obtenemos

$$M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & \\ & & \\ & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Además, por tratarse de un modelo de estados la matriz que lo representa debe ser de probabilidad, luego el coeficiente de la posición $(2, 2)$ ha de ser 0.7. Como los recuentos son trimestrales, es claro a la luz del enunciado que ha de cumplirse

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & a \\ b & 0.7 & c \\ d & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.16 \\ 0.36 \\ 0.48 \end{pmatrix},$$

de modo que $b + d = 0.7$ y $a + c = 0.4$. Reescribiendo la formulación matricial anterior en forma de ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} 0.12 + 0.04 + 0.2a &= 0.16 \\ 0.4b + 0.28 + 0.2c &= 0.36 \\ 0.4d + 0.08 + 0.12 &= 0.48 \end{aligned} \quad ,$$

de donde se desprende que $a = 0$, $c = 0.4$, $b = 0$ y $d = 0.7$, dando como resultado final la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.4 \\ 0.7 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

(ii) Es sencillo verificar que la matriz M es de probabilidad y ergódica, luego existe su valor propio dominante y este es $\lambda = 1$.

(iii) En un modelo de este tipo el número total de individuos que componen la población es invariante, por lo que habrá siempre 1000 tejones.

(iv) Debemos calcular un vector propio dominante. Como ya sabemos que el valor propio dominante es $\lambda = 1$, bastará con resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.4 \\ 0.7 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} 0.3x + 0.1y &= x \\ 0.7y + 0.4z &= y \\ 0.7x + 0.2y + 0.6z &= z \end{aligned} \quad ,$$

de donde resulta que una solución (de las infinitas posibles) es $x = 1$, $y = 7$, $z = 5.25$. Por consiguiente, las proporciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Infrapeso: } & \frac{1}{1+7+5.25} \times 100 = 7.54\,\%, \\ \text{Peso adecuado: } & \frac{7}{1+7+5.25} \times 100 = 52.83\,\%, \\ \text{Sobrepeso: } & \frac{5.25}{1+7+5.25} \times 100 = 39.62\,\%. \end{aligned}$$

(v) Como el plan de dieta es individual y en total la población cuenta con 1000 tejones, habrá que disponer de $\frac{39.62}{100} \times 1000 \approx 396$ tratamientos.

2.- La evolución de una determinada población viene descrita por la siguiente matriz de transición:

$$M = \begin{pmatrix} 0.3 & a & 1 \\ 0.7 & 0 & b \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix},$$

donde a, b y c son parámetros ≥ 0 a ajustar. Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

(a) Si $a = c = 0.5$ y $b = 0$, entonces la matriz M es de probabilidad y ergódica.

(b) Si $a = c = 0.5$ y $b = 0.2$, entonces la matriz M es de Leslie.

(c) Si $a = \frac{1}{7}$ y $b = c = 0$, entonces $\lambda = 0.5$ es un valor propio de la matriz M.

(d) Si $a = \frac{1}{7}$ y $b = c = 0$, entonces la población representada por la matriz M tiende a crecer a largo plazo.

(e) Ninguna de las anteriores.

Solución: La afirmación (a) es claramente VERDADERA, pues todos los coeficientes de la matriz M serían ≥ 0, la suma de cada una de las columnas de M daría como resultado 1, y todos los coeficientes de la matriz M^3 serían > 0 (como puede constatarse con un simple diagrama de árbol).

La afirmación (b) es FALSA, dado que el valor de b tendría que ser necesariamente igual a 0 para que M representase un modelo de Leslie.

Para verificar la certeza o no del enunciado (c), bastará con comprobar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 0.3 & \frac{1}{7} & 1 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

es compatible indeterminado. Equivalentemente, se trata de resolver

$$\begin{aligned} &0.3x + \frac{1}{7}y + z = 0.5x \\ &0.7x = 0.5y \qquad , \\ &z = 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son todas de la forma $x = \lambda$, $y = \frac{7\lambda}{5}$, $z = 0$, cualquiera que sea el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego la afirmación (c) es VERDADERA.

Como para las elecciones $a = \frac{1}{7}$ y $b = c = 0$ la matriz que resulta es de Leslie y además contiene dos tasas de fertilidad consecutivas estrictamente positivas (de hecho, las tres lo son), podemos concluir que M admite un valor propio dominante. Además, dicho valor propio dominante ha de coincidir con el único valor propio positivo que tiene M. Como acabamos de verificar que $\lambda = 0.5$ es un valor propio de M, este ha de ser el dominante. Al ser menor que 1, a largo plazo la población tenderá a extinguirse, con lo que la afirmación (d) es FALSA.