UNIVERSIDAD DE GRANADA
Modelos Matemáticos II. 24 de mayo de 2019

EJERCICIO 1. Se considera el problema consistente en encontrar $u \in H_0^1(0,1)$ tal que

$$\int_0^1 \big[3u'(x)v'(x) - v'(x)u(x) - v(x)u'(x) - ku(x)v(x)\big]\, dx = \int_0^1 f(x)v(x)\, dx,$$

para todo $v \in H_0^1(0,1)$ y $f \in L^2(0,1)$, donde $k \in \mathbb{R}$ es un parámetro a determinar.

1. Demuestra[1] la siguiente desigualdad de Poincaré para $u \in H_0^1(0,1)$:

   $$\|u\|_{L^2(0,1)} \leq \|u'\|_{L^2(0,1)}\,.$$

   Demuestra también que la norma usual en $H^1(0,1)$ es equivalente a la norma

   $$|||u|||_{H^1(0,1)} = \|u'\|_{L^2(0,1)}, \quad \text{si} \quad u \in H_0^1(0,1).$$

2. Determina una condición suficiente sobre el parámetro k que permita afirmar que el problema anterior tiene una única solución.

3. Por la regularidad de este tipo de problemas sabemos que, caso de existir, la solución $u \in H^2(0,1)$. ¿Qué ecuación de Euler-Lagrange satisface la posible solución del problema de minimización equivalente? ¿Es alguna de las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange un mínimo de dicho problema?

SOLUCIÓN: 1. Se trata de la desigualdad de Poincaré (hecha en clase). Veamos que $|||\cdot|||$ es equivalente a la norma usual de $H^1(0,1)$, a saber: $\|u\|^2_{H^1(0,1)} = \|u\|^2_{L^2(0,1)} + \|u'\|^2_{L^2(0,1)}$. Es obvio que $|||u|||^2_{H^1(0,1)} \leq \|u\|^2_{H^1(0,1)}$. Por otra parte, $\|u\|^2_{H^1(0,1)} \leq 2\|u'\|^2_{L^2(0,1)} = 2|||u|||^2_{H^1(0,1)}$ en virtud de la desigualdad de Poincaré.

2. Definimos el funcional $a : H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ como

$$a(u,v) := \int_0^1 \big[3u'(x)v'(x) - v'(x)u(x) - v(x)u'(x) - ku(x)v(x)\big]\, dx$$

y $F : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ como $F(v) := \int_0^1 f(x)v(x)\, dx$. Es claro que a es bilineal y simétrica y que F es lineal. La continuidad de F se sigue de $|F(v)| \leq \|f\|_{L^2(0,1)}\|v\|_{L^2(0,1)} \leq \|f\|_{L^2(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)}$. Por otra parte, la continuidad de a es consecuencia de

$$\begin{aligned}
&|a(u,v)| \\
&\leq 3\|u'\|_{L^2(0,1)}\|v'\|_{L^2(0,1)} + \|u\|_{L^2(0,1)}\|v'\|_{L^2(0,1)} + \|u'\|_{L^2(0,1)}\|v\|_{L^2(0,1)} + |k|\|u\|_{L^2(0,1)}\|v\|_{L^2(0,1)} \\
&\leq (5 + |k|)\|u\|_{H^1(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)}\,.
\end{aligned}$$

[1]Recuerda que $C_0^1(0,1)$ es denso en $H_0^1(0,1)$.

Verificamos finalmente la coercividad de a, para lo cual empleamos el resultado del apartado 1.:

$$\begin{aligned} a(u,u) &= 3\int_0^1 u'(x)^2\,dx - 2\int_0^1 u(x)u'(x)\,dx - k\int_0^1 u(x)^2\,dx \\ &\geq 3\int_0^1 u'(x)^2\,dx - 2\|u\|_{L^2(0,1)}\|u'\|_{L^2(0,1)} - k\int_0^1 u'(x)^2\,dx \\ &\geq (1-k)\|u'\|^2_{L^2(0,1)} = (1-k)|||u|||^2_{H^1(0,1)}\,. \end{aligned}$$

En virtud del teorema de Lax-Milgram, basta con tomar $k < 1$ para que el problema planteado admita una única solución.

3. Según dicta el teorema de Lax-Milgram, el problema de minimización equivalente es el asociado al funcional $\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - F(u)$. Denotamos $p = u'$ y $F(u,p) = \frac{3}{2}p^2 - up - \frac{k}{2}u^2 - fu$. La ecuación de Euler-Lagrange asociada a $\mathcal{F}$ es

$$0 = F_u - \frac{d}{dx}(F_p) = -p - ku - f - \frac{d}{dx}(3p-u) = -3u'' - ku - f\,.$$

Por el teorema de Lax-Milgram, existe un único mínimo de $\mathcal{F}$ en $H_0^1(0,1)$, luego la respuesta a la última cuestión del apartado 3. es sí.

EJERCICIO 2. Se considera el problema consistente en minimizar el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 (y(x)y'(x))^2\,dx$$

en un dominio $\mathcal{D}$.

1. Si $u \in \mathcal{D} = \left\{y \in C^1[0,1],\ y(0) = 1,\, y(1) = 2,\, \int_0^1 y^2(x)\,dx = L\right\} \cap C^2$ es solución del problema anterior, verifica que la ecuación de Euler-Lagrange que satisface es
$$\frac{1}{2}(y^2)'' = \lambda \in \mathbb{R}\,.$$
Calcula las extremales de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ cuando $L = 3$.

2. Si $u \in \mathcal{D} = \left\{y \in C^1[0,1],\ y(0) = y(1) = \sqrt{5/2},\, \int_0^1 y^2(x)\,dx = L\right\} \cap C^2$ es solución del problema anterior, determina la ecuación de Euler-Lagrange que satisface. Calcula las extremales de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ cuando $L = 5/2$.

3. ¿Son las soluciones de los apartados anteriores mínimos del problema en cuestión en su correspondiente dominio $\mathcal{D} \cap C^2$? Razona la respuesta.

SOLUCIÓN: Denotamos $p = y'$ y definimos $F(y,p) := y^2p^2$, que corregimos del siguiente modo para incorporar la ligadura común a los dominios de los apartados 1. y 2.: $F^*(y,p) := F(y,p) + \lambda y^2$. En ambos casos, la ecuación de Euler-Lagrange viene dada por

$$\begin{aligned} 0 &= F_y^* - \frac{d}{dx}(F_p^*) = F_y + 2\lambda y - \frac{d}{dx}(F_p) = 2yp^2 + 2\lambda y - 2\frac{d}{dx}(y^2 p) \\ &= 2y\big(\lambda - p^2 - yp'\big) \,. \end{aligned}$$

Como no puede ser $y \equiv 0$ en ninguno de los dos casos (pues se violarían las condiciones de contorno), se tiene que cumplir

$$\lambda = yy'' + (y')^2 = \frac{1}{2}(y^2)'' \,,$$

luego

$$y(x)^2 = \lambda x^2 + Ax + B \tag{1}$$

para cualesquiera $A, B \in \mathbb{R}$. Imponiendo las condiciones de contorno del apartado 1., a saber: $y(0) = 1$, $y(1) = 2$, se obtiene $B = 1$ y $A = 3 - \lambda$, de donde se sigue que $y(x) = \sqrt{\lambda x^2 + (3-\lambda)x + 1}$. Finalmente, para que se satisfaga la ligadura (con $L = 3$) debe cumplirse

$$3 = \int_0^1 \big(\lambda x^2 + (3-\lambda)x + 1\big)\, dx = \frac{5}{2} - \frac{\lambda}{6} \Rightarrow \lambda = -3 \,.$$

Por consiguiente, la única extremal del problema planteado en 1. es

$$y(x) = \sqrt{-3x^2 + 6x + 1} \,.$$

Por su parte, las condiciones de contorno en 2. son $y(0) = y(1) = \sqrt{5/2}$, que aplicadas a (1) obligan a tomar $A = -\lambda$, $B = \frac{5}{2}$. Imponiendo finalmente que se cumpla la ligadura, obtenemos

$$\frac{5}{2} = \int_0^1 \Big(\lambda x^2 - \lambda x + \frac{5}{2}\Big)\, dx = -\frac{\lambda}{6} + \frac{5}{2} \Rightarrow \lambda = 0 \,.$$

Por consiguiente, la única extremal en la situación de 2. es $y(x) \equiv \sqrt{5/2}$.

En el primer caso no podemos asegurar que la extremal sea un mínimo de $\mathcal{F}$, pues ni F es convexa ni $\mathcal{D}$ es un conjunto convexo, por lo que no pueden aplicarse los resultados estudiados en la asignatura sobre existencia de solución del problema de minimización. Sin embargo, y a pesar de lo dicho anteriormente, en la situación expuesta en 2. sí podemos afirmar que $\mathcal{F}$ alcanza un mínimo en $y(x) \equiv \sqrt{5/2}$, pues $\mathcal{F} \geq 0$ y se satisface $\mathcal{F}[\sqrt{5/2}] = 0$.

EJERCICIO 3. Emplea el método de separación de variables para resolver el siguiente problema mixto para la ecuación de ondas unidimensional:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & t \geq 0,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ u(0,x) = 0, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ u_t(0,x) = \cos(3x), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ u_x(t,0) = u(t,\frac{\pi}{2}) = 0, & t \geq 0 \,. \end{array} \right. ,$$

SOLUCIÓN: Buscamos una solución de la forma $u(t,x) = T(t)w(x)$. Para ello debe resolver en primer lugar la ecuación de ondas: $T''(t)w(x) - 9T(t)w''(x) = 0$, lo que se traduce en

$$\frac{T''(t)}{9T(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = -\lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Comenzamos planteando el problema para $w(x)$, el cual consta de la EDO de segundo orden

$$w''(x) + \lambda w(x) = 0 \tag{2}$$

sujeta a las siguientes condiciones de contorno (válidas para todo $t \geq 0$):

$$0 = u_x(t,0) = T(t)w'(0) \Rightarrow w'(0) = 0\,, \tag{3}$$

$$0 = u(t,\pi/2) = T(t)w(\pi/2) \Rightarrow w(\pi/2) = 0\,. \tag{4}$$

- Si $\lambda = 0$, la solución general de (2) es $w(x) = Ax + B$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Imponiendo las condiciones (3) y (4) obtenemos $A = B = 0$.
- Si $\lambda < 0$, entonces $w(x) = Ae^{-\sqrt{-\lambda}x} + Be^{\sqrt{-\lambda}x}$. Imponiendo (3) y (4) obtenemos $A = B = 0$.
- Si $\lambda > 0$, entonces $w(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$. Imponiendo (3) y (4) obtenemos $B = 0$, $A\cos(\sqrt{\lambda}\,\pi/2) = 0$. Por consiguiente, los valores propios son $\lambda_n = (2n-1)^2$, $n \in \mathbb{N}$, y las funciones propias asociadas $w_n(x) = A\cos\big((2n-1)x\big)$.

Atendiendo a la discusión anterior, la ecuación diferencial que debe resolver $T(t)$ es la siguiente: $T_n''(t) + 9(2n-1)^2 T_n(t) = 0$, de donde se desprende que

$$T_n(t) = C\cos\big(3(2n-1)t\big) + D\sin\big(3(2n-1)t\big)\,, \quad C, D \in \mathbb{R}\,.$$

Por consiguiente, ensayamos una solución del tipo

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\big((2n-1)x\big)\Big(\alpha_n \cos\big(3(2n-1)t\big) + \beta_n \sin\big(3(2n-1)t\big)\Big)\,.$$

Finalmente, basta con identificar los coeficientes α_n y β_n imponiendo los datos iniciales del problema. Se tiene:

$$0 = u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\big((2n-1)x\big) \Rightarrow \alpha_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

$$\cos(3x) = u_t(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3(2n-1)\beta_n \cos\big((2n-1)x\big) \Rightarrow \beta_2 = \frac{1}{9},\ \beta_n = 0 \ \forall n \neq 2\,.$$

La solución buscada es, por tanto,

$$u(t,x) = \frac{1}{9}\cos(3x)\sin(9t)\,.$$