# DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
# UNIVERSIDAD DE GRANADA

Matemáticas. 8 de noviembre de 2012 (Prueba 1).

**Nombre** ______________________________________________ **Grupo** ______________

Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

1. La evolución de una determinada población de batracios viene descrita por la ecuación en diferencias $P_{n+1} = AP_n(2 - P_n)$, donde $A$ es un parámero positivo.

(a) Si $A > 2$, el modelo no tiene sentido biológico.

(b) Si $P_0 = 1$ y $P_3 = 0$, entonces ha de ser $A = 2$.

(c) Si $A = \frac{1}{2}$, la ecuación tiene dos soluciones constantes.

(d) La variable poblacional $x_n := \frac{P_n}{2}$ satisface una ecuación en diferencias logística con parámetro igual a $2A$.

(e) Ninguna de las anteriores.

**Solución:** El primer enunciado es claramente verdadero. De hecho, bastaría con elegir (por ejemplo) $P_0 = 1$ para concluir que $P_1 = AP_0(2-P_0) = A > 2$, luego $P_2 = AP_1(2-P_1) = A^2(2-A) < 0$ generaría una población con tamaño negativo.

Si $P_0 = 1$, se tiene (como acabamos de verificar) que $P_1 = A$ y $P_2 = A^2(2 - A)$, luego ha de ser $P_3 = AP_2(2 - P_2) = A^3(2 - A)\big(A^3 - 2A^2 + 2\big)$. Como $P_3$ ha de ser igual a cero y $A$ es un parámetro positivo, las únicas alternativas posibles son $2 - A = 0$ (es decir, $A = 2$) o bien $A^3 - 2A^2 + 2 = 0$; sin embargo esta última opción no puede darse, dado que la función $f(A) = A^3 - 2A^2 + 2$ no se anula para valores positivos de $A$,[1] por lo que la afirmación (b) es verdadera.

Si $A = \frac{1}{2}$, las soluciones constantes de nuestro modelo coinciden con los puntos fijos de $f(P) = \frac{1}{2}P(2 - P)$, que son los que resultan de resolver la ecuación $\frac{1}{2}P(2 - P) = P$. Es muy sencillo comprobar que tal ecuación admite como única solución $P = 0$, luego (c) es falso.

Finalmente, si introducimos el cambio de escala $x_n := \frac{P_n}{2}$, la ecuación de partida puede reescribirse de la forma $x_{n+1} = 2A\,x_n(1 - x_n)$, sin más que dividir por 2 ambos miembros y tener en cuenta que $2 - P_n = 2\big(1 - \frac{P_n}{2}\big) = 2(1 - x_n)$. Por consiguiente, el enunciado (d) es verdadero.[2]

2. Para una cierta especie de cernícalos se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad vienen dadas por $f(P) = 2$ y $m(P) = 1 - e^{-P}$, respectivamente.

(a) La ecuación en diferencias asociada a las tasas anteriores no tiene puntos de equilibrio.

(b) Todos los puntos de equilibrio de la ecuación en diferencias asociada a las tasas anteriores son inestables.

[1] Una forma sencilla de verificar que tal función no se anula para $A \in (0, +\infty)$ es esbozar su gráfica. Para ello, uno puede comprobar sin dificultad que el valor mínimo que adopta $f$ es $\frac{22}{27} > 0$: en efecto, $f'(A) = 3A^2 - 4A$ solamente se anula si $A = 0$ (que no nos sirve, puesto que $A$ ha de ser positivo) o bien $A = \frac{4}{3}$. En este último caso se tiene que $f(\frac{4}{3}) = \frac{22}{27}$. Intenta ahora dibujar la gráfica de $f$ y entenderás que nunca se anula para valores positivos de $A$. He de admitir que mi intención era que en el enunciado de (b) hubiese aparecido la condición $P_2 = 0$, lo cual habría facilitado mucho los cálculos, pero por error escribí $P_3 = 0$. Mis disculpas

[2] Este argumento nos proporciona además otra forma de ver que el enunciado (a) es verdadero, pues sabemos que nuestro modelo puede reescribirse como una ecuación logística, a saber: $x_{n+1} = 2A\,x_n(1 - x_n)$. Entonces ha de cumplirse $0 < 2A \leq 4$ para que la población no pueda alcanzar valores negativos, luego $A$ tiene que ser menor o igual que 2 si queremos que la ecuación sea biológicamente admisible

(c) Existe un tamaño inicial crítico, $P_0 \neq 0$, para el que la población se extingue en un número finito de recuentos.

(d) En este modelo, cuantos más cernícalos hay más mueren.

(e) Ninguna de las anteriores.

**Solución:** La ecuación en diferencias asociada a las tasas del enunciado es

$$P_{n+1} = P_n + 2P_n - \big(1 - e^{-P_n}\big)P_n = 3P_n - \big(1 - e^{-P_n}\big)P_n \,. \tag{1}$$

Para encontrar sus puntos de equilibrio basta con plantear $3P - \big(1 - e^{-P}\big)P = P$, que nos conduce a tener que resolver $\big(1 - e^{-P}\big)P = 2P$, lo cual se traduce en el hecho de que $P = 0$ o bien $1 - e^{-P} = 2$, que es equivalente a escribir $e^{-P} = -1$ (sin solución, pues la función exponencial es siempre positiva; o, dicho de otro modo, $\ln(-1)$ no existe). Por consiguiente, la ecuación en diferencias tiene un (único) punto de equilibrio que es $P = 0$. Esto hace que la afirmación (a) sea falsa.

Para verificar (b) podemos aplicar el criterio de la derivada a la función $f(P) = 3P - \big(1 - e^{-P}\big)P$. Se tiene que $f'(P) = 3 - \big(e^{-P}P + 1 - e^{-P}\big) = 2 - e^{-P}(P-1)$. Luego $f'(0) = 3 > 1$ y, en consecuencia, el punto de equilibrio $P = 0$ es inestable y el enunciado (b) verdadero.

Para que la población se extinguiera en alguno de los recuentos tendría que suceder, en virtud de (1), que $3P_n - \big(1 - e^{-P_n}\big)P_n = 0$ para algún valor de $n$. Sin embargo, esta relación es solo cierta si $P_n = 0$ (es decir, si la población estuviera ya extinta de antes: $P_0 = P_1 = \ldots = P_n = 0$, que contradice el hecho de que $P_0 \neq 0$ expuesto en el enunciado) o bien si $3 = 1 - e^{-P_n}$, que no tiene solución por la misma razón de antes (en este caso, no existe $\ln(-2)$). La conclusión es, pues, que la afirmación (c) es falsa.

Finalmente, es inmediato verificar que, cuanto más grande es el valor de $P$, mayor es también el valor que toma $m(P)$. De otro modo: $m'(P) = e^{-P} > 0$, luego la tasa de mortalidad es una función creciente. Por consiguiente, el enunciado (d) es verdadero.

3. Se considera la ecuación en diferencias siguiente: $P_{n+1} = P_n\big(e^{P_n} - 1\big)$, que rige la dinámica temporal (con recuentos anuales) de una determinada población de secuoyas (medida en cientos de individuos).

(a) Es un buen modelo para describir una población con tres estados constantes.

(b) Si inicialmente $P_0 = \ln(2)$ y se sabe que transcurridos 3 años hay 600 secuoyas, el modelo propuesto es más adecuado que el de Malthus con parámero $\lambda = 2$.

(c) A largo plazo, el tamaño de la población tiende al valor $\ln(2)$.

(d) Sea cual sea el tamaño inicial de la población, ésta crecerá sin límite.

(e) Ninguna de las anteriores.

**Solución:** Las soluciones constantes de la ecuación en diferencias del enunciado son las que resultan de resolver $P\big(e^P - 1\big) = P$, esto es, $P = 0$ y $P = \ln(2)$. Esto quiere decir que dicho modelo solo sería útil para describir poblaciones con dos estados constantes, por lo que (a) es falso.

Veamos ahora qué información arroja el criterio de la derivada para $f(P) = P\big(e^P - 1\big)$. Se tiene que $f'(P) = e^P - 1 + Pe^P = e^P(1+P) - 1$. Luego $f'(0) = 0 \in (-1,1)$ y $f'\big(\ln(2)\big) = 2(1+\ln(2)) - 1 = 1 + 2\ln(2) > 1$. Por consiguiente, $P = 0$ es asintóticamente estable y $P = \ln(2)$ es inestable, luego las afirmaciones (c) y (d) son falsas.

El modelo de Malthus con parámero $\lambda = 2$ es $P_{n+1} = 2P_n$. Si partimos, como dice el enunciado, del dato inicial $P_0 = \ln(2)$, transcurridos 3 años obtendremos $P_3 = 2^3 P_0 = 8\ln(2) = 5{,}54517$, es decir, una predicción de aproximadamente 555 secuoyas para aproximar las 600 reales. Por otra parte, con el modelo del ejercicio obtendríamos una predicción de $P_3 = P_0 = \ln(2) = 0{,}69314$ (pues $P = \ln(2)$ es una solución constante como se ha comprobado previamente) o, lo que es lo mismo, un número aproximado de 69 secuoyas. A la vista está que resulta más adecuado el modelo de Malthus, luego el enunciado (b) es falso. En conclusión, la única opción válida es la que corresponde al enunciado (e).