EJERCICIO 1. $\boxed{\text{3 ptos}}$ Se considera el problema de valores iniciales para la ecuación de ondas

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= f(t,x), \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}, && (1)\\ u(t=0,x) &= \alpha(x), && (2)\\ u_t(t=0,x) &= \beta(x), && (3) \end{aligned}$$

donde suponemos que los datos α, β y f son suficientemente regulares.

1.1) Calcula la solución explícita del problema (fórmula de D'Alembert) para el caso homogéneo ($f = 0$) en función de α y β.

1.2) Calcula la solución del problema con $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $f \neq 0$.

1.3) Calcula la solución del problema (1)-(3).

1.4) ¿Se corresponde el anterior problema de valores iniciales con el cálculo de extremales de algún problema de cálculo de variaciones? En caso afirmativo, ¿de qué problema se trata?

Solución:

1.1) Consideramos el cambio de variables $\xi = x+t$ y $\eta = x-t$. Claramente $u_x = u_\xi + u_\eta$ y $u_t = u_\xi - u_\eta$ en virtud de la regla de la cadena, luego $u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$ y $u_{tt} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$. Reescribiendo la ecuación de ondas (1) en términos de las nuevas variables obtenemos $-4u_{\xi\eta} = 0$. Entonces

$$u(\xi,\eta) = g(\xi) + h(\eta)\,,$$

donde g y h son funciones arbitrarias. Deshaciendo ahora el cambio de variables se tiene

$$u(t,x) = g(x+t) + h(x-t)\,. \tag{4}$$

Aplicando finalmente las condiciones iniciales se obtiene

$$u(0,x) = g(x) + h(x) = \alpha(x)\,, \quad u_t(0,x) = g'(x) - h'(x) = \beta(x)\,, \tag{5}$$

de donde puede concluirse que

$$\begin{aligned} 2g'(x) = \alpha'(x) + \beta(x) &\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\Big(\alpha(x) + \int_0^x \beta(z)\,dz\Big) + K\,,\\ 2h'(x) = \alpha'(x) - \beta(x) &\Rightarrow h(x) = \frac{1}{2}\Big(\alpha(x) - \int_0^x \beta(z)\,dz\Big) - K\,, \end{aligned}$$

donde $K \in \mathbb{R}$. Nótese que las constantes de integración en las expresiones anteriores han de ser opuestas (K y $-K$), pues de otro modo no se cumpliría que $g(x) + h(x) = \alpha(x)$ y, por consiguiente, se violaría la primera condición en (5). Luego la solución que buscamos es (cf. (4))

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left\{\alpha(x+t) + \alpha(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \beta(z)\,dz\right\}\,.$$

1.2) Procediendo como en el apartado anterior, ahora tenemos que

$$-4u_{\xi\eta} = f\Big(\frac{\xi-\eta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\Big)\,, \qquad \text{con } \xi > \eta \text{ para que el primer argumento de } f \text{ sea positivo,}$$

de donde se desprende que

$$u(\xi,\eta) = g(\xi) + h(\eta) - \frac{1}{4}\int_{\xi_0}^{\xi}\int_{\eta_0}^{\eta} f\Big(\frac{z-w}{2},\frac{z+w}{2}\Big)\,dw\,dz\,, \tag{6}$$

donde g y h son funciones arbitrarias y ξ_0 y η_0 valores arbitrarios. En tal caso podría elegirse $\eta_0 = z$ y $\xi_0 = \eta$, de manera que la expresión (6) se puede reescribir como

$$u(\xi,\eta) = g(\xi) + h(\eta) + \frac{1}{4}\int_{\eta}^{\xi}\int_{\eta}^{z} f\Big(\frac{z-w}{2},\frac{z+w}{2}\Big)\,dw\,dz \tag{7}$$

y el recinto de integración resultante puede identificarse con el siguiente triángulo en el plano $\xi\eta$ (con vértices (η,η), (ξ,η) y (ξ,ξ)):

$$\Delta = \{(z,w)\in\mathbb{R}^2 : \eta\le z\le\xi,\ \eta\le w\le z\}\,.$$

Deshaciendo ahora el cambio de variables en (7) (es decir, $(\xi,\eta)\mapsto(t,x)$) encontramos

$$u(t,x) = g(x+t) + h(x-t) + \frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,y)\,dy\,d\tau\,, \tag{8}$$

donde se ha utilizado el teorema del cambio de variable en la integral (nótese que el determinante jacobiano de la transformación es en este caso igual a 2, en tanto que el triángulo Δ definido anteriormente se transforma en un nuevo triángulo en el planotx que tiene por vértices $(x-t,0)$, $(x+t,0)$ y (x,t)). Aplicando finalmente las condiciones iniciales en $t=0$ se obtiene

$$u(0,x) = g(x) + h(x) = 0\,, \quad u_t(0,x) = g'(x) - h'(x) = 0\,,$$

de donde se concluye que $g' = h' \equiv 0$, luego ha de ser $g = h \equiv 0$. Por consiguiente, la solución que buscamos viene dada por

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,y)\,dy\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t'}^{x+t'} f(t',y)\,dy\,dt'\,.$$

1.3) Basta con sumar los resultados de los dos apartados anteriores.

1.4) SÍ, pero hay que destacar que en el enunciado del problema no está especificado el espacio en el que buscamos soluciones (ni las propiedades de caída de α y β). Por tanto, tampoco están especificadas las propiedades de contorno (en infinito) de las soluciones y éste es un grado de libertad que podemos usar para aportar diversas formulaciones variacionales en términos del espacio elegido. Tómese el siguiente funcional:

$$\mathcal{F}[u] = \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty F(t,x,u,u_t,u_x)\,dx\,dt\,, \quad F(t,x,u,u_t,u_x) := \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - f(t,x)u\,,$$

definido en

$$\mathcal{D} = \{u\in C^1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}) : u(t=0,x) = \alpha(x),\ u_t(t=0,x) = \beta(x)\}\,.$$

Nótese que en la definición de $\mathcal{D}$ hay implícitas condiciones de contorno de tipo Neumann en infinito que, como se comentó anteriormente, constituye una de las posibles elecciones. En tal caso es sencillo verificar que el problema de Euler–Lagrange asociado es exactamente el descrito en (1)–(3). En efecto, denotando $p = u_t$ y $q = u_x$ se obtiene

$$F_u - \frac{d}{dt}F_p - \frac{d}{dx}F_q = 0 \Leftrightarrow u_{tt} - u_{xx} = f\,.$$

■

EJERCICIO 2. $\boxed{\text{3 ptos}}$ Sea $\Omega = (0,\pi) \times (0, \ln(2))$. Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 d(x,y)$$

definido sobre el conjunto

$$\mathcal{D} = \left\{u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}),\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0,\ u|_{y=0} = \operatorname{sen}(x),\ u|_{y=\ln(2)} = 2\operatorname{sen}(x)\right\}.$$

2.1) Si $u \in \mathcal{D} \cap C^2(\Omega)$ es un extremo relativo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$, calcula las extremales del problema.

(Sugerencia: puede usarse el método de separación de variables.)

2.2) Enuncia el Teorema de Lax-Milgram. Deduce razonadamente que existe solución única en $H^1(\Omega)$ del problema de minimización de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$.

Solución:

2.1) Podemos escribir $\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(u_x, u_y)\, d(x,y)$, con $F(u_x,u_y) := \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2)$. Entonces el problema de Euler–Lagrange asociado es $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (es decir, la ecuación de Laplace bidimensional definida sobre el rectángulo Ω). Procedemos a resolverla usando el método de separación de variables. Para ello consideramos $u(x,y) = v(x)w(y)$, de donde resulta

$$v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} = -\lambda \in \mathbb{R}\,.$$

La ecuación para $v(x)$ se lee $v'' + \lambda v = 0$, que junto con las condiciones de contorno $v(0) = v(\pi) = 0$ admite por valores propios $\lambda_n = n^2$ y por funciones propias $v(x) = C\operatorname{sen}(nx)$, con $n \in \mathbb{N}$ y $C \in \mathbb{R}$. Por su parte, la ecuación para $w(y)$ es ahora $w'' - n^2 w = 0$, cuyas funciones propias vienen dadas por $w(y) = Ae^{ny} + Be^{-ny}$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, las soluciones que buscábamos a la ecuación de Laplace por el mt́odo de separación de variables responden a la siguiente forma:

$$u(x,y) = v(x)w(y) = \operatorname{sen}(nx)\left(\widetilde{A}e^{ny} + \widetilde{B}e^{-ny}\right).$$

Encontramos los valores de $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ imponiendo las condiciones de contorno $w(0) = \operatorname{sen}(x)$ y $w(\ln(2)) = 2\operatorname{sen}(x)$. En efecto:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= (\widetilde{A} + \widetilde{B})\operatorname{sen}(nx) = \operatorname{sen}(x) \Leftrightarrow \widetilde{A} + \widetilde{B} = 1,\ n = 1, \\ u(x,\ln(2)) &= \left(2\widetilde{A} + \frac{1}{2}\widetilde{B}\right)\operatorname{sen}(x) = 2\operatorname{sen}(x) \Leftrightarrow 2\widetilde{A} + \frac{1}{2}\widetilde{B} = 2, \end{aligned}$$

de donde se desprende que $\widetilde{A} = 1$ y $\widetilde{B} = 0$, luego

$$u(x,y) = \operatorname{sen}(x)e^y\,. \tag{9}$$

2.2) **Teorema de Lax–Milgram:** Sean H un espacio de Hilbert (dotado del producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$), $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal, continua[1] y coerciva[2] y $f : H \to \mathbb{R}$ lineal y continua. Entonces existe un único elemento $u \in H$ tal que

$$a(u,\varphi) = f(\varphi)\,, \quad \forall \varphi \in H\,.$$

[1]Existe $C > 0$ tal que $|a(u,\varphi)| \le C\|u\|_H\|\varphi\|_H$

[2]Existe $\alpha > 0$ tal que $a(u,u) \ge \alpha\|u\|_H^2$

Si la aplicación $a : H \times H \to \mathbb{R}$ es además simétrica,[3] entonces el funcional

$$\mathcal{F}[v] = \frac{1}{2}a(v,v) - f(v)$$

alcanza su valor mínimo en u.

Elegimos $H = H^1(\Omega)$ (que es un espacio de Hilbert), $f \equiv 0$ y $a(u,\varphi) = \int_\Omega \nabla u(x,y) \cdot \nabla\varphi(x,y)\, d(x,y)$, que cumple:

1. $a(\cdot,\cdot)$ es claramente bilineal;
2. $a(\cdot,\cdot)$ es continuo: en efecto,

$$\begin{aligned} |a(u,\varphi)| &\leq \int_\Omega |\nabla u|(x,y)|\nabla\varphi|(x,y)\, d(x,y) \leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2(x,y)|\, d(x,y)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2(x,y)\, d(x,y)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}\,, \end{aligned}$$

   para lo que se ha empleado la desigualdad de Cauchy–Schwarz;
3. $a(\cdot,\cdot)$ es coercivo: en efecto, gracias a la desigualdad de Poincaré se tiene que

$$\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega)} = \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (C+1)\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}\,,$$

   luego

$$a(\varphi,\varphi) = \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{C+1}\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega)}$$

   y $a(\cdot,\cdot)$ es coerciva (con constante de coercividad $\alpha = \frac{1}{C+1}$).
4. $a(\cdot,\cdot)$ es claramente simétrico.

En esta situación, el teorema de Lax–Milgram asegura que el funcional $\mathcal{F}[v] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2(x,y)\, d(x,y)$ alcanza su valor mínimo en el (único) elemento $u \in H^1(\Omega)$ que resuelve el problema

$$\int_\Omega \nabla u(x,y) \cdot \nabla\varphi(x,y)\, d(x,y) = 0\,, \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega)\,, \tag{10}$$

el cual ha de ser necesariamente el encontrado en (9).

■

EJERCICIO 3. $\boxed{\text{1 pto}}$ Comprueba si $f(x) = |x|^{-\frac{1}{4}}$ está en $H^1(B(0,1))$, donde $B(0,1)$ es la bola unidad de $\mathbb{R}^2$.

Solución: La respuesta es NO. Es cierto que $f \in L^2(B(0,1))$, pues (trabajando en coordenadas polares)

$$\int_{B(0,1)} \left(|x|^{-\frac{1}{4}}\right)^2 dx = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r \cdot r^{-\frac{1}{2}}\, dr\, d\theta = \frac{4\pi}{3}\,.$$

Sin embargo, las derivadas débiles de primer orden de f no son de cuadrado integrable. Basta con advertir que, para $j = 1,2$,

$$\partial_{x_j} f = \partial_{x_j}\left((x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{8}}\right) = -\frac{1}{4}x_j|x|^{-\frac{9}{4}}\,, \quad x = (x_1,x_2)\,. \tag{11}$$

[3] $a(u,\varphi) = a(\varphi,u)\ \forall u,v \in H$

Nótese que la expresión (11) corresponde a la derivada clásica de f en $B(0,1)$ salvo en el origen, donde ésta no está definida. Por otra parte, es conocido que cuando se tiene derivada clásida en todo el dominio salvo un punto (e incluso salvo un conjunto de puntos de medida nula), la derivada dédil –caso de existir– ha de coincidir casi por doquier con esta función; por lo que hemos de verificar si la función obtenida en (11) es la derivada dédil de f. En primer lugar es claro que $g(x) := -\frac{1}{4}x_j|x|^{-\frac{9}{4}} \in L^1_{loc}(B(0,1))$, pues

$$\int_{B(0,1)} |g(x)|\,dx = \frac{1}{4}\int_{B(0,1)} |x|^{-\frac{5}{4}}\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{-\frac{1}{4}}\,dr\,d\theta = \frac{8\pi}{3}\,.$$

Por otro lado se tiene que

$$\int_{B(0,1)} |x|^{-\frac{1}{4}}\,\partial_{x_j}\varphi(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x_i^2}}^{\sqrt{1-x_i^2}} |x|^{-\frac{1}{4}}\,\partial_{x_j}\varphi(x)\,dx_j\,dx_i$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x_i^2}}^{0} |x|^{-\frac{1}{4}}\,\partial_{x_j}\varphi(x)\,dx_j + \int_0^{\sqrt{1-x_i^2}} |x|^{-\frac{1}{4}}\,\partial_{x_j}\varphi(x)\,dx_j\right)dx_i$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x_i^2}}^{0} |x|^{-\frac{1}{4}}\,\partial_{x_j}\varphi(x)\,dx_j + \int_0^{\sqrt{1-x_i^2}} |x|^{-\frac{1}{4}}\,\partial_{x_j}\varphi(x)\,dx_j\right)dx_i \quad \text{[integrando por partes]}$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(|x_i|^{-\frac{1}{4}}\varphi(x_i,0) + \frac{1}{4}\int_{-\sqrt{1-x_i^2}}^{0} x_j|x|^{-\frac{9}{4}}\,\varphi(x)\,dx_j - |x_i|^{-\frac{1}{4}}\varphi(x_i,0) + \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{1-x_i^2}} x_j|x|^{-\frac{9}{4}}\,\varphi(x)\,dx_j\right)dx_i$$

$$= -\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x_i^2}}^{\sqrt{1-x_i^2}}\left(-\frac{1}{4}x_j|x|^{-\frac{9}{4}}\right)\varphi(x)\,dx_j\,dx_i = -\int_{B(0,1)}\left(-\frac{1}{4}x_j|x|^{-\frac{9}{4}}\right)\varphi(x)\,dx\,,$$

para toda $\varphi \in C^1_0(B(0,1))$.

Comprobamos finalmente que la expresión (11) no pertenece a $L^2(B(0,1))$. En efecto:

$$\int_{B(0,1)} |\partial_{x_j} f|^2\,dx = \frac{1}{4}\int_{B(0,1)}\left(|x|^{-\frac{5}{4}}\right)^2\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cdot r^{-\frac{5}{2}}\,dr\,d\theta = -\pi r^{-\frac{1}{2}}\Big]_0^1 = \infty\,.$$

■

EJERCICIO 4. $\boxed{\text{3 ptos}}$ En 1951 John G. Skellam propuso el siguiente modelo de reacción-difusion para describir la dinámica de una población biológica que se reproducía continuamente con tasa de natalidad $k>0$ y que invadía el medio debido a su movimiento aleatorio: $\frac{dp}{dt}(x,t) = D\Delta_x p(x,t) + k\,p(x,t)$, siendo D la constante de difusión (originalmente llamada tasa de dispersión).

4.1) Verifica que las unidades de k^{-1} y $\sqrt{D/k}$ son tiempo y espacio respectivamente y úsalos para realizar la siguiente adimensionalización de la ecuación: $\tau := k\,t$, $y := \sqrt{k/D}\,x$, y $u(y,\tau) := p(x,t) = p\Big(\sqrt{D/k}\,y, \frac{\tau}{k}\Big)$, comprobando que la ecuación resultante es:

$$\frac{du}{d\tau}(y,\tau) = \Delta_y u(y,\tau) + u(y,\tau). \tag{12}$$

4.2) Comprueba que la función $U(y,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\left(\tau - \frac{y^2}{4\tau}\right)$ es solución de (12) para todo $\tau > 0$.

4.3) Con la ayuda de la transformada de Fourier deduce la expresión para la solución de (12) con condición inicial $u(y,0) = u_0(y)$ en la clase de Schwartz.

Ayuda: recuerda que si $G(x) = e^{-\pi x^2}$, se tiene $\mathcal{F}[G] = G$ y la propiedad: $\mathcal{F}^{-1}[f(ax)](y) = \frac{1}{a}\mathcal{F}^{-1}[f](\frac{y}{a})$.

Solución:

4.1) Las unidades de cada término del miembro de la derecha deben coincidir con las unidades del primer miembro de la ecuación, a saber: $\left[\frac{dp}{dt}\right] = \frac{\text{población}}{\text{tiempo}}$. En tal caso $[kp] = [k] \cdot$ población, luego $[k^{-1}] =$ tiempo. Por otra parte $[D\Delta_x p] = [D] \cdot \frac{\text{población}}{(\text{espacio})^2}$, por lo que ha de ser $[D] = \frac{(\text{espacio})^2}{\text{tiempo}}$. Por consiguiente, $[\sqrt{D/k}] = \sqrt{[k^{-1}][D]} =$ espacio. Efectuamos ahora la adimensionalización:

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{k}\frac{dp}{dt}, \quad \frac{du}{dy_j} = \sqrt{\frac{D}{k}}\frac{dp}{dx_j}, \quad \frac{d^2u}{dy_j^2} = \frac{D}{k}\frac{d^2p}{dx_j^2}.$$

Entonces

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{k}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{k}\Big(D\Delta_x p(x,t) + k\, p(x,t)\Big) = \Delta_y u + u\,.$$

4.2) Se tiene

$$\frac{dU}{d\tau} = U\left(1 + \frac{y^2}{4\tau^2} - \frac{1}{2\tau}\right), \quad \frac{dU}{dy_j} = -\frac{y}{2\tau}U, \quad \frac{d^2U}{dy_j^2} = U\left(\frac{y^2}{4\tau^2} - \frac{1}{2\tau}\right),$$

de donde se desprende inmediatamente el resultado.

4.3) Se define la transformada de Fourier de la función f como $\mathcal{F}[f(y)](x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, e^{2\pi i y\cdot x}\, dy$. Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación (12) (y algunas de sus propiedades más significativas) obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{F}[u] = (-4\pi^2 x^2 + 1)\mathcal{F}[u]\,,$$

que debemos resolver junto con el dato inicial asociado $\mathcal{F}[u](\tau = 0) = \mathcal{F}[u_0]$. El problema de valores iniciales resultante puede integrarse por el método de variables separadas, de donde se obtiene

$$\mathcal{F}[u](\tau, x) = \mathcal{F}[u_0]\, e^{(1-4\pi^2 x^2)\tau}\,. \tag{13}$$

Aplicando finalmente la transformada de Fourier inversa a (13) obtenemos

$$u(\tau, y) = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}[u_0]\, e^{(1-4\pi^2x^2)\tau}\right) = u_0 *_y e^{\tau}\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-4\pi^2x^2\tau}\right](y)\,.$$

Usando finalmente las propiedades de la ayuda con $f = G$ y $a = 2\sqrt{\pi\tau}$ se tiene que

$$u(\tau, y) = u_0 *_y e^{\tau}\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\mathcal{F}^{-1}[G]\left(\frac{y}{2\sqrt{\pi\tau}}\right) = u_0 *_y \frac{e^{\tau}}{2\sqrt{\pi\tau}}e^{-\frac{y^2}{4\tau}} = \frac{e^{\tau}}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{(y-x)^2}{4\tau}}u_0(x)\,dx\,.$$

$\blacksquare$