DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Matemáticas. 31 de octubre de 2013 (Prueba 1)

Nombre ____ **Grupo** ____________

Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

1.- La evolución de una determinada población de cetáceos viene descrita (en miles de individuos) por la ecuación en diferencias $P_{n+1} = P_n\left(\frac{3}{2} - \alpha P_n\right)$, con $\alpha \geq 0$.

(a) El modelo tiene dos puntos de equilibrio, para cualquier valor $\alpha > 0$ que elijamos.

(b) Si $\alpha = 2$, el modelo solo adquiere sentido biológico si la población se mantiene siempre por debajo de (o a lo sumo alcanza) los 750 individuos.

(c) Si $\alpha = \frac{1}{2}$, a largo plazo la población tiende a estabilizarse en torno a 1000 individuos.

(d) Si $\alpha = 0$, el modelo resultante conduce a la extinción de la población a largo plazo.

(e) Ninguna de las anteriores.

Solución: *Los puntos de equilibrio de este modelo son los que resultan de resolver la ecuación para los puntos fijos de $f(P) = P\left(\frac{3}{2} - \alpha P\right)$, esto es:*

$$P\left(\frac{3}{2} - \alpha P\right) = P\,,$$

de donde se desprende que

$$P\left(\frac{3}{2} - \alpha P\right) - P = 0 \Leftrightarrow P\left(\frac{3}{2} - \alpha P - 1\right) = 0 \Leftrightarrow P\left(\frac{1}{2} - \alpha P\right) = 0 \Leftrightarrow P = 0 \text{ o bien } P = \frac{1}{2\alpha}\,.$$

Luego la afirmación (a) es VERDADERA.

Si elegimos $\alpha = 2$, el modelo a estudiar es entonces $P_{n+1} = P_n\left(\frac{3}{2} - 2P_n\right)$, que solo tendrá carácter biológico (en el sentido del recuento del número de individuos de una población) si cada P_n es una cantidad positiva (o nula). Sin embargo, para poblaciones que superan los 750 individuos en algún momento (esto es: $P_n > 0.75$, según las unidades de miles de individuos en que está formulada la ecuación), se tendría que $\frac{3}{2} - 2P_n < 0$, luego P_{n+1} alcanzaría un valor negativo. Por consiguiente, el sentido biológico del modelo se pierde si la población llegase a superar los 750 individuos, luego la afirmación (b) es también VERDADERA.

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, la ecuación resultante es $P_{n+1} = P_n\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}P_n\right)$, cuyos puntos de equilibrio son, según el cálculo efectuado anteriormente, $P = 0$ y $P = \frac{1}{2\alpha} = 1$. Bastará, por consiguiente, con verificar si $P = 1$ (que representa, recuérdese, 1000 individuos en nuestra población) es o no asintóticamente estable. Calculamos para ello la derivada de la función $f(P) = P\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}P\right)$:

$$f'(P) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}P = \frac{3}{2} - P\,,$$

que evaluada en $P = 1$ resulta $-1 < f'(1) = \frac{1}{2} < 1$, luego el punto de equilibrio $P = 1$ es asintóticamente estable, luego la afirmación (c) es VERDADERA.

Finalmente, para $\alpha = 0$ se tiene que la ecuación resultante es de Malthus: $P_{n+1} = \frac{3}{2}P_n$, con parámetro $\lambda = \frac{3}{2} > 1$. En tal caso la población crecería ilimitadamente, luego la afirmación (d) es FALSA.

2.- Para modelar la evolución de una determinada población se considera la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$, de la que se conoce que

$$f(1) = 3, \quad f(3) = 1, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

(a) $x_0 = 1$ es un tamaño constante para la población.

(b) Independientemente de la expresión que tenga f, siempre existirá un 2–ciclo.

(c) Existe un polinomio de segundo grado que satisface las condiciones del enunciado.

(d) Si elegimos $f(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{19}{3}x + 8$, entonces $x = 4$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable de la correspondiente ecuación en diferencias.

(e) Ninguna de las anteriores.

Solución: *La afirmación (a) es obviamente FALSA, dado que $f(1) = 3$ (es decir, $x = 1$ no es un punto fijo de f). La afirmación (b) es obviamente VERDADERA, puesto que el par de valores $\{1, 3\}$ constituye un 2–ciclo en virtud de las propiedades de f: $f(1) = 3$, $f(3) = 1$.*

Lo que se plantea en (c) es la posibilidad de que exista una función del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ que satisfaga las condiciones del enunciado general. Para ello tendría que cumplirse lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(1) = 3 \quad &\Rightarrow \quad a + b + c = 3 \\ f(3) = 1 \quad &\Rightarrow \quad 9a + 3b + c = 1 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

que no es más que un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Tras de resolverlo se obtiene

$$a = \frac{4}{3}, \quad b = -\frac{19}{3}, \quad c = 8.$$

Luego es cierto que existe un polinomio de segundo grado que verifica las condiciones del enunciado, y la afirmación (c) es VERDADERA.

Dada la función $f(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{19}{3}x + 8$, es claro que $x = 4$ es un punto de equilibrio del modelo $x_{n+1} = f(x_n)$ puesto que $f(4) = 4$. Para verificar si se trata o no de un punto de equilibrio asintóticamente estable empleamos el criterio de la derivada. Se tiene que $f'(x) = \frac{8}{3}x - \frac{19}{3}$, luego $f'(4) = \frac{14}{3} > 1$, por lo que $x = 4$ es inestable. En conclusión, la afirmación (d) es FALSA.

3.- Para una cierta especie de pingüinos se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad vienen dadas por $f(P) = 1 - P$ y $m(P) = P^2$, respectivamente.

(a) La ecuación en diferencias asociada a las tasas anteriores tiene exactamente dos puntos de equilibrio biológicamente admisibles.

(b) La ecuación en diferencias asociada a las tasas anteriores es de tipo logístico.

(c) Si inicialmente $P_0 = 1$, observamos que la población se extingue en un número finito de recuentos.

(d) En este modelo, cuantos menos pingüinos hay menos nacen.

(e) Ninguna de las anteriores.

Solución: *La ecuación en diferencias asociada a las tasas del enunciado es*

$$P_{n+1} = P_n + f(P_n)P_n - m(P_n)P_n = P_n + \big(1 - P_n\big)P_n - P_n^2 P_n = 2P_n - P_n^2 - P_n^3,$$

cuyos puntos de equilibrio resultan de resolver la ecuación $2P - P^2 - P^3 = P$ o, equivalentemente,

$$P^3 + P^2 - P = P(P^2 + P - 1) = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ o bien } P = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Por consiguiente la afirmación (a) es VERDADERA, dado que el punto de equilibrio $P = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ *es negativo y no admite interpretación biológica en este contexto.*

La afirmación (b) es FALSA, toda vez que la ecuación logística discreta requiere, en su construcción, que las funciones que representan las tasas de fertilidad y mortalidad sean polinomios de primer grado (rectas). Sin embargo, en este caso se tiene que la tasa de mortalidad viene dada por un polinomio de segundo grado.

Si consideramos $P_0 = 1$ *junto con la ecuación en diferencias construida anteriormente, a saber:* $P_{n+1} = 2P_n - P_n^2 - P_n^3$*, se tiene que* $P_1 = 2P_0 - P_0^2 - P_0^3 = 0$*, luego la afirmación (c) es VERDADERA.*

Finalmente, como la tasa de fertilidad dada es una función decreciente respecto del tamaño de la población (pues $f(P) = 1 - P$ *tiene derivada negativa), se tiene que a menor número de individuos mayor es el número de nacimientos, por lo que la afirmación (d) es FALSA.*