DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Matemáticas. 13 de diciembre de 2012 (Prueba 2).

Nombre ____ **Grupo** ____________

Ejercicio 1.- Un equipo europeo de biólogos se encuentra realizando unas investigaciones relacionadas con las preferencias que manifiestan los orangutanes del parque natural de Gunung Leuser, en Sumatra, a la hora de confeccionar los nidos en que pasarán la noche en las copas de los árboles. Para ello han elegido una comunidad concreta formada por 40 de estos primates y se han centrado en tres especies de árboles diferentes, a las que haremos mención aquí como A, B y C. Los científicos han propuesto el siguiente modelo matemático para reproducir de modo aproximado la variabilidad sobre la elección diaria que los orangutanes hacen de la especie de árbol en el que construirán su *cama*:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 0{,}6\, A_n + 0{,}2\, C_n \,, \\ B_{n+1} &= 0{,}4\, A_n + 0{,}5\, B_n \,, \\ C_{n+1} &= 0{,}5\, B_n + 0{,}8\, C_n \,. \end{aligned}$$

Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

(a) El 20 % de los orangutanes que un día construyen su nido en un árbol de la especie A, cambian a un árbol de la especie C al día siguiente.

(b) El modelo anterior viene descrito por una matriz de probabilidad.

(c) La matriz que describe el modelo anterior admite un valor propio estrictamente dominante.

(d) A largo plazo, la población de orangutanes se distribuye entre las tres especies de árboles según los porcentajes aproximados 26,3 % (para la especie A), 21 % (para la especie B) y 52,6 % (para la especie C).

(e) Ninguna de las anteriores.

Solución: El enunciado (a) es FALSO, puesto que 0,2 (o, en términos porcentuales, 20 %) es la fracción de la comunidad de orangutanes que cambian de árbol de la especie C a árbol de la especie A, y no al revés. La matriz asociada al modelo es la siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix},$$

que es claramente de probabilidad, luego la afirmación (b) es VERDADERA. Además, es sencillo comprobar que se trata de una matriz ergódica:

$$A \to A+B \to A+B+C\,, \quad B \to B+C \to A+B+C\,, \quad C \to A+C \to A+B+C\,.$$

por lo que $\lambda = 1$ será su valor propio estrictamente dominante, lo que implica que el enunciado (c) es también VERDADERO. Finalmente, para verificar la veracidad de lo expuesto en (d) basta con calcular un vector propio dominante de la matriz M. Para ello planteamos el sistema[1]

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

[1] Recuerda que $\lambda = 1$ es el valor propio dominante

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} 0{,}6\,A + 0{,}2\,C &= A\,, \\ 0{,}4\,A + 0{,}5\,B &= B\,, \\ 0{,}5\,B + 0{,}8\,C &= C\,. \end{aligned}$$

Una posible solución (de las infinitas que tiene) es $A = 10$, $B = 8$, $C = 20$. Luego los porcentajes a largo plazo vienen dados por

$$A : \frac{10}{10+8+20} \times 100 = 26{,}3\,\%\,, \quad B : \frac{8}{10+8+20} \times 100 = 21\,\%\,, \quad C : \frac{20}{10+8+20} \times 100 = 52{,}6\,\%\,.$$

Esto hace que la afirmación (d) sea también VERDADERA.

Ejercicio 2.- Una determinada población está estructurada en base a tres grupos diferentes de edad: crías (hasta los 3 años), jóvenes (de 3 a 6 años) y adultos (de 6 a 9 años). Es conocido que cada cría engendra en media una nueva cría, cada joven engendra en media 1,5 crías y cada adulto engendra en media 0,5 crías. Además, las observaciones arrojan el dato de que la mitad de las crías llegan a jóvenes, en tanto que ningún joven sobrevive.

(a) Construye la matriz del modelo.

(b) Si la distribución de tamaños iniciales es $P_0 = (3, 1, 0)^T$ (en las unidades adecuadas), calcula cuál será la distribución de tamaños al cabo de seis años.

(c) Justifica la existencia del valor propio estrictamente dominante para este modelo y aproxímalo usando seis pasos del método de las potencias con vector de partida $(1{,}5, 0{,}4, 0)^T$. Trabaja con dos cifras decimales.

(d) ¿Es $(3, 1, 0)^T$ un vector propio dominante? Justifica la respuesta.

(e) A la luz de los resultados anteriores, explica el comportamiento a largo plazo de la población (incluyendo su distribución porcentual por grupos de edad).

Solución: (a) Se trata de un modelo de Leslie, luego la matriz que lo representa ha de ser

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en función de las tasas proporcionadas en el enunciado del ejercicio.

(b) Como cada recuento es trianual (dado que cada periodo de edad comprende tres años), lo que necesitamos calcular es el vector P_2, que vendrá dado por $P_2 = LP_1$, donde

$$P_1 = LP_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}75 \\ 2{,}25 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) El valor propio dominante de L existe porque existen dos tasas de fertilidad contiguas estrictamente positivas. Eligiendo $v_0 = (1{,}5, 0{,}4, 0)^T$ como vector de partida en el método de las potencias se tiene:

$$v_1 = Lv_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}1 \\ 0{,}75 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = Lv_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2{,}1 \\ 0{,}75 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}22 \\ 1{,}05 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = Lv_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3{,}22 \\ 1{,}05 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}79 \\ 1{,}61 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_4 = Lv_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4{,}79 \\ 1{,}61 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}2 \\ 2{,}39 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_5 = Lv_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7{,}2 \\ 2{,}39 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10{,}78 \\ 3{,}6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_6 = Lv_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10{,}78 \\ 3{,}6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16{,}18 \\ 5{,}39 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, las primeras componentes[2] generan la siguiente sucesión:

$\{1{,}5,\ 2{,}1/1{,}5 = 1{,}4,\ 3{,}22/2{,}1 = 1{,}53,\ 4{,}79/3{,}22 = 1{,}48,\ 7{,}2/4{,}79 = 1{,}5,\ 10{,}78/7{,}2 = 1{,}49,\ 16{,}18/10{,}78 = 1{,}5,\ \ldots\}$

(d) Como se calculó anteriormente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = 1{,}5 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo cual quiere decir que $(3, 1, 0)^T$ es un vector propio de L asociado al valor propio $\lambda = 1{,}5$. Además sabemos que tal valor propio ha de ser el dominante, pues se trata del único valor propio positivo que una matriz de Leslie admite. En consecuencia, podemos afirmar que $(3, 1, 0)^T$ es un vector propio dominante de L.

(e) Una vez que se ha estabilizado el ritmo de crecimiento de la población, ésta tenderá a largo plazo a crecer ilimitadamente porque el valor propio dominante de L es (aproximadamente) igual a 1,5 (> 1), según calculamos en (c). Como ya conocemos un vector propio dominante (cf. ítem (d)), las proporciones de cada grupo de edad a largo plazo vendrán dadas por

$$\frac{3}{3+1} \times 100 = 75\,\% \text{ crías}, \quad \frac{1}{3+1} \times 100 = 25\,\% \text{ jóvenes},$$

y no habrá individuos adultos.

[2] También habrían valido las segundas pero no las terceras, puesto que hay ceros. En efecto, para las segundas componentes se obtiene la siguiente sucesión: $\{0{,}4,\ 0{,}75/0{,}4 = 1{,}87,\ 1{,}05/0{,}75 = 1{,}4,\ 1{,}61/1{,}05 = 1{,}53,\ 2{,}39/1{,}61 = 1{,}48,\ 3{,}6/2{,}39 = 1{,}5,\ 5{,}39/2{,}6 = 1{,}49,\ \ldots\}$