DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Matemáticas. 28 de octubre de 2014 (Prueba 1).

Nombre ____ **Grupo** ____________

Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

1. La evolución estacional de una determinada población de insectos viene descrita por la ecuación en diferencias

$$P_{n+1} = \alpha P_n(1-\beta P_n)\,,$$

donde α y β son parámeros ≥ 0.

(a) Si $\beta = 0$ y $\alpha > 0$, la población crecerá ilimitadamente.

(b) Si $\beta = 1$ y $\alpha = 3$, la población admite dos puntos de equilibrio inestables.

(c) Si $\beta = \alpha > 3$, entonces $P = \frac{\alpha-1}{\alpha^2}$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

(d) Si $\alpha = 1$ y $\beta \neq 0$, la ecuación solo admite un punto de equilibrio.

(e) Ninguna de las anteriores.

Solución. *El primer enunciado es claramente FALSO. Con $\beta = 0$ la ecuación en diferencias se reduce al modelo malthusiano $P_{n+1} = \alpha P_n$, por lo que bastaría con elegir cualquier valor $0 < \alpha \leq 1$ para concluir que la población no crece.*

Si $\beta = 1$ y $\alpha = 3$, la ecuación en diferencias se escribe del siguiente modo: $P_{n+1} = 3P_n(1-P_n)$, que es exactamente un modelo logístico con parámetro $A = 3$. En tal caso, es conocido que existen dos puntos de equilibrio: $P = 0$ y $P = 1 - \frac{1}{A} = \frac{2}{3}$, el primero de ellos inestable y el segundo asintóticamente estable. Luego el enunciado (b) es también FALSO.

Supongamos ahora $\beta = \alpha > 3$. Los puntos de equilibrio de nuestra ecuación en diferencias son aquellos que verifican

$$P = \alpha P(1-\alpha P) \Rightarrow P\big(1-\alpha(1-\alpha P)\big) = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ o bien } 1-\alpha(1-\alpha P) = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ o bien } P = \frac{\alpha-1}{\alpha^2}\,.$$

Por otra parte, si llamamos $f(P) = \alpha P(1-\alpha P)$ entonces $f'(P) = \alpha(1-\alpha P) - \alpha^2 P = \alpha(1-2\alpha P)$, de donde se desprende que

$$f'\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\right) = \alpha\left(1-2\alpha\cdot\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\right) = \alpha\left(1-2\cdot\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) = \alpha\left(\frac{2}{\alpha}-1\right) = 2-\alpha < -1\,,$$

dado que $\alpha > 3$. La conclusión es que el punto de equilibrio $P = \frac{\alpha-1}{\alpha^2}$ es inestable, luego el enunciado (c) es FALSO.

Si $\alpha = 1$ y $\beta \neq 0$, la ecuación en diferencias se lee $P_{n+1} = P_n(1-\beta P_n)$, cuyos puntos de equilibrio vienen dados a través de

$$P = P(1-\beta P) \Rightarrow P\big(1-(1-\beta P)\big) = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ o bien } \beta P = 0 \Rightarrow P = 0\,,$$

con lo que el enunciado (d) es VERDADERO.

2. Para una cierta especie de aves (contada en miles de individuos) se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad vienen dadas por $f(P) = 2 - P$ y $m(P) = P$, respectivamente.

(a) Existe un tamaño inicial $P_0 > 0$ para el que la población se extingue en un número finito de recuentos.

(b) $P = 0$ es un punto de equilibrio inestable para este modelo.

(c) A largo plazo, la población tiende a estabilizarse en torno a 1000 individuos.

(d) El modelo resultante puede escribirse como una ecuación logística discreta con parámetro $A = 3$.

(e) Ninguna de las anteriores.

Solución. *La ecuación en diferencias asociada a las tasas que nos da el enunciado es la siguiente:*

$$P_{n+1} = P_n + f(P_n)P_n - m(P_n)P_n = P_n + (2 - P_n)P_n - P_n^2 = P_n(3 - 2P_n)\,.$$

El enunciado (a) es claramente VERDADERO, dado que tomando $P_0 = \frac{3}{2}$ encontramos la población extinta en un solo paso.

Que $P = 0$ es un punto fijo es de verificación inmediata. Para estudiar su estabilidad, derivamos la función $f(P) = P(3 - 2P)$ y obtenemos

$$f'(P) = 3 - 4P \Rightarrow f'(0) = 3 > 1\,,$$

luego se trata de un punto de equilibrio inestable y el enunciado (b) es VERDADERO.

En nuestra escala de unidades, mil individuos vienen representados por $P = 1$, que es claramente otro punto de equilibrio de este modelo. Utilizando la expresión de la derivada de f calculada previamente, se tiene que $f'(1) = -1$, por lo que el criterio que conocemos no decide. Podemos recurrir entonces a resolver gráficamente o bien a transformar nuestra ecuación en una logística del tipo $x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$, para lo cual bastaría con reescribirla de la forma

$$P_{n+1} = 3P_n\left(1 - \frac{2}{3}P_n\right) \tag{1}$$

y escalar la población como

$$x_n := \frac{2}{3}P_n\,, \tag{2}$$

de donde resulta

$$x_{n+1} = 3x_n(1 - x_n) \tag{3}$$

tras multiplicar la ecuación (1) por $\frac{2}{3}$. La nueva población x_n tiene un comportamiento logístico con parámetro $A = 3$, lo cual significa que $x = 0$ es un punto de equilibrio inestable en tanto que $x = 1 - \frac{1}{A} = \frac{2}{3}$ es asintóticamente estable. Si reinterpretamos esto último en términos de la población original, P, tendríamos que el punto de equilibrio $x = \frac{2}{3}$ (que ya sabemos es asintóticamente estable) se corresponde con $P = 1$ (en virtud de la fórmula (2)), luego el enunciado (c) es VERDADERO.

Finalmente, ya fue comprobado en (3) que el enunciado (d) es VERDADERO.

3. De una determinada ecuación en diferencias, $x_{n+1} = f(x_n)$, se conoce que

$$f(2) = 1, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) = -1\,.$$

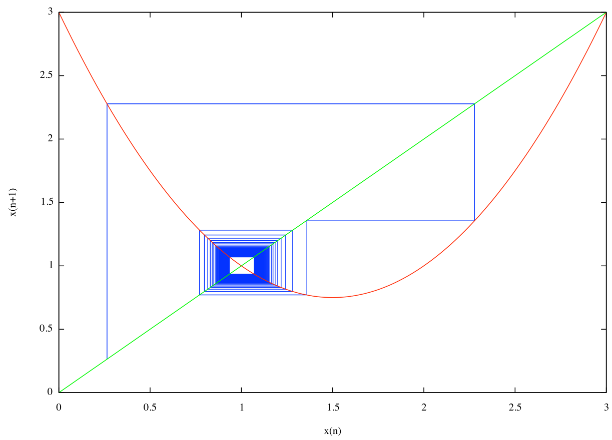
(a) $x = 2$ es un punto de equilibrio.

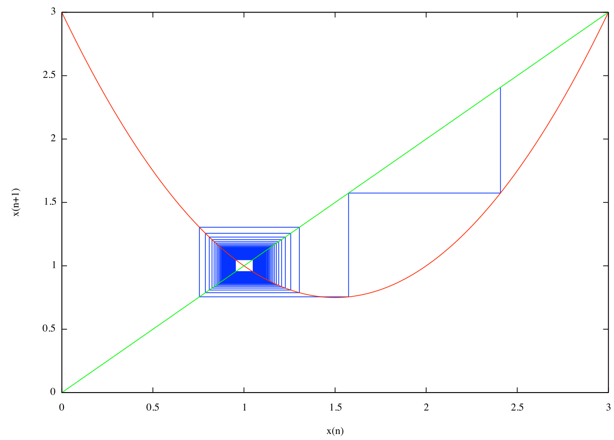
(b) La ecuación en diferencias $x_{n+1} = x_n^2 - 3x_n + 3$ reproduce las observaciones del enunciado.

(c) Si se toma $f(x) = x^2 - 3x + 3$, entonces $x = 1$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

(d) Para tamaños iniciales $x_0 > 1$, la población es siempre creciente.

(e) Ninguna de las anteriores.





Solución. *El enunciado (a) es claramente FALSO, pues* $f(2) \neq 2$.

Es inmediato comprobar que la función $f(x) = x^2 - 3x + 3$ *satisface* $f(2) = 1$, $f(1) = 1$ *y* $f'(1) = -1$, *luego el enunciado (b) es VERDADERO.*

Como $f(1) = 1$, *podemos afirmar que* $x = 1$ *es un punto de equilibrio de nuestra ecuación en diferencias. Por otra parte se tiene que* $f'(1) = -1$, *luego el criterio de la derivada no decide sobre la estabilidad del mismo. Sin embargo, gráficamente puede comprobarse sin dificultad que se trata de un punto de equilibrio asintóticamente estable (véanse las figuras), luego el enunciado (c) es VERDADERO.*

El enunciado (d) es claramente FALSO, puesto que si elegimos $x_0 = 2$ *entonces* $x_1 = f(2) = 1$, *con lo que el tamaño de la población habría decrecido.*