**UNIVERSIDAD DE GRANADA**
**Modelos Matemáticos II. 23 de mayo de 2013**

[25] **EJERCICIO 1.** Se considera el problema isoperimétrico consistente en calcular el mínimo relativo de

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \left(y'(x)^2 + y(x)^2\right)\, dx$$

en $\mathcal{D} = \Big\{ y \in C^1([0,1]),\ y(0) = 0,\ y(1) = e,\ \int_0^1 y(x)e^x\, dx = \frac{e^2+1}{4} \Big\}$. Encuentra las extremales del problema en $\mathcal{D} \cap C^2(0,1)$. ¿Es alguna de las extremales un mínimo en $\mathcal{D} \cap C^2(0,1)$?

*(Sugerencia: para calcular una solución particular de la ecuación diferencial que determina las extremales, usa el método de los coeficientes indeterminados que enunciamos, por tu conveniencia, en la página siguiente)*

*Solución*: Si denotamos $p = y'$ y $F(x,y,p) := y^2 + p^2$ (que es de clase $C^2$ en todas sus variables), el funcional a minimizar es $\mathcal{F}[y,p] = \int_0^1 F(x,y,p)\, dx$. Como el conjunto en que se busca mínimo contiene una ligadura, habremos de aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange para construir el problema de Euler–Lagrange pertinente (como se demostró en clase y del mismo modo en que se procedió en los Problemas 7 y 9 de la Relación 1). Definimos $F^\star(x,y,p) := F(x,y,p) + \lambda y e^x \in C^2_{x,y,p}$. Se tiene que $F^\star_y = F_y + \lambda e^x = 2y + \lambda e^x$ y $F^\star_p = F_p = 2p$, luego la ecuación de Euler–Lagrange es

$$2y + \lambda e^x - \frac{d}{dx}\big(2p\big) = 2y + \lambda e^x - 2y'' = 0 \Leftrightarrow y'' - y = \frac{\lambda}{2} e^x\,.$$

La ecuación característica de la ecuación homogénea a es $\mu^2 - 1 = 0$, que admite por soluciones $\mu = \pm 1$. Luego la solución general de $y'' - y = 0$ es $y_{hom}(x) = Ae^x + Be^{-x}$. Para encontrar una solución particular de la ecuación completa usaremos, atendiendo a la sugerencia recibida, el método de los coeficientes indeterminados con

$$a = 1\,, \quad b = 0\,, \quad P_0(x) = \frac{\lambda}{2}\,,$$

lo que nos proporciona una solución del tipo $y_{part}(x) = Cxe^x$, con $C \in \mathbb{R}$. Sustituyendo en la ecuación encontramos

$$\big(Cxe^x\big)'' - Cxe^x = \frac{\lambda}{2}e^x \Leftrightarrow C\big((e^x + xe^x)' - xe^x\big) = \frac{\lambda}{2}e^x \Leftrightarrow C\big(2e^x\big) = \frac{\lambda}{2}e^x \Leftrightarrow C = \frac{\lambda}{4}\,.$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación completa son de la forma

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x) = \left(A + \frac{\lambda}{4}x\right)e^x + Be^{-x}\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Imponemos finalmente las condiciones de contorno, obteniendo

$$y(0) = A + B = 0\,, \quad y(1) = \left(A + \frac{\lambda}{4}\right) e + \frac{B}{e} = e\,.$$

Por otra parte, la ligadura de $\mathcal{D}$ implica

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left\{ \left(A + \frac{\lambda}{4}x\right) e^x + Be^{-x} \right\} e^x\,dx = \int_0^1 \left(A + \frac{\lambda}{4}x\right) e^{2x}\,dx + B \\
&= \frac{A}{2}(e^2 - 1) + \frac{\lambda}{4}\int_0^1 xe^{2x}\,dx + B = \frac{A}{2}(e^2-1) + \frac{\lambda}{4}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2-1)\right) + B \\
&= \frac{A}{2}(e^2-1) + \frac{\lambda}{16}(e^2+1) + B = \left(2A + \frac{\lambda}{4}\right)\frac{e^2}{4} + \left(\frac{\lambda}{16} - \frac{A}{2}\right) = \frac{e^2+1}{4}\,,
\end{aligned}$$

luego ha de ser

$$2A + \frac{\lambda}{4} = 1\,, \quad \frac{\lambda}{16} - \frac{A}{2} = \frac{1}{4}\,,$$

de donde resulta $A = 0$ y $\lambda = 4$, luego también $B = 0$. Por consiguiente, la única extremal del problema es $y(x) = xe^x$.

Finalmente, el funcional $\mathcal{F}$ es convexo (según un resultado demostrado en clase, dado que tanto $F$ como el dominio son claramente convexos), luego la extremal que acabamos de calcular es un mínimo de $\mathcal{F}$ (según la condición suficiente de mínimo demostrada en clase).

■

[33] **EJERCICIO 2.**

2.1) Calcula justificadamente el máximo exponente $k$ para que la función $y(x) = \frac{1}{2}(1 - |x|)$ pertenezca al espacio de Sobolev $H_0^k(-1,1)$.

2.2) Enuncia el Teorema de Lax-Milgram.

2.3) Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} y'(x)^2\,dx \;+\; f(y),$$

donde $f : H_0^1(-1,1) \to \mathbb{R}$ es lineal y continuo. ¿Es $y(x)$, dada en el apartado 2.1), mínimo de $\mathcal{F}$ en $H_0^1(-1,1)$ para algún $f$? Justifica la respuesta de acuerdo con el apartado anterior. En caso afirmativo, ¿en qué espacio funcional está $f$? ¿Es $y(x)$, dada en el apartado 2.1), la única solución del problema de minimización?

*Solución*: (2.1) Denotemos $I = [-1,1]$. Como la función $y(x) = \frac{1}{2}(1 - |x|)$ pertenece claramente al espacio $L^1_{loc}(I)$, comenzamos calculando la derivada débil de primer orden de $y(x)$. Para ello utilizaremos la definición vista en clase (y aplicada en el Ejercicio 11 de la Relación 1).

Para cualquier $\varphi \in C_0^1(I)$ se tiene

$$\int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)\,dx = \int_0^1 x\varphi'(x)\,dx - \int_{-1}^{0} x\varphi'(x)\,dx\,.$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que $\varphi$ tiene soporte compacto en $I$ se obtiene

$$\int_0^1 x\varphi'(x)\,dx = [x\varphi]_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)\,dx = -\int_0^1 \varphi(x)\,dx$$

Análogamente se tiene $\int_{-1}^0 x\varphi'(x)\,dx = -\int_{-1}^0 \varphi(x)\,dx$, luego

$$\int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} \operatorname{signo}(x)\varphi(x)\,dx\,,$$

donde hemos denotado

$$\operatorname{signo}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}\,.$$

Esto es, $|x|' = \operatorname{signo}(x)$ en el sentido de la derivada débil; luego $y'(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{signo}(x)$.

Veamos ahora que no existe $y''$. Si existiera $g \in L^1_{loc}(I)$ tal que

$$\int_{-1}^{1} y'(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi \in C_0^1(I)\,,$$

habría de ser

$$\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} \operatorname{signo}(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \varphi'(x)\,dx - \int_0^1 \varphi'(x)\,dx\,.$$

Por consiguiente, se tendría

$$\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) - \varphi(-1) - \varphi(1) + \varphi(0) = 2\varphi(0) \quad \forall\varphi \in C_0^1(I)\,.$$

Ahora bien, si en particular se eligiesen funciones test con soporte contenido en $[0,1]$, entonces

$$\int_0^1 g(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall\varphi \in C_0^1([0,1])\,,$$

y consecuentemente $g = 0$ c.p.d. en $[0,1]$ en virtud del lema fundamental del cálculo de variaciones. Análogamente, si se considera ahora $\varphi \in C_0^1([-1,0])$, se concluye asimismo que $g = 0$ c.p.d. en $[-1,0]$. Luego habría de ser $g = 0$ c.p.d. en $[-1,1]$, de donde resultaría que $\varphi(0) = 0$ para toda $\varphi \in C_0^1(I)$, lo cual es falso en general, ya que reduce arbitrariamente el conjunto de funciones test $C_0^1(I)$.

En consecuencia, el máximo exponente que nos pide el ejercicio es $k = 1$ y podemos concluir que la función $y(x) = \frac{1}{2}(1-|x|)$ pertenece al espacio de Sobolev $H_0^1(-1,1)$. Para ello bastará con determinar que tanto $y$ como $y'$ pertenecen a $L^2(I)$:

$$\int_{-1}^{1} |y(x)|^2\, dx = \int_{-1}^{1} \left( \frac{1}{4} + \frac{|x|^2}{4} - \frac{|x|}{2} \right) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\,,$$
$$\int_{-1}^{1} |y'(x)|^2\, dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} |\operatorname{signo}(x)|^2\, dx = \frac{1}{2}\,.$$

(2.2) [Enunciado y demostrado en clase] Sean $H$ un espacio de Hilbert (dotado del producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$), $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal, continua[1] y coerciva[2] y $f : H \to \mathbb{R}$ lineal y continua. Entonces existe un único elemento $u \in H$ tal que

$$a(u, \varphi) = f(\varphi)\,, \quad \forall \varphi \in H\,.$$

Si la aplicación $a : H \times H \to \mathbb{R}$ es además simétrica,[3] entonces el funcional

$$\mathcal{F}[v] = \frac{1}{2} a(u, v) - f(v)$$

alcanza su valor mínimo en $u$.

(2.3) Elegimos $H = H_0^1(I)$ (que es un espacio de Hilbert) y $a(u, \varphi) = \int_{-1}^{1} u'(x)\varphi'(x)\, dx$, que cumple:

1. $a(\cdot, \cdot)$ es claramente bilineal;
2. $a(\cdot, \cdot)$ es continuo: en efecto,

$$\begin{aligned} |a(u, \varphi)| &\leq \int_{-1}^{1} |u'(x)||\varphi'(x)|\, dx \leq \left( \int_{-1}^{1} |u'(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-1}^{1} |\varphi'(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u'\|_{L^2(I)} \|\varphi'\|_{L^2(I)} \leq \|u'\|_{H^1(I)} \|\varphi'\|_{H^1(I)}\,, \end{aligned}$$

   para lo que se ha empleado la desigualdad de Cauchy–Schwarz;
3. $a(\cdot, \cdot)$ es coercivo: en efecto, gracias a la desigualdad de Poincaré (demostrada en clase) se tiene

$$\|\varphi\|_{H^1(I)}^2 = \|\varphi\|_{L^2(I)}^2 + \|\varphi'\|_{L^2(I)}^2 \leq (C+1)\|\varphi'\|_{L^2(I)}^2\,,$$

   luego

$$a(\varphi, \varphi) = \|\varphi'\|_{L^2(I)}^2 \geq \frac{1}{C+1} \|\varphi\|_{H^1(I)}^2$$

   y $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva (con constante de coercividad $\alpha = \frac{1}{C+1}$).

[1] Existe $C > 0$ tal que $|a(u, \varphi)| \leq C\|u\|_H \|\varphi\|_H$
[2] Existe $\alpha > 0$ tal que $a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2$
[3] $a(u, \varphi) = a(\varphi, u)$ $\forall u, v \in H$

4. $a(\cdot,\cdot)$ es claramente simétrico.

En esta situación, el teorema de Lax–Milgram asegura que el funcional $\mathcal{F}[v] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u'(x)v'(x)\,dx - f(v)$ alcanza su valor mínimo en el (único) elemento $u \in H_0^1(-1,1)$ que resuelve el problema

$$\int_{-1}^{1} u'(x)\varphi'(x)\,dx = f(\varphi)\,, \quad \forall \varphi \in H_0^1(-1,1)\,. \tag{1}$$

Veamos, pues, si nuestra función $y(x) = \frac{1}{2}(1-|x|)$ resuelve (1) para alguna elección de $f : H_0^1(-1,1) \to \mathbb{R}$ lineal y continua, en cuyo caso sería la única solución del problema de minimización. Se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} -\frac{1}{2}\,\text{signo}(x)\varphi'(x)\,dx &= -\frac{1}{2}\left(-\int_{-1}^{0}\varphi'(x)\,dx + \int_{0}^{1}\varphi'(x)\,dx\right) \\ &= \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle,^{4} \end{aligned}$$

de donde se desprende que $y(x)$ resolverá (1) siempre que se elija $f$ como la delta de Dirac, que es sabido pertenece al espacio funcional $H^{-1}(-1,1)$ (como se vio en clase), que no es otro que el dual topológico de $H_0^1(-1,1)$.

■

[42] **EJERCICIO 3.** Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[u] = \int_{o}^{\pi}\int_{0}^{T}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)dt\,dx$$

definido sobre el conjunto

$$\mathcal{D} = \left\{u \ \in C^1(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega}),\ u|_{t=0} = \varphi_0,\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi_0,\ u|_{x=0} = \varphi_1,\ u|_{x=\pi} = \psi_1\right\},$$

donde $\Omega = (0,\pi)\times(0,T)$, $\varphi_0 = \operatorname{sen} x$, $\psi_0 = x^2 - \pi x$, y $\varphi_1 = \psi_1 = 0$.

3.1) Si $u \in \mathcal{D}\cap C^2(\Omega)$ es un extremo relativo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$, calcula las extremales del problema.

3.2) Usa el método de la energía para demostrar la unicidad de las extremales del problema.

*Solución*: (3.1) Denotamos $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial t}$ y $F(t,x,u,p,q) = \frac{1}{2}\big(q^2 - p^2\big) \in C^2_{t,x,u,p,q}$. La ecuación de Euler–Lagrange asociada a este problema (análogo al Ejercicio 6 de la Relación 1) es

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_p) - \frac{d}{dt}(F_q) = 0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dx}(-p) - \frac{d}{dt}(q) = 0 \Leftrightarrow u_{tt} = u_{xx}\,,$$

unida a las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} & u(0,x) = \operatorname{sen}(x) \text{ en } [0,\pi]\,, \\ & u_t(0,x) = x^2 - \pi x \text{ en } [0,\pi]\,, \\ & u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \text{ en } [0,\infty)\,. \end{aligned}$$

Por consiguiente, las extremales de nuestro problema son las soluciones al problema mixto anterior para la ecuación de ondas. Una simple inspección de las condiciones iniciales permite asegurar que $\varphi_0(x) = \operatorname{sen}(x)$ es (en particular) de clase $C^2[0,\pi]$ con derivada de tercer orden continua a trozos; que $\psi_0(x) = x^2 - \pi x$ es (en particular) de clase $C^1[0,\pi]$ con derivada de segundo orden continua a trozos; y que $\varphi_0(0) = \varphi_0(\pi) = \varphi_0''(0) = \varphi_0''(\pi) = 0$ y $\psi_0(0) = \psi_0(\pi) = 0$. En consecuencia, según un teorema demostrado en clase se tiene que nuestro problema admite solución.

Para resolverlo empleamos el método de separación de variables. Consideramos perfiles de la forma $u(t,x) = T(t)w(x)$, que al ser sustituidos en la ecuación de ondas proporcionan la siguiente relación: $T''(t)w(x) = T(t)w''(x)$, de donde se desprende que ha de ser necesariamente

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = -\lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Comenzamos resolviendo el problema de contorno

$$\left\{ \begin{array}{ll} w''(x) + \lambda w(x) = 0\,, & x \in (0,\pi) \\ w(0) = w(\pi) = 0 & \end{array} \right. ,$$

que únicamente admite soluciones no triviales si $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, en cuyo caso

$$w_n(x) = k \operatorname{sen}(nx)\,, \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

Resolvemos a continuación la ecuación en $t$, obteniendo

$$T_n(t) = A\cos(nt) + B\operatorname{sen}(nt)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

En consecuencia, el candidato a solución de nuestro problema será

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\varphi_n \cos(nt) + \psi_n \operatorname{sen}(nt)\big) \operatorname{sen}(nx)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Al aplicar en última instancia las condiciones iniciales se obtiene

$$\begin{aligned} u_n(0,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \operatorname{sen}(nx) = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow \varphi_1 = 1,\ \varphi_j = 0\ (j \neq 1), \\ (u_n)_t(0,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big[n\big(-\varphi_n \operatorname{sen}(nt) + \psi_n \cos(nt)\big)\operatorname{sen}(nx)\Big](0,x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,\psi_n \operatorname{sen}(nx) = x^2 - \pi x\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Calculamos finalmente el desarrollo de Fourier en serie de senos de $\psi_0$, que sabemos convergerá absoluta y uniformemente hacia $\psi_0$ en virtud de un teorema demostrado en clase:[5]

$$\psi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) \,, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \big(x^2 - \pi x\big) \operatorname{sen}(nx)\, dx \,.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(nx)\, dx = -\frac{\pi^2}{n} \cos(n\pi) + \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \cos(nx)\, dx \\
&= -\frac{\pi^2}{n} \cos(n\pi) + \frac{2}{n}\Big( -\frac{1}{n} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\, dx \Big) = -\frac{\pi^2}{n} \cos(n\pi) - \frac{2}{n^3}\big( \cos(n\pi) - 1\big) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n} \pi^2 + 2\, \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n^3} = \frac{2}{n^3} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left( \pi^2 + \frac{2}{n^2} \right) , \\
&\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx)\, dx = -\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \pi \,.
\end{aligned}$$

Luego

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{2}{n^3} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left( \pi^2 + \frac{2}{n^2} \right) - \frac{\pi^2}{n} (-1)^{n+1} \right\} = \frac{4}{\pi n^3} \big( 1 + (-1)^{n+1} \big) \,.$$

Recuperando la condición (2), concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, \psi_n \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) \Leftrightarrow \psi_n = \frac{b_n}{n} = \frac{4}{\pi n^4} \big( 1 + (-1)^{n+1} \big) \,,$$

luego hemos obtenido la siguiente extremal para nuestro problema (que a la postre será el único posible, como se comprobará en el siguiente ítem):

$$u(t,x) = \cos(t) \operatorname{sen}(x) + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \operatorname{sen}\big((2n-1)t\big) \operatorname{sen}\big((2n-1)x\big) \,.$$

(3.2) Procedemos exactamente como el el Ejercicio 6 (c) de la Relación 1. Supongamos que $u_1(t,x)$ y $u_2(t,x)$ resuelven ambas el problema mixto planteado en el ítem anterior. Entonces la función $v := u_1 - u_2$ satisface el siguiente problema homogéneo:

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} \\ v(0,x) = v_t(0,x) = 0 \\ v(t,0) = v(t,\pi) = 0 \end{cases} .$$

La función de energía asociada a este problema se obtiene multiplicando la ecuación de ondas por $v_t$ e integrando por partes, tal como se hizo en clase. En

[5] Pues $\psi_0$ es continua en $[0,\pi]$, tiene derivada continua a trozos y $\psi_0(0) = \psi_0(\pi) = 0$

efecto:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^\pi v_{tt}v_t\,dx - \int_0^\pi v_{xx}v_t\,dx \\
&= \int_0^\pi v_{tt}v_t\,dx - v_xv_t(t,\pi) + v_xv_t(t,0) + \int_0^\pi v_xv_{tx}\,dx \\
&\overset{v_t(t,0)=v_t(t,\pi)=0}{=} \int_0^\pi \big(v_{tt}v_t + v_xv_{tx}\big)\,dx = \int_0^\pi \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_t^2 + \frac{1}{2}v_x^2\right)dx\,.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, podemos definir la función energía del siguiente modo:

$$
E(t) := \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(v_t^2 + v_x^2\right)dx
$$

con la garantía de que cumplirá $E'(t) = 0$, luego ha de tratarse de una función constante. En particular,

$$
E(t) \equiv E(0) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(v_t(0,x)^2 + v_x(0,x)^2\right)dx = 0
$$

para todo $t \geq 0$ (ya que $v_t(0,x) = 0 = v_x(0,x)$). Por consiguiente, tiene que cumplirse $v_t \equiv 0 \equiv v_x$, de donde se desprende que la función $v(t,x)$ ha de ser necesariamente constante. Como hay puntos en los que se conoce que $v(t,x)$ se anula (nótese que $v(t,0) = v(t,\pi) = 0$), la única alternativa es $v \equiv 0$; luego $u_1 \equiv u_2$.

■

**Teorema [Método de los coeficientes indeterminados]**

Si el segundo miembro de la ecuación $y'' + a_1y' + a_2y = b(x)$ es de la forma

$$b(x) = e^{ax}\big(P_n(x)\cos(bx) + Q_m(x)\,\mathrm{sen}(bx)\big)\,,$$

donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ representan polinomios de grado $n$ y $m$, respectivamente, entonces existe una solución particular de la forma

$$y_{part}(x) = x^r e^{ax}\big(\widetilde{P_k}(x)\cos(bx) + \widetilde{Q_k}(x)\,\mathrm{sen}(bx)\big)$$

donde $k = \text{máx}\{m, n\}$, $\widetilde{P_k}(x)$ y $\widetilde{Q_k}(x)$ son polinomios de grado $k$ con coeficientes indeterminados, y donde $r$ es la multiplicidad de $\lambda = a \pm ib$ como raíz de la ecuación característica ($r = 0$ significa que $a \pm ib$ no son raíces de dicha ecuación).