Apellidos				Firma
Nombre	D.N.I o pasaporte	$3^o A$	$3^o B$	4^o

[25] **EJERCICIO 1.**

Sea $I = (-1, 1)$ y se definen

$$a(u, v) = \int_I u''(x)v''(x)\, dx$$

y

$$F(v) = \int_I f\, v\, dx,$$

donde f viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } -1 \le x \le 0, \\ \frac{1}{2}(1 - x), & \text{si } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Se considera el problema de encontrar $u \in H_0^2(I)$ tal que[1]

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^2(I). \tag{1}$$

1.a) ¿Está f en $L^2(I)$? ¿Tiene derivada débil en $L^2(I)$? ¿Tiene derivada débil en algún otro espacio? En caso afirmativo, calcúlala y enuncia el concepto de derivada débil que estás usando.

1.b) Usando apropiadamente la desigualdad de Poincaré, demuestra que existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v, v) \ge \alpha \|v\|^2_{H^2(I)}.$$

1.c) Demuestra que $a(\cdot, \cdot)$ es bilineal y continua en $H^2(I) \times H^2(I)$. Demuestra que F es lineal y continua en $H^2(I)$.

1.d) Estudia la existencia y unicidad de (1) en $H_0^2(I)$.

1.e) Determina justificadamente qué relación hay entre las soluciones de (1) en $H_0^2(I)$ y las de

$$\mathcal{F}[u] = \min_{v \in H_0^2(I)} \{\mathcal{F}[v]\}, \quad \text{con } \mathcal{F}[v] = \frac{1}{2} a(v, v) - F(v). \tag{2}$$

1.f) Si $u \in H_0^2(I)$ es una solución de (2), determina justificadamente las condiciones de regularidad sobre u que necesitas para deducir la ecuación de Euler-Lagrange asociada. Escribe dicha ecuación y sus condiciones de contorno.

[1] Recuérdese que los elementos del espacio de Hilbert $H^2(I)$ son las funciones $u \in L^2(I)$ cuyas derivadas débiles hasta orden dos existen y pertenecen a $L^2(I)$. La siguiente expresión define una norma en $H^2(I)$:

$$\|u\|^2_{H^2(I)} = \|u\|^2_{L^2(I)} + \|u'\|^2_{L^2(I)} + \|u''\|^2_{L^2(I)}.$$

Solución: 1.a) Se tiene

$$\|f\|^2_{L^2(I)} = \int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx = \int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx + \frac{1}{4}\int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{3}+\frac{1}{12} = \frac{5}{12}\,.$$

Comprobamos a continuación que no existe la derivada débil de primer orden de f. En efecto, de existir $g \in L^1_{loc}(I)$ tal que

$$\int_I f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_I g(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in C^1_0(I) \tag{3}$$

habría de satisfacerse

$$\begin{aligned} -\int_I g(x)\varphi(x)\,dx &= \int_{-1}^{0}(x+1)\varphi'(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\varphi'(x)\,dx \\ &= \varphi(0) - \int_{-1}^{0}\varphi(x)\,dx - \frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(x)\,dx\,. \end{aligned}$$

Por consiguiente, dispondríamos de la relación

$$\int_I g(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-1}^{0}\varphi(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(x)\,dx - \frac{1}{2}\varphi(0) \quad \forall \varphi \in C^1_0(I)\,. \tag{4}$$

Ahora bien, si en particular se eligiesen funciones test con soporte contenido en $[-1,0]$, entonces

$$\int_{-1}^{0} g(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-1}^{0}\varphi(x)\,dx\,,$$

y consecuentemente deduciríamos que $g = 1$ c.p.d. en $[-1,0]$ en virtud del lema fundamental del cálculo de variaciones. Análogamente, si considerásemos ahora $\varphi \in C^1_0([0,1])$ se concluiría que $g = -\frac{1}{2}$ c.p.d. en $[0,1]$. En conclusión, habría de ser $\varphi(0) = 0$ en virtud de (4), cualquiera que fuese $\varphi \in C^1_0(I)$, lo cual es falso en general.

La razón de que f no tenga derivada débil (en el sentido estándar, es decir, $g \in L^1_{loc}(I)$) es la presencia de un salto en $x = 0$, el cual genera una delta de Dirac al *derivar*. En efecto, a la luz de (4) puede concluirse que "$f' = h + \frac{1}{2}\delta_0$", con

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -1 \le x < 0, \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Sin embargo $\delta_0 \notin L^1_{loc}(I)$, por lo que tendríamos que modificar el concepto conocido de derivada débil si queremos adecuar la delta de Dirac al mismo. En tal caso y a tenor de lo visto en clase, bastaría con definir la derivada débil de $f \in L^1_{loc}(I)$ como aquella *medida* g que satisface la condición (3).

1.b) Aplicando la desigualdad de Poincaré a v y v' se tiene

$$\|v\|_{L^2(I)} \le C\|v'\|_{L^2(I)}\,, \quad \|v'\|_{L^2(I)} \le C\|v''\|_{L^2(I)}\,,$$

luego

$$\begin{aligned} \|v\|^2_{H^2(I)} &= \|v\|^2_{L^2(I)} + \|v'\|^2_{L^2(I)} + \|v''\|^2_{L^2(I)} \le C^4\|v''\|^2_{L^2(I)} + C^2\|v''\|^2_{L^2(I)} + \|v''\|^2_{L^2(I)} \\ &= (C^4 + C^2 + 1)a(v,v)\,, \end{aligned}$$

de donde se concluye que basta con elegir $\alpha = (C^4 + C^2 + 1)^{-1}$.

1.c) Se tiene

$$\begin{aligned} a(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) &= \int_I (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)'' v''\,dx \\ &= \lambda_1 \int_I u_1'' v''\,dx + \lambda_2 \int_I u_2'' v''\,dx = \lambda_1 a(u_1,v) + \lambda_2 a(u_2,v)\,. \end{aligned}$$

La linealidad con respecto a la segunda variable es análoga. Por otra parte,

$$|a(u,v)| = \left| \int_I u''v''\,dx \right| \leq \|u''\|_{L^2(I)} \|v''\|_{L^2(I)} \leq \|u\|_{H^2(I)} \|v\|_{H^2(I)}$$

en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwartz (Hölder con exponentes conjugados $p=2$ y $p'=2$), luego $a(\cdot,\cdot)$ es continua en $H^2(I) \times H^2(I)$. Estudiamos finalmente la linealidad y continuidad de F. Se tiene

$$F(\lambda u + \mu v) = \int_I f(x)(\lambda u + \mu v)(x)\,dx = \lambda \int_I f(x)u(x)\,dx + \mu \int_I f(x)v(x)\,dx = \lambda F(u) + \mu F(v)\,.$$

Además,

$$|F(v)| \leq \int_I |f(x)||v(x)|\,dx \leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \leq \sqrt{\frac{5}{12}}\,\|v\|_{H^2(I)}\,,$$

de donde se desprende la continuidad de F en $H^2(I)$.

1.d) $X = H_0^2(I)$ es un espacio de Hilbert, $F \in (H_0^2(I))'$ y $a(\cdot,\cdot) : H_0^2(I) \times H_0^2(I) \to \mathbb{R}$ es una aplicación bilineal, continua y coerciva a tenor de lo demostrado en los apartados anteriores. Por consiguiente, puede aplicarse el teorema de Lax-Milgram para concluir la existencia y unicidad de solución en $H_0^2(I)$.

1.e) Como la aplicación $a(\cdot,\cdot)$ es además simétrica, resolver (1) equivale a resolver el problema de minimización planteado en el enunciado, de nuevo en virtud del teorema de Lax-Milgram.

1.f) Se tiene

$$\mathcal{F}[u] = \frac{1}{2}a(u,u) - F(u) = \frac{1}{2}\int_I (u''(x))^2\,dx - \int_I f(x)u(x)\,dx = \int_I G(u,u'')\,dx\,,$$

con $G(u,u'') = \frac{1}{2}(u'')^2 - fu$. Procedemos a construir la ecuación de Euler-Lagrange asociada a este funcional. Repitiendo los pasos de la deducción hecha en clase, se trata de llegar a escribir la ecuación $\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}\mathcal{F}[u+\varepsilon\varphi] = 0$, cualquiera que sea $\varphi \in H_0^2(I)$ (en el caso que nos trae):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0}\mathcal{F}[u+\varepsilon\varphi] &= \frac{d}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0}\int_I G(u+\varepsilon\varphi, u''+\varepsilon\varphi'')\,dx \\
&= \int_I \Big\{ G_u(u,u'')\varphi + G_{u''}(u,u'')\varphi'' \Big\}\,dx = \int_I \Big\{ -f\varphi + u''\varphi'' \Big\}\,dx = 0\,.
\end{aligned}$$

Integrando ahora por partes (dos veces) se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_I u''\varphi''\,dx &= (u''\varphi')(1) - (u''\varphi')(-1) - \int_I \varphi' u'''\,dx \\
&= (u''\varphi')(1) - (u''\varphi')(-1) - (u'''\varphi)(1) + (u'''\varphi)(-1) + \int_I \varphi u^{(iv)}\,dx \\
&= (u''\varphi')(1) - (u''\varphi')(-1) + \int_I \varphi u^{(iv)}\,dx\,,
\end{aligned}$$

dado que φ se anula en la frontera de I por pertenecer a $H_0^2(I)$. Por consiguiente, necesitamos que se cumplan las condiciones $u''(-1) = u''(1) = 0$ para cancelar el término de frontera en la expresión anterior, de donde se deduce que

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0}\mathcal{F}[u+\varepsilon\varphi] = \int_I \varphi\big(u^{(iv)} - f\big)\,dx\,.$$

Gracias al lema fundamental del cálculo de variaciones, la ecuación de Euler-Lagrange que buscamos es $u^{(iv)} = f$ (ecuación de la viga) con condiciones de contorno $u(-1) = u''(-1) = u(1) = u''(1) = 0$ (viga apoyada en ambos extremos). Observamos además que necesitamos cuatro órdenes de regularidad en la derivada para poder escribir la ecuación apropiadamente.

[25] **EJERCICIO 2.**

Sea $I = \big[0, 2(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)\big]$. Se considera el problema consistente en minimizar el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_I \Big(1 + \frac{x}{2}\Big)^2 \big(y'(x)\big)^2 \, dx$$

en

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C^1[I];\ \int_I y(x)^2 \, dx = 1,\ \int_I y(x)\phi(x) \, dx = 0 \right\} ,$$

siendo $\phi \in C^1(I) \cap C^2(I)$ una solución no nula del problema

$$\Big(\Big(1 + \frac{x}{2}\Big)^2 \phi'\Big)' + \Big(\frac{1}{16} + 1\Big)\phi = 0 \,, \quad \phi'(0) = \phi'\big(2(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)\big) = 0 \,.$$

Calcula de forma justificada el mínimo, si existe, de $\mathcal{F}[y]$ en $\mathcal{D} \cap C^2(I)$.

Solución: Denotemos $F(x, y, y') = \Big(1 + \frac{x}{2}\Big)^2 \big(y'(x)\big)^2$ y consideremos $F^*(x, y, y') = F(x, y, y') - \lambda y^2$. La ecuación de Euler-Lagrange asociada a F^* es

$$0 = F^*_y - \frac{d}{dx}(F^*_{y'}) = -2\lambda y - \frac{d}{dx}\Big(2\Big(1 + \frac{x}{2}\Big)^2 y'\Big)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{d}{dx}\Big(\Big(1 + \frac{x}{2}\Big)^2 y'\Big) + \lambda y = 0 \,, \tag{5}$$

sujeta a las condiciones de contorno $F^*_{y'}(0) = F^*_{y'}\big(\big(2(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)\big) = 0$, que no son otras que las condiciones de Neumann homogéneas

$$y'(0) = y'\big(2(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)\big) = 0 \,. \tag{6}$$

En consecuencia, el problema de contorno de Euler-Lagrange asociado a $\mathcal{F}$ es exactamente el resuelto por ϕ en el enunciado del ejercicio, salvo que se ha tomado un valor particular del parámetro: $\lambda = \frac{1}{16} + 1$.[2]

Resolveremos el ejercicio de dos maneras distintas.

(A) El funcional $\mathcal{F}$ es claramente no negativo. Por consiguiente, si alcanzase a tomar el valor cero, ese y no otro sería su valor mínimo. Es más, caso de alcanzarlo tendría que hacerlo para valores constantes de y. La pregunta es entonces: ¿contiene el conjunto $\mathcal{D}$ alguna función constante? Si la respuesta fuese afirmativa el ejercicio estaría resuelto, pues el mínimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ sería cero. Verificamos en primer lugar que hay dos constantes $y \equiv \alpha$ que satisfacen la primera de las ligaduras. En efecto,

$$\int_I y(x)^2 \, dx = \alpha^2 \int_I dx = 2\alpha^2(e^{\frac{\pi}{2}} - 1) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)}} \,.$$

Para comprobar que también satisfacen la segunda ligadura basta con observar que $\int_I \phi(x) \, dx = 0$, lo que se deduce de integrar la ecuación (5) en I (teniendo en cuenta que las condiciones de contorno son en este caso las expuestas en (6)).

(B) Calcularemos ahora los valores propios del problema de Euler-Lagrange (5)-(6). Desarrollando la derivada, la ecuación diferencial a resolver es

$$\Big(1 + \frac{x}{2}\Big)^2 y'' + \Big(1 + \frac{x}{2}\Big) y' + \lambda y = 0 \,, \tag{7}$$

[2]Nótese que hasta el momento solo se ha considerado la primera ligadura a la hora de corregir el funcional. Dentro de poco se verá que basta con proceder así

fácilmente identificable con una del tipo Euler. Introducimos pues el cambio de variables $1+\frac{x}{2}=e^z$, $u(z)=y(x)$. Entonces

$$\frac{du}{dz}=2e^z\frac{dy}{dx}\,,\qquad \frac{d^2u}{dz^2}=\frac{d}{dz}\Big(2e^z\frac{dy}{dx}\Big)=2e^z\frac{dy}{dx}+4e^{2z}\frac{d^2y}{dx^2}\,,$$

con lo que (7) se transforma en

$$u''+u'+4\lambda u=0\,, \tag{8}$$

con condiciones de contorno $u'(0)=u'(\pi/2)=0$. La ecuación característica asociada es $\mu^2+\mu+4\lambda=0$, que tiene por soluciones $\mu=\frac{-1\pm\sqrt{1-16\lambda}}{2}$.

Si $\lambda<\frac{1}{16}$ y llamamos $\mu_-<-\frac{1}{2}$ y $\mu_+>-\frac{1}{2}$ a las dos raíces del polinomio característico, se tiene que la solución general de (8) viene dada por $u(z)=Ae^{\mu_+z}+Be^{\mu_-z}$. Imponiendo las condiciones de contorno se deduce que

$$A\mu_+ + B\mu_- = 0\,,\quad A\mu_+\,e^{\mu_+\frac{\pi}{2}}+B\mu_-\,e^{\mu_-\frac{\pi}{2}}=0\,,$$

de donde se desprende que $A=B=0$ a menos que $\mu_+=0$, en cuyo caso $B=0$ y A queda libre. En resumen, el único valor propio en este rango es $\lambda_0=0$, que hace que μ_+ valga cero y que las funciones $u(z)=A\in\mathbb{R}$ sean propias.

Si $\lambda=\frac{1}{16}$, el polinomio característico tiene la raíz doble $\mu=-\frac{1}{2}$, luego la solución general de (8) viene dada por $u(z)=Ae^{-\frac{z}{2}}+Bze^{-\frac{z}{2}}$. Imponiendo las condiciones de contorno tenemos

$$-\frac{A}{2}=0\,,\quad \Big(-\frac{A}{2}+\Big(1-\frac{\pi}{4}\Big)B\Big)e^{-\frac{\pi}{4}}=0\,,$$

luego $A=B=0$.

Para $\lambda>\frac{1}{16}$ la solución general de (8) es la siguiente:

$$u(z)=e^{-\frac{z}{2}}\left(A\cos\Big(\frac{\sqrt{16\lambda-1}}{2}z\Big)+B\,\mathrm{sen}\Big(\frac{\sqrt{16\lambda-1}}{2}z\Big)\right)\,.$$

Imponiéndole las condiciones de contorno resulta

$$\begin{aligned}0 &= u'(0)=-\frac{A}{2}+B\frac{\sqrt{16\lambda-1}}{2}\,,\\ 0 &= u'(\pi/2)=e^{-\frac{\pi}{4}}\Big\{\Big(-\frac{A}{2}+B\frac{\sqrt{16\lambda-1}}{2}\Big)\cos\Big(\frac{\sqrt{16\lambda-1}}{4}\pi\Big)-\Big(\frac{B}{2}+A\frac{\sqrt{16\lambda-1}}{2}\Big)\,\mathrm{sen}\Big(\frac{\sqrt{16\lambda-1}}{4}\pi\Big)\Big\}\,,\end{aligned}$$

luego

$$0=-A+B\sqrt{16\lambda-1}\,,\quad 0=\Big(\frac{B}{2}+A\frac{\sqrt{16\lambda-1}}{2}\Big)\,\mathrm{sen}\Big(\frac{\sqrt{16\lambda-1}}{4}\pi\Big)\,.$$

Si fuese el primer factor el que se anulara en la segunda ecuación, tendría que cumplirse $B=-A\sqrt{16\lambda-1}$, y sustituyendo en la primera condición de contorno obtendríamos $0=-A-A(16\lambda-1)=-16\lambda A$, que solo admite la solución $A=0$, y por tanto también $B=0$. Consecuentemente, la segunda condición de contorno solo puede interpretarse del siguiente modo:

$$\mathrm{sen}\Big(\frac{\sqrt{16\lambda-1}}{4}\pi\Big)=0\,,$$

lo que nos conduce a $\frac{\sqrt{16\lambda-1}}{4}\pi=n\pi$ para cualquier $n\in\mathbb{N}$, o equivalentemente

$$\lambda_n=\frac{1}{16}+n^2\,.$$

Dado que $\lambda_1 = \frac{1}{16} + 1$, la función ϕ del enunciado es la segunda función propia del problema de Euler-Lagrange asociado al funcional de partida[3] y, por un teorema estudiado en clase que concierne a este tipo de ligaduras (condiciones de normalización y ortogonalidad), el mínimo de $\mathcal{F}$ es el primer valor propio: $\lambda_0 = 0$.

[25] **EJERCICIO 3.**

Encuentra explícitamente la solución $u = u(t,x)$ del siguiente problema de Cauchy para la ecuación de ondas, planteado en el intervalo $[0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \partial_x^2 u \quad \text{en } (0,\infty) \times (0, 2\pi), \\ u(t,0) = u(t,2\pi) = 0 \quad \text{para } t \in (0,\infty), \\ u(0,x) = |x-\pi| - \pi \quad \text{para } x \in [0,2\pi], \\ \partial_t u(0,x) = \operatorname{sen}(2x) \quad \text{para } x \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

Solución: En primer lugar buscamos soluciones con las variables separadas: $u(t,x) = T(t)w(x)$, las cuales deben cumplir $T''(t)w(x) = T(t)w''(x)$, o equivalentemente

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = -\lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Resolvemos en primer lugar el problema de contorno para $w(x)$, que viene dado por

$$w''(x) + \lambda w(x) = 0\,, \quad w(0) = w(2\pi) = 0\,,$$

y cuyas soluciones son de la forma[4]

$$w(x) = B \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right), \qquad \forall B \in \mathbb{R}\,.$$

Por otra parte, la ecuación diferencial satisfecha por $T(t)$ es $T''(t) + \frac{n^2}{4}T(t) = 0$, que tiene por soluciones

$$T(t) = C\cos\left(\frac{nt}{2}\right) + D\operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right), \qquad C, D \in \mathbb{R}\,.$$

Por consiguiente, buscamos una solución del problema de ondas original que se obtenga superponiendo funciones que adoptan la siguiente forma:

$$u_n(t,x) = \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\left(\alpha_n \cos\left(\frac{nt}{2}\right) + \beta_n \operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)\right), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

es decir:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\left(\alpha_n \cos\left(\frac{nt}{2}\right) + \beta_n \operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)\right).$$

Para satisfacer las condiciones iniciales vemos que debe cumplirse lo siguiente:

$$|x-\pi| - \pi = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right), \qquad \operatorname{sen}(2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\beta_n}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right),$$

[3] Esto nos garantiza que el multiplicador de Lagrange asociado a la segunda ligadura es cero, como se vio en clase

[4] Nótese que solo son valores propios los $\lambda > 0$, con funciones propias asociadas $w(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$. Al aplicar las condiciones de contorno resulta $A = 0$ y $B\operatorname{sen}(2\sqrt{\lambda}\pi) = 0$, de donde se concluye que ha de ser $2\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\lambda = \frac{n^2}{4}$

dado que $u_t(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\left(-\frac{n\alpha_n}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right) + \frac{n\beta_n}{2}\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right)$. Necesitamos calcular a continuación la serie de Fourier en senos[5] de las funciones que aparecen a la izquierda de las igualdades anteriores. Los coeficientes de la serie de $\operatorname{sen}(2x)$ se calculan directamente (son todos nulos salvo el coeficiente con $n=4$, que vale 1), luego

$$\beta_4 = \frac{1}{2}, \quad \beta_n = 0 \quad \text{para todo } n \neq 4.$$

Por otra parte, los coeficientes de $|x-\pi|-\pi$ son

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (|x-\pi|-\pi)\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)dx \qquad \text{para } n \geq 1.$$

La función $|x-\pi|-\pi$ es simétrica en torno a $x=\pi$, en tanto que la función $\operatorname{sen}(\frac{nx}{2})$ es antisimétrica en torno a $x=\pi$ para n par y simétrica en torno a $x=\pi$ para n impar. Por tanto, $\alpha_n = 0$ para n par, mientras que para n impar se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (|x-\pi|-\pi)\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)dx &= 2\int_0^{\pi} (|x-\pi|-\pi)\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)dx = -2\int_0^{\pi} x\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)dx \\ &= \frac{4\pi}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{8}{n^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{8}{n^2}(-1)^{\frac{n+1}{2}}.\end{aligned}$$

Para calcular $\int_0^{\pi} x\operatorname{sen}(\frac{nx}{2})\,dx$ hemos usado el método de integración por partes, y en la última igualdad hemos usado que $\cos(\frac{n\pi}{2}) = 0$ (dado que n es impar) y que $\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2}) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ para n impar. Finalmente,

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par}, \\ \frac{8}{\pi n^2}(-1)^{\frac{n+1}{2}} & \text{para } n \text{ impar}. \end{cases}$$

En consecuencia, la solución a nuestro problema es

$$u(t,x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{8}{\pi n^2}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{nt}{2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(2t).$$

[25] **EJERCICIO 4.**

Consideramos cuatro sustancias químicas X, Y, A, B que interactúan según las siguientes reacciones:

$$A \underset{k_1}{\overset{k_2}{\rightleftharpoons}} X, \quad B \overset{k_4}{\to} Y, \quad X+X+Y \overset{k_3}{\to} X+X+X$$

donde k_1, k_2, k_3, k_4 son constantes positivas que indican la velocidad a la que ocurre cada reacción. Denotamos por x, y, a, b las concentraciones de cada una de estas sustancias químicas. Suponemos que tenemos una mezcla homogénea, de forma que x, y, a, b dependen únicamente del tiempo t. Suponemos también que las concentraciones a, b son constantes independientes del tiempo.

4.a) Usando la ley de acción de masas, escribe el sistema de ecuaciones que satisfacen x, y.

4.b) Para $\alpha, \lambda > 0$ dadas consideramos el cambio de variables

$$u(\tau) := \frac{1}{\lambda}x(\alpha\tau), \qquad v(\tau) := \frac{1}{\lambda}y(\alpha\tau).$$

[5] $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)$, con $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)dx$

- Encuentra α, λ en función de k_1, k_2, k_3, k_4, a, b de forma que el sistema resultante para u, v sea de la forma

$$\begin{cases} u' = 1 - \gamma u + u^2 v, \\ v' = \beta - u^2 v. \end{cases} \tag{9}$$

- Encuentra β, γ en función de k_1, k_2, k_3, k_4, a, b.

4.c) Calcula el (único) estado de equilibrio (es decir, la solución constante en tiempo) de la ecuación (9) en función de γ y β.

Solución: 4.a) Usando la ley de acción de masas obtenemos el sistema

$$x' = k_2 a + k_3 x^2 y - k_1 x\,, \quad y' = k_4 b - k_3 x^2 y\,.$$

4.b) Haciendo el cambio de variables indicado resulta

$$u'(\tau) = \frac{\alpha}{\lambda} x'(\alpha\tau)\,, \quad v'(\tau) = \frac{\alpha}{\lambda} y'(\alpha\tau)\,,$$

luego[6]

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\alpha} u'(\tau) &= k_2 a(\alpha\tau) + k_3 x^2(\alpha\tau) y(\alpha\tau) - k_1 x(\alpha\tau) = k_2 a + k_3 \lambda^3 u^2(\tau) v(\tau) - k_1 \lambda u(\tau)\,, \\ \frac{\lambda}{\alpha} v'(\tau) &= k_4 b(\alpha\tau) - k_3 x^2(\alpha\tau) y(\alpha\tau) = k_4 b - k_3 \lambda^3 u^2 v. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\alpha k_2 a}{\lambda} + \alpha k_3 \lambda^2 u^2 v - \alpha k_1 u\,, \\ v' &= \frac{\alpha k_4 b}{\lambda} - \alpha k_3 \lambda^2 u^2 v\,. \end{aligned}$$

Basta pues con establecer

$$\frac{\alpha k_2 a}{\lambda} = 1\,, \quad \alpha k_3 \lambda^2 = 1$$

para recuperar el sistema (9), es decir:

$$\lambda := \left(\frac{a k_2}{k_3}\right)^{1/3}, \qquad \alpha := k_3^{-1/3} (a k_2)^{-2/3}.$$

Esto responde a la primera cuestión de este apartado del problema. Para dar respuesta a la segunda basta con calcular

$$\beta = \frac{\alpha k_4 b}{\lambda} = \frac{k_4 b}{k_2 a}\,, \quad \gamma = \alpha k_1 = k_1 k_3^{-1/3} (a k_2)^{-2/3}.$$

4.c) Para encontrar los estados de equilibrio del sistema (9) tenemos que resolver

$$\begin{cases} 1 - \gamma u + u^2 v = 0\,, \\ \beta - u^2 v = 0\,. \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones obtenemos

$$u = \frac{1+\beta}{\gamma},$$

de donde se desprende que

$$v = \frac{\beta \gamma^2}{(1+\beta)^2}\,.$$

Esta es la única solución posible, luego hay un único estado de equilibrio.[7]

[6] Recuérdese que tanto a como b son independientes del tiempo por hipótesis ($a(t) \equiv a$, $b(t) \equiv b$ para todo t)

[7] Quien hubiese escrito desde el principio la ecuación para b, $\frac{db}{dt} = -k_4 y$, podría haber llegado a la conclusión de que $k_4 = 0$

puesto que b no depende del tiempo (por hipótesis), luego $\frac{db}{dt} = 0$. En tal caso, habrá obtenido el valor $\beta = 0$, luego el único estado de equilibrio posible sería $u = \frac{1}{\gamma}$, $v = 0$