Universidad de Granada | **Convocatoria Septiembre** | MODELOS MATEMÁTICOS II
Dept. Matemática Aplicada | 15–Septiembre–2016 | Grado Matemáticas
Facultad de Ciencias | | y Doble grado con Ing. Informática

| Apellidos | | | | Firma |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| Nombre | D.N.I o pasaporte | 3º A | 3º B | 4º |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

---

1. Dado el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{para} \quad (t,x) \in [0,\infty) \times [0,\pi], \\ u(0,x) = \operatorname{sen}(5x), & \text{para} \quad x \in [0,\pi], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \operatorname{sen}(x), & \text{para} \quad x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & \text{para} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

1.1) Repite el proceso llevado a cabo para la ecuación de ondas y encuentra una solución $u \in C^2([0,\infty) \times [0,\pi])$.

1.2) ¿Admite este problema alguna formulación variacional? En caso afirmativo, encuéntrala.

1.3) ¿Es $u$ única? Justifica la respuesta.

**Solución:** 1.1) En primer lugar buscamos soluciones con las variables separadas: $u(t,x) = T(t)w(x)$, las cuales deben cumplir $T''(t)w(x) + T(t)w(x) = T(t)w''(x)$, o equivalentemente

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} - 1 = -\lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Resolvemos en primer lugar el problema de contorno para $w(x)$, que viene dado por

$$w''(x) + (\lambda - 1)w(x) = 0\,, \quad w(0) = w(\pi) = 0\,,$$

y cuyas soluciones son de la forma[1]

$$w(x) = B\operatorname{sen}(nx)\,, \qquad \forall B \in \mathbb{R}\,.$$

Por otra parte, la ecuación diferencial satisfecha por $T(t)$ es $T''(t) + (1+n^2)T(t) = 0$, que tiene por soluciones

$$T(t) = C\cos\left(\sqrt{1+n^2}\,t\right) + D\operatorname{sen}\left(\sqrt{1+n^2}\,t\right), \qquad C, D \in \mathbb{R}\,.$$

Por consiguiente, buscamos una solución del problema original que se obtenga superponiendo funciones que adoptan la siguiente forma:

$$u_n(t,x) = \operatorname{sen}(nx)\left(\alpha_n \cos\left(\sqrt{1+n^2}\,t\right) + \beta_n \operatorname{sen}\left(\sqrt{1+n^2}\,t\right)\right), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

[1] Nótese que solo son valores propios los $\lambda > 1$, con funciones propias asociadas $w(x) = A\cos(\sqrt{\lambda-1}\,x) + B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda-1}\,x)$. Al aplicar las condiciones de contorno resulta $A = 0$ y $B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda-1}\,\pi) = 0$, de donde se concluye que ha de ser $\sqrt{\lambda-1}\,\pi = n\pi$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\lambda_n = 1 + n^2$

es decir:
$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}(nx)\left(\alpha_n\cos\left(\sqrt{1+n^2}\,t\right)+\beta_n\operatorname{sen}\left(\sqrt{1+n^2}\,t\right)\right).$$
Para satisfacer las condiciones iniciales vemos que debe cumplirse lo siguiente:
$$\operatorname{sen}(5x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\operatorname{sen}(nx)\,,\qquad \operatorname{sen}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sqrt{1+n^2}\operatorname{sen}(nx)\,,$$
dado que $u_t(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}(nx)\left(-\alpha_n\sqrt{1+n^2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{1+n^2}\,t\right)+\beta_n\sqrt{1+n^2}\cos\left(\sqrt{1+n^2}\,t\right)\right)$. Necesitamos calcular a continuación la serie de Fourier en senos[2] de las funciones que aparecen a la izquierda de las igualdades anteriores. En nuestra situación, los coeficientes de ambas series se calculan directamente: en el primer caso son todos nulos salvo el coeficiente con $n=5$, que vale 1; y en el segundo caso son todos nulos salvo que $n=1$, de manera que ha de cumplirse $\sqrt{2}\beta_1=1$. En conclusión, la solución que buscamos es de la forma
$$u(t,x)=\operatorname{sen}(5x)\cos\left(\sqrt{26}\,t\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t)\,.$$

1.2) El problema de contorno que plantea el ejercicio es el de Euler-Lagrange asociado al siguiente problema variacional: encontrar el mínimo del funcional
$$\mathcal{F}\Big[u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x}\Big]=\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\left(\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2-\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2-u^2\right)dx\,dt$$
en
$$\mathcal{D}=\Big\{u\in C^2([0,\infty)\times[0,\pi]):u(0,x)=\operatorname{sen}(5x),\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\operatorname{sen}(x),u(t,0)=u(t,\pi)=0\Big\}.$$

1.3) La unicidad de solución se obtiene a partir del llamado método de la energía. Supongamos que hubiese dos soluciones, $u_1(t,x)$ y $u_2(t,x)$. Entonces la función $v:=u_1-u_2$ satisfaría el siguiente problema mixto:
$$\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}+v=0\\ v(0,x)=v_t(0,x)=0\\ v(t,0)=v(t,\pi)=0\end{cases}.$$
Multiplicando la ecuación anterior por $v_t$ e integrando por partes se obtiene:
$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\pi}v_{tt}v_t\,dx-\int_0^{\pi}v_{xx}v_t\,dx+\int_0^{\pi}vv_t\,dx\\ &= \int_0^{\pi}v_{tt}v_t\,dx-\Big\{(v_tv_x)(\pi)-(v_tv_x)(0)-\int_0^{\pi}v_xv_{tx}\,dx\Big\}+\int_0^{\pi}vv_t\,dx\\ &= \int_0^{\pi}\left(v_{tt}v_t+v_xv_{tx}+vv_t\right)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{d}{dt}\left(v_t^2+v_x^2+v^2\right)\,dx\,.\end{aligned}$$
La función de energía asociada a este problema es, por consiguiente,
$$E(t):=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(v_t^2+v_x^2+v^2\right)\,dx\,.$$
En virtud de la construcción anterior se tiene que $E'(t)=0$, luego $E(t)$ es constante y, en particular,
$$E(t)\equiv E(0)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(v_t(0,x)^2+v_x(0,x)^2+v(0,x)^2\right)dx=0$$
para todo $t\geq 0$ (ya que $v_t(0,x)=v_x(0,x)=v(0,x)=0$). Por consiguiente, ha de cumplirse $v\equiv 0$; luego $u_1\equiv u_2$.

[2] $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\operatorname{sen}(nx)$, con $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$

2. Sean $\Omega := (-1,1)\times(0,1)\subset\mathbb{R}^2$ y $f:\Omega\to\mathbb{R}$ dedinida como:

$$f(x,y) := \left\{ \begin{array}{lll} e^x & \text{si} & -1<x<0 \\ \operatorname{sen}(x\,y)+2 & \text{si} & \;\;0\le x<1 \end{array}\right.$$

2.1) Determina los valores de $p\in[1,\infty]$ para los que $f\in L^p(\Omega)$.

2.2) Determina si existen las derivadas parciales débiles de primer orden de $f$ y, en su caso, establece cuáles son los valores de $p$ para los que dichas derivadas parciales están en $L^p(\Omega)$.

2.3) Para esta $f$, determina la existencia y unicidad de mínimo en $H_0^1(\Omega)$ del siguiente operador:

$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega \Big(|\nabla u|^2 + (u-f)^2\Big)d(x,y).$$

**Solución:** 2.1) Si $1\le p<\infty$, se tiene

$$\int_{-1}^1\int_0^1 |f(x,y)|^p\,dy\,dx = \int_{-1}^0\int_0^1 e^{px}\,dy\,dx + \int_0^1\int_0^1 |\operatorname{sen}(xy)+2|^p\,dy\,dx \le \frac{1}{p}+3^p<\infty\,.$$

Por otra parte, es claro que $\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\le 3$. En consecuencia, $f\in L^p(\Omega)$ para todo $1\le p\le\infty$.

2.2) Comprobamos a continuación que no existe la derivada débil de primer orden de $f$ con respecto a $x$. En efecto, de existir $g\in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega f(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\,dy\,dx = -\int_\Omega g(x,y)\varphi(x,y)\,dy\,dx \quad \forall\varphi\in C_0^1(\Omega) \tag{1}$$

habría de satisfacerse

$$\begin{aligned} -\int_\Omega g(x,y)\varphi(x,y)\,dy\,dx &= \int_0^1\int_{-1}^0 e^x\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx\,dy + \int_0^1\int_0^1 (\operatorname{sen}(xy)+2)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx\,dy \\ &= \varphi(0,y) - \int_0^1\int_{-1}^0 e^x\varphi(x,y)\,dy\,dx - 2\varphi(0,y) - \int_0^1\int_0^1 y\cos(xy)\varphi(x,y)\,dy\,dx\,. \end{aligned}$$

Por consiguiente, dispondríamos de la relación

$$\int_\Omega g(x,y)\varphi(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_{-1}^0 e^x\varphi(x,y)\,dy\,dx + \int_0^1\int_0^1 y\cos(xy)\varphi(x,y)\,dy\,dx + \varphi(0,y) \tag{2}$$

para toda $\varphi\in C_0^1(\Omega)$. Ahora bien, si en particular se eligiesen funciones test con soporte contenido en $[-1,0]\times[0,1]$, entonces

$$\int_0^1\int_{-1}^0 g(x)\varphi(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_{-1}^0 e^x\varphi(x,y)\,dy\,dx\,,$$

y consecuentemente deduciríamos que $g=e^x$ c.p.d. en $[-1,0]\times[0,1]$ en virtud del lema fundamental del cálculo de variaciones. Análogamente, si considerásemos ahora $\varphi\in C_0^1([0,1]\times[0,1])$ se concluiría que $g=y\cos(xy)$ c.p.d. en $[0,1]\times[0,1]$. En conclusión, habría de ser $\varphi(0,y)=0$ en virtud de (2), cualquiera que fuese $\varphi\in C_0^1(\Omega)$, lo cual es falso en general. Un razonamiento análogo es válido para la derivada de primer orden con respecto a $y$.

La razón de que $f$ no tenga derivada débil (en el sentido estándar, es decir, $g\in L^1_{loc}(\Omega)$) es la presencia de un salto en $x=0$, el cual genera una delta de Dirac al *derivar*. En efecto, a la luz de (2) puede concluirse que "$\frac{\partial f}{\partial x}=h+\delta_0$", con

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{ll} e^x, & \text{si } -1\le x<0, \\ y\cos(xy), & \text{si } 0<x\le 1. \end{array}\right.$$

Análogo para $\frac{\partial f}{\partial y}$. Por consiguiente, $f$ no pertenece a ningún espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

2.3) La ecuación de Euler–Lagrange asociada al problema de optimización es $-\Delta u + u = f$, con condiciones de contorno $u = 0$ en $\partial\Omega$. Este problema admite la siguiente formulación variacional:

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)v\,dy\,dx = \int_\Omega fv\,dy\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

O, después de aplicar la fórmula de integración por partes:

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\,dy\,dx = \int_\Omega fv\,dy\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Considérese pues la aplicación $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida como $a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\,d(x,y)$. Se cumple:

- $a$ es bilineal.
- $a$ es continua. En efecto: $|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$.
- $a$ es coerciva. En efecto: $a(u,u) = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)\,dy\,dx = \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$.

Entonces, por el teorema de Lax–Milgram sabemos que existe una única solución en $H_0^1(\Omega)$ de la ecuación $a(u,v) = F(v)$, donde $F(v) := \int_\Omega fv\,dy\,dx$ es lineal y continua en $H_0^1(\Omega)$, pues $|F(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{1}{2}+9}\,\|v\|_{H^1(\Omega)}$. En conclusión, podemos afirmar que existe una única extremal de $\mathcal{F}[u]$ en $H_0^1(\Omega)$. Para concluir que se trata de un mínimo basta con observar la convexidad del funcional (notando, por ejemplo, que su matriz hessiana es definida positiva).

Otra forma de argumentar, empleando también el teorema de Lax–Milgram, consiste en desarrollar

$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega \Big(|\nabla u|^2 + (u-f)^2\Big)d(x,y) = \int_\Omega \Big(|\nabla u|^2 + u^2 - 2uf\Big)d(x,y) + \int_\Omega f^2 d(x,y)$$

y elegir

$$a(u,v) := 2\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\,d(x,y)\,,$$

que ya hemos comprobado que se trata de una aplicación bilineal, continua y coerciva en $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, y

$$F(v) := 2\int_\Omega fv\,d(x,y)\,,$$

que es una aplicación lineal y continua en $H_0^1(\Omega)$. Al ser además $a$ simétrica, el teorema de Lax-Milgram garantiza la existencia y unicidad de solución en $H_0^1(\Omega)$ del problema consistente en minimizar el funcional $\mathcal{I}[u] = \frac{1}{2}a(u,u) - F(u)$, coincidente con $\mathcal{F}[u] - \int_\Omega f^2\,d(x,y)$. En consecuencia, también $\mathcal{F}[u]$ ha de tener un único mínimo en $H_0^1(\Omega)$.

3. Determina, según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, el número de extremales del siguiente problema variacional:

$$\min_{y\in\mathcal{D}} \int_0^{4\pi} \left[\Big(y'(x)\Big)^2 - \alpha\Big(y(x) - \operatorname{sen}(8x)\Big)^2\right] dx, \qquad \mathcal{D} := \Big\{y \in C^2([0,4\pi]) : y(0) = y(4\pi) = 0\Big\}.$$

**Solución:** La ecuación de Euler–Lagrange asociada es $-2\alpha(y - \operatorname{sen}(8x)) - \frac{d}{dx}(2y') = 0$, luego el problema de contorno a resolver para encontrar las extremales es el siguiente:

$$y'' + \alpha y = \alpha \operatorname{sen}(8x)\,, \quad y(0) = y(4\pi) = 0\,.$$

Resolvemos en primer lugar el problema homogéneo, para el que encontramos que solo existen soluciones no triviales si $\alpha > 0$. En tal caso, la solución general viene expresada como $y(x) = A\cos(\sqrt{\alpha}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\alpha}x)$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Imponiendo las condiciones de contorno resulta $A = 0$ y $B\,\mathrm{sen}(4\sqrt{\alpha}\pi) = 0$, luego $\alpha_n = \frac{n^2}{16}$ son los únicos valores del parámetro para los que existen soluciones no triviales, que vienen dadas por $y_n(x) = B\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{4}\right)$. Aplicando el teorema de la alternativa de Fredhölm para problemas de contorno, se deduce que:

- Si $\alpha \leq 0$ o $\alpha > 0$ tal que $\alpha \neq \frac{n^2}{16}$, el problema homogéneo solo admite la solución trivial. Entonces el problema completo admite una única solución o, lo que es lo mismo, existe un único extremal del problema variacional.
- Si $\alpha = \frac{n^2}{16}$, el problema homogéneo admite infinitas soluciones. Entonces el problema completo tiene solución si y solo si $\int_0^{4\pi} \mathrm{sen}(8x) y_h(x)\,dx = 0$, donde $y_h$ denota cualquier solución del problema homogéneo; es decir, si y solo si $\int_0^{4\pi} \mathrm{sen}(8x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{4}\right)dx = 0$, lo cual es cierto salvo que $n = 32$, en cuyo caso $\int_0^{4\pi} \mathrm{sen}^2(8x)\,dx = 2\pi$ y el problema de Euler–Lagrange no tiene solución.

4. Considera una función regular $u$ que resuelve[3] el siguiente PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{para} \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = x^2, & \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4.1) Sea $v := \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$. ¿Qué PVI resuelve? Justifica que $v \equiv 0$.

4.2) Usando el apartado anterior, deduce que $u$ ha de ser de la forma $u(t,x) = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$, y determina las funciones $a$, $b$ y $c$.

4.3) Compara la expresión obtenida en 4.2) con la deducida en clase para probar que

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**Solución:** 4.1) Veamos que $v$ resuelve la misma ecuación que $u$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,.$$

Por otra parte, se tiene

$$v(0,x) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0,x) = \frac{\partial^3}{\partial x^3}(x^2) = 0\,.$$

Atendiendo a la nota a pie de página del enunciado, la única solución del PVI es la que resulta de efectuar el producto de convolución de la solución fundamental para la ecuación del calor y el correspondiente dato inicial, que en este caso es idénticamente nulo. Por consiguiente, la conclusión es que la única solución del PVI es $v \equiv 0$.

4.2) Es claro que si la tercera derivada de $u$ con respecto a $x$ tiene que anularse para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $u(t,x)$ debe ser un polinomio de segundo grado en $x$ con coeficientes dependientes del tiempo. Como sabemos que $u$ resuelve la ecuación del calor, debe cumplirse la siguiente relación:

$$a'(t) + b'(t)x + c'(t)x^2 = 2c(t)\,,$$

[3] Puedes usar que la expresión dada en clase es la única solución del PVI, aunque la condición inicial no sea acotada

lo que conlleva que $b' = c' = 0$ y $a' = 2c$. Además, para que se satisfaga la condición inicial debe verificarse $a(0) + b(0)x + c(0)x^2 = x^2$, de donde se desprende que $a(0) = b(0) = 0$ y $c(0) = 1$. Por consiguiente, ha de ser $b \equiv 0$, $c \equiv 1$, $a(t) = 2t$.

4.3) La solución deducida en clase fue la siguiente: $u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * x^2 = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - y)^2 e^{-\frac{y^2}{4t}}\, dy$. Al compararla con la que acabamos de obtener se deduce que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-y)^2 e^{-\frac{y^2}{4t}}\, dy = x^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}}\, dy + \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{4t}}\, dy - 2x \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{4t}}\, dy = \sqrt{4\pi t}\,(2t + x^2)\,.$$

Pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{4t}}\, dy = 0\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}}\, dy = 2\sqrt{\pi t}\,,$$

luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{4t}}\, dy = \sqrt{4\pi t}\,(2t + x^2) - 2\sqrt{\pi t}\, x^2 = 4\sqrt{\pi}\, t^{\frac{3}{2}}\,.$$

Finalmente, como $\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{4t}}\, dy = 4t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{4t} e^{-\frac{y^2}{4t}}\, dy = 4t(2\sqrt{t}) \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2}\, dz = 4\sqrt{\pi}\, t^{\frac{3}{2}}$, se concluye que $\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.