Apellidos					Firma
Nombre	D.N.I o pasaporte	$3^o A$	$3^o B$	4^o	

EJERCICIO 1.

Se considera el problema consistente en minimizar el funcional $\mathcal{F}[y] = \int_0^1 (y'(x))^2\, dx$ en el espacio

$$\mathcal{D} = \left\{ C_0^1((0,1)) : \int_0^1 y(x)\, dx = 2\,, \quad \int_0^1 xy(x)\, dx = \frac{1}{2} \right\}.$$

1. Calcula las extremales de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D} \cap C^2([0,1])$. ¿Es única la solución del problema de minimización?
2. Calcula las extremales de $\mathcal{F}$ en $\widetilde{\mathcal{D}} \cap C^2([0,1])$, donde

$$\widetilde{\mathcal{D}} = \left\{ C_0^1((0,1)) : \int_0^1 (y(x))^2\, dx = 1\,, \quad \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) y(x)\, dx = 0 \right\}.$$

Solución:

1. Definimos $F(y,p) := p^2$ y $F^*(y,p) := p^2 + \lambda_1 y + \lambda_2 xy$. La ecuación de Euler-Lagrange asociada a $F^\star$ viene dada por $F_y^\star - \frac{d}{dx}(F_p^\star) = 0$, es decir, $\lambda_1 + \lambda_2 x - 2y''(x) = 0$, o equivalentemente $y''(x) = \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2}x$. Basta con integrar dos veces para encontrar la solución general: $y(x) = \frac{\lambda_1}{4}x^2 + \frac{\lambda_2}{12}x^3 + Ax + B$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Por otra parte, las condiciones de contorno a imponer son $y(0) = y(1) = 0$, de donde se desprende que $B = 0$ y $A = -\frac{1}{12}(3\lambda_1 + \lambda_2)$. Finalmente, debemos asegurarnos de que se satisfacen las ligaduras del problema. La primera de ellas se traduce en $\int_0^1 \left(\frac{\lambda_1}{4}x^2 + \frac{\lambda_2}{12}x^3 - \frac{1}{12}(3\lambda_1 + \lambda_2)x \right) dx = 2$, luego ha de ser $\frac{\lambda_1}{12} + \frac{\lambda_2}{48} - \frac{1}{24}(3\lambda_1 + \lambda_2) = 2$, o equivalentemente $2\lambda_1 + \lambda_2 = -96$. La segunda ligadura se lee ahora $\int_0^1 x\left(\frac{\lambda_1}{4}x^2 + \frac{\lambda_2}{12}x^3 - \frac{1}{12}(3\lambda_1 + \lambda_2)x \right) dx = \frac{1}{2}$, luego $15\lambda_1 + 8\lambda_2 = -360$. En consecuencia, se tiene que $\lambda_1 = -408$, $\lambda_2 = 720$, luego $A = 42$, y resulta que la única extremal es $y(x) = 60x^3 - 102x^2 + 42x$.

Dado que $\mathcal{F}$ es convexo (puesto que F lo es) y que $\mathcal{D}$ es un conjunto convexo, puede asegurarse que $\mathcal{F}$ alcanza el mínimo en $\mathcal{D}$. Como la extremal es única, dicho mínimo solo puede alcanzarse en la función $y(x) = 60x^3 - 102x^2 - 18x$.

2. En este caso $F^*(y,p) := p^2 - \lambda_1 y^2 - \lambda_2 \operatorname{sen}(\pi x) y$. La ecuación de Euler-Lagrange asociada a $F^\star$ viene dada por $-2\lambda_1 y - \lambda_2 \operatorname{sen}(\pi x) - 2y'' = 0$. Multiplicando esta ecuación por la función $\varphi(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ e integrando por partes se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= -2\lambda_1 \int_0^1 y(x) \operatorname{sen}(\pi x)\, dx - \lambda_2 \int_0^1 \operatorname{sen}^2(\pi x)\, dx - 2\int_0^1 y''(x) \operatorname{sen}(\pi x)\, dx \\ &= -\frac{\lambda_2}{2} + 2\pi \int_0^1 y'(x) \cos(\pi x)\, dx = -\frac{\lambda_2}{2} + 2\pi^2 \int_0^1 y(x) \operatorname{sen}(\pi x)\, dx = -\frac{\lambda_2}{2}\,. \end{aligned}$$

Por consiguiente el segundo multiplicador de Lagrange se anula, luego podemos restringirnos al caso en que $F^*(y,p) := p^2 - \lambda_1 y^2$, de donde se desprende que la ecuación de Euler-Lagrange es sencillamente $y'' + \lambda_1 y = 0$.

Como buscamos extremales en $\mathcal{D}$, esta ecuación ha de ser resuelta junto con las condiciones de contorno $y(0) = y(1) = 0$, de donde se deduce que los valores propios han de ser de la forma $\lambda_n = n^2\pi^2$ y las funciones propias $\phi_n(x) = C \operatorname{sen}(n\pi x)$, $n \in \mathbb{N}$. En último término debemos imponer que las ligaduras sean satisfechas. Para que se cumpla la primera de ellas es necesario que $C^2 \int_0^1 \operatorname{sen}^2(n\pi x)\, dx = 1$, de donde se desprende que ha de ser $C = \pm\sqrt{2}$. Para que se cumpla la segunda se requiere que $\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(n\pi x)\, dx = 0$, relación que es satisfecha para todo $n \geq 2$. En consecuencia, las extremales pedidas son las funciones $y_n(x) = \pm\sqrt{2} \operatorname{sen}(n\pi x)$, $n \geq 2$.

■

EJERCICIO 2.

Se considera el siguiente problema mixto para la ecuación de ondas unidimensional:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & t \geq 0,\ 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,x) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(0,x) = x(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t \geq 0 \end{cases}.$$

¿Tiene solución? ¿Es única? Justifícalo. En caso afirmativo, encuéntrala y determina su regularidad.

Solución:

El problema planteado satisface las hipótesis del teorema de existencia de soluciones para el problema mixto asociado a la ecuación de ondas unidimensional en el intervalo $I = [0,1]$, con $c = 2$, $\varphi \equiv 0$ (que es obviamente una función de clase C^2 con derivada tercera continua a trozos) y $\psi(x) = x(1-x)$ (que, en particular, es una función de clase C^1 con derivada segunda continua a trozos). En efecto, es inmediato verificar que $0 = \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = \psi(0) = \psi(1)$. Además, la solución es única en virtud del método de la energía.[1] Procedemos a continuación a calcular dicha solución. Emplearemos para ello el método de separación de variables: $u(t,x) = T(t)w(x)$, que se traduce en $T''w - 4Tw'' = 0$, o equivalentemente $\frac{T''}{4T} = \frac{w''}{w} = -\lambda \in \mathbb{R}$, lo que da lugar a dos problemas independientes. El primero de ellos consiste en encontrar las soluciones de la ecuación diferencial $w'' + \lambda w = 0$, sujetas a las siguientes condiciones de contorno: $w(0) = w(1) = 0$. Se trata de un problema de Sturm-Liouville que admite por valores propios a todos los de la forma $\lambda_n = n^2\pi^2$, con $n \in \mathbb{N}$, y por funciones propias a $w_n(x) = C \operatorname{sen}(n\pi x)$, con $C \in \mathbb{R}$. El segundo problema a resolver es la ecuación diferencial $T'' + 4n^2\pi^2 T = 0$, que admite como solución general

$$T(t) = A\cos(2n\pi t) + B \operatorname{sen}(2n\pi t)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Nuestra candidata a solución será, por consiguiente, la función así definida:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(2n\pi t) + B_n \operatorname{sen}(2n\pi t)\right] \operatorname{sen}(n\pi x)\,.$$

Solo nos queda imponer las condiciones iniciales para saber cómo hemos de elegir los coeficientes en la expresión anterior. Se tiene:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\pi x) = 0\,, \quad u_t(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi B_n \operatorname{sen}(n\pi x) = x(1-x)\,. \tag{1}$$

Por otra parte, la función $\psi(x) = x(1-x)$ admite el siguiente desarrollo en serie de senos (uniformemente convergente, pues $\psi \in C^1([0,1])$ y $\psi(0) = \psi(1) = 0$):

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x)\,, \quad b_n = 2\int_0^1 x(1-x) \operatorname{sen}(n\pi x)\, dx = \frac{4}{(2n+1)^3\pi^3}\,,$$

[1] Los detalles del método de la energía para establecer la unicidad de solución de este problema pueden consultarse en otros exámenes resueltos, correspondientes a convocatorias de cursos anteriores, alojados también en esta página

donde se ha utilizado que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,dx &= -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi)+\frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\,,\\
\int_0^1 x^2\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,dx &= -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi)+\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}-\frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 \mathrm{sen}(n\pi x)\,dx\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{2}{n^3\pi^3}\big(\cos(n\pi)-1\big) = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{2}{n^3\pi^3}\big((-1)^n-1\big)\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}-\frac{4}{(2n-1)^3\pi^3}\,.
\end{aligned}$$

Por tanto, atendiendo a lo expuesto en (1) ha de ser $A_n=0$ y $2n\pi B_n=\frac{4}{(2n-1)^3\pi^3}$ para todo $n\geq 1$, luego $B_n=\frac{2}{n(2n-1)^3\pi^4}$. Por consiguiente, la única solución a nuestro problema viene dada por

$$u(t,x)=\frac{2}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)^3}\,\mathrm{sen}(2n\pi t)\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,,$$

la cual es de clase $C^2([0,\infty)\times[0,1])$, puesto que las derivadas parciales de segundo orden convergen uniformemente en virtud del criterio de la mayorante de Weierstrass:

$$\begin{aligned}
|u_{tt}|=4|u_{xx}| &\leq \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^3}|\,\mathrm{sen}(2n\pi t)||\,\mathrm{sen}(n\pi x)| \leq \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\leq \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\,,\\
|u_{tx}| &\leq \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^3}|\cos(2n\pi t)||\cos(n\pi x)|\leq \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

■

EJERCICIO 3.

Se considera el problema consistente en minimizar el funcional

$$\mathcal{F}[y]=\int_0^b \big((y'(x))^2+16e^x y(x)-4y(x)^2\big)\,dx+3(y(b))^2$$

en $\mathcal{D}=H_0^1(0,b)$.

1. Demuestra[2] la siguiente desigualdad de Poincaré para $u\in H_0^1(0,b)$:

$$\|u\|_{L^2(0,b)}\leq b\|u'\|_{L^2(0,b)}\,.$$

2. Demuestra que, en $H_0^1(0,b)$, $|||u|||:=\|u'\|_{L^2(0,b)}$ es una norma equivalente a la inducida de $H^1(0,b)$, es decir, a $\|u\|:=\big(\|u\|^2_{L^2(0,b)}+\|u'\|^2_{L^2(0,b)}\big)^{1/2}$.
3. Con ayuda de los apartados anteriores, establece condiciones suficientes para garantizar la existencia de un único elemento $y\in\mathcal{D}$ en donde $\mathcal{F}$ alcanza el mínimo.
4. Calcula las extremales[3] de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}\cap C^2([0,\pi])$. ¿Es el resultado contradictorio con el de los apartados anteriores?

[2] Recuerda que $C_0^1(0,b)$ es denso en $H_0^1(0,b)$

[3] Busca soluciones particulares del tipo $y_p(x)=Ae^x+B$

Solución:

1. Dada $u \in C_0^1(0,b)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{L^2(0,b)} &= \int_0^b |u(x)|^2\,dx = \int_0^b \Big|\int_0^x u'(z)\,dz\Big|^2\,dx \le \int_0^b \Big(\int_0^x |u'(z)|\,dz\Big)^2\,dx \\ &\le \int_0^b \Big(\sqrt{x}\,\|u'\|_{L^2(0,x)}\Big)^2\,dx = \int_0^b x\,\|u'\|^2_{L^2(0,x)}\,dx \le b\|u'\|^2_{L^2(0,b)}\int_0^b\,dx \\ &= b^2\|u'\|^2_{L^2(0,b)}\,, \end{aligned}$$

donde ha sido empleada la desigualdad de Cauchy-Schwarz de la siguiente manera:

$$\int_0^x |u'(z)|\,dz = \int_0^x 1\cdot|u'(z)|\,dz \le \Big(\int_0^x 1^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^x |u'(z)|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\,\|u'\|^2_{L^2(0,x)}\,.$$

2. Claramente $\|u\| \ge \big(\|u'\|^2_{L^2(0,b)}\big)^{1/2} = |||u|||$. Por otra parte,

$$\|u\| \le \big((1+b^2)\|u'\|^2_{L^2(0,b)}\big)^{1/2} = \sqrt{1+b^2}\,|||u|||\,,$$

en virtud de la desigualdad del apartado 1.

3. Definimos $a(u,v) := 2\int_0^b \big(u'(x)v'(x) - 4u(x)v(x)\big)\,dx$ y $F(u) := -16\int_0^b e^x u(x)\,dx$. El funcional $a(\cdot,\cdot)$ es claramente bilineal y simétrico. Su continuidad en $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ se desprende inmediatamente de la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\le 2\int_0^b \big(|u'(x)||v'(x)| + 4|u(x)||v(x)|\big)\,dx \le 2\big(\|u'\|_{L^2(0,b)}\|v'\|_{L^2(0,b)} + 4\|u\|_{L^2(0,b)}\|v\|_{L^2(0,b)}\big) \\ &\le 2\big(|||u|||\,|||v||| + 4(1+b^2)|||u|||\,|||v|||\big) = 2(3+2b^2)|||u|||\,|||v|||\,. \end{aligned}$$

La coercividad se sigue de la siguiente estimación, para la que empleamos nuevamente la desigualdad del primer apartado:

$$a(u,u) = 2\int_0^b \big(u'(x)^2 - 4u(x)^2\big)\,dx \ge 2\int_0^b \big(u'(x)^2 - 4b^2u'(x)^2\big)\,dx = (1-4b^2)|||u|||^2\,,$$

de donde se deduce que solamente cuando se cumpla la condición $1-4b^2>0$ podremos garantizar la coercividad del funcional $a(\cdot,\cdot)$. Finalmente, F es lineal y continuo en $\mathcal{D}$, pues

$$|F(u)| \le 16\Big(\frac{1}{2}(e^{2b}-1)\Big)^{1/2}\|u\|_{L^2(0,b)} \le 16e^b\,\|u\|\,.$$

Por consiguiente, siempre que $b < \frac{1}{2}$ podrá aplicarse el teorema de Lax-Milgram y tendremos asegurada la existencia y unicidad de mínimo en $\mathcal{D}$ del siguiente funcional: $\frac{1}{2}a(v,v) - F(v)$, que coincide con $\mathcal{F} - 3(y(b))^3$. En consecuencia, también existirá un único mínimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$.

4. La ecuación de Euler-Lagrange asociada a $\mathcal{F}$ es $16e^x - 8y - 2y'' = 0$, o equivalentemente $y'' + 4y = 8e^x$. La solución general de la ecuación homogénea es $y_h(x) = A\operatorname{sen}(2x) + B\cos(2x)$. Por otra parte, si buscamos una solución particular como la sugerida se llega a que $y_p(x) = \frac{8}{5}e^x$ resuelve la ecuación diferencial. De este modo, todas las soluciones de la ecuación no homogénea son de la forma

$$y(x) = A\operatorname{sen}(2x) + B\cos(2x) + \frac{8}{5}e^x\,.$$

Imponiendo finalmente las condiciones de contorno $y(0) = y(\pi) = 0$ llegamos a que B ha de valer simultáneamente $-\frac{8}{5}$ y $-\frac{8}{5}e^\pi$, de donde se resuelve que $\mathcal{F}$ no tiene extremales en $H_0^1(0,\pi)$. Este resultado no contradice el del apartado anterior, que garantizaba únicamente la existencia de mínimo cuando $b < \frac{1}{2}$ (mientras que en nuestro caso tenemos $b = \pi$).

$\blacksquare$