Universidad de Granada — **Prueba I** — MODELOS MATEMÁTICOS II
Dpto. Matemática Aplicada — 18/05/2018 — GRADO EN MATEMÁTICAS
Facultad de Ciencias

Apellidos	Firma

Nombre	D.N.I o pasaporte	$3^{\text{o}}A$	$3^{\text{o}}B$	4^{o}

EJERCICIO 1. Se considera el siguiente problema mixto para la ecuación de ondas unidimensional:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 1, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = x^4 - 2\pi x^3 - \frac{x^2}{2}, & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = 0\,, \quad u(\pi,t) = -\pi^4 - \frac{\pi^2}{2}, & t \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Se pide:

(i) Encuentra una solución particular $u_p(x)$ del siguiente problema auxiliar:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 1, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0\,, \quad u(\pi,t) = -\pi^4 - \frac{\pi^2}{2}, & t \geq 0 \end{cases}$$

(ii) Encuentra una solución $u_h(x,t)$ del siguiente problema mixto para la correspondiente ecuación de ondas homogénea:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = x^4 - 2\pi x^3 + \pi^3 x, & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

(iii) Comprueba que $u = u_p + u_h$ resuelve (1).

Solución: (i) Como buscamos una solución particular que solo dependa de x, habrá de resolver la ecuación diferencial $-u_p'' = 1$ sujeta a las condiciones de contorno $u_p(0) = 0$, $u_p(\pi) = -\pi^4 - \frac{\pi^2}{2}$. La solución general es $u_p(x) = -\frac{x^2}{2} + Ax + B$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Al aplicar los valores en la frontera obtenemos $A = -\pi^3$ y $B = 0$, luego $u_p(x) = -\frac{x^2}{2} - \pi^3 x$.

(ii) Buscamos una solución con las variables separadas $u(x,t) = w(x)T(t)$. Los factores habrán de cumplir $w(x)T''(t) = w''(x)T(t)$, o equivalentemente $\frac{w''(x)}{w(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \in \mathbb{R}$. El problema para $w(x)$ consiste en resolver la ecuación diferencial $w''(x) + \lambda w(x) = 0$ junto con las condiciones de contorno $w(0) = w(\pi) = 0$, de donde se obtiene que los valores propios vienen dados por $\lambda_n = n^2$, con $n \in \mathbb{N}$, y las funciones propias son $w_n(x) = A\,\mathrm{sen}(nx)$, $A \in \mathbb{R}$. Por otra parte, $T(t)$ resuelve $T''(t) + n^2 T(t) = 0$, de donde resulta $T(t) = B\cos(nt) + C\,\mathrm{sen}(nt)$, con $B, C \in \mathbb{R}$. En consecuencia, las soluciones con las variables separadas responden a la forma $u_h^n(x,t) = \big(\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \,\mathrm{sen}(nt)\big)\,\mathrm{sen}(nx)$. Para construir una solución de nuestro problema (esto es, que satisfaga también los datos iniciales) consideramos la superposición de los modos oscilatorios u_h^n:

$$u_h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \,\mathrm{sen}(nt)\big)\,\mathrm{sen}(nx)\,.$$

Es inmediato comprobar que $(u_h)_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n \operatorname{sen}(nx)=0$, de donde se desprende que $\beta_n=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Finalmente, $u_h(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \operatorname{sen}(nx)=x^4-2\pi x^3+\pi^3 x$. Para calcular los coeficientes α_n desarrollamos la función $\varphi(x)=x^4-2\pi x^3+\pi^3 x$ en serie de Fourier de senos. Se tiene

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)\,,$$

con

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^\pi x^4\operatorname{sen}(nx)\,dx-2\pi\int_0^\pi x^3\operatorname{sen}(nx)\,dx+\pi^3\int_0^\pi x\operatorname{sen}(nx)\,dx\right\}\\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n^5}\Big[\Big(\pi^2n^2(12-\pi^2n^2)-24\Big)\cos(n\pi)+24\Big]+\frac{2\pi^2}{n}\Big(\pi^2+\frac{6}{n^2}\Big)\cos(n\pi)-\frac{\pi^4}{n}\cos(n\pi)\right\}\\ &= \frac{48}{\pi n^5}\Big(1+(\pi^2n^2-1)(-1)^n\Big)\,, \end{aligned}$$

donde hemos empleado que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^4\operatorname{sen}(nx)\,dx &= \frac{1}{n^5}\Big[\Big(\pi^2n^2(12-\pi^2n^2)-24\Big)\cos(n\pi)+24\Big]\,,\\ \int_0^\pi x^3\operatorname{sen}(nx)\,dx &= -\frac{\pi}{n}\Big(\pi^2+\frac{6}{n}\Big)\cos(n\pi)\,,\\ \int_0^\pi x\operatorname{sen}(nx)\,dx &= -\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)\,. \end{aligned}$$

Por consiguiente $u_h(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos(nt)\operatorname{sen}(nx)$, con $\alpha_n=a_n=\frac{48}{\pi n^5}\Big(1+(\pi^2n^2-1)(-1)^n\Big)$.

(iii) En primer lugar, es inmediato verificar que $u_{tt}-u_{xx}=(u_p+u_h)_{tt}-(u_p+u_h)_{xx}=(u_h)_{tt}-(u_h)_{xx}+1=1$. También $u(x,0)=u_p+u_h(x,0)=-\frac{x^2}{2}-\pi^3x+x^4-2\pi x^3+\pi^3x=x^4-2\pi x^3-\frac{x^2}{2}$ y $u_t(x,0)=(u_h)_t(x,0)=0$. Finalmente $u(0,t)=u_p(0)+u_h(0,t)=0$ y $u(\pi,t)=u_p(\pi)+u_h(\pi,t)=-\frac{\pi^2}{2}-\pi^4$.

EJERCICIO 2. Calcula las extremales del funcional $\mathcal{F}[y]=\int_0^1(y'(x))^2\,dx$ en

$$\left\{C_0^1([0,1]):\int_0^1 y(x)\,dx=2\,,\quad \int_0^1 xy(x)\,dx=\frac{1}{2}\right\}\cap C^2(0,1)\,.$$

Denotamos $p:=y'$ y $F^*(y):=p^2-\lambda y-\mu xy$. La ecuación de Euler-Lagrange es

$$0=F_y^*-\frac{d}{dx}(F_p^*)=-\lambda-\mu x-2y''\,,$$

o equivalentemente $y''=-\frac{\lambda+\mu x}{2}$. Integrando dos veces respecto de la variable x se obtiene

$$y(x)=-\frac{\mu}{12}x^3-\frac{\lambda}{4}x^2+Ax+B\,,\quad A,B\in\mathbb{R}\,.$$

Haciendo actuar ahora las condiciones de contorno $y(0)=y(1)=0$ llegamos a $A=\frac{1}{12}(\mu+3\lambda)$. Imponemos finalmente que se satisfagan las ligaduras:

$$\begin{aligned} 2 &= \int_0^1 y(x)\,dx=-\frac{\mu}{48}-\frac{\lambda}{12}+\frac{1}{24}(\mu+3\lambda)\,,\\ \frac{1}{2} &= \int_0^1 xy(x)\,dx=-\frac{\mu}{60}-\frac{\lambda}{16}+\frac{1}{36}(\mu+3\lambda)\,, \end{aligned}$$

de donde se desprende que $\mu + 2\lambda = 96$, $\frac{\mu}{45} + \frac{\lambda}{24} = 1$. Resolviendo este último sistema de ecuaciones obtenemos los valores $\lambda = 408$, $\mu = -720$, luego

$$y(x) = 60x^3 - 102x^2 + 42x\,.$$

EJERCICIO 3. Se considera el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} \big(p(x)u'(x)\big)' + q(x)u(x) = f(x), & x \in (0,1) = I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}, \tag{2}$$

con $0 \le q \in C(\overline{I})$ y $0 < p \in C^1(I)$.

(i) ¿De qué problema de minimización es (2) su ecuación de Euler-Lagrange?

(ii) Supongamos que $f \in L^2(I)$. Da condiciones suficientes para concluir que el problema de minimización obtenido en el apartado anterior tiene solución única en un espacio de Sobolev apropiado. Para ello puedes valerte del hecho (conocido) de que $|||u||| := \|u'\|_{L^2(I)}$ es una norma equivalente a la norma usual en $H_0^1(I)$.

(iii) Si eligiésemos $f(x) := \big(\frac{1}{2}\text{signo}(x - \frac{1}{2})\big)'$, ¿tendría solución el problema de minimización en $H_0^1(I)$? Razona la respuesta.

Solución: (i) Por la relación (vista en clase) que guardan los problemas de contorno del tipo (2) con el cálculo de variaciones, se tiene directamente que el problema en cuestión es el consistente en minimizar el siguiente funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \big(p(x)y'(x)^2 - q(x)y(x)^2 + 2f(x)y(x)\big)\,dx$$

en $C_0^1(I)$.

(ii) Construimos $a(u,v) := 2\Big(\int_0^1 p(x)u'(x)v'(x)\,dx - \int_0^1 q(x)u(x)v(x)\,dx\Big)$ y $F(v) = -2\int_0^1 f(x)v(x)\,dx$. El funcional $a(\cdot,\cdot)$ es claramente bilineal y simétrico. Su continuidad en $H_0^1(I) \times H_0^1(I)$ es consecuencia de la desigualdad

$$|a(u,v)| \le \|p\|_\infty \|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} + \|q\|_\infty \|u\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \le C|||u||||||v|||\,, \quad C > 0\,,$$

para la que se ha empleado la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la anunciada equivalencia entre la norma de $H_0^1(I)$ y $|||\cdot|||$. Por su parte,

$$|F(v)| \le 2\|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \le 2\|f\|_{L^2(I)} |||v|||$$

en virtud de la desigualdad de Poincaré $\|u\|_{L^2(I)} \le |||u|||$, lo que representa la continuidad de F en $H_0^1(I)$. Queda por demostrar que $a(\cdot,\cdot)$ es coercivo. Usando nuevamente la desigualdad de Poincaré obtenemos

$$\begin{aligned} a(u,u) &= 2\Big(\int_0^1 p(x)u'(x)^2\,dx - \int_0^1 q(x)u(x)^2\,dx\Big) \ge 2\Big(\alpha \int_0^1 u'(x)^2\,dx - \|q\|_\infty \int_0^1 u(x)^2\,dx\Big) \\ &\ge 2(\alpha - \|q\|_\infty)|||u|||^2\,, \end{aligned}$$

por lo que necesitamos que se cumpla $\|q\|_\infty < \alpha$ para garantizar la coercividad del funcional. En tal caso podríamos aplicar el teorema de Lax-Milgram, del que se desprende que el problema de minimización asociado al funcional

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - F(v) = \int_0^1 \Big(p(x)u'(x)^2 - q(x)u(x)^2 + 2f(x)v(x)\Big)\,dx$$

tiene solución única en $H_0^1(I)$.

(iii) Sí, nuevamente en virtud del teorema de Lax-Milgram, pues la derivada de la función signo es una delta de Dirac la cual pertenece a $H^{-1}(I)$ (el dual topológico de $H_0^1(I)$).