UNIVERSIDAD DE GRANADA
Modelos Matemáticos II. 28 de mayo de 2021

EJERCICIO 1. Se considera el problema consistente en encontrar $u \in H_0^1(0,1)$ tal que

$$\int_0^1 \left[2u'(x)v'(x) - v'(x)u(x) - v(x)u'(x) - ku(x)v(x)\right] dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx,$$

para todo $v \in H_0^1(0,1)$ y $f \in L^2(0,1)$, donde $k \in \mathbb{R}$ es un parámetro a determinar.

(i) ¿Pertenece la función

$$f(x) = (x - 1/2)^2 \operatorname{signo}(x - 1/2)$$

a $H_0^1(0,1)$? ¿Está en $H^2(0,1)$?

(ii) Demuestra[1] la siguiente desigualdad de Poincaré para $u \in H_0^1(0,L)$:

$$\|u\|_{L^2(0,L)} \leq L\|u'\|_{L^2(0,L)}\,.$$

(iii) Determina una condición suficiente sobre el parámetro k que permita afirmar que el problema anterior tiene una única solución.

(iv) Por la regularidad de este tipo de problemas sabemos que, caso de existir, la solución $u \in H^2(0,1)$. ¿Qué ecuación de Euler-Lagrange satisface la posible solución del problema de minimización asociado? ¿Es alguna de las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange un mínimo de dicho problema?

SOLUCIÓN:

(i) $f \notin H_0^1(0,1)$, pues no se anula en los extremos del intervalo. Por otra parte, $f \in C^1(0,1)$ (luego $f \in H^1(0,1)$) y

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq \frac{1}{2} \\ 1 - 2x & x < \frac{1}{2} \end{cases},$$

que tiene un pico en $x = \frac{1}{2}$. Es conocido que los picos son derivables en sentido débil (recuérdese el ejemplo de $|x|$). En este caso se tiene

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & x \geq \frac{1}{2} \\ -2 & x < \frac{1}{2} \end{cases},$$

que pertenece claramente a $L^2(0,1)$. Por consiguiente, $f \in H^2(0,1)$.

[1] Recuerda que $C_0^1(0,L)$ es denso en $H_0^1(0,L)$.

(ii) Gracias a la propiedad de densidad establecida a pie de página, basta con probar la desigualdad de Poincaré para funciones de clase $C_c^1(0,1)$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^2(0,L)} &= \int_0^L u(x)^2\,dx = \int_0^L \Big(\int_0^x u'(z)\,dz\Big)^2 dx \\
&\le \int_0^L \Big(\sqrt{x}\,\|u'\|_{L^2(0,x)}\Big)^2 dx = \int_0^L x\,\|u'\|^2_{L^2(0,x)}\,dx \\
&\le L\|u'\|^2_{L^2(0,L)} \int_0^L dx = L^2\|u'\|^2_{L^2(0,L)}\,,
\end{aligned}$$

donde ha sido empleada la desigualdad de Cauchy-Schwarz de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int_0^x |u'(z)|\,dz &= \int_0^x 1\cdot |u'(z)|\,dz \\
&\le \Big(\int_0^x 1^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^x |u'(z)|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{x}\,\|u'\|^2_{L^2(0,x)}\ .
\end{aligned}$$

(iii) Definimos el funcional $a : H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)\to\mathbb{R}$ como

$$a(u,v) := \int_0^1 \big[2u'(x)v'(x) - v'(x)u(x) - v(x)u'(x) - ku(x)v(x)\big]\,dx$$

y $F : H_0^1(0,1)\to\mathbb{R}$ como $F(v) := \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$. Es claro que a es bilineal y simétrica y que F es lineal. La continuidad de F se sigue de

$$|F(v)| \le \|f\|_{L^2(0,1)}\|v\|_{L^2(0,1)} \le \|f\|_{L^2(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)}\,.$$

Por otra parte, la continuidad de a es consecuencia de

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\le 2\|u'\|_{L^2(0,1)}\|v'\|_{L^2(0,1)} + \|u\|_{L^2(0,1)}\|v'\|_{L^2(0,1)} \\
&\quad + \|u'\|_{L^2(0,1)}\|v\|_{L^2(0,1)} + |k|\|u\|_{L^2(0,1)}\|v\|_{L^2(0,1)} \\
&\le (4+|k|)\|u\|_{H^1(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)}\,.
\end{aligned}$$

Verificamos finalmente la coercividad de a. Se tiene

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= 2\int_0^1 u'(x)^2\,dx - 2\int_0^1 u(x)u'(x)\,dx - k\int_0^1 u(x)^2\,dx \\
&\ge 2\int_0^1 u'(x)^2\,dx - 2\|u\|_{L^2(0,1)}\|u'\|_{L^2(0,1)} - k\int_0^1 u(x)^2\,dx \\
&\ge \int_0^1 u'(x)^2\,dx - (1+k)\int_0^1 u(x)^2\,dx\,,
\end{aligned}$$

donde se ha usado la desigualdad $2ab \le a^2+b^2$. Si $k\le -1$, entonces $a(u,u)\ge$ $\max\{1,-(1+k)\}\|u\|^2_{H^1(0,1)}$ y el operador es coercivo. Si por el contrario $k>-1$, podemos emplear la desigualdad de Poincaré para concluir que

$$a(u,u) \ge \int_0^1 u'(x)^2\,dx - (1+k)\int_0^1 u(x)^2\,dx \ge -k\|u'\|^2_{L^2(0,1)},$$

lo que implica la cota $0 > k > -1$. Esta cota puede ser mejorada usando la desigualdad $2ab \leq \epsilon^2 a^2 + \epsilon^{-2} b^2$ que nos llevaría por el mismo procedimiento a $k < 1 - \epsilon^2$. En virtud del teorema de Lax-Milgram, basta pues con tomar $k < 1$ para que el problema planteado admita una única solución.

(iv) Según el teorema de Lax-Milgram, el problema de minimización equivalente (a es simétrica) es el asociado al funcional $\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - f(u)$. Denotamos $p = u'$ y $F(u,p) = p^2 - up - \frac{k}{2}u^2 - fu$. La ecuación de Euler-Lagrange asociada a $\mathcal{F}$ es

$$0 = F_u - \frac{d}{dx}(F_p) = -p - ku - f - \frac{d}{dx}(2p - u) = -2u'' - ku - f\,.$$

con condiciones de contorno asociadas $u(0) = u(1) = 0$. La ecuación anterior tiene sentido como igualdad de funciones en L^2 ya que por lo probado en el ítem (iii), este problema admite una única solución $u \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$ cualquiera que sea $f \in L^2[0,1]$. Por el teorema de Lax-Milgram, existe un único mínimo de $\mathcal{F}$ en $H_0^1(0,1)$, luego la respuesta a la última cuestión del apartado (iv) es sí.

EJERCICIO 2. Para cada una de las siguientes situaciones, calcula las extremales y discute razonadamente la posibilidad de que el funcional alcance un mínimo. En caso de que así sea, calcula el valor mínimo del funcional y en qué función (o funciones) lo alcanza.

(i) $\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y'(x)^2 + y(x)y'(x) + y'(x) + y(x)\right) dx$ definido en

$$\mathcal{D} = \left\{C^2[0,1] : y(0) = 1\right\}.$$

(ii) $\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \left(y(x)^2 + y'(x) + y'(x)^2\right) dx$ definido en

$$\mathcal{D} = \left\{C^2[0,1] : y(0) = 0,\ y(1) = 1\right\}.$$

SOLUCIÓN: (i) Denotemos

$$F(y,p) := \frac{p^2}{2} + yp + p + y\,.$$

La ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema de minimización es

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_p) = 0 \Longleftrightarrow (p+1) - \frac{d}{dx}(p + y + 1) = 0 \Longleftrightarrow y'' - 1 = 0\,.$$

Por otra parte, las condiciones de contorno son $y(0) = 1$ (tal aparece reflejado en $\mathcal{D}$) y

$$0 = F_p(1) = y'(1) + y(1) + 1\,.$$

Por consiguiente, las soluciones del problema de contorno correspondiente son todas las parábolas $y(x) = \frac{x^2}{2} + Ax + B$ que satisfacen

$$y(0) = 1\,, \quad y(1) + y'(1) = -1\,,$$

esto es:

$$y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{7x}{4} + 1\,. \tag{1}$$

Además, la matriz Hessiana asociada a F

$$H[F] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es indefinida, por lo que no puede asegurarse que $\mathcal{F}$ alcance un mínimo en (1).

(ii) Denotemos

$$F(y,p) := y^2 + p + p^2\,.$$

La ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema de minimización es ahora

$$2y - \frac{d}{dx}(2p+1) = 0 \Longleftrightarrow y'' - y = 0\,.$$

Por otra parte, las condiciones de contorno son $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$ (tal aparece reflejado en $\mathcal{D}$). Por consiguiente, las soluciones del problema de contorno correspondiente son todas las funciones de la forma $y(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$ que satisfacen

$$y(0) = 0\,, \quad y(1) = 1\,,$$

esto es:

$$y(x) = \frac{e}{e^2-1}(e^{x} - e^{-x})\,. \tag{2}$$

En este caso la matriz Hessiana asociada a F es

$$H[F] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\,,$$

que es definida positiva. Por consiguiente, $\mathcal{F}$ alcanza un mínimo en (2) y

$$\min_{\mathcal{D}}\{\mathcal{F}\} = \mathcal{F}\left[\frac{e}{e^2-1}(e^{x} - e^{-x})\right] = \frac{2e^2}{e^2-1}\,.$$

EJERCICIO 3. Emplea el método de separación de variables para resolver el siguiente problema mixto:

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt} = 2u_{xx} + u, & t \geq 0,\ 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,x) = 1 + 3\cos(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(0,x) = 1 + 7\cos(2x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, & t \geq 0 \end{array}\right. ,$$

SOLUCIÓN: Buscamos soluciones del tipo $u(t,x) = w(x)T(t)$, por lo que ha de cumplirse

$$w(x)T''(t) = 2w''(x)T(t) + w(x)T(t)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{T''(t)-T(t)}{2T(t)}=\frac{w''(x)}{w(x)}=-\lambda\in\mathbb{R}\,.$$

Resolvemos en primer lugar la ecuaciÛn diferencial $w''+\lambda w=0$ sujeta a las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}0&=u_x(t,0)=w'(0)T(t)\,\forall t\geq 0\Rightarrow w'(0)=0\,,\\0&=u_x(t,\pi)=w'(\pi)T(t)\,\forall t\geq 0\Rightarrow w'(\pi)=0\,.\end{aligned}$$

- Si $\lambda=0$ se tiene $w(x)=Ax+B$. Al imponer las condiciones de contorno resulta $A=0$ y $B\in\mathbb{R}$, luego $\lambda=0$ es un valor propio del problema con funciones propias asociadas las constantes.
- Si $\lambda<0$ entonces la solución general viene dada por $w(x)=Ae^{\sqrt{-\lambda}\,x}+Be^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$. Al imponer las condiciones de contorno resulta $A=B=0$, luego no hay valores propios negativos.
- Finalmente, si $\lambda>0$ entonces $w(x)=A\cos(\sqrt{\lambda}\,x)+B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,x)$. Se tiene:

  $$\begin{aligned}0&=w'(0)=B\,,\\0&=w'(\pi)=-A\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,\pi)\,,\end{aligned}$$

  de donde se deduce que ha de ser $\lambda_n=n^2$, $n\in\mathbb{N}$.

Por consiguiente, los valores propios asociados al problema de Sturm-Liouville para $w(x)$ son $\lambda_n=n^2$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, con funciones propias asociadas $w_n(x)=A\cos(nx)$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Resolviendo ahora la ecuación diferencial para $T(t)$, a saber:

$$T''+(2n^2-1)T=0\,,\quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\,,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}T_0(t)&=Ae^t+Be^{-t}\,,\\T_n(t)&=A\cos(\sqrt{2n^2-1}\,t)+B\,\mathrm{sen}(\sqrt{2n^2-1}\,t)\,,\quad n\in\mathbb{N}\,.\end{aligned}$$

Por consiguiente, buscamos una solución a nuestro problema que sea de la forma

$$u(t,x)=A_0e^t+B_0e^{-t}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(\sqrt{2n^2-1}\,t)+B_n\,\mathrm{sen}(\sqrt{2n^2-1}\,t)\right]\cos(nx)\,.$$

Evaluando en $t=0$ obtenemos:

$$A_0+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(nx)=u(0,x)=1+3\cos(x)\,,$$

de donde se desprende que ha de ser $A_0 + B_0 = 1$, $A_1 = 3$, $A_n = 0$ para $n > 1$. Por otra parte

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= A_0 e^t - B_0 e^{-t} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2n^2-1}\big[B_n \cos(\sqrt{2n^2-1}\,t) - A_n \operatorname{sen}(\sqrt{2n^2-1}\,t)\big] \cos(nx)\,, \end{aligned}$$

luego

$$A_0 - B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{2n^2-1}\cos(nx) = u_t(0,x) = 1 + 7\cos(2x)\,,$$

de donde se desprende que $A_0 - B_0 = 1$, $B_2\sqrt{7} = 7$, $B_n = 0$ para $n \neq 2$. En consecuencia, $A_0 = 1$, $B_0 = 0$ y la solución buscada es

$$u(t,x) = e^t + 3\cos(t)\cos(x) + \sqrt{7}\operatorname{sen}(\sqrt{7}\,t)\cos(2x)\,.$$