GRADO EN MATEMÁTICAS **UNIVERSIDAD DE GRANADA**

Modelos Matemáticos II 2 de julio de 2014 **Curso 2013/14**

$\boxed{\textbf{1.}}$ Se considera el siguiente problema isoperiméétrico: calcular el mínimo relativo del funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_1^e xy'(x)^2\,dx,$$

en el espacio

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C_0^1([1,e]),\ \int_1^e \frac{1}{x}y(x)^2\,dx = 1,\ \int_1^e \frac{1}{x}y(x)\,\mathrm{sen}(\pi\ln(x))\,dx = 0 \right\}.$$

Encuentra las extremales del problema en $\mathcal{D}\cap C^2([1,e])$. ¿Es alguna de las extremales un mínimo en $\mathcal{D}\cap C^2([1,e])$?

(Recuerda que el cambio de variable $x = e^z$ reduce una EDO de Euler a una con coeficientes constantes).

Solución: *Al tratarse de un problema de optimización con ligaduras, deberíamos introducir el funcional corregido*

$$F^\star(x,y,p) = xp^2 + \lambda_1\frac{1}{x}y^2 + \lambda_2\frac{1}{x}y\,\mathrm{sen}(\pi\ln(x))$$

y calcular su ecuación de Euler–Lagrange asociada. Obtenemos

$$2\lambda_1\frac{1}{x}y + \lambda_2\frac{1}{x}\,\mathrm{sen}(\pi\ln(x)) - \frac{d}{dx}(2xp) = 2\lambda_1\frac{1}{x}y + \lambda_2\frac{1}{x}\,\mathrm{sen}(\pi\ln(x)) - 2y' - 2xy'' = 0$$

o, equivalentemente,

$$x^2y'' + xy' - \lambda_1 y = \frac{\lambda_2}{2}\,\mathrm{sen}(\pi\ln(x))\,. \tag{1}$$

Si retenemos solo la primera de las ligaduras[1]*, nos encontramos con una ecuación de tipo Euler que, después del cambio de variable $x = e^z$, se transforma en la siguiente ecuación diferencial con coeficientes constantes:*

$$y''(z) - \lambda_1 y(z) = 0\,,$$

que ha de ser resuelta junto con las siguientes condiciones de contorno:[2]

$$y(x=1) = y(z=0) = 0\,,\quad y(x=e) = y(z=1) = 0\,,$$

de donde se desprende que las únicas soluciones no triviales, tras de haber deshecho el cambio de variable, son todas de la forma

$$A\,\mathrm{sen}(n\pi\ln(x))\,,\quad A\neq 0\,,$$

de entre las cuales la ligadura solo es satisfecha si se toma $A = \pm\sqrt{2}$. Por consiguiente, disponemos de las extremales

$$y_n(x) = \pm\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(n\pi\ln(x))\,.$$

[1]Multiplíquese la ecuación (1) por el factor $\frac{1}{x}\,\mathrm{sen}(\pi\ln(x))$ e intégrese por partes en el intervalo $[1,e]$ para obtener $\lambda_2 = 0$

[2]Dado que $y \in C_0^1([1,e])$

Basta entonces con observar que la segunda ligadura no es más que una relación de ortogonalidad respecto de y_1 con función peso $\frac{1}{x}$:

$$\int_1^e \frac{1}{x} y(x) y_1(x)\, dx = 0\,,$$

de donde se desprende que (recuérdese la teoría estudiada sobre problemas isoperimétricos) las extremales en que se materializa el mínimo son exactamente las que vienen dadas por

$$y_2(x) = \pm\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(2\pi \ln(x))\,.$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ Se consideran los siguientes tres funcionales:

$$\mathcal{F}[y] = \int_a^b \left(p(x)y'(x)^2 + q(x)y(x)^2\right)\, dx\,, \quad \mathcal{G}[y] = \int_a^b s(x)y(x)^2\, dx\,, \quad \Lambda[y] = \frac{\mathcal{F}[y]}{\mathcal{G}[y]}\,,$$

donde $p \in C^1([a,b])$, $q, s \in C([a,b])$ y $p, s > 0$.

(2.a) Para $p = s = 1$, $q = -1$, $a = 0$ y $b = \pi$, calcula las extremales de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$. Además, sabiendo que para estos valores se tiene $\mathcal{F}[y] \geq 0$ en $\mathcal{D}$, prueba que solamente en dos de ellas alcanza Λ el mínimo en $\mathcal{D}$.

(2.b) Siendo $y(x)$ un extremo relativo no nulo de Λ en

$$\mathcal{D} = \left\{y \ \in C_0^1([a,b]),\ \int_a^b s(x)y(x)^2\, dx = \frac{\pi}{2}\right\} \cap C^2([a,b])\,,$$

determina la ecuación diferencial que ha de verificar.

Solución: *(a) Para tales elecciones se tiene que $\mathcal{F}[y] = \int_0^\pi \left(y'(x)^2 - y(x)^2\right) dx$ y*

$$\mathcal{D} = \left\{y \ \in C_0^1([0,\pi]),\ \int_0^\pi y(x)^2\, dx = \frac{\pi}{2}\right\} \cap C^2([0,\pi])\,.$$

Las extremales de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ son las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange asociada a $F^\star(x,y,p) := p^2 - y^2 - \lambda y^2$, que no es otra que $y'' + (1+\lambda)y = 0$ (a saber: $y(x) = A\cos(\sqrt{1+\lambda}\,x) + B\sin(\sqrt{1+\lambda}\,x)$), que satisfacen las condiciones $y(0) = y(\pi) = 0$, $\int_0^\pi y(x)^2\, dx = \frac{\pi}{2}$. Se tiene:

- $y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$
- $y(\pi) = 0 \Rightarrow \lambda_n = n^2 - 1$
- $\frac{\pi}{2} = \int_0^\pi y(x)^2\, dx \Rightarrow \frac{\pi}{2} = B^2 \int_0^\pi \sin(nx)^2\, dx = B^2 \frac{\pi}{2} \Rightarrow B = \pm 1$

Por consiguiente, las extremales pedidas son

$$y_n(x) = \pm \sin(nx)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Finalmente, como $\mathcal{F}[y], \mathcal{G}[y] \geq 0$ *en* $\mathcal{D}$ *y* $\Lambda[\pm\sin(nx)] = \frac{\pi}{2}(n^2-1)$*, se deduce que el funcional* Λ *alcanza su valor mínimo (*$=0$*) en* $y(x) = \pm\sin(x)$.

(b) Si partimos del hecho de que $y(x)$ es un extremo relativo (no nulo) de Λ en $\mathcal{D}$, en particular ha de verificar la ligadura $\mathcal{G}[y] = \int_a^b s(x)y(x)^2\,dx = \frac{\pi}{2}$. O, dicho de otro modo, $y(x)$ ha de ser un extremo relativo (no nulo) de $\frac{2}{\pi}\mathcal{F}$ (luego de $\mathcal{F}$) en $C_0^1([a,b])$. En definitiva, la ecuación diferencial que $y(x)$ debe satisfacer no es otra que la ecuación de Euler–Lagrange asociada al funcional $\mathcal{F}$:

$$0 = 2qy - \frac{d}{dx}(2py') \Leftrightarrow (py')' - qy = 0\,.$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ Se considera el siguiente funcional, que representa la energía asociada a la vibración de la cuerda de una guitarra de longitud π:

$$\mathcal{F}[u] = \int_0^T \int_0^\pi \left\{\frac{1}{2}u_t^2 - u_x^2\right\} dx\,dt\,,$$

definido en

$$D = \left\{u \in C^1([0,T]\times[0,\pi]) : u(0,x) = u(T,x) = u(t,0) = u(t,\pi) = 0\right\}.$$

(3.a) Para $u \in C^2([0,T]\times[0,\pi])$, encuentra la ecuación de Euler–Lagrange asociada al problema variacional anterior.

(3.b) Se considera que:

- La cuerda está fija en sus extremos: $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$.
- La vibración es estacionaria, luego $u_t(t=0,x) = 0$.
- La cuerda comienza a vibrar cuando es soltada de la posición inicial

$$u(t=0,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } x \in [0,\pi/2] \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{si } x \in [\pi/2,\pi] \end{cases}$$

En las condiciones anteriores, resuelve el correspondiente problema mixto para la ecuación encontrada en el apartado (a).

Solución: *(a) La ecuación de Euler–Lagrange es*

$$0 = -\frac{d}{dt}(u_t) - \frac{d}{dx}(-2u_x) = -u_{tt} + 2u_{xx}$$

o, equivalentemente,

$$u_{tt} = 2u_{xx}\,.$$

(b) Se trata de resolver el problema mixto para la ecuación de ondas $u_{tt} = 2u_{xx}$ que resulta de imponer las condiciones de contorno $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ y los datos iniciales

$$u(t = 0, x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & si\ x \in [0, \pi/2] \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & si\ x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

y $u_t(t = 0, x) = 0$. Para ello empleamos la técnica de separación de variables, que consiste en buscar soluciones que respondan a la forma $u(t, x) = v(t)w(x)$. En tal caso habría de cumplirse

$$v''(t)w(x) = 2v(t)w''(x) \Rightarrow \frac{v''(t)}{2v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = -\lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Comenzamos resolviendo el problema de contorno constituido por la ecuación $w''(x) + \lambda w(x) = 0$ junto con las condiciones de frontera $w(0) = w(\pi) = 0$, el cual admite como valores propios $\lambda_n = n^2, n \in \mathbb{N}$, y como funciones propias $w_n(x) = C_1 \sin(nx)$, $C_1 \in \mathbb{R}$. El siguiente paso consiste en resolver la ecuación diferencial $v''(t) + 2n^2 v(t) = 0$, que arroja la siguiente familia de soluciones: $v_n(t) = C_2 \cos(\sqrt{2}nt) + C_3 \sin(\sqrt{2}nt)$, con $C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, los perfiles buscados son de la forma

$$u_n(t, x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \big(A_n \cos(\sqrt{2}nt) + B_n \sin(\sqrt{2}nt)\big) \sin(nx)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Imponiendo finalmente las condiciones iniciales, se tiene en primer lugar que

$$(u_n)_t(t, x) = \sqrt{2} \sum_{n\in\mathbb{N}} n\big(- A_n \sin(\sqrt{2}nt) + B_n \cos(\sqrt{2}nt)\big) \sin(nx)$$

$$\Rightarrow 0 = (u_n)_t(0, x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} B_n \sin(nx)\ \forall 0 \le x \le \pi \Rightarrow B_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Finalmente, se obtiene

$$u_n(0, x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \sin(nx) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \sin(nx)\,,$$

donde

$$\varphi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(nx)\, dx$$

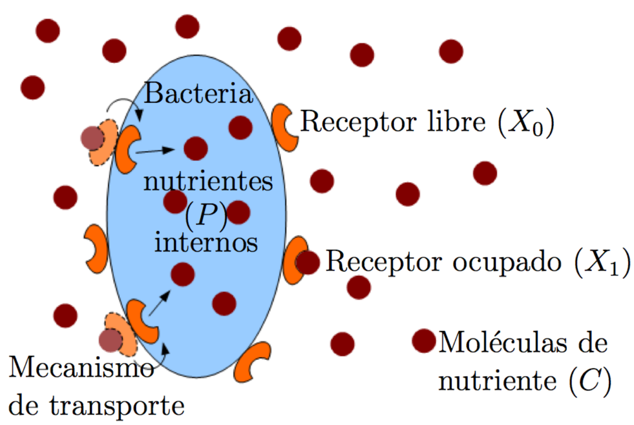
son los coeficientes del desarrollo de Fourier en senos de la función $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & si\ x \in [0, \pi/2] \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & si\ x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$ *en el intervalo $[0, \pi]$. Para concluir, calculamos los φ_n (que han de coincidir, para cada $n \in \mathbb{N}$, con* *los A_n que buscamos):*

$$
\begin{aligned}
\varphi_n &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} x \sin(nx)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2}(\pi - x)\sin(nx)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x \sin(nx)\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} x\sin(nx)\,dx - \frac{\pi}{n}\left(\cos(n\pi) - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x \sin(nx)\,dx - \int_0^{\pi/2} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)\,dx - \frac{\pi}{n}\left(\cos(n\pi) - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\left(\sin(nx) - \sin\left(n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)\,dx - \frac{\pi}{2n}\left(\cos(n\pi) - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\left(\cos(n\pi) - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{1}{n^2}\left(\sin(n\pi) - 2\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2n}\left(\cos(n\pi) - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{4.}}$ Para describir el crecimiento de una bacteria mediante un modelo matemático, se supone que el paso de nutrientes al interior de la misma está regulado por un sistema de receptores enzimaticos localizados en su membrana como indica el dibujo (modelo de Michaelis–Menten), de modo que el nutriente externo es capturado por uno de los receptores que hay sobre la membrana bacteriana, y entonces es bien introducido como alimento en la bacteria por un mecanismo de transporte o bien devuelto al exterior, dejando de nuevo libre al receptor. Describimos este esquema molecular mediante leyes de acción de masa, denotando por C las moléculas de nutriente externo, por X_0 los receptores enzimáticos no ocupados, por X_1 los receptores ocupados y por P el nutriente que ha pasado al interior.

$$
C + X_0 \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} X_1
$$

$$
X_1 \xrightarrow{k_2} P + X_0
$$



(4.a) Llamando como sigue: $c = [C]$, $x_0 = [X_0]$, $x_1 = [X_1]$ y $p = [P]$ a las respectivas concentraciones de cada uno (como variables dependientes del tiempo), determina el sistema de 4 EDOs que verifican estas concentraciones.

(4.b) Usando que la ecuación del nutriente introducido está desacoplada y que la concentración de receptores de membrana (ocupados + no ocupados) es constante, reduce el sistema a sólo 2

EDOs para las incógnitas c y x_1. Toma inicialmente sólo receptores libres, es decir, $x_1(0) = 0$ y $x_0(0) = R > 0$ y todo el nutriente en el exterior, es decir, $c(0) = N > 0$ y $p(0) = 0$.

(4.c) Suponiendo que hay abundancia de nutrientes podemos considerar que a partir de un cierto instante la concentración de receptores ocupados apenas cambia, es decir, que $dx_1/dt \sim 0$. Usa esta hipótesis para demostrar que

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{\alpha\ c}{\beta + c} \tag{2}$$

para ciertas constantes α y β descritas en términos de R, k_1, k_{-1} y k_2.

(4.d) Usa $(k_1 R)^{-1}$ como unidad típica de tiempo y N como concentración típica de nutrientes y adimensionaliza la ecuación (2).

Solución: *(a) El sistema es el siguiente:*

$$\begin{aligned}
\frac{dc}{dt} &= k_{-1}x_1 - k_1 c x_0\,,\\
\frac{dx_0}{dt} &= k_{-1}x_1 - k_1 c x_0 + k_2 x_1\,,\\
\frac{dx_1}{dt} &= -k_{-1}x_1 + k_1 c x_0 - k_2 x_1\,,\\
\frac{dp}{dt} &= k_2 x_1\,.
\end{aligned}$$

(b) A partir de la cuarta ecuación, es claro que $p(t) = p(0) + \int_0^t k_2 x_1(s)\,ds = \int_0^t k_2 x_1(s)\,ds$. *Por otra parte, como la concentración de receptores de membrana es constante se tiene que*

$$\frac{d}{dt}(x_0 + x_1) = 0 \Rightarrow x_0(t) = x_0(0) - x_1(0) - x_1(t) = R - x_1(t)\,.$$

Finalmente, sustituyendo x_0 *en las ecuaciones de* c *y* x_1 *encontramos*

$$\begin{aligned}
\frac{dc}{dt} &= k_{-1}x_1 - k_1 c(R - x_1) = -k_1 cR + (k_1 c + k_{-1})x_1\,,\\
\frac{dx_1}{dt} &= k_1 c(R - x_1) - (k_{-1} + k_2)x_1 = k_1 cR - (k_1 c + k_{-1} + k_2)x_1\,.
\end{aligned}$$

(c) Como $\frac{dx_1}{dt} = 0$, *se tiene que* $k_1 cR - (k_1 c + k_{-1} + k_2)x_1 = 0$, *luego*

$$x_1 = \frac{k_1 cR}{k_1 c + k_{-1} + k_2}\,.$$

Entonces

$$\frac{dc}{dt} = k_1 cR\left(-1 + \frac{k_1 c + k_{-1}}{k_1 c + k_{-1} + k_2}\right) = -k_1 k_2 R \frac{c}{k_1 c + k_{-1} + k_2} = -\frac{k_2 R c}{c + \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}}\,.$$

Basta finalmente por identificar

$$\alpha = k_2 R\,, \quad \beta = \frac{k_{-1}+k_2}{k_1}\,.$$

(d) Se definen $\tau = k_1 R t$ *y* $v(\tau) = \frac{c(t)}{N} = \frac{c\left(\frac{\tau}{k_1 R}\right)}{N}$*. Entonces*

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= \frac{1}{N}\frac{dc}{dt}\frac{1}{k_1 R} = -\frac{1}{Nk_1 R}\left(\frac{\alpha c(t)}{\beta + c(t)}\right) = -\frac{1}{k_1 R}\left(\frac{\alpha \frac{c(t)}{N}}{\beta + N\frac{c(t)}{N}}\right) \\ &= -\frac{\alpha}{Nk_1 R}\left(\frac{v(\tau)}{\frac{\beta}{N} + v(\tau)}\right) = -\frac{k_2}{Nk_1}\left(\frac{v(\tau)}{\frac{k_{-1}+k_2}{Nk_1} + v(\tau)}\right)\,, \end{aligned}$$

donde las constantes $\frac{k_2}{Nk_1}$ *y* $\frac{k_{-1}+k_2}{Nk_1}$ *son ambas adimensionales.*

(Todos los ejercicios tienen el mismo valor).