UNIVERSIDAD DE GRANADA
Modelos Matemáticos II. 2 de julio de 2015

[2.5] **EJERCICIO 1.**

Se considera $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ y el siguiente problema de Dirichlet en dimensión dos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + k\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \quad x \in \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{1}$$

donde $0 < k \in \mathbb{R}$ y $f \in L^2(\Omega)$.[1] Se pide:

(a) Deduce la formulación débil que da lugar al problema (1).

(b) Comprueba que el problema construido en (a) admite una única solución.[2]

(c) Justifica que el problema construido en (a) es equivalente al siguiente problema variacional:

Encuentra $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$F(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \{F(v)\},$$

con

$$F(v) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 - fv \right\} dx\,.$$

Solución: (a) Multiplicamos la ecuación por una función $v \in H_0^1(\Omega)$ e integramos por partes, de donde se obtiene

$$-\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + k\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + k\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v\, dx = -\int_\Omega fv\, dx\,.$$

Definiendo entonces

$$a(u,v) := \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + k\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx\,, \quad F(v) := \int_\Omega fv\, dx\,,$$

se tiene que la formulación débil del problema pasa por encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que se cumpla $a(u,v) = F(v)$, cualquiera que sea $v \in H_0^1(\Omega)$.

(b) Para comprobar que el problema anterior admite una única solución emplearemos el teorema de Lax–Milgram. En tales circunstancias, basta con verificar que el operador $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ arriba definido satisface que es bilineal, continuo y coercivo, y que el funcional $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es lineal y continuo. La bilinealidad de $a(\cdot,\cdot)$ es evidente. La continuidad se sigue de

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)} + k \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1+k)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\,, \end{aligned}$$

[1]Recuerda que $L^2(\Omega)$ está contenido en el dual de $H_0^1(\Omega)$

[2]Puedes usar que $\left(\int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 \right\} \right)^{1/2}$ es una norma en $H_0^1(\Omega)$

donde hemos denotado $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ a la señalada a pie de página. Finalmente, observamos la coercividad por medio del cálculo siguiente:

$$a(u,u) = \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + k\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 \right\} dx \geq \alpha \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \,,$$

para lo cual basta con elegir $\alpha = \text{mín}\{1,k\}$. En cuanto a F, la linealidad es evidente y la continuidad se desprende de

$$|F(v)| \leq \int_\Omega |fv|\,dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \,,$$

en virtud de la desigualdad de Poincaré.[3]

(c) Como el operador $a(u,v)$ es claramente simétrico, el teorema de Lax–Milgram asegura que el problema planteado en el apartado (a) es equivalente a minimizar en $H_0^1(\Omega)$ el funcional $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - F(v)$.

[2.5] **EJERCICIO 2.**

En este ejercicio calcularemos la solución fundamental de la ecuación del calor, $u_t = u_{xx}$, sin utilizar la transformada de Fourier. Para ello partimos del hecho de que tal solución es *autosemejante*, es decir, existe $F(z)$ tal que

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} F\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \tag{2}$$

(a) Demuestra que si u es una solución de la ecuación del calor que satisface (2), entonces la función F asociada verifica

$$2F''(z) + \alpha(z)F'(z) + \beta(z)F(z) = 0\,, \tag{3}$$

para ciertas funciones α y β.

(b) Determina, si es posible, un problema variacional cuya ecuación de Euler–Lagrange asociada sea (3).

(c) Sabiendo que $F_1(z) = e^{-z^2/4}$ es solución de (3), determina todas las soluciones restantes.

Sugerencia: conseguirás reducir el orden de la ecuación diferencial si buscas $F_2(z)$ de la forma $F_2(z) = h(z)F_1(z)$.

(d) Sabiendo que, además,

- $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx = 1$ para todo $t > 0$,
- $F_2 \notin L^1(\mathbb{R})$,

prueba que la única solución válida de (3) para construir u es $F(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}F_1(z)$.

[3] Podría haberse evitado la desigualdad de Poincaré sin más que escribir

$$|F(v)| \leq \int_\Omega |fv|\,dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \,,$$

habida cuenta que la norma estándar en $H^1(\Omega)$ es equivalente a la norma en $H_0^1(\Omega)$ sugerida en el enunciado

Solución: (a) Llamamos $z := \frac{x}{\sqrt{t}}$. Se tiene:

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}F(z) - \frac{1}{2\sqrt{t}}F'(z)\frac{z}{t} = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\left(F(z) + zF'(z)\right)\,, \\ u_x &= \frac{1}{\sqrt{t}}F'(z)\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t}F'(z)\,, \quad u_{xx} = \frac{1}{t}F''(z)\frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-\frac{3}{2}}F''(z)\,. \end{aligned}$$

Como u resuelve la ecuación del calor, ha de cumplirse $-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\left(F(z) + zF'(z)\right) = t^{-\frac{3}{2}}F''(z)$ o, equivalentemente,

$$2F''(z) + zF'(z) + F(z) = 0\,,$$

luego basta con elegir $\alpha(z) = z$, $\beta(z) = 1$.

(b) Para las funciones α y β recién calculadas, la ecuación diferencial del apartado anterior admite la siguiente forma autoadjunta:

$$\left(e^{\frac{z^2}{4}}F'(z)\right)' + \frac{1}{2}e^{\frac{z^2}{4}}F(z) = 0\,,$$

sin más que multiplicarla por $\frac{1}{2}e^{\frac{z^2}{4}}$ y agrupar convenientemente los términos resultantes. Según el teorema visto en clase que relaciona los problemas de contorno con el cálculo de variaciones, el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_a^b e^{\frac{x^2}{4}}\left(y'(x)^2 - \frac{1}{2}y(x)^2\right)dx$$

tendrá la anterior como ecuación de Euler–Lagrange asociada. En efecto: buscamos $F = F(y,p)$ (con $p := y'$) de modo que cumpla

$$0 = F_y - (F_p)' = \left(2e^{\frac{x^2}{4}}p\right)' + e^{\frac{x^2}{4}}y\,.$$

Bastará pues con identificar $F_y = -e^{\frac{x^2}{4}}y$, de donde resulta que ha de ser $F(y,p) = -\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{4}}y^2 + h(p)$; y $F_p = 2e^{\frac{x^2}{4}}p = h'(p)$, luego $h(p) = e^{\frac{x^2}{4}}p^2$, de donde se deduce que

$$F(y,p) = e^{\frac{x^2}{4}}\left(y'(x)^2 - \frac{1}{2}y(x)^2\right)\,.$$

(c) Buscamos F_2 solución de la ecuación (3) (con $\alpha(z) = z$ y $\beta(z) = 1$) que responda a la forma $F_2(z) = h(z)e^{-z^2/4}$. Se tiene:

$$F_2'(z) = e^{-\frac{z^2}{4}}\left(h'(z) - \frac{z}{2}h(z)\right)\,, \quad F_2''(z) = e^{-\frac{z^2}{4}}\left\{\left(\frac{z^2}{4} - \frac{1}{2}\right)h(z) + h''(z) - zh'(z)\right\}\,,$$

de donde se desprende que

$$2\left\{\left(\frac{z^2}{4} - \frac{1}{2}\right)h(z) + h''(z) - zh'(z)\right\} + z\left(h'(z) - \frac{z}{2}h(z)\right) + h(z) = 0\,,$$

o equivalentemente

$$2h''(z) - zh'(z) = 0\,.$$

Llamando $\phi := h'$, le ecuación diferencial a resolver es $2\phi'(z) - z\phi(z) = 0$. Por el método de variables separadas se obtiene que $\phi(z) = e^{\frac{z^2}{4}}$ es una solución, luego $h(z) =$

$\int_{z_0}^{z} e^{\frac{y^2}{4}}\, dy$ y $F_2(z) = \left(\int_{z_0}^{z} e^{\frac{y^2}{4}}\, dy\right) e^{-\frac{z^2}{4}}$. En consecuencia, cualquier solución de la ecuación (3) se expresa como combinación lineal de las funciones F_1 y F_2:

$$F(z) = Ae^{-\frac{z^2}{4}} + B\left(\int_{z_0}^{z} e^{\frac{y^2}{4}}\, dy\right) e^{-z^2/4} = e^{-z^2/4}\left(A + B\int_{z_0}^{z} e^{\frac{y^2}{4}}\, dy\right), \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

(d) De la primera condición del enunciado se deduce lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, dx = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(z)\, dz = 1\,.$$

Teniendo en cuenta que $F(z) = AF_1(z) + BF_2(z)$ (según lo concluido en el apartado anterior) y que F_2 no es integrable (en virtud de la segunda de las propiedades enunciadas), ha de ser necesariamente $B = 0$ y

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} F(z)\, dz = A\int_{-\infty}^{\infty} F_1(z)\, dz = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4}}\, dz = 2A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}\, dv = 2A\sqrt{\pi}\,,$$

luego $A = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$. En conclusión, la solución de (3) que buscamos para construir u es

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}\,.$$

[2.5] **EJERCICIO 3.**

El proceso químico de Robertson viene dado por las siguientes reacciones:

$$\begin{array}{rcl} A & \xrightarrow{k_1} & B \\ B+B & \xrightarrow{k_2} & C+B \\ B+C & \xrightarrow{k_3} & A+C \end{array}$$

(a) Deduce, a partir de la ley de acción de masas, las ecuaciones diferenciales asociadas a los procesos anteriores.
A partir de ellas, encuentra las dimensiones de las tasas k_1, k_2 y k_3.

(b) Estudia los equilibrios (soluciones constantes) del proceso.

(c) Analiza el crecimiento o decrecimiento de $[A]+[B]$, $[C]$ y $[A]+[B]+[C]$.

(d) En el caso de que la solución con condiciones iniciales $[A_0] > 0$, $[B_0] \geq 0$ y $[C_0] = 0$ convergiese a un equilibrio, indica cuál sería dicho equilibrio.

Solución: (a) Las ecuaciones diferenciales son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{d[A]}{dt} &= -k_1[A] + k_3[B][C]\,, \\ \frac{d[B]}{dt} &= k_1[A] + k_2[B]^2 - 2k_2[B]^2 - k_3[B][C] = k_1[A] - k_2[B]^2 - k_3[B][C]\,, \\ \frac{d[C]}{dt} &= k_2[B]^2 + k_3[B][C] - k_3[B][C] = k_2[B]^2\,. \end{aligned}$$

Denotando $[[C]]$ y $[[T]]$ las unidades de concentración y tiempo, respectivamente, y reescribiendo cada una de las ecuaciones anteriores en términos de la dimensión de sus componentes, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{[[C]]}{[[T]]} &= [[k_1]][[C]] + [[k_3]][[C]]^2 \,, \\
\frac{[[C]]}{[[T]]} &= = [[k_1]][[C]] - [[k_2]][[C]]^2 - [[k_3]][[C]]^2 \,, \\
\frac{[[C]]}{[[T]]} &= [[k_2]][[C]]^2 \,.
\end{aligned}$$

De este modo, la dimensión de k_1 es $[[T]]^{-1}$, mientras que la de k_2 y k_3 es $([[C]][[T]])^{-1}$.

(b) Los equilibrios del sistema anterior son sus soluciones constantes, esto es, las que resultan de anular las derivadas temporales en cada caso:

$$\begin{aligned}
0 &= -k_1[A] + k_3[B][C] \,, \\
0 &= k_1[A] - k_2[B]^2 - k_3[B][C] \,, \\
0 &= k_2[B]^2 \,,
\end{aligned}$$

de donde resulta $[A] = [B] = 0$ y $[C]$ cualquier constante.

(c) Basta con estudiar el signo de cada una de las derivadas. Observando en primer lugar que la tasa de cada reacción es una constante positiva, se tiene que $\frac{d[C]}{dt} = k_2[B]^2 \geq 0$, luego $[C]$ es una cantidad creciente. Por otra parte, $\frac{d}{dt}([A] + [B]) = -k_2[B]^2 \leq 0$, de lo que se deduce que $[A] + [B]$ decrece. Finalmente comprobamos que $[A] + [B] + [C]$ permanece constante, dado que $\frac{d}{dt}([A] + [B] + [C]) = 0$.

(d) Según lo expuesto en el apartado (b), los equilibrios del sistema son de la forma $([A] = 0, [B] = 0, [C] \in \mathbb{R})$. Como la cantidad $[A] + [B] + [C]$ debe conservarse en el tiempo en función de lo visto anterioremente, se cumple que

$$[A_0] + [B_0] + 0 = [A_0] + [B_0] + [C_0] = 0 + 0 + [C] \,,$$

luego el único equilibrio al que podría converger la solución sería $[A] = 0$, $[B] = 0$, $[C] = [A_0] + [B_0]$.

[2.5] **EJERCICIO 4.** Se considera el problema de minimización $\mathcal{F}[u] = \inf_{y \in \mathcal{D}} \mathcal{F}[y]$, con

$$\mathcal{F}[y] = \int_1^{e^\pi} x \left(y'(x)\right)^2 \, dx$$

definido en

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C^1[1, e^\pi]; \; \int_1^{e^\pi} \frac{1}{x} y(x)^2 \, dx = 1, \; \int_1^{e^\pi} \frac{1}{x} y(x) \cos(\ln x) \, dx = 0 \right\} .$$

Caso de existir, calcula de forma justificada el mínimo de $\mathcal{F}[y]$ en $\mathcal{D} \cap C^2[1, e^\pi]$ e indica en qué función se alcanza.

Solución: Lo resolveremos de dos formas:

(A) El funcional es claramente no negativo, por lo que si se anulara en algún elemento de $\mathcal{D}$, en tal elemento alcanzaría su valor mínimo. Es inmediato observar que $\mathcal{F}$ se anula al actuar sobre cualquier función constante. Por consiguiente, la única pregunta que tendríamos que hacernos es si el conjunto $\mathcal{D}$ contiene alguna constante. Se puede comprobar fácilmente que

(i) La segunda ligadura es satisfecha por cualquier función constante $y \equiv C \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$\begin{aligned}\int_1^{e^\pi} \frac{1}{x} y(x) \cos(\ln x)\, dx &= C \int_1^{e^\pi} \frac{1}{x} \cos(\ln x)\, dx \\ &= C\big(\operatorname{sen}(\ln e^\pi) - \operatorname{sen}(\ln 1)\big) = 0\,.\end{aligned}$$

(ii) La primera ligadura es satisfecha si y solamente si

$$1 = \int_1^{e^\pi} \frac{1}{x} y(x)^2\, dx = C^2 \int_1^{e^\pi} \frac{1}{x}\, dx = C^2 \pi\,,$$

luego $C = \pm \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

La conclusión es que el mínimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ es cero y se alcanza en las funciones $y(x) \equiv \pm \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

(B) Caso de no haber detectado heurísticamente la relevancia de las funciones constantes en la resolución del problema, uno puede proceder según la técnica estándar de construcción del problema de contorno de Euler–Lagrange (EL) asociado. Para ello, definimos en primer lugar la siguiente corrección del funcional, que incorpora información sobre la primera de las ligaduras:

$$F^\star(x,p) := xp^2 + \lambda \frac{y^2}{x}\,.$$

La ecuación de EL que se desprende de ella es

$$F^\star_y - \frac{d}{dx}(F^\star_p) = \lambda \frac{2y}{x} - \frac{d}{dx}(2xp) = \lambda \frac{2y}{x} - 2y' - 2xy'' = 0 \Rightarrow x^2 y'' + xy' - \lambda y = 0\,,$$

que se trata de una ecuación de tipo Euler, la cual habrá que resolver junto a las condiciones de contorno $y'(1) = y'(e^\pi) = 0$ (según lo expuesto en clase). Llevando a cabo el cambio de variable $x = e^z$ se obtiene la ecuación diferencial equivalente $u''(z) - \lambda u(z) = 0$, con condiciones asociadas $u'(0) = u'(\pi) = 0$, cuyas soluciones son de la siguiente forma:

(i) Si $\lambda = 0$, entonces las soluciones son $u(z) = Az + B$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Como ha de ser $u'(0) = u'(\pi) = 0$, se concluye que necesariamente $A = 0$, luego $u(z) = B \in \mathbb{R}$.

(ii) Si $\lambda > 0$, entonces la ecuación característica admite dos raíces reales distintas, $\mu_\pm = \pm\sqrt{\lambda}$, por lo que las soluciones son todas de la forma $u(z) = Ae^{\mu_+ z} + Be^{\mu_- z}$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Como ha de ser $u'(0) = u'(\pi) = 0$, se concluye que necesariamente $A = B = 0$, luego para este caso no existen soluciones no triviales.

(iii) Si $\lambda < 0$, entonces las raíces de la ecuación característica son $\mu_\pm = \pm i\sqrt{-\lambda}$, por lo que las soluciones son todas de la forma

$$u(z) = A \cos\big(\sqrt{-\lambda} z\big) + B \sin\big(\sqrt{-\lambda} z\big)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Como ha de ser $u'(0) = u'(\pi) = 0$, se concluye que

$$B = 0\,, \quad \sqrt{-\lambda}\left(-A\sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) + B\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right)\right) = 0\,,$$

luego ha de cumplirse $\sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) = 0$, que genera soluciones no triviales sii $\lambda_n = -n^2$. En tal caso, las funciones propias adoptan la forma

$$u_n(z) = A\cos(nz)\,, \quad A \in \mathbb{R}\,.$$

En conclusión, los extremales son (tras deshacer el cambio de variable)

$$\begin{aligned} &y_0(x) \equiv A \in \mathbb{R}\,, \\ &y_n(x) = B\cos(n\ln(x))\,, \quad B \in \mathbb{R}\,,\ n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Se puede comprobar fácilmente que para conseguir que la primera ligadura sea satisfecha es necesario elegir $A = \pm\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ y $B = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. En efecto:

$$1 = \int_1^{e^\pi} \frac{1}{x} y_0(x)^2\, dx = A^2 \int_1^{e^\pi} \frac{1}{x}\, dx = A^2\pi \Leftrightarrow A = \pm\sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

y

$$\begin{aligned} 1 &= \int_1^{e^\pi} \frac{1}{x} y_n(x)^2\, dx = B^2 \int_1^{e^\pi} \frac{1}{x}\cos^2(n\ln(x))\, dx \\ &= \frac{B^2}{2}\int_1^{e^\pi} \frac{1+\cos(2n\ln(x))}{x}\, dx = \frac{B^2}{2}\pi \Leftrightarrow B = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,. \end{aligned}$$

Por otra parte, evaluando el funcional en los extremales obtenemos

$$\mathcal{F}[y_0] = \mathcal{F}\Big[\pm\sqrt{\frac{1}{\pi}}\Big] = 0$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[y_n] &= \mathcal{F}\Big[\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\ln(x))\Big] = \frac{2n^2}{\pi}\int_1^{e^\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(n\ln(x))}{x}\, dx \\ &= \frac{n^2}{\pi}\int_1^{e^\pi} \frac{1-\cos(2n\ln(x))}{x}\, dx = n^2\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

En definitiva, observamos que el valor mínimo del funcional $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ es cero y se alcanza en las funciones $y(x) \equiv \pm\sqrt{\frac{1}{\pi}}$. Nótese que no hay contradicción alguna en el hecho de que hayamos obtenido dos soluciones, toda vez que la segunda ligadura no es convexa.