**UNIVERSIDAD DE GRANADA**
**Modelos Matemáticos II. 21 de mayo de 2015**

**EJERCICIO 1.** Sean $\Omega = (-1,1) \times (0,1)$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} e^x & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 + \operatorname{sen}(xy) & \text{si } 0 \le x < 1 \end{cases}.$$

1. ¿Tiene $f$ derivadas débiles de primer orden en $\Omega$? En caso afirmativo, ¿pertenece $f$ a $W^{1,p}(\Omega)$ para algún exponente $1 \le p \le \infty$?
2. Se considera el problema de minimización $\mathcal{F}[u] = \text{ínf}_{v\in\mathcal{D}} \mathcal{F}[v]$, con

$$\mathcal{F}[v] = \int_\Omega \left\{ |\nabla v(x,y)|^2 + |v(x,y)|^2 - f(x,y)v(x,y) \right\} d(x,y),$$

   donde $f(x,y)$ está definida en el apartado anterior. ¿Existe solución de este problema en $\mathcal{D} = H_0^1$? ¿Es única? Justifícalo.

(*Recuerda que identificando el dual de $L^2$ consigo mismo se tiene $H^1 \subset L^2 \subset H^{-1}$.*)

*Solución*: 1. En primer lugar, es de comprobación inmediata que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Mejor aún, se tiene que $f \in L^1(\Omega)$. En efecto:

$$\int_\Omega |f(x,y)|\, dx\, dy = \int_{-1}^0 \int_0^1 e^x\, dy\, dx + \int_0^1 \int_0^1 |1 + \operatorname{sen}(xy)|\, dy\, dx \le 3 - \frac{1}{e}.$$

Para cualquier función test $\phi \in C_0^1(\Omega)$, la siguiente cadena de igualdades es cierta en virtud de la fórmula de integración por partes:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega f(x,y) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 \int_{-1}^0 e^x \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)\, dx\, dy + \int_0^1 \int_0^1 \Big(1 + \operatorname{sen}(xy)\Big) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 \Big(\phi(0,y) - \frac{1}{e}\phi(-1,y)\Big)\, dy - \int_0^1 \int_{-1}^0 e^x \phi(x,y)\, dx\, dy \\
&+ \int_0^1 \Big(\phi(1,y) - \phi(0,y)\Big)\, dy + \int_0^1 \operatorname{sen}(y)\phi(1,y)\, dy - \int_0^1 \int_0^1 y\cos(xy)\phi(x,y)\, dx\, dy \\
&= -\int_0^1 \int_{-1}^0 e^x \phi(x,y)\, dx\, dy - \int_0^1 \int_0^1 y\cos(xy)\phi(x,y)\, dx\, dy \\
&= -\int_{-1}^1 \int_0^1 g(x,y)\phi(x,y)\, dx\, dy,
\end{aligned}$$

donde

$$g(x,y) = \begin{cases} e^x & \text{si } -1 < x < 0 \\ y\cos(xy) & \text{si } 0 \le x < 1 \end{cases}.$$

Además $g \in L^1_{loc}(\Omega)$, luego se trata de la drerivada débil de primer orden de $f$ con respecto a la variable $x$.

Por otra parte, se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega f(x,y)\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{0}\int_0^1 e^x\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)\,dy\,dx + \int_0^1\int_0^1 \Big(1+\operatorname{sen}(xy)\Big)\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} e^x\Big(\phi(x,1)-\phi(x,0)\Big)\,dx + \int_0^1 \Big(\phi(x,1)-\phi(x,0)\Big)\,dx \\
&+ \int_0^1 \operatorname{sen}(x)\phi(x,1)\,dx - \int_0^1\int_0^1 x\cos(xy)\phi(x,y)\,dy\,dx \\
&= -\int_0^1\int_0^1 h(x,y)\phi(x,y)\,dy\,dx\,,
\end{aligned}
$$

donde

$$
h(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1<x<0 \\ x\cos(xy) & \text{si } 0\le x<1 \end{cases},
$$

que también pertenece a $L^1_{loc}(\Omega)$.

Finalmente, es sencillo verificar que $f \in W^{1,p}(\Omega)$ para todo $1 \le p \le \infty$. En primer lugar, se tiene

$$
\int_\Omega |f(x,y)|^p\,dx\,dy = \int_0^1\int_{-1}^{0} e^{px}\,dx\,dy + \int_0^1\int_0^1 |1+\operatorname{sen}(xy)|^p\,dx\,dy \le \frac{1}{p}\Big(1-\frac{1}{e^p}\Big)+2^p\,,
$$

cualquiera que sea $1 \le p < \infty$. Además $|f(x,y)| \le 2$ para todo $(x,y)\in\Omega$, luego $f \in L^\infty(\Omega)$.

Para concluir basta con observar que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |g(x,y)|^p\,dx\,dy = \int_0^1\int_{-1}^{0} e^{px}\,dx\,dy + \int_0^1\int_0^1 |y\cos(xy)|^p\,dx\,dy \le \frac{1}{p}\Big(1-\frac{1}{e^p}\Big)+1\,, \\
&\int_\Omega |h(x,y)|^p\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 |x\cos(xy)|^p\,dx\,dy \le 1\,, \\
&|g(x,y)| \le 1 \quad \forall (x,y)\in\Omega\,, \\
&|h(x,y)| \le 1 \quad \forall (x,y)\in\Omega\,.
\end{aligned}
$$

2. Basta con elegir $H = H_0^1(\Omega)$ (Hilbert), $a : H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida como $a(u,\varphi) = 2\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi + 2\int_\Omega u\varphi$ (bilineal, simétrica y coerciva en virtud de una aplicación inmediata del lema de Poincaré) y $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida como $F(\varphi) = \int_\Omega f\varphi$ (lineal y continua) para que el teorema de Lax–Milgram nos brinde la existencia y unicidad de solución.

■

**EJERCICIO 2.** Se considera el siguiente problema mixto para la ecuación de Klein–Gordon:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0, & t>0,\ x\in(0,\pi), \\
u(0,x) = \operatorname{sen}(3x), & x\in[0,\pi], \\
\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, & x\in[0,\pi], \\
u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t>0.
\end{cases}
$$

(a) Encuentra una solución $u \in C^2([0,\infty) \times [0,\pi])$ del problema anterior.

(b) Justifica de forma argumentada que la solución encontrada en el apartado anterior es la única posible.

*Solución*:

(a) Emplearemos el método de separación de variables para encontrar posibles soluciones que respondan a la siguiente estructura: $u(t,x) = T(t)w(x)$. Para ello ha de cumplirse $T''w - 4Tw'' + Tw = 0$, o equivalentemente

$$\frac{T'' + T}{4T} = \frac{w''}{w} = -\lambda \in \mathbb{R}\,,$$

lo que da lugar a dos problemas independientes. El primero de ellos consiste en encontrar las soluciones de la ecuación diferencial $w'' + \lambda w = 0$, sujetas a las siguientes condiciones de contorno: $w(0) = w(\pi) = 0$. Se trata de un problema de Sturm–Liouville que admite por valores propios a todos los de la forma $\lambda_n = n^2$, con $n \in \mathbb{N}$, y por funciones propias a $w_n(x) = C\,\mathrm{sen}(nx)$, con $C \in \mathbb{R}$. El segundo problema a resolver sería, entonces, la ecuación diferencial $T'' + (1 + 4n^2)T = 0$, que admite como solución general

$$T(t) = A\cos\left(\sqrt{1+4n^2}\,t\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{1+4n^2}\,t\right), \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Nuestra candidata a solución será, por consiguiente, la función así definida:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\sqrt{1+4n^2}\,t\right) + B_n\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{1+4n^2}\,t\right)\right]\mathrm{sen}(nx)\,.$$

Solo nos queda imponer las condiciones iniciales para saber cómo hemos de elegir los coeficientes en la expresión anterior. Se tiene:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\mathrm{sen}(nx) = \mathrm{sen}(3x) \Rightarrow A_3 = 1, A_n = 0 \text{ si } n \neq 3$$

$$u_t(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sqrt{1+4n^2}\,\mathrm{sen}(nx) = 0 \Rightarrow B_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

de donde se desprende que ha de ser

$$u(t,x) = \cos(\sqrt{37}\,t)\,\mathrm{sen}(3x)\,.$$

(b) Supongamos que hubiese dos soluciones, $u_1(t,x)$ y $u_2(t,x)$. Entonces la función $v := u_1 - u_2$ satisfaría el siguiente problema mixto:

$$\left\{\begin{array}{l} v_{tt} - 4v_{xx} + v = 0 \\ v(0,x) = v_t(0,x) = 0 \\ v(t,0) = v(t,\pi) = 0 \end{array}\right. .$$

Multiplicando la ecuación anterior por $v_t$ e integrando por partes se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi v_{tt}v_t\,dx - 4\int_0^\pi v_{xx}v_t\,dx + \int_0^\pi vv_t\,dx \\ &= \int_0^\pi v_{tt}v_t\,dx - 4\left\{(v_tv_x)(\pi) - (v_tv_x)(0) - \int_0^\pi v_xv_{tx}\,dx\right\} + \int_0^\pi vv_t\,dx \\ &= \int_0^\pi (v_{tt}v_t + 4v_xv_{tx} + vv_t)\,dx = \int_0^\pi \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_t^2 + 2v_x^2 + \frac{1}{2}v^2\right)dx\,. \end{aligned}$$

La función de energía asociada a este problema es, por consiguiente,

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(v_t^2 + 4v_x^2 + v^2\right)\,dx\,.$$

En virtud de la construcción anterior se tiene que $E'(t) = 0$, luego $E(t)$ es constante y, en particular,

$$E(t) \equiv E(0) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(v_t(0,x)^2 + 4v_x(0,x)^2 + v(0,x)^2\right) dx = 0$$

para todo $t \geq 0$ (ya que $v_t(0,x) = v_x(0,x) = v(0,x) = 0$). Por consiguiente, ha de cumplirse $v \equiv 0$; luego $u_1 \equiv u_2$.

■

**EJERCICIO 3.** Se considera el problema de minimización $\mathcal{F}[u] = \operatorname{ínf}_{y\in\mathcal{D}} \mathcal{F}[y]$, con

$$\mathcal{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\,dx$$

y $F \in C^2([x_0,x_1]\times\mathbb{R}^2)$. Demuestra que la ecuación de Euler–Lagrange asociada a las posibles soluciones (en $\mathcal{D}\cap C^2([x_0,x_1])$) de este problema de minimización es invariante frente al cambio de variable $y \mapsto z(x,y)$.

*Solución*: Siguiendo la notación estándar $p = y'$, la ecuación de Euler–Lagrange asociada a este problema de minimización es $F_y - \frac{d}{dx}(F_p) = 0$. Lo que el ejercicio nos pide verificar es que, después de efectuar el cambio de variables $y \mapsto z(x,y)$, la nueva ecuación de Euler–Lagrange resultante no es otra que $F_z - \frac{d}{dx}(F_q) = 0$, donde hemos denotado $q = z' = \frac{d}{dx}(z(x,y)) = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}p$. Por una parte, es claro que

$$F_y = F_z\frac{\partial z}{\partial y} + F_q\frac{\partial q}{\partial y}\,.$$

Por otra parte se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(F_p) &= \frac{d}{dx}\left(F_q\frac{\partial q}{\partial p}\right) = \frac{d}{dx}(F_q)\frac{\partial q}{\partial p} + F_q\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)\\ &= \frac{d}{dx}(F_q)\frac{\partial z}{\partial y} + F_q\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{d}{dx}(F_q)\frac{\partial z}{\partial y} + F_q\frac{\partial q}{\partial y}\,.\end{aligned}$$

El resultado de sustraer ambas expresiones debe ser cero, luego

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(F_z - \frac{d}{dx}(F_q)\right) = 0\,,$$

de donde se desprende el resultado esperado.

■

**EJERCICIO 4.** Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 (1+x)^2\,y'(x)^2\,dx\,,$$

definido en

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C_0^1(0,1);\ \int_0^1 3y(x)^2\,dx = 1 \right\}.$$

Calcula de forma justificada el mínimo de $\mathcal{F}[y]$ en $\mathcal{D} \cap C^2[0,1]$ e indica en qué función se alcanza dicho mínimo.

(*El cambio de variable* $1+x = e^z$ *puede serte útil en la solución de la EDO resultante.*)

*Solución*: Comenzamos construyendo el funcional

$$F^*(x,y,p) = (1+x)^2 p^2 - 3\lambda y^2$$

y escribiendo el problema de contorno de Euler–Lagrange asociado al mismo en $\mathcal{D}$:

$$F_y^* - \frac{d}{dx}(F_p^*) = -6\lambda y - \frac{d}{dx}\big(2(1+x)^2 p\big) = 0\,, \quad y(0) = y(1) = 0\,.$$

O, equivalentemente,

$$(1+x)^2 y'' + 2(1+x)y' + 3\lambda y = 0\,, \quad y(0) = y(1) = 0\,.$$

Se trata de una ecuación diferencial del tipo Euler, que puede reducirse a una con coeficientes constantes mediante el cambio de variable sugerido. En efecto, considerando $y(x) := u(z)$ es claro que

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{du}{dz}\frac{1}{x+1} = \frac{du}{dz}\,e^{-z}\,, \\ y''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dz}\,e^{-z}\right) = e^{-z}\left(-\frac{du}{dz}\,e^{-z} + \frac{d^2u}{dz^2}\,e^{-z}\right) = e^{-2z}\left(\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{du}{dz}\right), \end{aligned}$$

lo que se traduce en

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + 3\lambda u = 0\,,$$

con $0 = y(x=0) = u(z=0)$, $0 = y(x=1) = u(z=\ln(2))$.

Una simple inspección de casos nos lleva a concluir que los valores propios del problema de Sturm–Liouville anterior se encuentran entre los que satisfacen la condición $\lambda > \frac{1}{12}$, para los que la solución general se escribe del siguiente modo:

$$u(z) = e^{-\frac{z}{2}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{12\lambda-1}}{2}\,z\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{12\lambda-1}}{2}\,z\right)\right].$$

Usando ahora las condiciones de contorno se llega a que ha de cumplirse

$$A = 0\,, \quad \mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{12\lambda-1}}{2}\,z\right) = 0\,,$$

de donde se desprende que los valores propios han de ser

$$\lambda_n = \frac{1}{12}\left[1 + \left(\frac{2n\pi}{\ln(2)}\right)^2\right],$$

en tanto que las funciones propias responden a la forma

$$\phi_n(z) = C \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{\ln(2)}\right) .$$

Deshaciendo el cambio de variable las funciones propias resultan ser

$$\psi_n(x) = \frac{C}{\sqrt{1+x}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \ln(x+1)}{\ln(2)}\right) ,$$

de entre las cuales solamente verifican la ligadura aquellas para las que $C = \pm\sqrt{\frac{2}{3\ln(2)}}$.

Por consiguiente, usando la teoría de problemas isoperimétricos se obtiene que el mínimo de $\mathcal{F}$ se alcanza en[1]

$$\psi_\pm(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\ln(2)(1+x)}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \ln(x+1)}{\ln(2)}\right) ,$$

y vale $\lambda_1 = \frac{1}{12}\left[1 + \left(\frac{2\pi}{\ln(2)}\right)^2\right]$. ∎

[1] Nótese que en este caso el mínimo no es único. Esto no contradice ninguno de los resultados de unicidad conocidos, dado que el funcional $F^*$ no es convexo