Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias

Prueba extraordinaria
3–Julio–2018

MODELOS MATEMÁTICOS II
Grado Matemáticas y
Doble G. con Ing. Informática

Apellidos

Firma

Nombre

D.N.I o pasaporte

3ºA	3ºB	4º

---

1. $\boxed{\text{4 puntos}}$ JUSTIFICA RAZONADAMENTE la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1.a) La única solución del PVI

$$\begin{aligned} &u_t + cu_x = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0\,, \\ &u(x,0) = e^{-\frac{\pi}{2}x^2}\,, \end{aligned}$$

satisface $\hat{u}(1,t) = \sqrt{2}\, e^{-2\pi(1+ict)}$, donde $\hat{u}$ denota la transformada de Fourier de u respecto de la variable x (por si te resultase de ayuda, $\widehat{e^{-\frac{\pi}{2}x^2}}(y) = \sqrt{2}\, e^{-2\pi y^2}$).

1.b) El problema de contorno $x^2y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = \cos(\ln(x))$ con la condición $y(1) = y(e^\pi) = 0$ no tiene solución en el intervalo $[1, e^\pi]$.

1.c) Considera la ecuación: $u_{tt} = c^2u_{xx}$, para $(t,x) \in [0,\infty)\times[0,1]$ con condiciones de contorno $u(t,0) = 0$, $u(t,1) = 0$ y dato inicial $u(0,x) = x(x-1)$. Entonces, el funcional $E(t) = \displaystyle\int_0^1 (\partial_t u)^2 + c^2(\partial_x u)^2 dx$ vale constantemente $c^2/3$ sobre la solución, y esta es única.

1.d) Si se considera el problema de minimizar el funcional $\mathcal{F}[y] := \displaystyle\int_0^1 F(y(x), y'(x))\, dx$, sobre el conjunto $\mathcal{D} = C^1([0,1])$ (con $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$), entonces toda extremal $y(x)$ que esté en $C^2([0,1])$ verifica:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\big(y(0), y'(0)\big) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p}\big(y(1), y'(1)\big) = 0, \quad y \quad F\big(y(x), y'(x)\big) - y'(x)\frac{\partial F}{\partial p}\big(y(x), y'(x)\big) = constante.$$

Solución: (a) VERDADERA. Si aplicamos la transformada de Fourier al problema original resulta el siguiente PVI:

$$\begin{aligned} &\hat{u}_t + 2\pi icy\hat{u} = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0\,, \\ &\hat{u}(y,0) = \sqrt{2}\, e^{-2\pi y^2}\,, \end{aligned}$$

cuya solución puede calcularse fácilmente por el método de variables separadas:

$$\hat{u}(y,t) = \sqrt{2}\, e^{-2\pi y^2} e^{-2\pi icyt}\,.$$

Finalmente, evaluando esta última expresión en $y = 1$ se obtiene la fórmula anunciada.

(b) FALSA. Se trata de una ecuación diferencial de tipo Euler que se transforma en $z''(s) - 2z'(s) - 2z(s) = \cos(s)$ en virtud del cambio de variables $x = e^s$, $z(s) = y(x)$. En las nuevas variables, la solución general de la ecuación homogénea es $z(s) = Ae^{\lambda_+ s} + Be^{\lambda_- s}$, con $\lambda_\pm = 1 \pm \sqrt{3}$ y $A, B \in \mathbb{R}$. Y en las variables originales: $y(x) = Ae^{\lambda_+ \ln(x)} + Be^{\lambda_- \ln(x)}$. Al imponer ahora las condiciones de contorno resulta $A = B = 0$, luego la única solución del problema homogéneo es la trivial. En tal circunstancia, el teorema de la alternativa de Fredhölm asegura la existencia y unicidad de solución del problema no homogéneo en el intervalo dado.

(c) FALSA. El problema no puede tener unicidad de solución porque no está prescrito el valor que toma u_t en $t = 0$. Dicho de otro modo: para cada elección de la función $u_t(0,x)$ habrá una solución distinta del problema.

(d) VERDADERA. Las condiciones de contorno son obtenidas a raíz del procedimiento estándar que se lleva a cabo para deducir la ecuación general de Euler-Lagrange ($\frac{d}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0} F\big(y(x)+\varepsilon\varphi(x), y'(x)+\varepsilon\varphi'(x)\big) = 0$, hecho en clase). Para deducir la forma reducida de la ecuación de Euler-Lagrange del enunciado partimos de la ecuación de Euler-Lagrange estándar, $F_y - \frac{d}{dx}(F_p) = 0$, o equivalentemente $F_y - pF_{py} - p'F_{pp} = 0$. Finalmente, multiplicando por p se obtiene $pF_y - p^2F_{py} - pp'F_{pp} = 0$, que, por no depender F explícitamente de x, es lo mismo que $\frac{d}{dx}\big(F - pF_p\big) = 0$, es decir, $F - y'F_p = C \in \mathbb{R}$.

2. $\boxed{\text{3 puntos}}$ Dada una función $f \in \mathcal{C}[0,1]$ consideramos el funcional

$$\mathcal{F}(u) := \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2 dx + \frac{1}{8}\int_0^1 \operatorname{sen}(x)(u(x))^2 dx + \int_0^1 f(x)u(x)dx,$$

definido en $H_0^1(0,1)$.

2.a) Demuestra que la siguiente desigualdad:

$$\int_0^1 \big(v(x)\big)^2\, dx \le C\int_0^1 \big(v'(x)\big)^2\, dx,$$

es cierta para toda $v \in H_0^1(0,1)$, para alguna constante $C \le 1$.

2.b) Prueba que $\|u\| := \Big(\int_0^1 \big(v'(x)\big)^2\, dx\Big)^{1/2}$ es una norma en $H_0^1(0,1)$.

2.c) Demuestra que el funcional $\mathcal{F}$ tiene un único mínimo en $H_0^1(0,1)$.

2.d) Sabiendo que dicho mínimo es $C^2(0,1)$, demuestra que existe una única solución del siguiente problema de contorno:

$$4w'' = w\operatorname{sen}(x), \qquad w(0) = 0,\ w(1) = k \in \mathbb{R}.$$

Solución: (a) Es la desigualdad de Poincaré (hecha en clase).

(b) Veamos que es equivalente a la norma estándar de $H^1(0,1)$, a saber: $\|v\|^2_{H^1(0,1)} = \|v\|^2_{L^2(0,1)} + \|v'\|^2_{L^2(0,1)}$. Es obvio que $\|v\|^2 \le \|v\|^2_{H^1(0,1)}$. Por otra parte, $\|v\|^2_{H^1(0,1)} =\le \big(1+C\big)\|v'\|^2_{L^2(0,1)}$ en virtud del ítem (a).

(c) Definimos $a : H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ como $a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\, dx + \frac{1}{4}\int_0^1 \operatorname{sen}(x)u(x)v(x)\, dx$ y $F : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ como $F(v) = -\int_0^1 f(x)v(x)\, dx$. Es claro que a es bilineal y simétrica y que F lineal. La continuidad de F se sigue de $|F(v)| \le \|f\|_{L^2(0,1)}\|v\|_{L^2(0,1)} \le \|f\|_{L^2(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)}$. Por otra parte, la continuidad de a es consecuencia de

$$|a(u,v)| \le \|u'\|_{L^2(0,1)}\|v'\|_{L^2(0,1)} + \frac{1}{4}\|u\|_{L^2(0,1)}\|v\|_{L^2(0,1)} \le C\|u\|_{H^1(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)}\,.$$

Verificamos finalmente la coercividad de a, para lo cual empleamos el resultado del apartado (a):

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_0^1 u'(x)^2\, dx + \frac{1}{4}\int_0^1 \operatorname{sen}(x)u(x)^2\, dx \ge \int_0^1 u'(x)^2\, dx - \frac{1}{4}\int_0^1 u(x)^2\, dx \\ &\ge \Big(1 - \frac{C}{4}\Big)\int_0^1 u'(x)^2\, dx = \Big(1 - \frac{C}{4}\Big)\|u\|^2\,. \end{aligned}$$

Estamos, pues, en condiciones de aplicar el teorema de Lax-Milgram, el cual asegura la existencia de un único mínimo en $H_0^1(0,1)$ de $\frac{1}{2}a(u,u) - F(u) = \mathcal{F}(u)$.

(d) Denotamos $F(u,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(x)u^2 + fu$. La ecuación de Euler-Lagrange asociada a $\mathcal{F}$ es $0 = F_u - \frac{d}{dx}(F_p) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(x)u + f - u''$ o, equivalentemente, $4u'' - \operatorname{sen}(x)u = 4f$, con condiciones de contorno asociadas $u(0) = u(1) = 0$. Por lo probado en el ítem (b), este problema admite una única solución $u \in H_0^1(0,1) \cap C^2(0,1)$ cualquiera que sea $f \in C[0,1]$. Consideremos el cambio de variable $v(x) = u(x) - kx$. Entonces v resuelve la ecuación diferencial $4v'' = 4u'' = \operatorname{sen}(x)u + 4f = \operatorname{sen}(x)v + \tilde{f}$, con $\tilde{f}(x) = kx\operatorname{sen}(x) + 4f$, a la vez que satisface $v(0) = v(1) = 0$. Por consiguiente v es única, luego $u = v + kx$ también.

3. $\boxed{\text{3 puntos}}$ Consideramos las siguientes cinco reacciones químicas para las especies X, Y, y Z (A, B y P se consideran datos), que sirven como modelo realista simple para la reacción de Belousov-Zhabotinsky:

$$A + Y \xrightarrow{k_1} X + P, \qquad X + Y \xrightarrow{k_2} 2P,$$
$$A + X \xrightarrow{k_3} 2X + 2Z, \qquad 2X \xrightarrow{k_4} A + P, \qquad B + Z \xrightarrow{k_5} Y.$$

3.a) Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones ordinarias que satisfacen las concentraciones $x = [X], y = [Y], z = [Z]$ de las especies X, Y, Z, dependientes del tiempo t. Las concentraciones de A y B (llamadas a, b) se consideran datos dados.

3.b) En las ecuaciones anteriores, supón que a y b son constantes y considera el cambio de variables

$$\tau = \alpha t, \qquad u(\tau) = \lambda x(t), \qquad v(\tau) = \lambda y(t), \qquad w(\tau) = \lambda z(t).$$

Encuentra la expresión de las constantes λ, α, Q_1, Q_2 y Q_3 de forma que se cumplan

$$\frac{du}{d\tau} = v - uv + u(Q_1 - Q_2 u), \qquad \frac{dv}{d\tau} = -v - uv + Q_3 w, \qquad \frac{dw}{d\tau} = 2Q_1 u - Q_3 w,$$

y comprueba que α es una frecuencia (es decir, tiene unidades de 1/tiempo), y que v y Q_2 no tienen dimensiones físicas.

3.c) Encuentra todos los equilibrios del sistema anterior y prueba que todos verifican $v \le 2Q_1$.

Solución: (a) Las ecuaciones pedidas son:

$$x' = k_1 a y + k_3 a x - k_2 x y - 2k_4 x^2\,, \quad y' = k_5 b z - k_1 a y - k_2 x y\,, \quad z' = 2k_3 a x - k_5 b z\,.$$

(b) Se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\tau} &= \frac{\lambda}{\alpha} x'(t) = \frac{\lambda}{\alpha}\big(k_1 a y(t) + k_3 a x(t) - k_2 x(t) y(t) - 2k_4 x(t)^2\big) \\
&= \frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{k_1}{\lambda} a v(\tau) + \frac{k_3}{\lambda} a u(\tau) - \frac{k_2}{\lambda^2} u(\tau) v(\tau) - 2\frac{k_4}{\lambda^2} u(\tau)^2\right) \\
&= \frac{k_1 a}{\alpha} v(\tau) + \frac{k_3 a}{\alpha} u(\tau) - \frac{k_2}{\alpha\lambda} u(\tau) v(\tau) - \frac{2k_4}{\alpha\lambda} u(\tau)^2\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{d\tau} &= \frac{\lambda}{\alpha} y'(t) = \frac{\lambda}{\alpha}\big(k_5 b z - k_1 a y - k_2 x y\big) = \frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{k_5}{\lambda} b w(\tau) - \frac{k_1}{\lambda} a v(\tau) - \frac{k_2}{\lambda^2} u(\tau) v(\tau)\right) \\
&= \frac{k_5 b}{\alpha} w(\tau) - \frac{k_1 a}{\alpha} v(\tau) - \frac{k_2}{\alpha\lambda} u(\tau) v(\tau)\,,
\end{aligned}$$

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{\lambda}{\alpha} z'(t) = \frac{\lambda}{\alpha}\big(2k_3 a x - k_5 b z\big) = \frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{2k_3}{\lambda} a u(\tau) - \frac{k_5}{\lambda} b w(\tau)\right) = \frac{2k_3 a}{\alpha} u(\tau) - \frac{k_5 b}{\alpha} w(\tau)\,.$$

Identificando términos obtenemos:

$$\frac{k_1 a}{\alpha} = \frac{k_2}{\alpha\lambda} = 1\,, \quad \frac{k_3 a}{\alpha} = Q_1\,, \quad \frac{2k_4}{\alpha\lambda} = Q_2\,, \quad \frac{k_5 b}{\alpha} = Q_3\,,$$

de donde se desprende que

$$\alpha = k_1 a\,, \quad \lambda = \frac{k_2}{k_1 a}\,, \quad Q_1 = \frac{k_3}{k_1}\,, \quad Q_2 = \frac{2k_4}{k_2}\,, \quad Q_3 = \frac{k_5 b}{k_1 a}\,.$$

De la ecuación para $x(t)$ se deduce fácilmente que el término $k_1 a y(t)$ debe tener dimensiones de concentración dividido por tiempo (comparando con el primer miembro de la ecuación), luego las dimensiones de k_1 deben ser $[C]^{-1}[T]^{-1}$. Por consiguiente, $\alpha = k_1 a$ tiene unidades de frecuencia ($[T]^{-1}$). Análogamente, las dimensiones de k_2 son (nuevamente podemos emplear la ecuación de $x(t)$) $[C]^{-1}[T]^{-1}$, luego $\lambda = \frac{k_2}{k_1 a}$ tiene dimensiones de

$[C]^{-1}$, de donde se sigue que $v(\tau) = \lambda y(t)$ es adimensional. Finalmente, la ecuación de $x(t)$ nos informa también de que k_2 y k_4 tienen las mismas dimensiones ($[C]^{-1}[T]^{-1}$), luego Q_2 es adimensional.

(c) Hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$v - uv + u(Q_1 - Q_2 u) = 0\,, \quad -v - uv + Q_3 w = 0\,, \quad 2Q_1 u - Q_3 w = 0\,.$$

Obviamente, $u = v = w = 0$ es solución. De la última ecuación se deduce directamente la relación $w = \frac{2Q_1}{Q_3}u$. Sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación resulta $-v - uv + 2Q_1 u = 0$. Restándola ahora de la primera ecuación se obtiene $2v - Q_1 u - Q_2 u^2 = 0$, luego $v = \frac{1}{2}u(Q_1 + Q_2 u)$. Sustituyendo ahora esta relación en la primera ecuación se llega a $Q_2 u^2 + (Q_1 + Q_2)u - 3Q_1 = 0$, o equivalentemente $u = \frac{-(Q_1+Q_2)+\sqrt{(Q_1+Q_2)^2+12Q_1Q_2}}{2Q_2}$ (nótese que hemos retenido únicamente la solución positiva). Finalmente, se tiene[1]

$$\begin{aligned}
v &= \frac{1}{2}u(Q_1 + Q_2 u) \\
&= \frac{1}{4Q_2}\Big(-(Q_1+Q_2) + \sqrt{(Q_1+Q_2)^2 + 12Q_1Q_2}\Big)\Big(Q_1 - \frac{1}{2}(Q_1+Q_2) + \frac{1}{2}\sqrt{(Q_1+Q_2)^2 + 12Q_1Q_2}\Big) \\
&= \frac{1}{8Q_2}\Big(-(Q_1+Q_2) + \sqrt{(Q_1+Q_2)^2 + 12Q_1Q_2}\Big)\Big((Q_1 - Q_2) + \sqrt{(Q_1+Q_2)^2 + 12Q_1Q_2}\Big) \\
&= \frac{1}{8Q_2}\Big((Q_1+Q_2)^2 + 12Q_1Q_2 - Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_2\sqrt{(Q_1+Q_2)^2 + 12Q_1Q_2}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(Q_2 + 7Q_1 - \sqrt{(Q_1+Q_2)^2 + 12Q_1Q_2}\Big) \le \frac{7}{4}Q_1 < 2Q_1\,.
\end{aligned}$$

[1] Se trata de un sistema no lineal, por lo que no hay un algoritmo canónico para resolverlo. De hecho, depende mucho de la estrategia desarrollada para su resolución el que la cota pedida sea más o menos evidente. En efecto: si después de haber despejado $w = \frac{2Q_1}{Q_3}u$ en la tercera ecuación sustituimos el resultado en la segunda, obtenemos $v = 2Q_1\frac{u}{1+u} \le 2Q_1$